ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

JEAN-CLAUDE ZAMBRINI

Feynman et les mathématiques

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 3, nº 1 (1996), p. 211-226
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1996__3_1_211_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 3, N° 1, 1996, pp.211-226

FEYNMAN ET LES MATHEMATIQUES

JEAN-CLAUDE ZAMBRINI

Résumé - Nous décrivons, dans les grandes lignes, une version probabiliste, inspirée par E.Schrödinger, de la méthode de quantification de systèmes dynamiques classiques élémentaires par les intégrales de chemin (Feynman). Celle-ci suggère de nouvelles orientations dans l'étude de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, notamment l'utilisation de lois de conservation probabilistes pour la résoudre, de la même façon que Jacobi pouvait intégrer (par "quadrature") certaines équations du mouvement classiques.

Abstract - We summarize a probabilistic version, inspired by E.Schrödinger, of Feynman's quantization method for elementary classical systems via path integrals. This suggests new perspectives for the study of Hamilton-Jacobi-Bellman equation. In particular, the use of some probabilistic conservation laws should allow us to solve it, as Jacobi was able to integrate (by "quadrature") some classical equations of motion.

0.Introduction.

Un illustre collègue l'aurait sans doute formulé ainsi: le (bon) sens des idées de Feynman est la chose du monde la mieux partagée: on rencontre rarement un mathématicien ou physicien qui ne soit convaincu de l' avoir compris [0]. Une multitude de versions rigoureuses de son approche dite des "intégrales de chemin", en physique quantique, se bousculent sur le marché des idées. On peut donc s'étonner d'avoir à y revenir.

Ce qui intéresse les probabilistes, en mécanique quantique, ce sont les probabilités. Or le problème associé à toute version rigoureuse de la représentation Feynmanienne de la fonction d'onde ψ d'un système physique par une intégrale de chemin (ou intégrale fonctionnelle) réside dans le fait qu'elle triche avec les fondements mathématiques mêmes de la mécanique quantique de Von Neumann [1]. En effet, le concept élémentaire, pour les probabilistes, d'espérance conditionnelle, est étranger à cette théorie. La seule notion de probabilité qui y figure est l'interprétation, due à M.Born, selon laquelle

$$P\{\text{Système } \in dy\} = \bar{\psi}\psi(y,t)dy \tag{0.1}$$

où $\psi(y,t)$ dénote l'état quantique du système au temps t, $\bar{\psi}$ sa conjuguée complexe et y un point de l'espace de configuration du système. P est une probabilité absolue (au sens de Kolmogorov, le seul connu dans la nature). Bien que jamais infirmée par l'expérience, et donc incontroversée, (0.1) ne repose pas sur des mathématiques claires et distinctes; aucun espace de probabilité n'est défini, ou définissable, en mécanique quantique pour rendre compte de toutes ses conséquences.

Un effet navrant de cet état de choses est que les probabilités figurant dans la plupart des représentations rigoureuses des intégrales de Feynman n'ont rien à voir, structurellement, avec les probabilités quantiques. Or, il semble bien que le rôle de ces probabilités-là soit tout autre qu'un prétexte à faire des mathématiques. Le problème auquel nous sommes confrontés, dans la mathématisation de Feynman, n'est donc pas technique, il est conceptuel (il deviendra technique quand le cadre conceptuel sera fixé).

La nature ambivalente des relations entre les idées de Feynman et les mathématiques est source d'irritation ou de détresse pour certains mathématiciens, qui en déduisent que le dialogue avec les physiciens théoriciens est impossible. Elle est perçue comme stimulante et génératrice de véritable progrès par d'autres, qui recherchent activement ce dialogue. Albert Badrikian était de ceux-ci; il aimait les mathématiques motivées plutôt qu'appliquées. Et, très au fait de l'histoire de sa discipline, savait que, de toutes les motivations possibles, celles inspirées par la physique théorique ne sont pas toujours les plus superficielles.

Je suis honoré de pouvoir illustrer cet aspect de sa chaleureuse personnalité par l'essai qui va suivre. On y décrit une conjecture concernant l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et quelques raisons de penser que cette conjecture est correcte. Elle s'insère dans un programme de réinterprétation probabiliste des idées de Feynman qui, bien que dû, en essence, à E.Schrödinger, n'a été développé que depuis une dizaine d'années. Afin de prendre en compte les réserves exprimées plus haut, j'adopterai une approche historique en montrant pourquoi ce programme me paraît échapper aux plus sévères d'entre elles, et quels sont ses véritables objectifs. Mais surtout, puisque nous sommes réunis en hommage à Albert Badrikian, j'espère échapper au vieil atavisme académique qu'il aimait évoquer à sa manière: "Il faut faire du neuf, mais rigoureusement identique à l'ancien".

1.L'action classique et la mécanique quantique. Nous considérerons exclusivement le plus simple système dynamique classique:. une particule de masse unité dans l'espace Euclidien, soumise à un potentiel scalaire V. Son Lagrangien est

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (\dot{q}, q, t) &\to \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 - V(q,t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $|.|$ est la norme Euclidienne.

Vers 1920, de Broglie suggéra que l'état du système quantique associé à (1.1) est décrit par une fonction d'onde ψ dans $L^2(\mathbb{R}^3, dq)$. En 1926 [2], Schrödinger postula que l'équation du mouvement de l'état ψ est

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi \\ &\equiv H\psi \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck ($\hbar > 0$) et H est l'observable Hamiltonienne, bornée inférieurement.

