ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

VASILE GRADINARU

La méthode de Fourier pour des équations abstraites

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 2 (1996), p. 111-116
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_2_111_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 2, 1996, pp.111-116

LA MÉTHODE DE FOURIER POUR DES EQUATIONS ABSTRAITES

VASILE GRADINARU

ABSTRACT. We will prove the Fourier's method for the heat equation with mixed limit conditions Dirichlet-Neumann. The results are completed with a study concerning initial values and for abstract equations, too. The spectral theory that we resorted to paves the way to apply the principle of this method to other type of equations.

RÉSUMÉ. On prouve la méthode de Fourier pour des équations de la chaleur avec des conditions aux limites mixtes du type Dirichelet-Neumann. Les résultats sont approfondis avec une étude sur les données initiales et pour des équations abstraites. La théorie spectrale utilisée donne des idées pour l'adaptation de la méthode aux autres types des équations.

1. INTRODUCTION

L'idée de la décomposition dans la base de Fourier pour une équation abstraite formulée dans un cadre hilbertien donne une méthode pour le traitement unitaire et élémentaire des plusieurs types d'équations aux dérivées partielles (pour differentes conditions aux limites - voir §4). Dans la suite on se mettra dans le cas d'une équation parabolique. Une étude pour les équations des ondes est entre-temps parue dans [3]. Vu les résultats ci-desous, l'appliquation aux problèmes d'ordre supérieur sera évidente.

On peut trouver la même idée, sans être pourtant dévéloppées, dans [5,§7]. Le résultat principal de ce travail est le théorème de régularité de §3, point de départ pour toute étude numérique ultérieure. La démonstration se fonde sur le théorme de §1, une extension d'un résultat connu ([1], [3]) qui semble ne pas être déjà publié, sinon dans la version de [3].

Je remercie le professeur Gh.Moroşanu pour les discussions sur ce sujet.

2. THÉORIE SPECTRALE ABSTRAITE

Soient V, H deux espaces de Hilbert avec les produits scalaires $(\cdot,\cdot)$ et $<\cdot,\cdot>$ et les normes correspondantes $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_H$ tels que. :

$V \subset H \equiv H' \subset V^*$ (l'injection canonique de V dans H est compacte)
V est dense dans H.

Théorème. Il existe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset V, (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset]0,\infty[$ telles que :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne orthonormale en V;
(ii) $(\sqrt{\lambda_n}u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne orthonormale en H;
(iii) $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne orthonormale en V^*;
(iv) $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite croissante à ∞.

Démonstration: On peut trouver la démonstration dans [3]. Soient:
$J : V \to V^*,\ R : V^* \to V,\ R = J^{-1}$ l'isomorphisme de Riesz,
$Q = R|_V : V \to V$. On voit que $\forall v_1, v_2 \in V : (Qv_1, v_2) =< v_1, v_2 >$. Evidemment Q linéaire, $Ker\, Q = \{0\}$. De plus Q est un opérateur compact.

Soit la suite

$$(\varphi_n) \subset V, \; \|\varphi_n\| \le c.$$

Alors il existe une sous-suite (φ_{n_j}) convergente dans H et telle que (φ_{n_j}) converge faiblement dans V. Donc $\varphi \in V$ et

$$\left\|Q\varphi_{n_j} - Q\varphi\right\|_V = \sup\{(Q(\varphi_{n_j} - \varphi), \psi) \,|\, \psi \in V, \|\psi\|_V \le 1\} =$$

$$\sup\{< \varphi_{n_j} - \varphi, \psi > |\psi \in V \; \|\psi\|_V \le 1\} \le c, \left\|\varphi_{n_j} - \varphi\right\|_H \to 0$$

(car $\|\psi\|_V \le 1 \Rightarrow \|\psi\|_H \le c$).

