

N. ALAA

## **Solutions faibles d'équations paraboliques quasilineaires avec données initiales mesurés**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 3, n° 2 (1996), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1996\\_\\_3\\_2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_1_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Solutions faibles d'équations paraboliques quasilineaires avec données initiales mesures

N. ALAA

Université Cadi Ayyad

Faculté des Sciences et Techniques

B.P. 618 Département de Mathématiques

Marrakech MAROC

## Résumé

Dans ce papier, l'étude porte sur l'existence de solutions faibles de certaines équations paraboliques quasilineaires avec données initiales mesures et une nonlinéarité quelconque sur le gradient. Les techniques classiques d'estimation de solutions ainsi que leur gradient dans  $C^\alpha$  ne peuvent pas être appliquées et une nouvelle approche est considérée. On obtient des conditions nécessaires sur la donnée initiale pour avoir l'existence de solutions. Un résultat d'existence pour toute mesure bornée est donné. Enfin, on présente des résultats de comparaison et d'unicité de solutions.

## Abstract

The goal of this paper is to study existence of weak solutions for some quasilinear parabolic equations where the initial data are measures and where the growth with respect to the gradient terms may be arbitrary. The classical techniques based on  $C^\alpha$ -estimates for the solution or its gradient cannot be applied because of the lack of regularity and a new approach must be considered. We obtain necessary condition on the initial data as well as existence results for arbitrary measures in some cases. We also provide comparison and uniqueness results for the solutions.

# 1 Introduction

Ce papier décrit certains résultats concernant l'existence de solutions faibles pour les équations de la forme

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = j(t, x, \nabla u), \quad u \geq 0 \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega$$

$$(1.2) \quad u(0) = \lambda f \text{ dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad u = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\partial\Omega$  son bord,  $\Delta$  désigne le Laplacien,  $T$  et  $\lambda$  sont des nombres réels positifs,  $j : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$  mesurable et continue par rapport à  $u$  et  $\nabla u$ ,  $f$  est une fonction intégrable ou plus généralement une mesure de Radon positive et bornée sur  $\Omega$ . On s'intéresse aux situations où  $f$  est irrégulière et où la croissance de  $j$  par rapport à  $\nabla u$  est arbitraire, en particulier plus grand que  $|\nabla u|^2$  pour  $|\nabla u|$  grand. Puisque  $f$  est irrégulière, nous devons travailler avec des solutions faibles pour lesquelles  $\nabla u$  et aussi  $u$  sont non bornées. Comme conséquence, les techniques classiques et habituelles utilisées pour montrer l'existence de solutions qui sont basées sur des estimations a priori dans  $C^\alpha(]0, T[ \times \Omega)$  sur  $u$  et  $\nabla u$  tombent en défaut. Considérons l'exemple modèle suivant

$$(1.4) \quad \begin{cases} u \in C(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |\nabla u|^p \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega \\ u(0) = \lambda f \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme sur  $\mathbb{R}^N$  et  $p \geq 1$ .

Si  $p \leq 2$ , la technique des sous et sur-solutions peut être appliquée pour montrer l'existence dans (1.4) si  $f$  est assez régulière: si  $f \in L^\infty(\Omega)$  et  $f \geq 0$ ,  $u_1 = 0$  est une sous-solution et  $u_2 = \lambda \|f\|_{L^\infty}$  est une sur-solution, donc (1.4) admet une solution régulière et globale, voir [8].

La situation est différente si  $p > 2$ :  $T$  étant donné, même si  $f$  est régulière il existe une condition de taille sur  $\lambda f$  pour que (1.4) admette une solution; donc il n'y a pas existence globale de solutions en général; ceci sera prouvé dans la deuxième section. D'autre part, on y obtient, une condition nécessaire de régularité sur  $f$  dès que  $p > \frac{N+2}{N+1}$ . Par contre, comme on le montre dans la troisième section, si  $p < \frac{N+2}{N+1}$ , alors (1.4) admet une solution globale pour toute donnée initiale mesure bornée. Enfin, des résultats de comparaison et d'unicité de solutions sont donnés dans la quatrième section.

Les résultats présentés ici constituent une version parabolique de ceux de [1]. Plusieurs des idées sont similaires, mais des difficultés nouvelles spécifiques à l'opérateur parabolique doivent être surmontées.

**Remerciement:** L'auteur remercie le Professeur Michel Pierre de l'Université Henri Poincaré de Nancy I pour ses idées fructueuses qui ont permis l'élaboration

de ce travail.