On oublie souvent, aujourd'hui, l'origine de cette équation: Schrödinger postule que $\psi(q,t)$ est de la forme $exp\frac{i}{\hbar}S(q,t)$, où S est une généralisation de la fonctionnelle d'action classique $S_c[q(.);0,t]$:

$$\begin{aligned} S_c &: \Omega_c \to \mathbb{R} \\ q(.) &\to \int_0^t L(\dot{q}(s), q(s), s)ds \end{aligned} \tag{1.3}$$

dont le domaine, pour V régulier, est l'espace des chemins réguliers:

$$\Omega_c = \{q : I = [0,t] \to \mathbb{R}^3, \text{de classe } C^2, \text{ avec } q(0) = q_0 \text{ et } q(t) = y \text{ fixés}\} \tag{1.4}$$

et l'action (1.3) est évaluée le long d'une extrémale γ, solution des équations du mouvement classiques ("Euler-Lagrange"):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.5}$$

avec les conditions aux bord de (1.4).

Dans la représentation $\psi = exp\frac{i}{\hbar}S$, S doit donc être compris comme fonction du point final $q(t) = y$ d'une extrémale γ. En effet, localement (autour de la condition initiale (q_0, t_0)), il et connu classiquement que

$$S_c(y,t) = \int_\gamma L ds \tag{1.6}$$

est bien définie (S_c est régulière dans un voisinage de γ seulement si (y,t) n'est pas un point conjugué [3]). De plus, si q_0 est fixé , la différentielle de l'action est

$$dS_c = pdq - hdt \tag{1.7}$$

où $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ et $h = pq - L$ définissent respectivement les observables classiques d'impulsion et d'énergie (au temps t). Pour le cas "hyperrégulier" ([3] (2)) (1.1), $p = \dot{q}$ et $h(p,q,t) = \frac{p^2}{2} + V(q,t)$.

La forme différentielle (1.7) est dite de Poincaré-Cartan. Si le système est conservatif (i.e. $V = V(q)$ seulement) l'énergie h est une constante du mouvement de (1.5). L'ensemble de celles-ci forme une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson [3].

Dans quel sens, selon Schrödinger, la fonction S ci-dessus généralise- t'elle l'action classique S_c?

Après substitution de $\psi = exp\frac{i}{\hbar}S$ dans (1.2), S satisfait l'équation non linéaire dans un domaine de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 + \frac{i\hbar}{2}\Delta S + V = 0 \tag{1.8}$$

Formellement, pour $\hbar = 0$, Eq (1.8) se réduit à l'équation classique d'Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S_c}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla S_c|^2 + V = 0 \text{ , c'est-à-dire,}$$

$$\frac{\partial S_c}{\partial t} + \hbar(\nabla S, y, t) = 0 \text{ ,} \tag{1.9}$$

elle-même conséquence de la différentielle (1.7) de l'action classique.

Pour un probabiliste, le passage de (1.9) à (1.8) évoque la perturbation du système dynamique classique par un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, si ce n'est, qu'ici, la matrice de diffusion devrait être $i\hbar Id$, où Id est l'identité dans $\mathbb{R}^3$. Cela suggère toutefois que quantifier ce système classique élémentaire se réduit à substituer l'espace des chemins Ω_c de (1.3) par $C([0,t];\mathbb{R}^3)$. Cette idée-là a l'âge de la mécanique quantique elle-même: on en trouve les traces dans les écrits de la plupart de ses pères fondateurs.

C'est néanmoins Feynman qui, vers 1950, la développera en réinterprétant systématiquement la mécanique quantique de (1.2), selon Von Neumann, en termes de pseudo-diffusions $\omega(.)$. Le postulat initial de Schrödinger est réinterprété comme l'existence d'une pseudo-mesure sur $\Omega^y = \{\omega \in C([0,t];\mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \omega(t) = y\}$ en terme de laquelle, en particulier, toute solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger (1.2), avec condition initiale régulière ψ_0 s'écrit

$$\psi(y,t) = \int_{\Omega^y} \psi_0(\omega(0))e^{\frac{i}{\hbar}S_c[\omega(.);0,t]}\Pi_{0\leq s\leq t}d\omega(s) \tag{1.10}$$

De nombreux travaux ont porté sur le sens à donner à l'intégrale de chemins symbolique (1.10). Certains d'entre eux sont mentionnés par d'autres conférenciers. La stratégie de Feynman fondée sur (1.10) est, en revanche, largement ignorée. C'est pourtant elle qui détermine la pertinence de toute version rigoureuse de l'intégrale (1.10).

