ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

ALI BENHISSI

La clôture algébrique du corps des séries formelles

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 2, nº 2 (1995), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1995__2_2_1_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, N° 2, 1995, pp.1-14

LA CLÔTURE ALGÉBRIQUE DU CORPS DES SÉRIES FORMELLES

Ali Benhissi

§ 0 . Introduction :

Soient K un corps commutatif et K((T)) le corps des séries formelles . Si K est de caractéristique nulle , le théorème de Puiseux, lorsque K est algébriquement clos et un résultat démontré par P . Ribenboim et L . Van Den Dries [8] dans le cas général , donnent une description simple de la clôture algébrique de K((T)) .

Dans [5] et [6] , F.J. Rayner généralise le théorème de Puiseux pour le corps des séries formelles généralisées et étudie le cas de plusieurs variables. Le lecteur trouve dans l'exposé de B.Diarra [4] , des démonstrations détaillées des résultats de Rayner , illustrés par des exemples.

L'objet de ce travail est la construction d'une clôture algébrique $\overline{K((T))}$ de K((T)) lorsque K est de caractéristique p non nulle .Supposons pour simplifier que K est algébriquement clos. On met en évidence certains corps algébriquement clos contenant K((T)) à savoir $K((T^{\mathbb{Q}}))$ et $K((T^{\mathbb{Q},p}))$. Mais ces corps contiennent des éléments transcendants sur K((T)) .

On montre que cette clôture dépend uniquement de la décomposition de certains polynômes de la forme : $X^p - X - a$, et qu'elle peut être obtenue à partir de $K((T^{\frac{1}{\infty}}))$ comme limite d'une suite strictement croissante d'extensions galoisiennes construites l'une à partir de l'autre par adjonction des racines des polynômes du type précédent .On démontre que les corps $\overline{K((T))}$ et $K((T^{\mathbb{Q}}))$ sont isomorphes et que $\overline{K((T))}$ et K sont aussi isomorphes dès que $|K|^{\aleph_0} = |K|$.

Par construction de séries de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$ algébriques sur K((T)) et d'autres séries transcendantes sur K((T)) et ayant mêmes supports que les précédentes , on montre que $\overline{K((T))}$ ne peut pas s'exprimer uniquement en termes de support , qu'un analogue du théorème de Puiseux ne peut pas exister lorsque la caractéristique de K est non nulle et qu'il n'existe pas de description simple de $\overline{K((T))}$.
On s'est efforcé d'illustrer notre travail de nombreux exemples .

§1 .Préliminaires :

Si K est un corps , on désigne par $K((T^{\mathbb{Q}}))$ le corps des séries formelles à supports bien ordonnés dans $\mathbb{Q}$. Si K est algébriquement clos , il en est de même de $K((T^{\mathbb{Q}}))$.

On distingue en particulier le corps $K((T^{\frac{1}{\infty}})) = \cup K((T^{\frac{1}{n}}))$ des séries de Puiseux .

On a : $K((T^{\frac{1}{n}})) = K((T))(T^{\frac{1}{n}})$. Ce qui montre que $K((T^{\frac{1}{\infty}}))$ est une extension algébrique de K((T)) .

En caractéristique p non nulle , le corps $K((T^{\frac{1}{\infty}}))$ n'est pas algébriquement clos , comme le montre les exemples suivants .

1.1. Exemples :

a) La série : $f = \sum_{i:1}^{\infty} T^{-p^{-ni}}$ satisfait l'équation : $f^{p^n} - f - T^{-1} = 0$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) La série : $f = \sum_{i:1}^{\infty} T^{\frac{-n}{mp^i}}$ satisfait l'équation : $f^p - f - T^{\frac{-n}{m}} = 0$, ($m, n \in \mathbb{N}^*$).

c) La série : $\sum_{i:0}^{\infty} T^{1-p^{-i}}$ satisfait l'équation : $f^p - T^{p-1} f - 1 = 0$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\rho_n = \dfrac{p^{n+1} - 1}{(p-1)\, p^{n+1}}$, la série : $f = \sum_{n:0}^{\infty} (-1)^n\, T^{\rho_n}$ vérifie l'équation : $f^p + Tf - T = 0$.

1 . 2 . Lemme :
Si L / K est une extension de degré fini , alors [L((T)) : K((T))] = [L:K] .

Démonstration :
Une base du K-espace vectoriel L est aussi une base du K((T)) -espace vectoriel L((T)).

1.3. Lemme :
Soit (K,v) un corps valué hensélien , de corps résiduel Λ algébriquement clos et de même caractéristique que K , et de groupe de valeurs G divisible .
Alors toute extension finie de K est de degré égal à une puissance de l'exposant caractéristique p de K (ou Λ) .
En particulier , si K est de caractéristique nulle , il est alors algébriquement clos .

Démonstration :
Soit M une extension finie de K .
Si p = 1 , alors K est de caractéristique nulle et l'extension M/ K est séparable .

