EMMANUEL ISAMBERT

Propriétés des classes d'éléments α-standard

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 4, n° 1 (1997), p. 57-67
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1997__4_1_57_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 4, N° 1, 1997, pp.57-67

Propriétés des classes d'éléments α-standard

Emmanuel Isambert
L.A.G.A. (URA 742)
Institut Galilée
93430 VILLETANEUSE

Introduction

Quand on utilise la théorie IST pour résoudre un problème précis, à l'intérieur d'une structure standard fixée, il arrive très souvent qu'on se donne au départ un seul objet standard α (par exemple un infinitésimal), tous les autres objets non-standard apparaissant par la suite étant en fait obtenus comme images de cet élément de départ par des constructions standard. L'ensemble du travail se fait donc à l'intérieur d'une même partie externe de la structure donnée, celle des *images par une fonction standard* de l'objet α.

Nous nous proposons ici d'étudier quelques propiétés de ces classes, qui ne sont pas sans rappeler celles des éléments *relativement standard* (par rapport à un α donné) de $RIST$ (théorie introduite par Y.Peraire, cf. [6]). Nous nous permettrons d'ailleurs d'utiliser des appellations et notations analogues à celles de $RIST$[1], étant entendu que nous restons strictement dans le cadre de la théorie IST de Nelson.

Par ailleurs ces classes sont en étroite relation avec les constructions par ultraproduits, utilisées notamment dans l'approche "Robinsonienne" de l' analyse non standard (cf. [7] ou [3] par exemple) — elles nous semblent donc à même de permettre d'édifier des passerelles systématiques entre les deux approches du Non Standard, et peut-être aussi d'utiliser IST pour faire de la théorie des modèles.

Tout au long de cet article on emploiera le terme d' *accessible* pour qualifier les objets qui sont éléments d'un certain ensemble standard.

Définition 1 *Soient x et α deux accessibles. On dira que x est* α-standard *si et seulement si il existe une fonction standard f telle que $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$ et $x = f(\alpha)$.*

[1] Dans le présent article cela ne devrait pas prêter à confusion ; on pourrait par la suite modifier les notations si on veut utiliser les deux théories à la fois.

Cette relation externe entre x et α sera notée $x \mathcal{S} \alpha$. Notons qu'elle ne peut être réalisée que si x et α sont tous deux accesssibles ; si α est standard la relation $x \mathcal{S} \alpha$ est bien entendue équivalente à $\mathrm{st}(x)$. X étant un ensemble interne, on note classiquement $\underline{X}$ la classe externe des éléments standard de X. Par analogie, on notera $\underline{X}_\alpha$ la classe des éléments *α-standard* de X.

Bien que la notion d'élément α-standard ne dépende pas à priori d'un ensemble standard particulier auquel α appartient, notons que si X est standard, et I est un ensemble standard contenant α on a toujours

$$\underline{X}_\alpha = \{\, x \in X \mid (\exists^{\mathrm{st}} f : I \longrightarrow X)\, x = f(\alpha) \,\}.$$

1 Propriétés élémentaires et α-transfert

Il est évident que la relation $\mathcal{S}$ est transitive et réflexive, c'est donc un pré-ordre. Cependant, contrairement à la relation analogue de $RIST$, $\mathcal{S}$ n'est pas un pré-ordre total : par idéalisation on montre aisément que sur tout ensemble infini il existe des paires (β, γ) d'éléments incomparables (c'est à dire qu'on n'a ni $\beta \mathcal{S} \gamma$ ni $\gamma \mathcal{S} \beta$), et même que pour tout α accessible non standard, et tout I standard contenant α il existe $\beta \in I$ incomparable avec α.

On a d'autres propriétés évidentes, par exemple l'image d'un α-standard par une fonction α-standard est un α-standard. On a donc toujours $\beta \mathcal{S} \alpha \Rightarrow \underline{X}_\beta \subset \underline{X}_\alpha$. L'implication réciproque est vraie si X est standard et contient α et β, mais elle peut être fausse dans d'autres cas (par exemple si X est standard fini, α standard et β non standard).

La propriété suivante, qui contraste également avec le cas de $RIST$, est fondamentale :

Proposition 1 *Soient α accessible et X un ensemble interne dont tous les éléments sont α-standard. Alors le cardinal de X est nécessairement* **standard fini**[2].