Les observables quantiques A (des opérateurs auto-adjoints définis sur des domaines $\mathcal{D}_A$ denses de $L^2(\mathbb{R}^3)$, selon Von Neumann) deviennent des fonctions intégrables de la variable aléatoire $\omega(.)$. L'observable de position $Q : \mathcal{D}_Q \to L^2(\mathbb{R}^3)$,

$\psi(y) \to y\psi(y)$ est fondamentale: elle coïncide avec le processus $\omega(.)$ lui-même et l'interprétation probabiliste de Born (0.1), due à la famille spectrale $E^Q(\lambda)$ de Q, se réduit à une affirmation sur sa loi de probabilité. Plus généralement, puisque l'espérance quantique d'une observable A dans l'état $\psi(\in \mathcal{D}_A)$ est définie par

$<\psi|A\psi>= \int_{\mathbb{R}} d\lambda < \psi|E^A(\lambda)\psi>$ (où $< .|. >$ est le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^3)$ et $E^A(\lambda)$ la famille spectrale de A), Feynman définit la variable aléatoire a associée à A dans l'état ψ de sorte que

$$\int \bar{\psi} A\psi dy = \int \bar{\psi}\psi(\frac{A\psi}{\psi})dy =< a(\omega(.),.) >_F \tag{1.11}$$

où $< . >_F$ denote l'espérance par rapport à la "mesure" (0.1) à un temps fixé. Pour des observables qui sont des fonctionnelles "arbitraires" $F[\omega(.)]$ du processus ω, Feynman introduit une formule d'intégration par parties par rapport à la mesure formelle de (1.10) (aussi notée $< . >_F$) . Il en déduit notamment la quantification suivante de l'équation du mouvement classique (1.5) pour le Lagrangien (1.1):

$$< \frac{\omega(t+\Delta t) - 2\omega(t) + \omega(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2} >_F = - < \nabla V(\omega(t)) >_F \tag{1.12}$$

dans laquelle il évite soigneusement de prendre la limite "continue" $\Delta t \downarrow 0$: celle-ci ferait apparaître des divergences dues à l'emploi du calcul différentiel ordinaire pour les fonctionnelles de $\omega(.)$.

Feynman déduit néanmoins de ce calcul différentiel formel sur Ω^y les propriétés essentielles de la particule quantique. Pour $\hbar = 0$ ce sont des propriétés des trajectoires de Ω_c, extrémales de l'action (1.3).

Hélas, le contenu probabiliste de la stratégie originale de Feynman s'est révélé aussi pauvre que celui de la mécanique quantique de Von Neumann: les premières preuves d' inexistence d'une mesure (sigma additive) complexe sur Ω^y comme celle de Feynman sont dues à Cameron [5]. Le "processus aléatoire" ω n'est donc qu'un leurre. Faut-il, pour autant, renoncer à comprendre Feynman?

2.Versions Euclidiennes. Puisque le Hamiltonien quantique H de (1.2) est borné inférieurement, une solution continue de l'équation de Schrödinger devient, sous prolongement analytique $t \to it$, une solution de l'équation de la chaleur

$$\hbar \frac{\partial \eta}{\partial t} = H\eta \tag{2.1}$$

dont les solutions nonnégatives, en particulier, admettent une représentation probabiliste en terme du Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. C'est l'approche de Kac, dite "Euclidienne" en physique mathématique [6]. Mais la relation avec de nombreux aspects de la stratégie de Feynman (en particulier sa symétrie temporelle, nous y reviendrons) est perdue.

Considérons plutôt la version Euclidienne du postulat initial de Schrödinger (pour (1.2)):

$$\eta = exp - \frac{1}{\hbar}A \tag{2.2}$$

Alors A résout

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla A|^2 + \frac{\hbar}{2}\Delta A + V = 0\ ,\ (t,y) \in [r,u] \times \mathbb{R}^3 \tag{2.3}$$

pour une condition finale $A(y,u) = A_u(y), y \in \mathbb{R}^3$. C'est l'équation non linéaire de Hamilton-Jacobi-Bellman [7] (HJB), de type uniformément parabolique ("semi-linéaire"). Si V et A_u sont continues et bornées, elle a une unique solution régulière (i.e., dans $C_b^{1,2}(\mathbb{R}^3 \times [r,u])$). Cette unique solution est continue à croissance polynomiale si V et A_u sont approximables par des fonctions continues et bornées [8].

Supposons donc qu'une solution régulière A du problème (2.3) soit connue. On montre alors:

Théorème [7]. *Pour toute diffusion $z(s)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et matrice de diffusion $\hbar Id$, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}, \{\mathcal{P}_s\}_{s\in[r,u]}, P)$, adaptée à la filtration croissante $\mathcal{P}_s$ et admettant une dérivée en avant*

$$Dz(s) = lim_{\Delta s \downarrow 0} E[\frac{z(s+\Delta s) - z(s)}{\Delta s}|\mathcal{P}_s] \tag{2.4}$$

$$t.q.\ E\int_r^u |Dz(s)|^m ds < +\infty, \quad \forall m \in N$$

et telle que la formule de Dynkin soit vraie pour tout élément d'un espace $\mathcal{D}$ assez grand contenu dans le domaine du générateur de $z(s)$, on a:

$$A(y,t) \leq E_{y,t}\{\int_t^u \frac{1}{2}|Dz(s)|^2 + V(z(s),s)ds + A_u(z(u))\} \tag{2.5}$$

pour tout $(t,y) \in [r,u] \times \mathbb{R}^3$. De plus, le minimum de l'action $J[z(.)]$ (définie comme le membre de droite de (2.5)), est atteint sur une diffusion Markovienne de drift égal à

$$D\bar{z}(s) = -\nabla A(\bar{z}(s),s) = \hbar\frac{\nabla\eta}{\eta}(\bar{z}(s),s)\ . \tag{2.6}$$

Dans ce cas (2.5) devient une égalité.