Si $p \neq 1$, alors il existe un sous-corps N de M contenant K tel que : l'extension N/K soit séparable et l'extension M/N soit purement inséparable . L'extension M/N est de degré égal à une puissance de p . Il suffit donc de montrer la propriété pour l'extension N/K .
On se ramène ainsi à une extension séparable qu'on note M/K . Soit L la clôture galoisienne de cette extension . Il suffit de montrer la propriété pour l'extension L/K . Posons [L:K] = n .
Soient $\tilde{v}$ un prolongement quelconque de v à L, $\tilde{\Lambda}$ son corps résiduel , $\tilde{G}$ son groupe de valeurs et g le nombre de prolongements non équivalents de v à L . Posons : $f = [\ \tilde{\Lambda} : \Lambda]$ et $e = [\ \tilde{G} : G\ ]$. D'après [11] cor. du th . 25 page 78 , le produit efg divise n et le quotient n/efg est une puissance de p . Comme (K,v) est hensélien : g = 1 , comme Λ est algébriquement clos : f = 1 et comme G est divisible alors : e = 1 .D'où le résultat .

1.4 . Remarque :
Le lemme est encore vrai si on remplace l'hypothèse : Λ algébriquement clos par toute

extension finie de Λ est de degré égal à une puissance de p .

§ 2 . Exemples :

Dans [5] , Rayner a montré que si K est un corps algébriquement clos de caractéristique p non nulle, alors il existe dans $K((T^{\mathbb{Q}}))$ un sous-corps propre algébriquement clos contenant $K((T))$.

Ce corps est noté $K((T^{\mathbb{Q},p}))$ et est formé par les séries formelles de la forme :

$$f(T) = \sum_{u\in\mathbb{Q}} a_u \; T^{\frac{s_u}{mp^{n_u}}} \text{ , où } m \in \mathbb{N}^* \text{ , } n_u \in \mathbb{N} \text{ , } s_u \in \mathbb{Z} \text{ .}$$

Remarquons que les exemples 1.1 appartiennent à $K((T^{\mathbb{Q},p}))$.

2.1.Proposition (D.STEFANESCU [9] et [10]) :

Soient K un corps commutatif de caractéristique p non nulle , $s \in \mathbb{Z}^*_-$ tels que

$$(s,p) = 1 \text{ , } i_0 \in \mathbb{Z} \text{ , } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } f = \sum_{i:i_0}^{\infty} a_i T^{\frac{s}{mp^i}} \text{ une série de } K((T^{\mathbb{Q},p})) \text{ .}$$

Alors f est algébrique sur $K((T))$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le système linéaire homogène à (n+1) indéterminées et une infinité d'équations :

$$\sum_{t:0}^{n} a_{i+t}^{p^t} \; Y_t = 0 \text{ , } \quad i \geq \max(1, i_0) \qquad (*)$$

admette au moins une solution non triviale dans K .

2.2 . Exemples :

Soit K un corps commutatif de caractéristique p non nulle . On va construire à l'aide de cette proposition , des séries de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$ transcendantes sur $K((T))$.

Soient s dans $\mathbb{Z}^*_-$ et m dans $\mathbb{N}^*$.

1) Soient v une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :

$\lim\limits_{i\to+\infty} (v(i) - v(i - 1)) = +\infty$ et $(a_{v(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non nuls de K .

Alors la série : $f(T) = \sum\limits_{i:o}^{\infty} a_{v(i)} \; T^{\frac{s}{mp^{v(i)}}}$ de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$ est transcendante sur $K((T))$.

En effet : on peut mettre f(T) sous la forme : $f(T) = \sum\limits_{i:o}^{\infty} a_i \; T^{\frac{s}{mp^i}}$ avec $a_i = 0$ si $i \notin v(\mathbb{N})$.

Supposons que f(T) soit algébrique sur $K((T))$.

Alors il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que le système : $\sum\limits_{t:o}^{n} a_{i+t}^{p^t} \; Y_t = 0 \quad (i \in \mathbb{N}^*) \qquad (*)$,

de la proposition précédente, admette une solution non triviale dans K : $Y_0 = c_0$, ..., $Y_n = c_n$

On peut supposer que c_n n'est pas nul .

Comme : $\lim (v(i) - v(i-1)) = +\infty$, il existe m dans $\mathbf{N}^*$ tel que : $n < v(m) - v(m-1)$.
On pose : $i = v(m) - n$: entier naturel non nul .
On a : $v(m-1) < v(m) - n = i < i+1 < \dots < i+n-1 < i+n = v(m)$.
Donc : $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+n-1} = 0$, alors que : $a_{i+n} = a_{v(m)}$ n'est pas nul .