Nous rappelons, pour terminer ce paragraphe, les notations et définitions suivantes:

**Notations:**

$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ indéfiniment dérivable et à support compact inclus dans } \Omega\}$

$C_b(\Omega) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue et bornée sur } \Omega\}$

$M_b(\Omega) = \{\mu \text{ mesure de Radon bornée sur } \Omega\}$ .

$M_b^+(\Omega) = \{\mu \text{ mesure de Radon positive et bornée sur } \Omega\}$ .

**Définition 1.1.** Soit  $u \in C([0, T], L^1(\Omega))$  et soit  $\mu \in M_b(\Omega)$ , on dira que

$$u(0) = \mu \text{ dans } M_b(\Omega)$$

si

$$\text{pour tout } \varphi \in C_b(\Omega), \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} u(t, x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

## 2 Conditions nécessaires d'existence

Dans cette section, on se donne

$j : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$  telle que

(2.1)  $j$  est mesurable, p.p.  $(t, x) \in Q_T$ ,  $r \rightarrow j(t, x, r)$  est convexe, continue.

(2.2)  $\forall r \in \mathbb{R}^N$ ,  $j(\cdot, \cdot, r) \in L^1(Q_T)$ .

(2.3)  $j(t, x, 0) = \min \{j(t, x, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0$

où  $\Omega$  est un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $Q_T = ]0, T[ \times \Omega$ ,  $T > 0$  fixé.

Pour  $f \in M_b^+(\Omega)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , considérons le problème

$$(2.4) \quad \begin{cases} u \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), & j(t, x, \nabla u) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = j(t, x, \nabla u) & \text{dans } D'(Q_T) \\ u(0) = \lambda f & \text{dans } M_b(\Omega). \end{cases}$$

### 2.1 Non-existence globale dans le cas sur-quadratique

On montre dans ce paragraphe que, lorsque  $j(\cdot, \cdot, r)$  est sur-quadratique à l'infini et  $T < \infty$  donné, il existe  $\lambda^* < +\infty$  tel que (2.4) n'a pas de solution pour  $\lambda > \lambda^*$ . Bien sûr, si  $f$  est régulière, il y a existence locale pour tout  $\lambda > 0$ . Le résultat montre donc qu'en général il n'y a pas existence globale. On suppose que  $j$  est sur-quadratique au sens suivant:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{Il existe } J : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[ \text{ convexe, } J(0) = 0 \\ \text{Il existe } 0 < \tau < T, c_0 > 0, p > 2, \text{ telle que} \\ p.p. (t, x) \in ]0, \tau[ \times \Omega, \forall r \in \mathbb{R}^N, j(t, x, r) \geq J(r) \geq c_0 |r|^p. \end{cases}$$

On désigne par  $G$  le noyau de Green associé à l'opérateur  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet nulle sur le bord de  $\Omega$ .

**Théorème 2.1.** On fait les hypothèses (2.1)-(2.3), (2.5). Alors si  $f \not\equiv 0$ , il existe  $\lambda^* < +\infty$  tel que (2.4) n'a pas de solution pour  $\lambda > \lambda^*$ .

Plus précisément, si (2.4) admet une solution, alors

$$(2.6) \quad \begin{cases} \lambda \int_{\Omega} f\varphi(0, x) \leq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} J^* \left( \frac{\nabla\varphi - \nabla(G\varphi)_t}{\varphi} \right) \varphi \\ \forall \varphi \in C^1([0, \tau] \times \bar{\Omega}) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,\infty}(\Omega)), \\ \varphi(\tau, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \varphi \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{où } (G\varphi)_t = \frac{\partial(G\varphi)}{\partial t}.$$

**Preuve.** Supposons que  $u$  est solution de (2.4). D'après (2.4)-(2.5) on a

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq J(\nabla u) \quad \text{dans } D'([0, \tau[ \times \Omega).$$

Soit  $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$ ,  $\varphi \geq 0$ . Multiplions (2.7) par  $\varphi$  et intégrons sur  $(\varepsilon, \tau) \times \Omega$ , on obtient

$$(2.8) \quad \int_{\Omega} u(\tau, x)\varphi(\tau, x) - \int_{\Omega} u(\varepsilon, x)\varphi(\varepsilon, x) - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \geq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} J(\nabla u)\varphi.$$

Ceci s'étend par densité à tout  $\varphi \in C^1([0, T] \times \Omega) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,\infty}(\Omega))$ .