Le minimum de la fonctionnelle d'action $J[z(.)]$ est, bien sûr, souvent irrégulier. On l'interprétera alors comme une solution "de viscosité" de (HJB) [9]. Cette notion de solution faible est appropriée au problème de perturbation singulière constitué ici par le passage du cas classique ($\hbar = 0$) au cas quantique ($\hbar > 0$) dans l'équation (2.3). En particulier, elle préserve l'unicité de sa solution.

Le Lagrangien de $J[z(.)]$ est classique: $L(\dot{q}, q, s) = \frac{1}{2}|\dot{q}|^2 + V(q, s)$. Le changement de signe du potentiel V est conséquence familière de $t \to it$ dans le problème classique du §1. Il en résultera, entre autres, que les symétries de l'action classique S_c seront naturellement quantifiées (cf. §4). L'action J et (2.2) fournissent une intégrale de chemin pour l'équation (2.1). C'est une représentation exacte (et non pas seulement asymptotique) de toute solution régulière positive de (2.1), n'utilisant rien d'autre que l'information disponible sur le système classique (i.e. son Lagrangien). Elle respecte donc scrupuleusement le fond sinon la forme des règles du jeu proposées par Feynman.

La caractérisation du point critique de l'action par $Dz(s) = -\nabla A(z(s), s)$ est la quantification de $p = \nabla S_c$ (cf. (1.7)). Le changement de signe provient de notre conditionnement dans le passé de $J[z(.)]$ (cf.(2.5)), qui contraste avec celui de (1.6). Cette anomalie sera élucidée au § suivant.

En fait, sur le processus critique z, nous vérifions la version quantifiée de la forme différentielle de Poincaré-Cartan (1.7),

$$-dA(z(t), t) = p(t)odz(t) + \varepsilon(t)dt \tag{2.7}$$

où o et le produit de Stratonovich [10] et les variables aléatoires d'impulsion et d'énergie deviennent ici, respectivement,

$$\begin{aligned} p(t) &= Dz(t) = B(z(t), t), \\ \varepsilon(t) &= (-\frac{1}{2}B^2 - \frac{\hbar}{2}\nabla.B + V)(z(t), t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'existence de la 1-forme différentielle régulière exacte (2.7) implique la validité de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (2.3).

Quelle est la quantification du fait que les caractéristiques de la 1-forme $pdq - hdt$ sur l'espace de phase étendu (q, p, t) sont les équations classiques du mouvement [3]?

Proposition. *Quand Dz (i.e. η, d'après (2.6)) est régulier, le point critique de l'action J du théorème précédent satisfait p.s., pour $t \in I$,*

$$DDz(t) = \nabla V(z(t), t) \quad et \tag{2.9}$$

$$D\varepsilon(z(t), t) = \frac{\partial V}{\partial t}(z(t), t) \tag{2.10}$$

La preuve est un calcul immédiat, utilisant le générateur de la diffusion critique, à savoir, par le théorème,

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \hbar \frac{\nabla \eta}{\eta}.\nabla + \frac{\hbar}{2}\Delta \quad , \tag{2.11}$$

les définitions (2.8) et le fait que η est solution positive régulière de (2.1), pour $t \in I$.

L'espérance de (2.9) est la version probabiliste de (1.12), celle de (2.10) correspond à la conservation d'énergie quantique.

Corollaire. *Supposons notre système classique conservatif. Alors l'énergie (2.8) est une $\mathcal{P}_t$-martingale, $t \in I$.*

Si V est régulier et tel que le spectre σ_H du Hamiltonien de (1.2) est purement discret (par exemple pour V borné inférieurement et $V(q) \to \infty$ lorsque $|q| \to \infty$) alors $\eta(y,t) = \chi_0(y)e^{E_0 t}$, avec $E_0 = inf \sigma_H$ et χ_0 l'état fondamental (positif, par Feynman-Kac) de H, est associé à une diffusion $z(t)$, point critique de l'action J. Ce $z(t)$ est un processus stationnaire, d'impulsion $p(t) = Dz(t) = \hbar \frac{\nabla \chi_0}{\chi_0}(z(t))$ et sa martingale d'énergie ε se réduit à E_0. Mais $\chi_0 e^{E_0 t}$ résout trivialement (2.1) et correspond à une solution dynamiquement triviale de (2.9). Pour toute solution positive η non stationnaire de (2.1), l'énergie (2.8) demeure, selon le corollaire, une variable aléatoire privilégiée.

Avant de poursuivre, soulignons le défaut conceptuel majeur d'une telle version probabiliste de la mécanique. Dans le cas conservatif, la mécanique classique est invariante sous renversement du temps, de même que sa généralisation, la mécanique quantique. Si une évolution est compatible avec les équations du mouvement (pour des conditions aux bords données), celle où $t \to -t$ doit l'être aussi (sous renversement approprié des conditions aux bords). Or nos caractérisations de $z(t)$ utilisent la filtration croissante $\mathcal{P}_t$ et une version apparemment irréversible [11] de propriété de Markov, à savoir

$$\forall C \in \mathcal{F}_t,\ t \in I,\ P(C|\mathcal{P}_t) = P(C|z(t)) \tag{2.12}$$

presque sûrement, où $\mathcal{F}_t$ est la filtration décroissante représentant l'information future. Puisque les "mesures" de Feynman respectent, par construction, la symétrie temporelle de la mécanique quantique, faut-il renoncer aussi à toute version Euclidienne?