Le système (*) donne : $0\, c_0 + \dots + 0^{p^{n-1}} c_{n-1} + a_{i+n}^{p^n} c_n = 0$, ou encore : $a_{v(m)}^{p^n} c_n = 0$,
ce qui n'est pas possible . Donc f(T) est transcendante sur K((T)) .
Donnons les exemples suivants :

$$\alpha)\ v(i) = qi! \quad \text{où} \quad q \in \mathbf{N}^* : f(T) = \sum_{i:0}^{\infty} a_{qi!} T^{\frac{s}{mp^{qi!}}}$$

$$\beta)\ v(i) = i^r \quad \text{où} \quad r \geq 2 : f(T) = \sum_{i:0}^{\infty} a_{i^r}\, T^{\frac{s}{mp^{i^r}}}$$

$$\gamma)\ v(i) = r^i \quad \text{où} \quad r \geq 2 : f(T) = \sum_{i:0}^{\infty} a_{r^i}\, T^{\frac{s}{mp^{r^i}}}$$

L'exemple α) généralise le lemme 1.1. a) de [9].
Remarquons que les hypothèses sur v peuvent être affaiblies de la façon suivante : v est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que :
Pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, il existe m dans $\mathbf{N}$ vérifiant : $n < v(m) - v(m-1)$.(i.e. $(v(i))_{i\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite extraite notée $(v(m_i))_{i\in\mathbf{N}}$ vérifiant : $\lim (v(m_i) - v(m_{i-1})) = +\infty$).

2) Soient k un corps commutatif de caractéristique p non nulle , $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite d'indéterminées sur k et K une clôture algébrique de $k(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$: corps des fractions rationnelles en ces indéterminées sur k .

Alors la série : $f(T) = \sum_{i:1}^{\infty} X_i\, T^{\frac{s}{mp^i}}$ de $K((T^{\mathbf{Q},p}))$ est transcendante sur K((T)) .
En effet : supposons que f(T) soit algébrique sur K((T)) .

Alors il existe n dans $\mathbf{N}^*$ tel que le système : $\sum_{t:0}^{n} X_{i+t}^{p^t} Y_t = 0 \quad (i \in \mathbf{N}^*) \qquad (*)$,
à une infinité d'équations et un nombre fini : Y_0 , ... , Y_n d'inconnues admette une solution non triviale dans K .

Prenons successivement les indices : $i = 1$, $i = n+2$, $i = 2n+3$, ... , $i = n^2+n+1$.
On passe d'une valeur à l'autre en ajoutant $n+1$.
On obtient le sous-système de (*) formé de (n+1) équations et (n+1) inconnues: Y_0 , ... , Y_n .
Ce système doit admettre une solution non triviale dans K .

$$\begin{cases} X_1 Y_0 + X_2^p Y_1 + \dots\dots + X_{n+1}^{p^n} Y_n = 0 \\ X_{n+2} Y_0 + X_{n+3}^p Y_1 + \dots\dots + X_{2n+2}^{p^n} Y_n = 0 \\ X_{2n+3} Y_0 + X_{2n+4}^p Y_1 + \dots\dots + X_{3n+3}^{p^n} Y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n^2+n+1} Y_0 + X_{n^2+n+2}^p Y_1 + \dots\dots + X_{n^2+2n+1}^{p^n} Y_n = 0 \end{cases}$$

On remarque que dans ce système , chacune des indéterminées X_i apparait au plus une fois.Son déterminant est alors non nul. Il admet donc uniquement la solution triviale .D'où la contradiction .

3) Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de K algébriquement indépendants sur $\mathbb{F}_p$.

Alors la série $f(T) = \sum_{i:1}^{\infty} a_i \quad T^{\frac{s}{mp^i}}$ de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$ est transcendante sur $K((T))$.

En effet : sinon, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que le système: $\sum_{t:0}^{n} a_{i+t}^{p^t} Y_t = 0 \qquad (i \in \mathbb{N}^*)$

admette une solution non triviale dans K .

Comme dans l'exemple précédent , on sélectionne les indices suivants :

$$i = 1 \,;\, i = n+2 \,;\, i = 2n+3 \,;\, \dots \,;\, i = n^2+n+1 \,.$$

On forme le sous-système de $(*)$ à (n+1) équations et (n+1) inconnues :

$$\begin{cases} a_1 Y_0 + a_2^p Y_1 + \dots\dots + a_{n+1}^{p^n} Y_n = 0 \\ a_{n+2} Y_0 + a_{n+3}^p Y_1 + \dots\dots + a_{2n+2}^{p^n} Y_n = 0 \\ a_{2n+3} Y_0 + a_{2n+4}^p Y_1 + \dots\dots + a_{3n+3}^{p^n} Y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n^2+n+1} Y_0 + a_{n^2+n+2}^p Y_1 + \dots\dots + a_{n^2+2n+1}^{p^n} Y_n = 0 \end{cases}$$

On considère ensuite le polynôme à (n^2+2n+1) indéterminées suivants :

$$P(X_1, \dots\dots, X_{n^2+2n+1}) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2^p \dots\dots & X_{n+1}^{p^n} \\ X_{n+2} & X_{n+3}^p \dots\dots & X_{2n+2}^{p^n} \\ X_{2n+3} & X_{2n+4}^p \dots\dots & X_{3n+3}^{p^n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ X_{n^2+n+1} & X_{n^2+n+2}^p \dots\dots & X_{n^2+2n+1}^{p^n} \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ .Il n'est pas nul car chacune des indéterminées $(X_i \,,\, 1 \leq i \leq n^2 + 2n + 1)$ apparaît une fois et une seule .