Prenons dans (2.8)  $\varphi(\tau, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$  et passons à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0, on aura

$$\lambda \int_{\Omega} f\varphi(0, x) \leq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - J(\nabla u)\varphi) dx dt - \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt.$$

Puis utilisons le fait que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta(G \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\Delta(G\varphi)_t.$$

Nous obtenons donc

$$(2.9) \quad \lambda \int_{\Omega} f\varphi(0, x) \leq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - J(\nabla u)\varphi - \nabla(G\varphi)_t \nabla u) dx dt$$

ou encore en utilisant la définition:  $J^*(r) = \sup_{s \in \mathbb{R}^N} (r \cdot s - J(s))$  et  $\varphi \geq 0$

$$(2.10) \quad \lambda \int_{\Omega} f\varphi(0, x) \leq \int_0^{\tau} \int_{\Omega} J^*\left(\frac{\nabla\varphi - \nabla(G\varphi)_t}{\varphi}\right)\varphi$$

ce qui entraîne (2.6).

Maintenant pour montrer l'existence du  $\lambda^* < +\infty$ , nous allons montrer qu'il existe  $\varphi$  telle que le membre de droite de (2.10) est fini et  $\int_{\Omega} f\varphi(0, x) > 0$ . On choisit pour cela  $\varphi(t, x) = (\tau - t)^q \Phi(x)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $\Phi$  est solution de

$$(2.11) \quad \begin{cases} -\Delta\Phi(x) = \lambda_1\Phi(x) & \text{pour } x \in \Omega \\ \Phi > 0 & \text{dans } \Omega \\ \Phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda_1$  est la première valeur propre de  $-\Delta$  sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet sur le bord de  $\Omega$ .

D'après (2.10) et l'hypothèse (2.5) on a  $J^*(r) \leq C|r|^q$ ,  $q < 2$  et

$$\lambda\tau^q \int_{\Omega} f\Phi \leq c(p) \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{|(\tau - s)^q \nabla\Phi(x) - q(\tau - s)^{q-1} \nabla(G\Phi)(x)|^q}{(\tau - s)^{q(q-1)} \Phi^{q-1}(x)} dx ds$$

où  $c(p)$  est une constante qui ne dépend que de  $p$ . Comme  $\Phi = \lambda_1 G(\Phi)$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda\tau^q \int_{\Omega} f\Phi &\leq c(p) \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{\left|((\tau - s)^q - \frac{q}{\lambda_1}(\tau - s)^{q-1}) \nabla\Phi(x)\right|^q}{(\tau - s)^{q(q-1)} \Phi^{q-1}(x)} dx ds \\ &\leq c(p) \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{|\nabla\Phi(x)|^q}{\Phi^{q-1}(x)} (\tau - s)^q + c(p) \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{|\nabla\Phi(x)|^q}{\Phi^{q-1}(x)}. \end{aligned}$$

D'où l'on a

$$(2.12) \quad \lambda \int_{\Omega} f\Phi \leq c(p)(\tau + \tau^{1-q}) \int_{\Omega} \frac{|\nabla\Phi(x)|^q}{\Phi^{q-1}(x)}.$$

Or on sait que  $\Phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$  et que  $\frac{1}{\Phi^\alpha} \in L^1(\Omega)$  pour tout  $\alpha < 1$  (voir par ex.

[1]). Comme  $p > 2$  alors  $\alpha = q - 1 < 1$  donc  $\int_{\Omega} \frac{|\nabla\Phi(x)|^q}{\Phi^{q-1}(x)} < \infty$ .

## 2.2 Condition nécessaire de régularité sur la donnée initiale

**Théorème 2.2.** On fait les hypothèses (2.1)-(2.3) ainsi que

$$(2.13) \quad \text{Il existe } p > 1, c_0 > 0 \text{ tel que } p.p. (t, x) \in Q_T, \forall r \in \mathbb{R}^N, j(t, x, r) \geq c_0 |r|^p.$$

Alors si (2.4) admet une solution pour  $\lambda > 0$ , on a:

1) si  $\frac{N+2}{N+1} \leq p \leq 2$  alors  $f$  ne charge pas les ensembles de  $W^{s,q}$ -capacité nulle, avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, s = 1 - \frac{2}{q}$ , c'est à dire:

$$(2.14) \quad \text{si } C_{s,q}(K) = 0 \text{ alors } f(K) = 0.$$

2) si  $p \geq 2$  alors  $f \in L^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.1:** Le résultat exprime donc que, si  $p \geq 2$ , toute mesure initiale "admissible" est nécessairement diffuse. C'est le cas en particulier pour l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |\nabla u|^2 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ u(0) = f & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On peut le vérifier directement à l'aide du changement de variable classique  $w = \exp(u) - 1$  qui ramène à l'équation de la chaleur linéaire pour  $w$ . On montre d'ailleurs que, nécessairement,  $\exp(f) \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

Si  $sq > N$  c'est à dire  $p < \frac{N+2}{N+1}$ ,  $W^{s,q}$  s'injecte dans  $L^\infty(\Omega)$  et seul l'ensemble vide est de capacité nulle. La condition (2.14) est donc vide. En fait, on montre dans la section suivante que dans ce cas toute mesure bornée est admissible.