3.Schrödinger et le renversement du temps.

C'est ici qu'intervient une seconde idée de Schrödinger, postérieure de 5 ans seulement à celle du §1, mais moins connue: pour trouver l'analogue probabiliste de la quantification de notre système dynamique classique (§1), il propose de chercher des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telles que

$$P\{\text{Système} \in dy\} = \eta\eta^*(y,t)dy, \quad \forall t \in I \tag{3.1}$$

où η, η^* sont deux solutions positives, régulières sur I, respectivement de (2.1) et de son équation adjointe

$$(3.2) \qquad -\hbar\frac{\partial\eta^*}{\partial t} = H\eta^*$$

(3.1) est la version probabiliste (i.e. Euclidienne) de l'interprétation fondamentale de Born (0.1). La conjugaison complexe devient un renversement du temps. De telles mesures ont été construites en 1985-86; elles satisfont une version réversible de propriété de Markov, due à Bernstein (1932), d'où leur nom (en termes modernes, il s'agit de champs Markoviens à une dimension et trajectoires continues; cf. [12](2) pour les références). Notons également $z(t)$ les diffusions associées à cette nouvelle idée de Schrödinger.

Théorème. *Soient $p_r(x)dx$ et $p_u(z)dz$ deux densités de probabilité strictement positives, arbitrairement données aux bords de l'intervalle $I = [r, u]$. Si le potentiel V du Hamiltonien H de (1.2) est dans la classe de Kato [12(2)], il existe une unique diffusion de Bernstein $z(t)$, $t \in I$, telle que $p_r(x)dx = \eta\eta^*(x, r)dx$ et $p_u(z)dz = \eta\eta^*(z, u)dz$. Elle résout, par rapport, resp., à une filtration croissante $\mathcal{P}_t$ et une filtration décroissante $\mathcal{F}_t$, les équations différentielles stochastiques*

$$(3.3) \qquad dz(t) = \sqrt{\hbar}dw(t) + Dz(t)dt$$

$$(3.4) \qquad d_*z(t) = \sqrt{\hbar}d_*w_*(t) + D_*z(t)dt$$

où w (resp. w_*) sont des procesus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_t$ (resp. $\mathcal{F}_t$) adaptés.

Dans les équations (3.3) et (3.4), d et d_* dénotent les différentielles en avant et en arrière de Nelson [13], D et D_* les générateurs associés. Toutefois, le cadre résultant ici sera très différent de sa "Mécanique stochastique", qui n'a que peu de rapports avec les idées de Feynman.

Les propriétés de (3.3) sont celles décrites dans le §2. Celles de (3.4) sont leurs renversés dans le temps, au sens de Schrödinger. Puisque toute diffusion de Bernstein est symétrique sous renversement du temps, $z \to z$. Cependant $Dz \to -D_*z$, où (cf.(2.4))

$$D_*z(s) = lim_{\Delta s \downarrow 0} E[\frac{z(s) - z(s - \Delta s)}{\Delta s}|\mathcal{F}_s]$$

Considérons la fonctionnelle d'action $J[z(.)]$ de (2.5) dans le cas conservatif. Sous renversement du temps dans $I = [r, u]$ elle devient

$$J^*[z(.)] = E^{yt}\int_r^t \{\frac{1}{2}|D_*z(s)|^2 + V(z(s))\}ds + A_r^*(z(r))$$

où le suffixe (y,t) de l'espérance souligne qu'ici le conditionnement est dans le futur de l'intervalle d'intégration. Posons $J^*[z] = A^*(y,t)$. Alors le point critique de J^* satisfait $\forall s \in I$,

$$\begin{aligned} D_* z(s) &= \nabla A_*(z(s),s) \\ &= -\hbar \frac{\nabla \eta^*}{\eta^*}(z(s),s) \ , \end{aligned} \tag{3.5}$$

proprieté renversée du temps de (2.6). C'est la quantification directe du résultat classique de (1.7), requérant l'usage de (3.4) et non pas (3.3), en d'autres termes de la version probabiliste de l'intégrale de chemin pour $\overline{\psi}$ plutôt que (1.10). L'existence, pour tout $t \in I$ et toute fonctionnelle régulière, espérance d'une intégrale adaptée à $\mathcal{P}_t$, de sa renversée dans le temps adaptée à $\mathcal{F}_t$ est la clef de la symétrie temporelle de cette construction, évitant les contradictions liées à l'usage naïf du conditionnement $z(t) = y$. En germe, cette idée figure déjà dans les travaux originaux de Feynman. Mais l'étude mathématique du calcul spécifique de fonctionnelles associé au renversement du temps de Schrödinger ne fait que commencer.

La construction de mesures de Bernstein utilise des résultats de A.Beurling et B.Jamison (cf.[14] et [15]). La loi de z sur $C(I,\mathbb{R}^3)$ est absolument continue par rapport à celle du Wiener w de (3.3) et sa densité de Radon-Nikodym $\rho[z]$ s'écrit explicitement en termes de η et du potentiel V. De même, bien sûr, pour la fonctionnelle renversée du temps $\rho^*[z]$ par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$.

Les fonctionnelles d'action J et J^* permettent de rendre rigoureux le calcul différentiel formel de Feynman sur Ω^y (cf.§1). En particulier, sa formule d'intégration par parties, réinterprétée en termes des mesures de Bernstein et du calcul de Malliavin, permet d'obtenir une version probabiliste de tous ses résultats [15], pour chacune des filtrations $\mathcal{P}_t$ et $\mathcal{F}_t$.