Le déterminant du système précédent est égal à $P(a_1, \dots, a_{n^2+2n+1})$. Il n'est pas nul car les a_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{F}_p$.
Ce système admet donc l'unique solution triviale .D'où la contradiction .

4) Soit x un élément non nul de K . Alors la série : $f(T) = \sum_{i:1}^{\infty} x^i \; T^{\frac{s}{mp^i}}$ de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$, est algébrique sur K((T)) si et seulement si x est algébrique sur $\mathbb{F}_p$.
Supposons x algébrique sur $\mathbb{F}_p$. Le corps $\mathbb{F}_p(x)$ est alors fini .
Il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que : $x^n = 1$.

$$\text{On a :}\quad f(T) = \sum_{i:1}^{\infty} x^i \; T^{\frac{s}{mp^i}} = \sum_{i:1}^{n}\sum_{j:0}^{\infty} x^{jn+i} \quad T^{\frac{s}{mp^{jn+i}}}$$

$$= \sum_{i:1}^{n} x^i \sum_{j:0}^{\infty} \quad T^{\frac{s}{mp^{jn+i}}} = \sum_{i:1}^{n} x^i\Big(\sum_{j:0}^{\infty} \; T^{\frac{s}{mp^{nj}}} \Big)^{p^{-i}}$$

On considère la série : $g(T) = \sum_{j:0}^{\infty} T^{\frac{s}{mp^{nj}}}$ de $K((T^{\mathbb{Q},p}))$. On a : $f(T) = \sum_{i:1}^{n} x^i (g(T))^{p^{-i}}$.

La série g(T) est racine du polynôme : $X^{p^n} - X - T^{\frac{sp^n}{m}}$. Elle est donc algébrique sur $\mathbb{F}_p((T^{\frac{1}{m}}))$ puis sur $\mathbb{F}_p((T))$. Ainsi f(T) est algébrique sur $\mathbb{F}_p((T))$, donc sur K((T)) .
Inversement, supposons f(T) algébrique sur K((T)) .Il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que le système :

$$\sum_{t:0}^{n} x^{(i+t)p^t}\, Y_t = 0 \qquad (i \in \mathbb{N}^*) \quad (*)$$

, admette une solution non triviale dans K .
Regardons le sous-système des (n+1) premières équations : i = 1 ; 2 ; ... ; n+1 .

$$\left|\begin{array}{l}
xY_0 + x^{2p}Y_1 + x^{3p^2}Y_2 + \dots\dots + x^{(n+1)p^n}Y_n = 0 \\
x^2Y_0 + x^{3p}Y_1 + x^{4p^2}Y_2 + \dots\dots + x^{(n+2)p^n}Y_n = 0 \\
x^3Y_0 + x^{4p}Y_1 + x^{5p^2}Y_2 + \dots\dots + x^{(n+3)p^n}Y_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x^{n+1}Y_0 + x^{(n+2)p}Y_1 + x^{(n+3)p^2}Y_2 + \dots\dots + x^{(2n+1)p^n}Y_n = 0
\end{array}\right.$$

Soit X une indéterminée sur $\mathbb{F}_p$. On considère le polynôme P(X) de $\mathbb{F}_p[X]$ suivant :

$$P(X) = \begin{vmatrix}
X & X^{2p} & X^{3p^2} \dots\dots & X^{(n+1)p^n} \\
X^2 & X^{3p} & X^{4p^2} \dots\dots & X^{(n+2)p^n} \\
X^3 & X^{4p} & X^{5p^2} \dots\dots & X^{(n+3)p^n} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
X^{n+1} & X^{(n+2)p} & X^{(n+3)p^2} \dots\dots & X^{(2n+1)p^n}
\end{vmatrix}$$

$$= X^{1+2p+3p^2+\ldots+(n+1)p^n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ X & X^p & X^{p^2} & \ldots\ldots\ldots & X^{p^n} \\ X^2 & X^{2p} & X^{2p^2} & \ldots\ldots\ldots & X^{2p^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^n & X^{np} & X^{np^2} & \ldots\ldots\ldots & X^{np^n} \end{vmatrix}$$

$$= X^{1+2p+3p^2+\ldots+(n+1)p^n} . V(X , X^p , \ldots , X^{p^n})$$

où $V(X , X^p , \ldots , X^{p^n})$ désigne le déterminant de Vondermonde .