Preuve Soit I standard contenant α ; il existe un ensemble F dont les éléments sont des fonctions standard de I dans X et tel que

$$(\forall x \in X)(\exists f \in F)\, x = f(\alpha).$$

Cet ensemble F est forcément standard et fini. *QED*

Il en résulte par exemple que les entiers plus petits qu'un i-grand donné ω ne sont pas tous ω-standard.

On dispose quand même d'une notion de sup : si α, β sont des éléments non standard (d'un certain standard I), soit $\gamma = (\alpha, \beta)$. Alors on a $\alpha \mathcal{S} \gamma$ et $\beta \mathcal{S} \gamma$, et pour tout δ tel que $\alpha \mathcal{S} \delta$ et $\beta \mathcal{S} \delta$ on a $\gamma \mathcal{S} \delta$; γ est donc un sup de α et β au sens de la relation $\mathcal{S}$.

[2] et non pas de cardinal fini α-standard, comme ce serait le cas dans $RIST$

Si X est un ensemble standard infini, et α un élément quelconque de X, on peut construire un élément γ de X **strictement** supérieur à α, du point de vue de $\mathcal{S}$: si α est standard, tout élément non standard convient ; sinon, soient J une bijection standard de X^2 sur X, et β un élément de X incomparable avec α ; alors $\gamma = J(\alpha, \beta)$ vérifie $\alpha \mathcal{S} \gamma$ mais pas $\gamma \mathcal{S} \alpha$.

On dit que α et β sont **équistandard** si on a $\alpha \mathcal{S} \beta$ et $\beta \mathcal{S} \alpha$. Pour tout X standard on a alors $\underline{X}_\alpha = \underline{X}_\beta$. On démontre la caractérisation suivante :

Proposition 2 *Deux éléments α et β sont équistandard si et seulement si il existe une* bijection *standard h telle que $\beta = h(\alpha)$.*

Preuve Démontrons le sens non trivial de l'équivalence. Le raisonnement repose sur le fait que, si h est une application standard, l'ensemble de ses points fixes est standard. Si α et β sont équistandard, soient I standard tel que $\alpha, \beta \in I$ et $f, g : I \longrightarrow I$ des fonctions standard telles que $\beta = f(\alpha)$ et $\alpha = g(\beta)$. Soient $A = \{ i \in I \mid g \circ f(i) = i \}$, et $B = \{ i \in I \mid f \circ g(i) = i \}$; les ensembles A et B sont standard et $\alpha \in A$, $\beta \in B$. On vérifie que $f(A) = B$, $g(B) = A$, que la restriction h de f à A est une bijection standard de A sur B, et qu'on a bien $\beta = h(\alpha)$. *QED*

Par analogie avec les formules standard, on dira qu'une formule à paramètres Φ de *IST* est α-standard si elle est interne et si tous ses paramètres sont α-standard. Par ailleurs, on utilisera les abréviations suivantes (analogues à celles de *RIST*) :

$$\begin{aligned}(\forall^\alpha x)\Phi(x) &\equiv (\forall x)\big(x \mathcal{S} \alpha \Rightarrow \Phi(x)\big)\\ (\exists^\alpha x)\Phi(x) &\equiv (\exists x)\big(x \mathcal{S} \alpha \text{ et } \Phi(x)\big)\end{aligned}$$

Bien sûr si α est standard, ces quantificateurs sont équivalents à $\forall^{\mathrm{st}}$ et $\exists^{\mathrm{st}}$.

Le principe suivant permet d'affirmer qu'on peut utiliser les raisonnements par transfert, sans avoir à sortir de la classe des α-standard.

Theorème 1 (Principe de α-transfert) *Soient α un élément non standard d'un ensemble standard, et $F(x)$ une formule α-standard. Alors*

$$(\exists x)\, F(x) \implies (\exists^\alpha x)\, F(x).$$

Preuve On utilise l'axiome du choix et le transfert, pour trouver un x α-standard vérifiant F : la formule $F(x)$ s'écrit $\Phi(x, \alpha)$, où Φ est une formule standard. Soit I standard tel que $\alpha \in I$ et $A = \big\{ i \in I \mid \exists x\, \Phi(x, i) \big\}$; c'est une partie standard de I qui contient α. Par axiome du choix et transfert, il existe une fonction ψ standard définie sur A telle que $(\forall i \in A)\Phi(\psi(i), i)$; en particulier on a $\Phi(\psi(\alpha), \alpha)$ donc $x = \psi(\alpha)$ est l'élément α-standard cherché. *QED*

Il en résulte naturellement que tout objet défini de façon unique par une formule α-standard est α-standard, etc. Moins banalement, voyons une conséquence en topologie.