4.Peut-on résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman?

En mécanique classique, la solution générale de (1.9) a, en fait, peu d'intérêt. On définit une intégrale complète de (1.9) dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ comme

$$S_c(q,t,c) \tag{4.1}$$

où $c = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ est un vecteur constant. Si elle est connue, un fameux théorème de Jacobi affirme que les équations du mouvement s'intègrent ("par quadrature" [3]). Les β_i sont les constantes du mouvement ("intégrales premières" des équations du mouvement).

Un tel théorème serait très intéressant pour l'équation (HJB) (2.3), dont les solutions explicites sont rarement connues. Il n'existe pas encore. Voici quelques arguments suggérant qu'il est, néanmoins, accessible. Nous nous limiterons désormais à la description en termes de $\mathcal{P}_t$.

On a vu (§2) que l'énergie ε d'un système conservatif est une $\mathcal{P}_t$-martingale. Voici comment en obtenir d'autres, associées à (2.3):

Théorème de Noether [16]. *Soit $z(t)$ un extrémal régulier de l'action J du §2. J est dite invariante sous le groupe de transformations $Q = z + \alpha X(z,t)$, $\tau = t + \alpha T(t)$, pour $T \in C^1(I;\mathbb{R})$ préservant l'orientation, $X \in C^2(\mathbb{R}^3 \times I;\mathbb{R}^3)$, si , $\forall a < b$ dans I,*

$$(4.2) \qquad E_a \int_a^b L(Dz(t), z(t), t)dt = E_{\tau_a} \int_{\tau_a}^{\tau_b} L(DQ(\tau), Q(\tau), \tau)d\tau + o(\alpha)$$

Dans ce cas $Dz^i(t)X_i(z(t),t) + \varepsilon(z(t),t)T(t)$, (convention de sommation d'Einstein, $i = 1,2,3$)

est une $\mathcal{P}_t$-martingale du système ($t \in I$) décrit par (2.9).

Les processus $Q(\tau)$ de (4.2) sont définis par l'identification

$$(4.3) \qquad Q(t + \alpha T(t)) = z(t) + \alpha X(z(t),t) \quad , t \in I$$

qui fournit une famille à un paramètre, $Q^\alpha(t)$, de diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ incluant l'extrémal $z(t)$. Si Ω_a est l'espace des chemins, son espace tangent (au sens du calcul de Malliavin, légèrement généralisé afin de permettre des variations du paramètre temps [17,19]) utilise la variation à temps constant

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} h(t) &= lim_{\Delta\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} E[Q^{\alpha+\Delta\alpha}(t) - Q^\alpha(t)|\mathcal{P}_t] \\ &= X(z(t),t) - Dz(t)T(t) \ , \end{aligned}$$

étendant aux diffusions une formule de Cartan [18,p3]. Le terme de droite de (4.2) devient indépendant du paramètre τ si l'espace des chemins est étendu à (τ, Q). Pour la famille ci- dessus, on considérera donc

$$(4.5) \qquad J[\tau^\alpha, Q^\alpha] = E_a \int_a^b L\left(\frac{DQ^\alpha(t)}{d\tau^\alpha/dt}, Q^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right)\frac{d\tau^\alpha}{dt}dt$$

L'invariance (4.2) signifie que la variation δJ de J en (t,z) dans les directions (T,X) est nulle. On calcule, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} 0 = \delta J[t,z](T,X) =& E_a[Dz(t)X(z(t),t) + \varepsilon(z(t),t)T(t)|_a^b] \\ &- E_a \int_a^b (DDz(t) - \nabla V(z(t),t)h(t)dt \end{aligned}$$

La validité de (2.9) presque partout permet de conclure.

Par exemple, la conservation d'énergie du corollaire, §2, correspond à $X = 0, T = 1$. L'algèbre de Lie des constantes du mouvement classiques devient donc, après quantification, une collection de $\mathcal{P}_t$-martingales. Quand $\hbar = 0$, ces martingales se réduisent aux constantes du mouvement du système classique sous-jacent.

L'idée du Théorème est que les "directions" X, T telles que l'invariance de l'action J est satisfaite sont précisément les coefficients des champs de vecteurs formant le groupe de symétrie de l'équation de la chaleur (2.1). En effet, étendons la définition d'invariance du Théorème en introduisant un autre coefficient $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^3 \times I; \mathbb{R})$ (la "divergence") dans le domaine du générateur D, associé au terme supplémentaire

$$\alpha E_a \int_a^b D\Phi(z(t), t) dt$$

dans le membre de droite de (4.2). On vérifie qu'aux transformations de z et t, cela revient à adjoindre celle de la solution η de (2.1) définissant l'extrémal $z(t)$:

$$\tilde{\eta} = \eta + \frac{\alpha}{\hbar}\Phi(z, t)\eta$$

Alors $X_i, i = 1, 2, 3$, T et Φ caractérisent le groupe de symétrie de l'équation (2.1), et la $\mathcal{P}_t$-martingale du Théorème se voit ajouter le terme $-\Phi(z(t), t)$. Par exemple, pour le cas libre $V = 0$, ce groupe de Lie est de dimension 13.