De plus, Q est autoadjoint: $(Qv_1, v_2) =< v_1, v_2 >= (v_1, Qv_2)$. Par le théorème de Hilbert-Schmidt [1,p.283] on déduit qu'il existe $(\mu_n) \subset]0, \infty[$, $\mu_n \searrow 0$ une suite de valeurs propres et $(u_n) \subset V$ les vecteurs propres correspondants qui forment une base hilbertienne orthonormale dans V. Donc

$$Qu_n = \mu_n u_n \Rightarrow Ju_n = J\left(\frac{1}{\mu_n} \cdot Qu_n\right) = \lambda_n u_n \text{ où } \lambda_n = \frac{1}{\mu_n};$$

On a pour tout $\varphi \in V$:

$(Qu_n, \varphi) =< u_n, \varphi > \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_n} u_n, \varphi\right) =< u_n, \varphi > \Leftrightarrow (u_n, \varphi) = \lambda_n < u_n, \varphi >$ et aussi

$0 = (u_n, u_m) = \lambda_n \cdot < u_n, u_m > \Rightarrow < u_n, u_m >= 0$ pour $n \neq m$.

Soit $h \in H$ tel que $< h, \sqrt{\lambda_n} u_n >= 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de Lax-Milgram [6,p.92] avec $B(u, v) = (u, v)$ on deduit qu' il existe unique $\tilde{u} \in V$ tel que

$$(\tilde{u}, v) =< h, v >, \forall v \in V \text{ d'où } (\tilde{u}, u_n) = 0, \; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \tilde{u} = 0 \Rightarrow h = 0$$

Donc (ii) est vérifiée. Ensuite

$(\lambda_n u_n, \lambda_m u_m)_* = (R(\lambda_n u_n), R(\lambda_m u_m)) = (J^{-1}(\lambda_n u_n), J^{-1}(\lambda_m u_m)) = (u_n, u_m)$. Soit $v^* \in V^*$ tel que $(v^*, \lambda_n u_n)_* = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(v^*, h)_* = 0, \forall h \in H, \tag{1}$$

car $(\sqrt{\lambda_n} u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne dans H . Comme H est dense dans V^* on a

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists h_\epsilon \in H \text{ avec } \|v^* - h_\epsilon\|_*^2 < \epsilon \Rightarrow \|v^*\|_*^2 - 2(v^*, h_\epsilon)_* + \|h_\epsilon\|_*^2 < \epsilon$$

et de (1) on obtient $\|v^*\|_*^2 < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow v^* = 0$.

3. Formulation du Problème et la Méthode de Fourier

Soit le problème:

$$(P) \qquad \begin{cases} y'(t) + Jy(t) = f(t), \; 0 < t < T \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

avec

$$(H_1) \qquad y_0 \in H, f \in L^2(0,T;H).$$

On va chercher la solution $y(t)$ de la forme

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) u_n \tag{2}$$

d'où formellement

$$\begin{cases} b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) = f_n(t) \\ b_n(0) = y_{0n} \end{cases}$$

avec $y_{0n} = (y_0, u_n) = \lambda_n < y_0, u_n >$, $f_n(t) = \lambda_n < f(t), u_n >$ presque pour tout $t \in]0,T[$, $y_0 \in H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} < \infty$; $f(t) \in H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)^2}{\lambda_n} < \infty$. Alors

$$b_n(t) = y_{0n} e^{-\lambda_n t} + \int_0^t f_n(s) e^{\lambda_n (s-t)} ds. \tag{3}$$

Théorème. Supposons toutes les hypothèses satisfaites. Alors la solution y donnée par (2) et (3) appartient à $C(]0,T];V) \cap H^1([0,T];V^*)$ étant l'unique solution faible de (P).