D'où : $P(X) = X^{1+2p+3p^2+\ldots+(n+1)p^n} \prod_{0\leq i<j\leq n} (X^{p^j}-X^{p^i}) \neq 0$.

On remarque que le déterminant du sous-système précédent est égal à P(x) . Comme ce système admet une solution non triviale dans K,alors P(x) = 0 . D'où x est algébrique sur $\mathbb{F}_p$.

2.3 . Remarques :

a) Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique p non nulle et $\overline{K((T))}$ la clôture algébrique de K((T)) contenue dans $K((T^{\mathbb{Q},p}))$. Alors on a les inclusions strictes suivantes : $K((T)) \subset K((T^{\frac{1}{\infty}})) \subset \overline{K((T))} \subset K((T^{\mathbb{Q},p}))$.

b) Soit K un corps algébriquement clos . Lorsque K est de caractéristique nulle , le théorème de Puiseux montre que la clôture algébrique de K((T)) s'exprime uniquement en termes de supports i.e.deux séries de même support sont toutes les deux algébriques ou toutes les deux transcendantes sur K((T)) . Par contre lorsque K est de caractéristique p non nulle , les exemples (3) et (4) précédents montrent l'existence de deux séries de même support l'une algébrique et l'autre transcendante sur K((T)) .

§ 3 . Construction de la clôture algébrique de K((T)) .
3.1.Théorème :

Soient K un corps algébriquement clos et $\overline{K((T))}$ une clôture algébrique de K((T)) contenue dans $K((T^{\mathbb{Q}}))$. Alors :

1) Les corps $\overline{K((T))}$ et $K((T^{\mathbb{Q}}))$ sont isomorphes . Les deux corps ne peuvent pas être isomorphes en tant que corps valués munis de la valuation usuelle des séries formelles .

En caractéristique nulle , l'isomorphisme précédent s'écrit : $\overline{K((T))} = K((T^{\frac{1}{\infty}})) \cong K((T^{\mathbb{Q}}))$.

2) Les trois corps : K, $\overline{K((T))}$ et $K((T^{\mathbb{Q}}))$ sont isomorphes si et seulement si : $(\text{card } K)^{\aleph_0} = \text{card } K$.

Démonstration :

On a : $(\text{card } K)^{\aleph_0} = (\text{card } K)^{\text{card } \mathbb{Q}} = \text{card } (K^{\mathbb{Q}}) \geq \text{card } K((T^{\mathbb{Q}})) \geq \text{card } \overline{K((T))} \geq$ $\text{card } K((T)) = (\text{card } K)^{\aleph_0}$. D'où : $\text{card } K((T^{\mathbb{Q}})) = \text{card } \overline{K((T))} = (\text{card } K)^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Soit $P = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si la caractéristique de K est nulle.} \\ \mathbb{F}_p & \text{si la caractéristique de K est p non nulle.} \end{cases}$

1) Les corps $\overline{K((T))}$ et $K((T^{\mathbb{Q}}))$ sont algébriquement clos contenant strictement P.

Soit B (resp. B') une base de transcendance de $\overline{K((T))}$ (resp. $K((T^{\mathbb{Q}}))$) sur P.
D'après [2] chapitre 4, exercice 2 page 104, on a :

$\text{card } \overline{K((T))} = (\text{card } P)(\text{card } B)$ et $\text{card } K((T^{\mathbb{Q}})) = (\text{card } P)(\text{card } B')$,

ou encore : $(\text{card } K)^{\aleph_0} = \max(\aleph_0, \text{card } B)$ et $(\text{card } K)^{\aleph_0} = \max(\aleph_0, \text{card } B')$.

Donc : $\text{card } B = \text{card } B' = (\text{card } K)^{\aleph_0}$.

D'après [2] ch. 4, prop. 1, p. 108, on a isomorphisme entre les corps $\overline{K((T))}$ et $K((T^{\mathbb{Q}}))$.

D'après [3], cor. 12.7, p. 95, le corps $K((T^{\mathbb{Q}}))$ est maximalement complet pour sa valuation usuelle v. D'autre part : $K((T^{\frac{1}{\infty}}))$ est inclus dans $\overline{K((T))}$, donc le groupe de valeurs et le corps résiduel de v sur $\overline{K((T))}$ sont $\mathbb{Q}$ et K : identiques à ceux de v sur $K((T^{\mathbb{Q}}))$.

Le corps $\overline{K((T))}$ est strictement inclus dans $K((T^{\mathbb{Q}}))$ à cause du théorème de Puiseux en caractéristique nulle et à cause des exemples 2. 2, en caractéristique non nulle.

Donc $K((T^{\mathbb{Q}}))$ est une extension immédiate propre de $\overline{K((T))}$, et par suite $\overline{K((T))}$ n'est pas maximalement complet. Ainsi $(K((T^{\mathbb{Q}})),v)$ et $(\overline{K((T))},v)$ ne peuvent pas être isomorphes.