On dira qu'un réel $\varepsilon > 0$ est **α-infinitésimal** s'il est plus petit que tout $\eta > 0$ α-standard (l'existence d'un tel ε est assurée par Idéalisation).

Proposition 3 *Soient α un élément quelconque d'un espace métrique standard, et ε un réel α-infinitésimal. Alors la boule $B(\alpha, \varepsilon)$ est contenue dans le halo topologique de α.*

Preuve Si V est un voisinage standard de α, par α-transfert il existe un $\eta > 0$ α-standard tel que $B(\alpha, \eta) \subset V$, donc $B(\alpha, \varepsilon) \subset V$. *QED*

2 Principe de α-standardisation

On se donne toujours un α non standard fixé, élément d'un certain ensemble standard. Le problème est le suivant : étant donné un ensemble X standard et $F(x)$ une formule de IST (interne ou non) existe-t-il un "α-standardisé" de la classe $\{x \in X \mid F(x)\}$, c'est à dire un unique ensemble Y tel que $Y \subset X$ et $(\forall^\alpha x \in X)\,[\,x \in Y \Longleftrightarrow F(x)\,]$?

Comme dans $RIST$, cela ne peut être vrai pour une formule quelconque : prenons par exemple α un entier i-grand, $X = \mathbb{N}$ et $F(n) \equiv$ "n est i-grand". Supposons qu'un tel Y existe : il est non vide car $\alpha \in Y$, donc il possède un élément minimal ω qui par α-transfert est α-standard ; ω est donc i-grand, mais alors on a aussi $\omega - 1 \in Y$, ce qui contredit la minimalité de ω.

Autre contre-exemple, avec une formule interne : α étant toujours un entier i-grand, soit β un entier i-grand inférieur à α, mais non α-standard (on a vu que cela existait) ; alors il ne peut pas exister de α-standardisé de l'ensemble $\{\,n \in \mathbb{N} \mid n \geq \beta\,\}$ (raisonnement analogue au précédent).

On est donc amené (toujours comme dans $RIST$) à définir une classe de formules pour lesquelles le principe recherché est valide.

Définition 2 *On dira qu'une formule $F(x)$ de IST est* **absolument α-externe** *de profondeur n si elle est de la forme*

$$F(x) \;\equiv\; Q_1^\alpha x_1 \cdots Q_n^\alpha x_n \Phi(x_1, \ldots x_n, x)$$

où Φ est une formule α-standard et les $Q_i^\alpha x_i$ sont des quantificateurs de la forme $(\forall^\alpha x_i \in Z_i)$ ou $(\exists^\alpha x_i \in Z_i)$, Z_i étant un ensemble standard.

Le principe s'énonce alors comme suit :

Theorème 2 (α-standardisation) *Soient X un ensemble standard, et $F(x)$ une formule absolument α-externe. Alors il existe un unique ensemble α-standard Y tel que $Y \subset X$ et*

$$(\forall^\alpha x \in X)\,\left[\,x \in Y \iff F(x)\,\right].$$

Preuve L'unicité est immédiate par α-transfert. La démonstration de l'existence se fait par induction sur la profondeur de la formule F.

Si F est α-standard (profondeur 0), alors $Y = \{x \in X \mid F(x)\}$ est un ensemble α-standard.

Supposons le principe vrai jusqu'à la profondeur $n-1$, et soit F de profondeur n, par exemple de la forme $F(x) \equiv (\exists^\alpha y \in Z)G(x,y)$, où Z est un ensemble standard. Par hypothèse d'induction il existe un ensemble α-standard $U \subset X \times Z$ tel que

$$(\forall^\alpha(x,y) \in X \times Z) \quad (x,y) \in U \iff G(x,y).$$

On prend alors $Y = \{x \in X \mid (\exists y \in Z)(x,y) \in U\}$, et on vérifie (en utilisant le α-transfert) que Y convient.

Le cas $(\forall^\alpha y \in Z)G(x,y)$ s'en déduit par complémentarité. *QED*

On en déduit sans peine le **principe de α-saturation** :
Soient $F(x,y)$ une formule absolument α-externe, X et Y des ensembles standard tels que $(\forall^\alpha x \in X)(\exists^\alpha y \in Y)F(x,y)$. Alors il existe une fonction α-standard $f : X \longrightarrow Y$ telle que $(\forall^\alpha x \in X)\, F(x, f(x))$.