**Preuve.** On a d'après (2.4) et (2.13)

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \geq c_0 |\nabla u|^p & \text{dans } D'([0, T[ \times \Omega) \\ u(0) = \lambda f & \text{dans } M_b(\Omega). \end{cases}$$

Soit  $K$  un compact de  $W^{s,q}$ -capacité nulle, d'après par exemple [4], il existe  $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  tel que

$$(2.16) \quad \varphi_n \geq 1 \text{ sur } K, \varphi_n \rightarrow 0 \text{ dans } W^{s,q} \text{ et p.p., } 0 \leq \varphi_n \leq 1.$$

D'après les théorèmes de trace et d'interpolation (voir [10] théorèmes 1.8.2 et 2.4.1), il existe  $\psi_n$  telle que

$$(2.17) \quad \psi_n(0) = \varphi_n, \psi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^q(0, T; W^{1,q}) \text{ et p.p., } \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \rightarrow 0 \text{ dans } L^q(0, T; W^{-1,q}).$$

Multiplions (2.15) par  $\psi_n(t, x)$ , puis intégrons sur  $Q_T$ ; nous obtenons que

$$-\lambda \int_{\Omega} f \varphi_n - \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi_n}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi_n dx dt - c_0 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_n dx dt + \int_{\Omega} u(T) \psi_n(T) \geq 0.$$

Comme  $\varphi_n \geq 1$  sur  $K$ ,  $\int_{\Omega} f \varphi_n \geq \int_K f$ ; de plus, comme  $\nabla u \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$ , nous obtenons d'après (2.17):

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi_n}{\partial t} dx dt \rightarrow 0, \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi_n dx dt \rightarrow 0$$

et comme  $\psi_n \rightarrow 0$  p.p.,  $0 \leq \psi_n \leq 1$  implique par le théorème de Lebesgue que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^p \psi_n dx dt \rightarrow 0 \text{ et } \int_{\Omega} u(T) \psi_n(T) \rightarrow 0,$$

$$\text{d'où } \lambda \int_K f \leq 0.$$

2) Maintenant si  $p \geq 2$  et si  $K$  est un compact de mesure de Lebesgue nulle, nous considérons  $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  tel que

$$(2.18) \quad \varphi_n \geq 1 \text{ sur } K, \varphi_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p., } 0 \leq \varphi_n \leq 1.$$

Comme précédemment, on construit  $\psi_n$  satisfaisant (2.16) avec  $s = 0$  et  $q = 2$ .

On peut alors passer à la limite et obtenir  $\int_K f \leq 0$ , d'où le résultat.

**Remarque 2.1.** Le résultat obtenu ici reste valable si on remplace dans (2.4) l'opérateur  $-\Delta$  par  $\Delta$  c'est à dire pour l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = j(t, x, \nabla u) & \text{dans } D'([0, T[ \times \Omega) \\ u(0) = \lambda f & \text{dans } M_b(\Omega) \end{cases}$$

ou aussi pour l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + |\nabla u|^p = 0 & \text{dans } D'([0, T[ \times \Omega) \\ u(0) = \lambda f & \text{dans } M_b(\Omega) \end{cases}$$

Nous avons en fait le résultat suivant



**Proposition 2.1.** Soit  $p > 1$  et  $u$  une solution de

$$\begin{cases} u \in C(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \Delta u \geq H \quad \text{dans } D'([0, T[ \times \Omega) \\ u(0) = \lambda f \quad \text{dans } M_b(\Omega) \end{cases}$$

avec  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  et  $H \in L^1(\Omega)$ . Alors on a les conclusions 1) et 2) du Théorème 2.2.

### 3 Un résultat d'existence pour toute mesure finie

**Théorème 3.1.** Soit  $j$  satisfaisant (2.2)-(2.3) et supposons qu'il existe  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \in L^1(Q_T)$ ,  $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$  telle que

$$(3.1) \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T, \forall r \in \mathbb{R}^N, |j(t, x, r)| \leq c_1 |r|^p + c_2(t, x).$$

Alors, pour toute mesure bornée, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tout  $T > 0$ , le problème (2.4) admet une solution.

**Remarque 3.1.** Ce résultat et le précédent montrent l'optimalité de la valeur critique  $p^* = \frac{N+2}{N+1}$ . En effet, pour le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |\nabla u|^p \quad \text{dans } D'([0, T[ \times \Omega) \\ u(0) = f \quad \text{dans } M_b(\Omega), \end{cases}$$

si  $p < p^*$ , toute mesure bornée est admissible, et si  $p \geq p^*$  il y a une condition nécessaire de régularité sur  $f$ . D'autre part, si  $p > 2$ , les solutions locales ne sont pas nécessairement globales d'après la section 2.1.