En caractéristique nulle, grâce au théorème de Puiseux, on a : $\overline{K((T))} = K((T^{\frac{1}{\infty}}))$.

2) Si les 3 corps sont isomorphes, alors :

$$\text{card } K = \text{card } \overline{K((T))} = \text{card } K((T^{\mathbb{Q}})) = (\text{card } K)^{\aleph_0}$$

Inversement, supposons : $(\text{card } K)^{\aleph_0} = \text{card } K$.
Les corps K et $\overline{K((T))}$ sont algébriquement clos.
On a : $\text{card } K = (\text{card } K)^{\aleph_0} = \text{card } \overline{K((T))}$. Donc : $\text{card } K > \aleph_0$. Le corps P est strictement inclus dans K.
Soit B (resp B') une base de transcendance de K (resp. $\overline{K((T))}$) sur P.
On a : $\text{card } K = (\text{card } P)(\text{card } B)$ et $\text{card } \overline{K((T))} = (\text{card} P)(\text{card} B')$,
ou encore : $\text{card } K = \max(\aleph_0, \text{card} B)$ et $\text{card } K = \max(\aleph_0, \text{card} B')$.

Donc : $\text{card } B = \text{card } B' = \text{card } K$. Les corps K et $\overline{K((T))}$ sont isomorphes.

3.2. Théorème :

Soit E un corps parfait de caractéristique p non nulle et qui n'est pas algébriquement clos. On suppose que toute extension finie de E est de degré égal à une puissance de p.

Soit Ω un surcorps de E algébriquement clos . On définit la suite strictement croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-corps de Ω par : $E_0 = E$, et pour tout entier $n \geq 1$, $E_n = E_{n-1}(\mathcal{P}^{-1}(E_{n-1}))$ où $\mathcal{P} : \Omega \longrightarrow \Omega$ est l'opérateur d'Artin - Schreier.

$$x \longrightarrow x^p - x$$

Alors pour tout entier $n \geq 1$, le corps E_n n'est pas une clôture algébrique de E , par contre

$$\overline{E} = \bigcup_{n:0}^{\infty} E_n \quad \text{est une clôture algébrique de } E .$$

Démonstration :

Par récurrence : L'extension E_1/E est galoisienne comme étant le corps de racines de famille de polynômes séparables et irréductibles : $X^p - X - a$ de E[X] .

Si α est une racine de l'un des polynômes précédents et σ un élément de Gal (E_1/E) , alors il existe $i \in \{0,...,p-1\}$ tels que : $\sigma(\alpha) = \alpha+i$, donc $\sigma^p(\alpha) = \alpha+pi = \alpha$.

Ainsi l'ordre de tout élément σ de Gal (E_1/E) est 1 ou p .

Supposons que E_1 soit une clôture algébrique de E .Puisque E admet une extension cyclique de degré p , d'après le [7] p119, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, E admet une extension cyclique F_m de degré p^m contenue dans E_1 .

Soit σ_m un générateur du groupe cyclique : Gal (F_m/E) . Alors σ_m est d'ordre p^m.

D'après [1] exercice 19 page 194 , l'homomorphisme σ_m de F_m dans E_1 , admet un prolongement $\widetilde{\sigma_m}$ en un E-automorphisme de E_1 .Donc $\widetilde{\sigma_m}$ appartient à Gal (E_1/E) , il est donc d'ordre 1 ou p. Par suite l'ordre de σ_m est au plus p. D'où une contradiction avec le fait que σ_m est d'ordre p^m On conclut que E_1 n'est pas une clôture algébrique de E .

On fait l'hypothèse de récurrence suivante : E_n n'est pas une clôture algébrique de E . Il existe un polynôme irréductible f(X) de E[X] qui n'est pas complètement scindé dans E_n. Soit F dans Ω le corps de racines de f(X) sur E . Alors F n'est pas contenu dans E_n . L'extension F/E est galoisienne car le corps E est parfait . Cette extension est finie . Elle est donc de degré égal à une puissance de p . Le groupe : G = Gal (F/E) est un p-groupe . D'après un résultat de [7] page 52 , il existe une chaine de sous-groupes normaux de G :

$$\{id\} = G_m \subset \ldots \subset G_1 \subset G_0 = G \text{ telle que l'indice : } [G_i : G_{i+1}] = p .$$

En utilisant la correspondance galoisienne , on peut trouver une chaîne d'extensions : $E = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_m = F$ telle que l'extension F_{i+1}/F_i soit cyclique de degré p .