3 Extension de l'Idéalisation

Pour examiner les diverses manières possibles d'étendre ce principe, introduisons quelques notations :.

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble X. On notera $C_\alpha(\mathcal{R})$ la propriété "$\mathcal{R}$ est α-concourante", c'est à dire

$$(\forall^\alpha Z \subset X)\big[\, Z \text{ fini } \Rightarrow (\exists y \in X)(\forall x \in Z)\; x \,\mathcal{R}\, y\big]$$

(on dira d'une relation vérifiant cette propri/'eté qu'elle est *α-concourante*, et si α est standard, on dira qu'elle est S-concourante), et $D_\alpha(\mathcal{R}, y)$ la propriété "pour $\mathcal{R}$, y domine les α-standard de X", c'est à dire $(\forall^\alpha x \in X)\; x \,\mathcal{R}\, y$.

Le schéma d'idéalisation de IST peut donc s'écrire : *pour toute relation $\mathcal{R}$ interne, $C_0(\mathcal{R}) \iff \exists y\; D_0(\mathcal{R}, y)$.*

Pour aucun α non standard on ne peut étendre ce principe tel quel en "remplaçant 0 par α". En effet, prenons par exemple pour α un entier non standard ; on a vu qu'il existe des entiers $n < \alpha$ qui ne sont pas α-standard. Donc la relation définie sur $\mathbb{N}$ par $x \,\mathcal{R}\, y \equiv (y < \alpha \text{ et } x \neq y)$ vérifie $\exists y\; D_\alpha(\mathcal{R}, y)$ mais pas $C_\alpha(\mathcal{R})$ (on prend $Z = \{\, n \mid n \leq \alpha \,\}$).

Ce contre-exemple s'étend à tout α non standard, puisqu'un ensemble dont tous les éléments sont α-standard est nécessairement de *cardinal standard fini*.

Idéalisation contrôlée

Une autre façon d'étendre l'idéalisation est d'examiner sous quelles conditions on peut appliquer ce schéma *sans sortir de la classe des α-standard*. Autrement dit, dans quel cas a-t-on le principe suivant (**idéalisation contrôlée par** α) :

$$C_0(\mathcal{R}) \Longrightarrow (\exists^\alpha y)\ D_0(\mathcal{R}, y) \quad ?$$

Même si $\mathcal{R}$ est standard, cette propriété n'est vraie que pour certains α particuliers. La définition suivante est liée à l'existence d'ensembles finis contenant tous les standard d'un ensemble donné.

Définition 3 *Soient X un ensemble, α un élément accessible. On dit que α est* **adapté à** *X s'il existe une partie* α-standard *finie Z de X telle que $\underline{X} \subset Z$.*

Theorème 3 *Soient X un ensemble standard infini et α un élément acessible. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *α est adapté à X,*
2. *pour toute relation α-standard $\mathcal{R}$ sur X, on a $C_\alpha(\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists^\alpha y\ D_0(\mathcal{R}, y)$.*
3. *pour toute relation standard $\mathcal{R}$ sur X, on a $C_0(\mathcal{R}) \Longrightarrow \exists^\alpha y\ D_0(\mathcal{R}, y)$.*

Preuve Supposons α adapté à X, et soit $\mathcal{R}$ une relation α-concourante et α-standard; alors $\mathcal{R}$ est concourante par α-transfert, donc si Z est un ensemble α-standard fini contenant $\underline{X}$, on a $(\exists z \in X)(\forall x \in Z)\ x\ \mathcal{R}\ y$.

Comme la formule $(\forall x \in Z)\ x\ \mathcal{R}\ y$ est α-standard, on en déduit par α-transfert $(\exists^\alpha y \in X)(\forall x \in Z)\ x\ \mathcal{R}\ y$, d'où la conclusion puisque $\underline{X} \subset Z$.

Supposons que la propriété *2* soit vérifiée; alors si $\mathcal{R}$ est une relation standard vérifiant C_0, elle est concourante donc elle vérifie aussi C_α, d'où la propriété *3*.