**Preuve.** On pose  $X_T = L^s(0, T; W_0^{1,q}(\Omega))$ , avec  $s, q \geq 1$ ,  $\frac{2}{s} + \frac{N}{q} > N + 1$  et  $T > 0$  fixé. On considère une suite  $(f_n)$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$  telle que

$$(3.2) \quad f_n \text{ positive, } \|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M_b} \text{ et } f_n \rightarrow f \text{ dans } M_b(\Omega).$$

D'après [8], le problème suivant

$$(3.3) \quad \begin{cases} u_n \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n = j_n(t, x, \nabla u_n) \quad \text{dans } D'(Q_T) \\ u_n(0) = \lambda f_n \quad \text{dans } M_b(\Omega) \end{cases}$$

où

$$j_n(t, x, r) = \begin{cases} j(t, x, r) & \text{si } \|r\| \leq n \\ j(t, x, \frac{nr}{\|r\|}) & \text{si } \|r\| > n \end{cases}$$

admet une solution, puisque  $v_n = 0$  est une sous-solution,  $w_n = \lambda \|f_n\|_{L^\infty}$  est une sur-solution et  $j_n(t, x, r) \leq M_n(1 + \|r\|^2)$ . De plus, nous avons l'estimation suivante (voir [3])

$$(3.4) \quad \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})} \leq C(T, s, q, \Omega) (c_1 \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx dt + \int_0^T \int_\Omega |c_2| dx dt + \int_\Omega f_n).$$

On peut traiter l'intégrale de droite comme suit: pour  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$

$$(3.5) \quad \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx dt \leq |\Omega|^{\frac{1}{\alpha'}} T^{\frac{1}{\beta'}} \left( \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^{p\alpha} dx \right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}$$

avec  $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$   $\beta' = \frac{\beta}{\beta-1}$ . Nous aurons alors d'après (3.4), (3.5)

$$\|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})} \leq C(T, s, q, \Omega) (c_1 |\Omega|^{\frac{1}{\alpha'}} T^{\frac{1}{\beta'}} \|u_n\|_{L^{p\beta}(0,T;W_0^{1,p\alpha})}^p + \|c_2\|_{L^1} + \|f\|_{M_b})$$

ou encore si on pose  $C = C(T, s, q, \Omega) c_1 |\Omega|^{\frac{1}{\alpha'}}$ ,  $k = C(T, s, q, \Omega) (\|c_2\|_{L^1} + \|f\|_{M_b})$

$$(3.7) \quad \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})} \leq CT^{\frac{1}{\beta'}} \|u_n\|_{L^{p\beta}(0,T;W_0^{1,p\alpha})}^p + k.$$

Maintenant choisissons  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$  et  $\frac{2}{p\beta} + \frac{N}{p\alpha} > N + 1$ , ce qui est toujours possible puisque  $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$ . Posons  $s = p\beta$ ,  $q = p\alpha$ , nous aurons finalement

$$(3.8) \quad \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})} \leq CT^{\frac{1}{\beta'}} \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})}^p + k.$$

Posons ensuite  $x_n(t) = \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})}$  et  $F(x) = x - CT^{\frac{1}{\beta'}} x^p - k$ , nous avons

$$\begin{cases} x_n(0) = 0, x_n(T) > 0 \\ F(x_n(t)) \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi  $x_n(t)$  reste bornée indépendamment de  $n$  si le point  $b$  où  $F$  atteint son maximum est telle que  $F(b) > 0$ . Ici  $b = (\frac{1}{CT^{\frac{1}{\beta'}}})^{\frac{1}{p-1}}$

$$F(b) > 0 \text{ si et seulement si } T < \frac{1}{(Cp)^{\beta'}} \left( \frac{p-1}{kp} \right)^{(p-1)\beta'} = T^*.$$

Par conséquent, nous avons pour  $0 < T < T^*$

$$(3.9) \quad \|u_n\|_{L^s(0,T;W_0^{1,q})} \leq K \quad (\text{indépendant de } n)$$

et aussi d'après (3.5) on a

$$(3.10) \quad \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx dt \leq K \quad (\text{indépendant de } n).$$

On déduit alors de (3.10), (3.3) et le résultat de compacité de [2], qu'on peut extraire une sous-suite notée encore  $u_n$  telle que

$$(3.11) \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}) \quad \text{fort.}$$

Montrons que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^p(0, T; W_0^{1,p}) \quad \text{fort.}$$