F_{i+1} est donc le corps de racines d'un polynôme irréductible de la forme :

$$f_i(X) = X^p - X - a_i \text{ de } F_i[X] \text{ , d'après [7] th 1 , p 107 .}$$

Par construction , on a : $F_1 \subset E_1$; $F_2 \subset E_2$; ..... ; $F_m \subset E_m$.
On a donc : $F_1 \subset E_1 \subset E_n$ mais on ne peut pas avoir : $F_m \subset E_n$ car sinon on aura : $F \subset E_n$, ce qui n'est pas possible .
Soit i dans { 1 , ... ,m-1 } le plus grand indice tel que : $F_i \subset E_n$ et $F_{i+1} \not\subset E_n$.

On a : $f_i(X) = X^p - X - a_i \in F_i [X] \subset E_n[X]$, mais le corps F_{i+1} des racines de f_i (X) sur F_i n'est pas contenu dans E_n . Donc d'après [7] th.1, p .107 le polynôme f_i (X) est irréductible sur E_n .
D'après ce même théorème , le corps E_n admet une extension cyclique de degré p et par suite des extensions cycliques ayant pour degrés toutes les puissances de p .
Puisque E_{n+1} est obtenu par adjonction à E_n des racines des polynômes : $X^p - X - a$ de E_n [X] on montre d'une façon analogue au cas n = 1 que E_{n+1} n'est pas une clôture algébrique de E_n
Donc E_{n+1} n'est pas une clôture algébrique de E .
D'autre part , par construction , le corps : $\overline{E}$ est algébrique sur E .
Soient f(X) un polynôme de E [X] et F son corps de racines sur E . Alors l'extension F/E est galoisienne car E est parfait, et son degré est une puissance de p par hypothèse .
Comme précédemment , on se ramène à construire une chaîne d'extensions cycliques de degré p toutes contenues dans $\overline{E}$.
Ainsi F est inclus dans $\overline{E}$, et par suite $\overline{E}$ est une clôture algébrique de E .

3.3 . Corollaire :

Soit K un corps de caractéristique p non nulle et de clôture algébrique $\overline{K}$.

On pose : $$E = \bigcup_{\underbrace{K\subset L\subset \overline{K}}_{\text{fini}},\, n \in \mathbb{N}} L^{\frac{1}{p^n}}((T^{\frac{1}{\infty}}))$$

Alors la clôture algébrique de K((T)) contenue dans $\overline{K}((T^{\mathbb{Q}}))$ est égale à

$$\overline{E} = \bigcup_{n:0}^{\infty} E_n \text{ , où } E_0 = E \text{ et pour } n \geq 1 \text{ , } E_n = E_{n-1}(\mathcal{P}^{-1}(E_{n-1})) \text{ , avec } \mathcal{P} \text{ l'opérateur}$$

d'Artin-Schreier du corps $\overline{K}((T^{\mathbb{Q}}))$.

Démonstration :
Le corps E est algébrique sur K((T)). En effet, pour tout corps L et tout entier naturel non nul n , le corps $L^{\frac{1}{p^n}}((T^{\frac{1}{\infty}}))$ est algébrique sur $L((T^{\frac{1}{\infty}}))$ car si $f(T) = \sum_{\geq i_0} a_i T^{\frac{i}{m}}$ est une série de $L^{\frac{1}{p^n}}((T^{\frac{1}{\infty}}))$, alors pour tout $i \geq i_0$, l'élément $a_i^{p^n}$ appartient à L et par conséquent :

$(f(T))^{p^n} = \sum_{\geq i_0} a_i^{p^n} T^{\frac{ip^n}{m}}$ appartient à $L((T^{\frac{1}{\infty}}))$.

Le corps $L((T^{\frac{1}{\infty}}))$ est algébrique sur $L((T))$. Si de plus L est une extension de degré fini de K, alors d'après le lemme 1.2, le corps $L((T))$ est algébrique sur $K((T))$.
On conclut que E est algébrique sur $K((T))$ et par suite une clôture algébrique de E est aussi une clôture algébrique de $K((T))$.

Le corps E est parfait car si $f(T) = \sum_{i \geq i_0} a_i T^{\frac{i}{m}}$ est une série de $L^{\frac{1}{p^n}}((T^{\frac{1}{\infty}}))$,

alors $(f(T))^{\frac{1}{p}} = \sum_{i \geq i_0} a_i^{\frac{1}{p}} T^{\frac{i}{mp}}$ est une série de $L^{\frac{1}{p^{n+1}}}((T^{\frac{1}{\infty}}))$.

Le polynôme : $X^p - X - T^{-1}$ engendre sur E une extension cyclique de degré p car ses racines n'appartiennent pas au surcorps : $\overline{K}((T^{\frac{1}{\infty}}))$ de E.
Pour montrer que les degrés des extensions finies de E sont des puissances de p, il suffit de vérifier que E satisfait les conditions du lemme 1.3. Le corps E est hensélien pour sa valuation naturelle comme extension algébrique du corps hensélien $K((T))$.
Le corps résiduel est $\overline{K}$ et le groupe de valeurs est $\mathbb{Q}$.

On conclut par le théorème précédent.

§ 4.Construction de la clôture séparable de K((T)).