Enfin, supposons que la propriété *3* soit vérifiée, montrons que α est adapté à X. On notera $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. Par transfert il existe une bijection standard j de X sur $\mathcal{P}_f(X)$. La relation $x\ \mathcal{R}\ y \equiv x \in j(y)$ est standard et concourante, donc il existe un y α-standard tel que $(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)\ x\ \mathcal{R}\ y$. Donc l'ensemble $Z = j(y)$ est α-standard, fini, et contient $\underline{X}$. *QED*

Remarque

L'implication $\exists^\alpha y\ D_0(\mathcal{R}, y) \Rightarrow C_0(\mathcal{R})$, elle, est triviale pour toute relation $\mathcal{R}$ interne.

Existence d'éléments adaptés

Pour tout entier i-grand ω, l'intervalle $[0, \omega]$ contient $\underline{\mathbb{N}}$, donc tout entier i-grand est adapté à $\mathbb{N}$. Plus généralement si X et Y sont deux ensembles standard dénombrables, tout élément non standard de X est adapté à Y (cela résulte facilement de l'existence de bijections standard entre X et $\mathbb{N}$ et entre Y et $\mathbb{N}$).

De plus si α est adapté à un X standard, il est adapté à tout standard de cardinal inférieur ou égal à celui de X.

La proposition suivante assure l'existence d'éléments adaptés aux ensembles non dénombrables :

Proposition 4 *Soient I et X deux ensembles standard infinis. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément de I adapté à X est que* $\mathrm{Card}(I) \geq \mathrm{Card}(X)$.

Preuve Si $\mathrm{Card}(I) \geq \mathrm{Card}(X)$, soit h une surjection standard de I sur X, j une bijection standard de $\mathcal{P}_f(X)$ sur X, et Z une partie finie de X contenant $\underline{X}$. Pour trouver un élément de I adapté à X, il suffit de prendre $\alpha \in h^{-1}(j(Z))$.

Réciproquement si $\alpha \in I$ est adapté à X, il existe donc une fonction standard $f : I \longrightarrow \mathcal{P}_f(X)$ telle que $\underline{X} \subset f(\alpha)$. La formule suivante est donc vérifiée :

$$(\forall^{\mathrm{st}} x \in X)(\exists y \in I)\; x \in f(y),$$

donc par transfert on a

$$(\forall x \in X)(\exists y \in I)\; x \in f(y).$$

Autrement dit $X \subset \bigcup_{y \in I} f(y)$ et comme chaque $f(y)$ est fini, $\mathrm{Card}(X) \leq \mathrm{Card}(I)$ *QED*

Appliquons ce résultat à $\mathbb{R}$, par exemple : il existe un réel ε (qu'on peut éventuellement choisir i-petit) adapté à $\mathbb{R}$. Mais un tel ε ne peut appartenir à aucune partie **standard dénombrable** de $\mathbb{R}$ — autrement dit ε ne peut pas être de la forme u_ω, (u_n) étant une suite standard.

Plus généralement, si $\alpha \in I$ (I standard) on dira que α est **régulier sur** I s'il n'appartient à aucune partie standard de I de cardinal strictement inférieur à $\mathrm{Card}(I)$. On voit que pour être adapté à I, α doit nécessairement[3] être régulier sur I.

Cela montre qu'il n'existe pas d'élément adapté à tout ensemble standard — en effet un tel élément α doit appartenir à un standard I (sinon la classe des α-standard est vide) mais alors il n'est pas adapté à $\mathcal{P}(I)$.

4 Ultrafiltres et subordination

N.B. Cette dernière section sera traitée plus rapidement que les précédentes, beaucoup de démonstrations seront notamment omises.

On désire maintenant étendre le principe d'idéalisation contrôlée à des relations internes mais non standard. Ainsi se pose le problème : étant donné un certain α, que doit vérifier β pour que pour toute relation **α-standard** $\mathcal{R}$ sur X on ait $C_0(\mathcal{R}) \Rightarrow \exists^\beta y\, D_0(\mathcal{R})$?

Pour répondre à cette question, il est utile d'introduire une représentation standard-externe des ultrafiltres.

Soit α un élément non standard d'un standard I infini. On note $\mathrm{Ult}_I(\alpha)$ le standardisé de l'ensemble $\{\, J \in \mathcal{P}(I) \mid \alpha \in J \,\}$. On a les résultats suivants :

[3]pour la question de la réciproque, cf. note 3, section 4.