Démonstration: On a

$$[b_n(t)]^2 \leq 2y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + 2\left[\int_0^t f_n(s) e^{\lambda_n(s-t)} ds.\right]^2 \leq 2y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{\lambda_n} \int_0^t f_n^2(s) ds.$$

On fixe $\delta > 0$, $\delta < T \Rightarrow \exists n_\delta : \lambda_n e^{-2\lambda_n t} < 1 \Rightarrow \forall t \in [\delta, T]$ on a:

$$[b_n(t)]^2 \leq \frac{2y_{0n}^2}{\lambda_n} + \int_0^t \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} ds \leq \frac{2y_{0n}^2}{\lambda_n} + \int_0^T \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} ds$$

Mais

$\left\| \sum_{n=m}^{p} b_n(t) u_n \right\|_V^2 = \sum_{n=m}^{p} [b_n(t)]^2 < \epsilon$ pour $p > m > N_\epsilon$, N_ϵ indépendant de t (car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n} = \|f(s)\|_H^2$). Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) u_n$ converge en V uniformément en $t \in [\delta, T]$ et sa somme $y \in C([\delta, T]; V)$.

Comme δ est arbitraire, $y \in C(]0,T];V)$.

De plus

$$b_n'(t) = -\lambda_n e^{-\lambda_n t} y_{0n} + f_n(t) - \lambda_n \int_0^t e^{\lambda_n(s-t)} f_n(s) ds \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}[b_n'(t)]^2 \leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{\lambda_n(s-t)} f_n(s) ds\right)^2 \leq$$
$$\leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \frac{\lambda_n}{2} \int_0^t f_n^2(s) ds.$$

Donc

$$\frac{1}{3}[b_n'(t)]^2 \leq \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} y_{0n}^2 + f_n^2(t) + \frac{\lambda_n}{2} \int_0^t f_n^2(s) ds \tag{4}$$

Alors

$$\frac{[b_n'(t)]^2}{\lambda_n^2} \le c\left[y_{0n}^2 e^{-2\lambda_n t} + \frac{f_n^2(t)}{\lambda_n^2} + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{f_n^2(s)}{\lambda_n}ds\right]$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n'(t)}{\lambda_n}\right)^2 \le c\left(1 + \|f(T)\|_H^2\right).$$

Mais $\left\|\sum_{n=m}^{p}\frac{b_n'(t)}{\lambda_n}\lambda_n u_n\right\|_{V^*}^2 = \sum_{n=m}^{p}\left(\frac{b_n'(t)}{\lambda_n}\right)^2$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)u_n$ converge en $L^2(0,T,V^*)$.
Montrons que y est une solution faible de (P) :
$(y'(t),u_n) + (y(t),u_n) = (\sum_{j=1}^{\infty} b_j'(t)u_j,u_n) + (\sum_{j=1}^{\infty} b_j(t)u_j,u_n) = \frac{1}{\lambda_n}b_n'(t) + b_n(t) =$
$\frac{f_n(t)}{\lambda_n} =< f(t),u_n >$ presque pour tout t $\Rightarrow (y'(t),\varphi) + (Jy(t),\varphi) = (f(t),\varphi)$, $\forall\varphi \in V$ presque pour tout t , donc y est une solution faible de (P). De plus

$$y(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(y_0,u_n)u_n = y_0.$$

L'unicité provient du fait que les développements, de la solution dans éspace H et dans l'éspace $L^2(0,T;H)$ sont uniques.

Proposition.
1)$y_0 \in H, f \in L^2(0,T;H) \Rightarrow y \in C(]0,T];V) \cap H^1([0,T];V^*)$
2)$y_0 \in V, f \in L^2(0,T;H) \Rightarrow y \in C([0,T];V) \cap H^1([0,T];V^*)$
3)$y_0 \in H, f \in L^2(0,T;V)$ et de(4) $\Rightarrow y \in C(]0,T];V) \cap H^1(]0,T];H)$
4)$y_0 \in V, f \in L^2(0,T;V) \Rightarrow y \in C([0,T];V) \cap H^1(]0,T];H)$
5)$y_0 \in H, f \in H^1([0,T];H) \Rightarrow y \in C(]0,T];V) \cap C^1(]0,T];H)$