Pour cela on écrit pour  $m, n \geq 1$  et  $0 < r < 1$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dx dt \leq \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m| \right)^r \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{\frac{p-r}{1-r}} \right)^{1-r}$$

et on choisit  $r$  tel que  $\frac{p-r}{1-r} = s = q > N+2$ , et on a d'après (3.9), (3.11) le résultat. De plus  $j_n(t, x, \nabla u_n) \longrightarrow j(t, x, \nabla u)$  dans  $L^1(Q_T)$  fort grâce à l'hypothèse (3.1). D'autre part comme

$$u_n(t) = S(t)(\lambda f_n) + \int_0^t S(t-s)j_n(s, \nabla u_n(s))ds$$

où  $S(t)$  est le semi-groupe de contraction dans  $L^1(\Omega)$  engendré par l'opérateur  $-\Delta$  avec condition de Dirichlet nulle sur  $\partial\Omega$ , on a

$$S(t)(\lambda f_n) \longrightarrow S(t)(\lambda f) \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{pout tout } t > 0$$

$$\int_0^t S(t-s)j_n(s, \nabla u_n(s))ds \longrightarrow \int_0^t S(t-s)j(s, \nabla u(s))ds$$

et  $u$  est donc solution de (2.4).

## 4 Résultats de comparaison

Les résultats de comparaison et d'unicité que nous obtenons ici sont des conséquences du lemme suivant:

**Lemme 4.1.** Soit  $A \in (L^\sigma(Q_T))^N$  avec  $\sigma > N + 2$  et  $w$  une solution de

$$(4.1) \quad w \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \in L^1(Q_T)$$

$$(4.2) \quad w(0) \leq 0 \text{ dans } M_b(\Omega) \text{ ( où } w(0) = \lim_{t \rightarrow 0} w(t) \text{ dans } M_b(\Omega) \text{ )}$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \leq A \cdot \nabla w \text{ dans } D'(Q_T).$$

Alors,  $w \leq 0$  dans  $Q_T$ .

**Remarque 4.1.** Un résultat similaire peut être trouvé dans [9] pour  $w \in W^{1,2}(Q_T)$  et pour un opérateur plus général. Mais ici le fait que  $w \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$  seulement marque une différence majeure. Rappelons que le cas  $A \equiv 0$  a été traité dans [3]. Notons aussi que  $w \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$  et  $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \in L^1(Q_T)$  impliquent que  $w$  et  $\nabla w \in L^r(Q_T)$  pour tout  $1 \leq r < \frac{N+2}{N+1}$ , voir par exemple [7], [3]. En particulier, le second membre de (4.3) est bien intégrable.

**Preuve du Lemme 4.1.** Soit  $\varphi_n$  une approximation régulière de  $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w$  dans  $L^1(Q_T)$ . La solution  $w^n$  de

$$(4.5) \quad \begin{cases} w^n \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega)), \\ \frac{\partial w^n}{\partial t} - \Delta w^n = \varphi_n \text{ dans } D'(Q_T) \\ w^n(0) \leq 0 \text{ et } w^n(0) \rightarrow w(0) \text{ dans } M_b(\Omega) \end{cases}$$

converge dans  $L^r(0, T; W_0^{1,r}(\Omega))$  vers  $w$  (d'après le résultat d'unicité de [3]). Multiplions (4.5) par  $j_k(w^n)$ , où  $j_k$  est définie par

$$j_k(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ r^\varepsilon & \text{si } 0 \leq r \leq k \\ k^\varepsilon & \text{si } k < r \end{cases}$$

où  $0 < \varepsilon < 1$  est tel que  $1 \leq \frac{r}{1-\varepsilon} < \frac{N+2}{N+1}$ , puis intégrons sur  $]0, t[ \times \Omega$  ( $t > 0$ ),

nous obtenons, si on pose  $J_k(r) = \int_0^r j_k(s) ds$

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} J_k(w^n(t)) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{[0 < w^n < k]} (w^n)^{\varepsilon-1} |\nabla w^n|^2 dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} j_k(w^n) \varphi_n dx ds.$$

Passons à la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini dans (4.6), nous aurons

$$(4.7) \quad \int_{\Omega} J_k(w(t)) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{[0 < w < k]} (w)^{\varepsilon-1} |\nabla w|^2 dx ds \leq \int_0^t \int_{\Omega} j_k(w) \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \right).$$

Maintenant nous passons à la limite sur  $k$ , pour obtenir de (4.7)

$$(4.8) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} (w^+)^{1+\varepsilon}(t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{\varepsilon-1} |\nabla w|^2 dx ds \leq \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{\varepsilon} |A| |\nabla w| dx ds.$$

Notons que le membre de droite est borné puisque pour  $r = \sigma'$  on a  $w^{\varepsilon} \in L^{\frac{r}{\varepsilon}}(Q_T)$ ,  $\nabla w \in L^{\frac{r}{1-\varepsilon}}(Q_T)$  et  $A \in (L^{\sigma}(Q_T))^N$ .