Proposition 5 *L'ensemble* $\mathrm{Ult}_I(\alpha)$ *est un ultrafiltre sur* I, *qui est non trivial si et seulement si* α *est non standard. Réciproquement pour tout ultrafiltre standard* $\mathfrak{U}$ *sur* I *il existe* $\alpha \in I$ *tel que* $\mathfrak{U} = \mathrm{Ult}_I(\alpha)$.

Un tel α appartient alors à tout élément standard de $\mathfrak{U}$ (autrement dit à la *monade* de $\mathfrak{U}$).

Rappelons qu'une formule (interne ou externe) de IST est dite **absolue** si elle n'a que des paramètres standard. On montre que toute propriété absolue de α correspond à une propriété standard de $\mathrm{Ult}_I(\alpha)$. Plus précisément :

Proposition 6 *Soit* $F(x, I)$ *une formule absolue. Il existe une formule standard* $\Phi(\mathfrak{U}, I)$ *telle que, pour tout* I *standard et tout* $\alpha \in I$ *on ait*

$$F(\alpha, I) \iff \Phi(\mathrm{Ult}_I(\alpha), I).$$

Preuve D'après le procédé cannonique de réduction de Nelson (cf.[4] et encore mieux [5]), il existe une formule standard $G(u, v, x, I)$ et des fonctions K et H telles que, pour tout ensemble standard I on ait

$$(\forall \alpha \in I)\big[F(\alpha, I) \iff (\forall^{\mathrm{st}} u \in K(I))(\exists^{\mathrm{st}} v \in H(I))G(u, v, x, I)\big].$$

Si on pose $G_{u,v} = \{x \in I \mid G(u, v, x, I)\}$, la formule $\Phi(\mathfrak{U}, I)$ peut alors s'énoncer

$$\mathfrak{U} \text{ est un ultrafiltre sur } I \text{ et } (\forall u \in K(I))(\exists v \in H(I))(G_{u,v} \in \mathfrak{U}).$$

QED

Ainsi la propriété "α est non standard" correspond à "$\mathfrak{U}$ est non-trivial" (ici I ne figure pas explicitement), "α est adapté à I" correspond à la propriété d'ultrafiltres appelée κ-saturation (où $\kappa = \mathrm{Card}(I)$) ; la propriété "$\alpha$ régulier sur I" correspond à la notion d'ultrafiltre régulier[4].

Définition 4 *Soient* α *et* β *accessibles. On dit que* β *est* **subordonné à** α *s'il existe un* I *standard tel que* α *appartienne à tous les éléments* β*-standard de* $\mathrm{Ult}_I(\alpha)$.

Proposition 7 *Soient* α *et* β *deux éléments accessibles. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *β est subordonné à α,*
2. *pour toute famille standard d'ensembles $\mathcal{F}$, si α appartient à tous les éléments standard de $\mathcal{F}$, il appartient aussi à tous ses éléments β-standard,*
3. *pour tout ensemble standard X on a $(\forall^{\alpha} A \subset X)\quad \underline{X} \subset A \Rightarrow \underline{X}_{\beta} \subset A$.*

[4]On en déduit que la question de savoir si tout élément régulier sur I est adapté à I est indécidable dans IST, puisque l'équivalence entre régularité et saturation pour les ultrafiltres est indécidable dans ZFC.

Preuve Pour 1) $\Rightarrow$ 2), soit I tel que $(\forall^\beta J \in \mathrm{Ult}_I(\alpha))\ \alpha \in J$. On a $(\forall^{\mathrm{st}} F \in \mathcal{F})\ \alpha \in F \cap I$ donc $(\forall F \in \mathcal{F})\ F \cap I \in \mathrm{Ult}_I(\alpha)$, d'où $(\forall^\beta F \in \mathcal{F})\ \alpha \in F \cap I$.

Pour 2) $\Rightarrow$ 3), soit $A = f(\alpha)$ (f standard) ; on peut supposer que X et $\mathrm{dom}(f)$ sont disjoints, et on applique la condition 2) à la famille $\mathcal{F} = \{F_x \mid x \in X\}$ où $F_x = \{i \in \mathrm{dom}(f) \mid x \in f(i)\} \cup \{x\}$.