Démonstration:1)-4) sont évidentes de la démonstration précedente. Prouvons 5). On a:

$$b_n'(t) = -\lambda_n e^{-\lambda_n t}y_{0n} + f_n(0)e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{\lambda_n(s-t)}f_n'(s)ds \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}[b_n'(t)]^2 \le \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}y_{0n}^2 + f_n^2(0) + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{[f_n'(s)]^2}{\lambda_n}ds \Rightarrow$$

$$\frac{[b_n'(t)]^2}{\lambda_n} \le 3\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}\frac{y_{0n}^2}{\lambda_n} + 3\frac{f_n^2(0)}{\lambda_n} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_1}\int_0^T \frac{[f_n'(s)]^2}{\lambda_n}ds.$$

Mais

$$\left\|\sum_{n=m}^{p}\frac{b_n'(t)}{\sqrt{\lambda_n}}\sqrt{\lambda_n}u_n\right\|_H^2 = \sum_{n=m}^{p}\frac{[b_n'(t)]^2}{\lambda_n}$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)u_n$ converge uniformement dans $C^1([\delta,T];H)$.

4. Applications

On peut utiliser cette méthode pour plusieurs types d'opérateurs différentiels. Le plus rapidement est de voir l'effet des résultats ci-dessus pour l'étude du problème de la propagation de la chaleur. Soit un ouvert borné Ω de $\mathbf{R}^n$, de classe C^1. La température peut être maintenue à 0 (ou contrôlée) sur toute la frontière $\partial\Omega$, ou seulement sur une partie Γ_1, sur le complémentaire $\partial\Omega\setminus\Gamma_1$ etant connu le flux de la chaleur (0 aussi).

1^0)Soient $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ avec les produits scalaires

$$(v_1, v_2) = \int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx, < h_1, h_2 >= \int_\Omega h_1 h_2 dx.$$

Alors (P) s'ecrit

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f, \ x \in \Omega, t \in]0,T[\\ y = 0, x \in \partial\Omega, t \in]0,T[\\ y(0,x) = y_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

2^0)Soient $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$, $H = L^2(\Omega)$ avec les produits scalaires (voir [4,p20])

$(v_1, v_2) = \int_\Omega \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dx$, $< h_1, h_2 >= \int_\Omega h_1 h_2 dx$, où $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$.

Alors on peut considerer (P):

$$\begin{cases} y_t - \Delta y = f, \ x \in \Omega, t \in]0,T[\\ y = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\setminus\Gamma_1 \\ y(0,x) = y_0(x), x \in \Omega \end{cases}$$

Rémarques

1) Si dans l'exemple 2^0) on prend $y_0 \in V$, $Jy_0 \in V$ et $f \in H^1([0,T];H)$, on obtient $y \in C([0,T],V) \cap C^1([0,T];H)$, c'est-à-dire la solution classique.

2) Le cas non homogène peut être réduit au cas homogène pour appliquer les résultats ci-dessus (voir aussi [2,p35].)

Bibliographie

[1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., "*Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza*", Nauka, Moscou, 1989

[2] Lions J.L., Magenes E., "*Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*", tome 2, Dunod, Paris 1968.

[3] Morosanu Gh.,Sburlan S. ,"*Multiple orthogonal seuqences method and applications* ", An.St.Univ. "Ovidius", Constantza, 3(1995)

[4] Nečas J., "*Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*", Masson et Academia, Paris et Prague, 1967

[5] Raviart P.A., Thomas J.M., "*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*", Masson, Paris, 1988.

[6] Yosida,Y, *"Functional Analysis"*, Springer-Verlag, 1978

Gradinaru Vasile

Faculté des Mathématiques; Section des Mathématiques Appliquées, Univ. "Al.I.Cuza", Iasi,Roumanie, cour.éléc: gradinar@uaic.ro