De plus on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{\varepsilon} |A| |\nabla w| dx ds &\leq \|A\|_{L^{\sigma}} \left( \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{\varepsilon\sigma'} |\nabla w|^{\sigma'} dx ds \right)^{\frac{1}{\sigma'}} \leq \\ &\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{\varepsilon-1} |\nabla w|^2 dx ds + c(\varepsilon) \left( \int_0^t \int_{[0 < w]} w^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{2-\sigma'}} dx ds \right)^{\frac{2-\sigma'}{\sigma'}}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{\varepsilon-1} |\nabla w^+|^2 dx ds = k(\varepsilon) \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla (w^+)^{\frac{\varepsilon+1}{2}}|^2 dx ds \geq k(\varepsilon) \int_0^t \left( \int_{\Omega} (w^+)^{\frac{\varepsilon+1}{2} \frac{2^*}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

D'où l'on a

$$(4.9) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Omega} (w^+)^{1+\varepsilon}(t) dx + k(\varepsilon) \int_0^t \left( \int_{\Omega} (w^+)^{\frac{\varepsilon+1}{2} \frac{2^*}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c(\varepsilon) \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{2-\sigma'}} dx ds \right)^{\frac{2-\sigma'}{\sigma'}}.$$

Posons  $\alpha = \frac{\sigma'-1}{2-\sigma'}(N-2)$ , puisque  $1 < \sigma' < \frac{N+2}{N+1}$  alors

$$0 < \alpha < 1 \text{ et } \frac{\sigma'}{2-\sigma'} = \alpha \frac{2^*}{2} + (1-\alpha)$$

et par suite nous aurons si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2-\sigma'}{\sigma'}$

$$\begin{aligned} \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{2-\sigma'}} dx ds \right)^{\frac{2-\sigma'}{\sigma'}} &\leq \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{2^*}{2}} dx ds \right)^{\alpha} \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)(1-\alpha)} dx ds \right)^{\frac{2-\sigma'}{\sigma'}} \leq \\ &\left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{2^*}{2}} dx ds \right)^{\alpha p \frac{2-\sigma'}{\sigma'}} \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)(1-\alpha)q} dx ds \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Posons ensuite  $p = \frac{\sigma}{N}$ ,  $p > 1$  et appliquant Young dans cette dernière inégalité nous aurons si  $p' = \frac{p}{p-1}$

$$(4.10) \quad \left( \int_0^t \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{2-\sigma'}} \right)^{\frac{2-\sigma'}{\sigma'}} \leq \frac{k(\varepsilon)}{c(\varepsilon)} \int_0^t \left( \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{2}} \right)^{\frac{2}{\sigma'}} + k'(\varepsilon) \left( \int_0^t \left( \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{p'}} \right)^{\frac{p'}{q}} \right)^{\frac{p'}{q}}$$

Finalement, nous obtenons de (4.9), (4.10), si nous posons  $\sigma(t) = \int_0^t \left( \int_{\Omega} (w^+)^{(\varepsilon+1)\frac{\sigma'}{p'}} \right)^{\frac{p'}{q}}$

$$\sigma'(t) \leq K(\varepsilon)\sigma(t) \quad \text{pour tout } 0 < t < T.$$

Comme  $\sigma(0) = 0$ , ceci entraîne  $\sigma(t) = 0$  pour tout  $0 \leq t < T$ , par suite  $w^+ = 0$  dans  $Q_T$ . Ceci achève la preuve du Lemme 4.1.

**Théorème 4.2.** Considérons  $u, \hat{u}$  deux solutions de (2.4) associées respectivement à  $(j, f)$  et  $(\hat{j}, \hat{f})$  avec  $j \geq \hat{j}$ ,  $f \geq \hat{f}$  et telle que

(4.11) Il existe  $A \in (L^\sigma(Q_T))^N$  avec  $\sigma > N + 2$ , p.p.  $(t, x) \in Q_T$ ,  $A(t, x) \in \partial j(t, x, \nabla \hat{u})$ .

Alors,  $u \geq \hat{u}$  dans  $Q_T$ .