L'implication 3) $\Rightarrow$ 1) est aisée, en prenant $X = \mathrm{Ult}_I(\alpha)$ et $A = \{U \in X \mid \alpha \in U\}$. *QED*

Par idéalisation on démontre que pour tout α non standard donné il existe β subordonné à α — et même, étant donné un ultrafiltre standard $\mathfrak{V}$ sur I il existe β subordonné à α et tel que $\mathfrak{V} = \mathrm{Ult}_I(\beta)$. D'après la proposition 5 ci-dessus, il en résulte que pour toute propriété absolue F, *s'il existe $\beta \in I$ satisfaisant F, il existe un $\beta \in I$ subordonné à α et satisfaisant F.*

La proposition ci-dessus permet de plus de montrer les quelques faits suivants :

- soient β subordonné à α, et X un standard infini ; alors $\underline{X}_\alpha \bigcap \underline{X}_\beta = \underline{X}$;
- si α, β sont deux entiers i-grands, β étant subordonné à α, alors tout entier β-standard est inférieur à tous les entiers α-standard i-grands ;
- soient β subordonné à α et A une partie α-standard de X contenant $\underline{X}$; alors A contient également $\underline{X}_\beta$.

L'existence d'éléments subordonnés à un α donné permet d'étendre l'idéalisation contrôlée aux relations α-standard :

Theorème 4 *Soient X, I deux ensembles standard infinis, $\alpha \in I$ non standard, $\beta \in I$ subordonné à α et adapté à X, et soit $\gamma = (\alpha, \beta)$.*

Alors pour toute relation α-standard $\mathcal{R}$ sur X on a

$$C_0(\mathcal{R}) \implies \exists^\gamma y\ D_0(\mathcal{R}, y).$$

Remarque Un tel β existe toujours, car la propriété "être adapté à X" est absolue (voir plus haut).

Preuve La relation $\mathcal{R}$ étant α-standard il existe une formule standard $\Phi(x, y, u)$ telle que $x\ \mathcal{R}\ y \iff \Phi(x, y, \alpha)$. Puisque β est adapté à X, donnons-nous un ensemble Z_0, β-standard fini et contenant $\underline{X}$.

Considérons enfin la famille suivante de parties de I, indexée par $\mathcal{P}_f(X)$: pour tout $Z \in \mathcal{P}_f(X)$, soit $F_Z = \{\, u \in I \mid (\exists y \in X)(\forall z \in Z)\ \Phi(z, y, u) \,\}$.

C'est une famille standard, dont tout élément standard est de la forme F_Y, où Y est une partie standard finie de X. Comme $\Phi(x, y, \alpha)$ est S-concourante sur X, on a $(\forall^{\mathrm{st}} Z \in \mathcal{P}_f(X))\ \alpha \in F_Z$, et comme β subordonné à α on a aussi $(\forall^\beta Z \in \mathcal{P}_f(X))\ \alpha \in F_Z$, donc en particulier $\alpha \in F_{Z_0}$ — donc on a

$$(\exists y \in X)((\forall x \in Z_0)\ \Phi(x, y, \alpha).$$

Mais, en notant $\gamma = (\alpha, \beta)$, on voit que $\{ y \in X \mid (\forall x \in Z_0)\, \Phi(x, y, \alpha) \}$ est γ-standard et non vide, donc par γ-transfert il contient au moins un élément γ-standard y_0, et on a bien alors $D_0(\mathcal{R}, y_0)$ puisque $\underline{X} \subset Z_0$. *QED*

Ultrapuissances et éléments α-standard

Nous nous bornerons ici à mentionner quelques résultats (pour une théorie générale des ultraproduits, nous renvoyons par exemple à [1], et pour leur application en ANS, à [3]).

Soit X un ensemble standard, $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre standard sur I standard infini. Notons $X^* = X^I/\mathfrak{U}$, et $\in^*$ la relation sur X^* définie par

$$\bar{x} \in^* \bar{y} \quad \equiv \quad \{ i \in I \mid x(i) \in y(i) \} \ \in \mathfrak{U}$$

($\bar{x}$ et $\bar{y}$ étant les classes modulo $\mathfrak{U}$ des fonctions x et y de I dans X).

Si on choisit un $\alpha \in I$ tel que $\mathfrak{U} = \mathrm{Ult}_I(\alpha)$, *il existe alors une application h_α de X dans X^*, qui prolonge le plongement cannonique de $\underline{X}$ dans $\underline{X}^*$, et telle que par h_α, $(\underline{X}_\alpha, \in)$ soit isomorphe à $(\underline{X}^*, \in^*)$.*

Plus précisément, si $y \in \underline{X}_\alpha$, prenons f standard telle que $y = f(\alpha)$; $h_\alpha(y)$ est alors la classe de f modulo $\mathfrak{U}$ (ce qui ne dépend pas du choix de f).