On vérifie aussi que, dans les nouvelles variables (Q, τ) du Théorème, $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$, il demeure vrai que

$$DDQ(\tau) = \nabla V(Q(\tau), \tau), \quad \text{presque partout} \tag{4.6}$$

En effet, dans les nouvelles variables Q, τ et $\tilde{\eta}$, l'équation (2.1) est encore vérifiée, par construction.

Ces transformations généralisent donc des transformations "canoniques" classiques ([3]).

Le premier pas dans l'application du théorème classique de Jacobi consiste à utiliser la constante d'énergie $h = e$ d'un système conservatif pour éliminer le paramètre temps. On cherche une intégrale complète de (1.9) de la forme

$$S_c(q, t, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = W_c(q, \beta_1, \beta_2, e) - et \tag{4.7}$$

En calcul classique des variations cette réduction correspond à adopter le principe de Maupertuis [18,3] dont l'espace des chemins sous-jacent est

$$\begin{aligned} \Omega_c^M = \{(\tau, q) | \tau \in C^1([a, b]; \mathbb{R}), \tau(a) = a, \dot{\tau} > 0, q \in C^2([a, \tau(b)]; \mathbb{R}^3), \\ q(a) = q_a, q(\tau(b)) = q_b \text{ fixés et } \quad h(q(\tau(t)), \dot{q}(\tau(t))) = e, \ \forall t \in [a, b]\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le théorème de Maupertuis affirme que $q : I \to \mathbb{R}^3$, de classe C^2, est extrémale de l'action (1.3), pour $I = [a,b]$, $q(a) = q_a$, $q(b) = q_b$ et énergie e ssi

$$\delta W_c[t,q](\delta t, h) = 0, \quad \forall(\delta t, h) \in T_{(t,q)}\Omega_c^M, \; o \;\; h = \delta q - \dot{q}\delta t$$

(version classique de (4.4)) et $W_c : \Omega_c^M \to \mathbb{R}$ est l'action de Maupertuis:

$$W_c : (\tau, q) \to \int_a^{\tau(b)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\tau) dq(\tau) = \int p dq \tag{4.9}$$

Comme (2.7) permet de l'anticiper, on démontre la généralisation suivante [19]:

Théorème. *Une diffusion de Bernstein z avec $z(a) = z_a, z(b) = z_b$ et énergie $\varepsilon_a = \varepsilon(z_a, a) = E_a[\varepsilon(z(s), s)]$, $s \in [a,b]$ est extrémale de l'action*

$$J[z] = E_a \int_a^b \{\frac{1}{2}|Dz(s)|^2 + V(z(s))\} ds$$

ssi $\delta W[t,z](\delta t, h) = 0$, $(\delta t, h)$ dans l'espace tangent des variations admissibles (au sens du calcul de Malliavin généralisé, avec $h = \delta z - Dz\delta t$ (cf. (4.4)), et W est l'action stochastique de Maupertuis:

$$W : (\tau, Q) \to E_a \int_a^{\tau(b)} p o dQ \tag{4.10}$$

avec $p = \frac{\partial L}{\partial DQ} = DQ$, pour le Lagrangien L considéré ici.

La famille sous-jacente de processus à un paramètre $\{\tau^\alpha, Q^\alpha\}$ généralise celle du Théorème de Noether (cf. [19] pour la preuve).

Par exemple, considérons le cas libre (i.e. $V = 0$), en une dimension pour simplifier les notations; l'intégrale complète classique (4.7) s'écrit alors

$$\begin{aligned} S_c(q,t,e) &= W_c(q,e) - et + c_0 \\ &= pq - et + c_0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $e = \frac{1}{2}p^2$, p le moment (constant) du système libre et c_0 une constante additive dépendant seulement de la condition initiale de (1.9), donc inessentielle. La solution de l'équation correspondante d'Euler-Lagrange (1.5) satisfait donc, pour une condition initiale appropriée,

$$dq(t) = pdt \tag{4.12}$$

La solution positive triviale de (2.1) quand $V=0$,

$$\eta(y,t)=e^{\frac{1}{\hbar}(py-\frac{1}{2}p^2t)},\quad y\in\mathbb{R} \tag{4.13}$$

p une constante réelle, détermine une diffusion de Bernstein sur $I=\mathbb{R}$, de loi (3.1) non normalisée $\eta\eta^*(y,t)dy=dy$, $\forall t\in I$.

Selon (2.6), la diffusion associée z, extrémale de l'action libre J, est de drift constant $Dz(t)=p$ et, selon (2.8), son énergie (Euclidienne) est $\varepsilon=-\frac{1}{2}p^2$. L'analogue de (4.11) est donc, pour cette solution (4.13), $-A(y,t)=py+\varepsilon t$.