**Preuve.** Posons  $w = \hat{u} - u$ . Par différence nous avons

$$(4.12) \quad \begin{cases} w \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \hat{j}(t, x, \nabla \hat{u}) - j(t, x, \nabla u) \text{ dans } D'(Q_T) \\ w(0) \leq 0 \text{ dans } M_b(\Omega). \end{cases}$$

D'après (4.11), (2.2), il existe  $A \in (L^\infty(Q_T))^N$  telle que

$$(4.13) \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T, \hat{j}(t, x, \nabla u) - \hat{j}(t, x, \nabla \hat{u}) \geq A(t, x) \cdot \nabla(u - \hat{u}).$$

Comme  $j(t, x, \nabla u) \geq \hat{j}(t, x, \nabla u)$ , nous obtenons de (4.12) et (4.13)

$$\begin{cases} w \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \leq A \cdot \nabla w \text{ dans } D'(Q_T) \\ w(0) \leq 0 \text{ dans } M_b(\Omega). \end{cases}$$

Le Lemme 4.1 s'applique: on a donc  $w \leq 0$  dans  $Q_T$ . Ceci achève la preuve du théorème 4.2.

**Corollaire 4.3.** On fait les hypothèses (2.1)-(2.3), on a alors

1) Toute solution régulière de (2.4) (appartenant par exemple à  $L^\infty(0, T; W_0^{1,\infty}(\Omega))$ ) est inférieure à toute solution faible; il y a unicité des solutions régulières.

2) Si, de plus, il existe  $p < \frac{N+2}{N+1}$ ,  $c_2 > 0$  et  $c_2 \in L^1(Q_T)$  telle que

$$(4.14) \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T, \forall r \in \mathbb{R}^N, |j(t, x, r)| \leq c_1 |r|^p + c_2(t, x)$$

alors (2.4) admet une unique solution faible.

**Preuve.** 1) Soit  $u$  une solution faible et  $\hat{u}$  une solution régulière de (2.4) au sens que si  $A \in \partial j(t, x, \nabla(\hat{u}))$  p.p.  $(t, x) \in Q_T$ , alors  $A \in (L^\infty(Q_T))^N$ . Le théorème 4.2. s'applique et on a  $u \geq \hat{u}$ . Si  $u$  est elle-même régulière, comme  $u$  et  $\hat{u}$  jouent des rôles symétriques on a l'unicité.

2) L'existence est assurée par le théorème 3.1. Comme  $j$  est convexe on a

$$(4.15) \quad \forall r \in \mathbb{R}^N, |\partial j(t, x, r)| \leq C_1 |r|^{p-1} + C_2.$$

Maintenant si  $u$  est une solution de (2.4), d'après (4.14), (4.15) on a

$$(4.16) \quad |\partial j(t, x, \nabla u)| \in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T).$$

Comme  $\frac{p}{p-1} > N + 2$ , le lemme 4.1 s'applique, d'où le résultat.

**Remarque 4.2.** L'unicité des solutions  $u$  est en fait assurée dès que  $\partial j(t, x, \nabla u) \in L^\sigma(Q_T)$  avec  $\sigma > N + 2$ . Il existe cependant des solutions même stationnaires de (1.4) ( pour  $\Omega = B(0, 1)$ ), qui n'ont pas cette régularité, par exemple (voir [1])

$$u(t, x) = (2 - N) \ln(|x|) \text{ pour } p = 2$$

$$u(t, x) = C(1 - |x|^\alpha) \text{ avec } \alpha = \frac{p-2}{p-1}, \alpha C = N - 2 + \alpha \text{ pour } p > 2.$$

## References

- [1] **N. Alaa and M. Pierre**, Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures, *Siam J. Math. Anal.* Vol 24, N1, pp 23-35 (1993).
- [2] **P. Baras, M. Pierre**, Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones, *Ann. Ins. H. Poincaré*, 2(1985), p.p. 185-212.
- [3] **P. Baras, M. Pierre**, Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures. *Applicable Analysis*, (1984), Vol. 18, pp. 11-149.
- [4] **P. Baras, M. Pierre**, Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 24(1984) pp. 185-206.
- [5] **S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois**, Asymptotic estimates of solutions of  $u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u|$  in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ . Publication de l'Institut Elie Cartan N 17 (1994).
- [6] **M. Ben Artzi** Global existence and decay for a nonlinear parabolic equations. *Nonlinear analysis Th. Methods and Ap.* Vol 19 N 8, 763-768 (1992).
- [7] **L. Boccardo, T. Gallouët**, Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, *Journal of Functional Analysis* 87, 149-169 (1989).
- [8] **L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel**, Existence results for some quasilinear parabolic equations, *Nonlinear Anal.*, 13, 1989, pp. 373-392.
- [9] **O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'seva**, Linear and quasilinear equations of parabolic type, *Amer. Math. Soc.*, Providence, R.I., 1967.
- [10] **H. Triebel**, Interpolation theory, Function spaces, Differential Operators, North-Holland Mathematical Library, 1978.