Les propriétés de $\underline{X}_\alpha$ reflètent donc celles de X^*, et on peut donc déduire immédiatement des principes énoncés dans les sections précédentes les propriétés classiques des ultrapuissances, utilisées dans les constructions "Robinsoniennes" de modèles non standard. Toutes ces constructions peuvent donc être représentées dans IST, sans faire appel à la notion d'ultraproduit, par des parties externes de l'ensemble X de départ.

On sait que dans la construction Robinsonienne, pour obtenir l'idéalisation sur toutes les formules internes, il faut itérer les ultrapuissances et passer à la limite inductive (c'est ce qu'on nomme une ultralimite). Le dernier théorème ci-dessus permet de donner une idée de la représentation dans IST d'une telle construction *à l'intérieur même de l'ensemble X de départ*. Nous ne décrirons pas ici cette construction jusqu'au bout, mais indiquons simplement comment la relation de subordination permet de représenter l'itération des ultrapuissances :

Soient $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ deux ultrafiltres standard sur I et J respectivement, $X^* = X^I/\mathfrak{U}$ et $X^{**} = (X^*)^J/\mathfrak{V}$. Si α et β sont tels que $\mathfrak{U} = \mathrm{Ult}_I(\alpha)$ et $\mathfrak{V} = \mathrm{Ult}_J(\beta)$,on a les isomorphismes h_α de $\underline{X}_\alpha$ sur $\underline{X}^*$ et h_β de $\underline{X}^*{}_\beta$ sur $\underline{X}^{**}$.

Alors la relation "β subordonné à α" est exactement ce qu'il faut pour que, si on pose $\gamma = (\alpha, \beta)$, $\underline{X}_\gamma$ soit isomorphe, par h_γ, à $\underline{X}^{**}$, l'isomorphisme h_γ prolongeant h_α (modulo le plongement cannonique de $\underline{X}^*$ dans $\underline{X}^{**}$) ; ces isomorphismes font donc commuter les inclusions $\underline{X} \subset \underline{X}_\alpha \subset \underline{X}_\gamma$ avec la suite de plongements cannoniques $\underline{X} \longrightarrow \underline{X}^* \longrightarrow \underline{X}^{**}$ (cf. diagramme ci-dessous).

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \underline{X}^{**} & & \\
 & & & \nearrow & \wr & & \\
 & & \underline{X}^{*} & \subset & \underline{X}^{*}{}_{\beta} & & \\
 & \nearrow & \wr & & \wr & & \\
\underline{X} & \subset & \underline{X}_{\alpha} & \subset & \underline{X}_{\gamma} & \subset & X
\end{array}
$$

On sait (voir par exemple [1] et [2]) que, si on définit $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V}$ par

$$\mathfrak{W} = \left\{ W \subset I \times J \,\middle|\, \left\{ j \in J \mid \{ i \in I \mid (i,j) \in W \} \in \mathfrak{U} \right\} \in \mathfrak{V} \right\},$$

alors X^{**} est isomorphe à $X^{I \times J}/\mathfrak{W}$.

La propriété d'isomorphisme ci-dessus est donc liée à la proposition suivante :

Proposition 8 *Si* $\mathfrak{U} = \mathrm{Ult}_I(\alpha)$ *et* $\mathfrak{V} = \mathrm{Ult}_J(\beta)$, *alors on a*

$$\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{V} = \mathrm{Ult}_{I \times J}\big((\alpha, \beta)\big)$$

si et seulement si β *est subordonné à* α.

References

[1] J.L. Bell and A.B. Slomson. *Models and Ultraproducts: an introduction.* North Holland, 1971.

[2] Labib Haddad. La double ultrapuissance. Exposé 24, Séminaire d'Analyse, Université de Clermont II, Département de Mathématiques, 1987-88.

[3] W.A.J. Luxemburg and K.D. Stroyan. *Introduction to the theory of infinitesimals.* London Academic Press, 1976.

[4] Edward Nelson. Internal set theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83:1165–1198, 1977.

[5] Edward Nelson. The syntax of non standard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic*, 38(2):123–124, 1988.

[6] Yves Péraire. Théorie relative des ensembles internes. *Osaka Journal of Mathematics*, (2), 1992.

[7] Abraham Robinson. *Non standard analysis.* North Holland, Amsterdam, 1966.