Les martingales p et ε sont ici triviales parce que la solution (4.13) l'est. Pour η générale, la version probabiliste de (4.11) devient

$$-A(y,t)=B(y,t)y+\varepsilon(y,t)t+M \tag{4.14}$$

où B,ε sont définis en (2.8) et M est une $\mathcal{P}_t$-martingale, condition au bord de l'action J (c.f. (2.5)) généralisant le c_0 ci-dessus. Par Noether, B et ε sont des $\mathcal{P}_t$-martingales du système libre, résolu par la généralisation de (4.12), $dz(t)=\sqrt{\hbar}dw(t)+\hbar\frac{\nabla\eta}{\eta}(z(t),t)dt$. Appliquant (2.11) au membre de gauche de (4.14),

$$-DA(z(t),t)=\frac{1}{2}|Dz(t)|^2=L(Dz(t),z(t))$$

Dans les conditions de la formule de Dynkin, l'intégration restitue l'action $J[z]$ de (2.4). D'autre part, selon la formule d'Itô et le fait que B et ε sont des martingales, le membre de droite de (4.14) donne aussi

$$E_a\int_a^b L(Dz(t),z(t))dt=E_a\int_a^b p\circ dz(t)+\varepsilon(z(a),a)(b-a)\quad, \tag{4.15}$$

version ($\mathcal{P}_t$) probabiliste de la relation entre les actions classiques (1.3) et (4.9).

Cela suggère la conjecture que l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (2.3) peut s'intégrer, pour certains potentiels V, par une extension de la méthode de Jacobi, où le rôle des intégrales classiques du mouvement serait tenu par les martingales provenant de la quantification Euclidienne du système classique sous-jacent.

4. Conclusion.

Le programme de réinterprétation probabiliste des idées de Feynman esquissé ici (la "Mécanique quantique Euclidienne") n'est en rien limité aux systèmes classiques élémentaires de Lagrangien (1.1). Pour tout Hamiltonien H tel que des processus satisfaisant (3.1) existent, l'idée de Schrödinger peut être réalisée. L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman est bien étudiée pour une vaste classe de processus Markoviens (cf. [7]). Notre programme vise deux buts distincts:

a) Se servir des outils mathématiques de la mécanique classique pour construire une généralisation probabiliste naturelle de celle-ci, sur le modèle de la relation classique/quantique. Par exemple, il semble que les "lois de conservation" (martingales) associées, selon cette stratégie, à (HJB) soient nouvelles.

b) Se servir des outils probabilistes de cette mécanique quantique (Euclidienne) "à la Feynman" pour découvrir de nouvelles propriétés de la mécanique quantique ordinaire. En effet, après prolongement analytique dans le paramètre temps $t \to -it$ les résultats probabilistes doivent, par construction, restituer des propriétés quantiques du système. On cherchera donc à transférer du modèle probabiliste (potentiellement beaucoup plus riche) des concepts inexistants dans la mécanique quantique de Von Neumann. Une illustration non triviale de cette stratégie vient d'être identifiée et sera présentée ailleurs.

RÉFÉRENCES

[0] R.Descartes, *Discours de la méthode , Flammarion, Paris.*

[1] J.Von Neumann, *Mathematical foundations of Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. (1955).*

[2] E.Schrödinger, *Quantization as a problem of proper values, part I,II, Annalen der Physik (4), vol 79 (1926).*

[3] (1) V.Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions Mir, Moscou (1976).*
(2) R.Abraham,J.Marsden, *Foundations of Mechanics, Benjamin (1978).*

[4] R.Feynman,A.Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals, Mc.Graw-Hill (1965).*

[5] R.H.Cameron, *A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals, J.Math. Physics 39,126 (1960).*

[6] B.Simon, *Functional integration and quantum physics, Acad .Press, N.Y. (1979).*

[7] W.H.Fleming,H.M.Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions, Springer-Verlag, New York (1993).*

[8] N.V.Krylov, *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order, Reidel, Dordrecht (1987).*

[9] P.L.Lions, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equation, part I, Comm. PDE 8, 1101 (1983) ; part II, Comm. PDE 8, 1229 (1983).*

[10] N.Ikeda,S.Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes, North - Holland Kodansha, N.Y.*, (1981).

[11] A.D.Wentzell, *A course in the theory of stochastic processes, Mc.Graw-Hill, N.Y. (1981).*

[12] (1) J.C.Zambrini, *J.Math.Phys. 27, 2307 (1986).*
(2) S.Albeverio,K.Yasue,J.C.Zambrini, *Ann.Inst. Henri Poincaré, Phys.Th. 49 (3), 259 (1989).*

[13] E.Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1967).*

[14] (1) A.Beurling, *Annals of Math. (2), 72, n.1, 189 (1960).*
(2) B.Jamison, *Z.Wahrsch.Gebiete 30, 65 (1974).*

[15] A.B.Cruzeiro,J.C.Zambrini, *Journ. of Funct. Anal. vol 96, n.1, 62 (1991); Journ. of Funct.Anal. vol 130, n.2, 450 (1995).*
A.B.Cruzeiro,Z.Haba,J.C.Zambrini, *Bernstein diffusions and Euclidean quantum field theory, in Progr. in Prob. vol 36, 77, E.Bolthausen, F.Russo Eds, Birkhäuser (1993).*

[16] M.Thieullen,J.C.Zambrini, *Symmetries in stochastic calculus of variations, preprint Univ. Paris VI; The theorem of Noether in Schrödinger's Euclidean quantum mechanics, preprint Institut Mittag-Leffler.*

[17] P.Malliavin, *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, in Proc. Int. Symp. SDE, Kyoto 1976, Kinokuniya, Tokyo (1978).*

[18] E.Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris (1971).*

[19] A.B.Cruzeiro,J.C.Zambrini, *en préparation.*

Grupo de Física-Matemática Univ. de Lisboa, Av. Prof Gama Pinto 2, 1699 Lisboa Codex, Portugal

E-mail: zambrini@gfm.cii.fc.ul.pt