4.1.Théorème :

Soit K un corps de caractéristique p non nulle, de clôture algébrique $\overline{K}$ et de clôture séparable K_0. On pose : $K_1 = K((T))(K_0\ ;\ T^{1/n}, n \in \mathbb{N}^*, (n,p) = 1)$ et pour $n \geq 2$

$$K_n = K_{n-1}(\mathcal{P}^{-1}(K_{n-1})),$$ où $\mathcal{P}$ est l'opérateur d'Artin-Schreier du corps $\overline{K}((T^{\mathbb{Q}}))$.

Alors $\widetilde{K} = \bigcup_{n:1}^{\infty} K_n$ est la clôture séparable de $K((T))$.

Démonstration :

Il est clair que $\widetilde{K}$ contient les racines des polynômes de la forme $X^p - X - a$, où $a \in \widetilde{K}$ et que l'extension : $\widetilde{K}/K((T))$ est algébrique.

i) Par définition, l'extension K_0/K est séparable et à fortiori les éléments de K_0 sont aussi séparables sur $K((T))$.

ii) Pour tout entier naturel n premier avec p, le polynôme : $X^n - T$ est séparable sur $K((T))$, donc $T^{\frac{1}{n}}$ est séparable sur $K((T))$.

iii) Les polynômes $X^p - X - a$ sont séparables sur leurs corps de base et par transitivité de la séparabilité, l'extension $\widetilde{K}/K((T))$ est séparable.
D'autres part $\widetilde{K}$ est une extension algébrique du corps valué hensélien $K((T))$, il est donc hensélien pour sa valuation naturelle.
Il est clair que le corps résiduel R de $\widetilde{K}$ est tel que $K_0 \subset R \subset \overline{K}$. Comme l'extension $\overline{K}/K_0$ est purement inséparable, il en est de même de l'extension $\overline{K}/R$. Donc le degré de toute

extension finie de R est une puissance de p .
Montrons que le groupe de valeurs G de $\widetilde{K}$ est $\mathbb{Q}$ .Il suffit de montrer que G contient $1/m$ pour tout m dans $\mathbb{N}^*$.
Si m est premier avec p, alors $1/m$ appartient à G par hypothèse .

On va montrer par récurrence, que tout n dans $\mathbb{N}^*$, le corps $\widetilde{K}$ contient une série $f_n(T)$ de valuation $-1/p^n$.

La série $f_1(T) = \sum_{i:1}^{\infty} T^{\frac{-1}{p^i}}$ appartient à $\widetilde{K}$ comme racine du polynôme :$X^p - X - T^{-1}$.

La série $f_2(T) = \sum_{i:2}^{\infty} (i-1)\ T^{\frac{-1}{p^i}}$ est racine du polynôme: $X^p - X - f_1(T)$.

Elle appartient donc à $\widetilde{K}$.
Supposons que $f_n(T)$ est construite dans $\widetilde{K}$ de valuation : $-1/p^n$.

Soit g(T) une racine du polynôme : $P(X) = X^p - X - f_n(T)$ dans $\widetilde{K}$.

Notons c le terme constant de g(T) . Comme $f_n(T)$ est sans terme constant, alors $c^p - c = 0$.
On pose $f_{n+1}(T) = g(T) - c$: une série de valuation non nulle.

On vérifie que $f_{n+1}(T)$ est racine de P(X). Elle appartient donc à $\widetilde{K}$.

On a : $f_{n+1}^p(T) - f_{n+1}(T) = f_n(T)$. Donc : $\min\{p\, v(f_{n+1}),\ v(f_{n+1})\} = -1/p^n$.

D'où : $p\, v(f_{n+1}) = -1/p^n$, puis $v(f_{n+1}) = -1/p^{n+1}$.

Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le rationnel : $1/p^n$ appartient à G. Reste donc à vérifier que si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$ tels que m et p sont premiers entre eux alors $1/mp^n$ appartient à G.

Or comme m et p^n sont premiers entre eux, il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que : $um + vp^n = 1$.

Donc : $\frac{1}{mp^n} = \frac{um+vp^n}{mp^n} = u\frac{1}{p^n} + v\frac{1}{m}$,qui est un élément de G.

Ainsi $G = \mathbb{Q}$: c'est un groupe divisible.

D'après la remarque 1.4,toute extension finie de $\widetilde{K}$ est de degré égal à une puissance de p.

Montrons que les éléments de $\overline{K}((T^{\mathbb{Q}}))$ algébriques et séparables sur K((T)) appartiennent à $\widetilde{K}$ Un tel élément est racine d'un polynôme séparable f(X) de K((T)) [X]. Le corps des racines F de f(X) sur $\widetilde{K}$ est une extension galoisienne de degré égal à une puissance de p. Comme dans le théorème 3.2 , en utilisant le p-groupe Gal $(F/\widetilde{K})$, on se ramène à une chaîne d'extensions cycliques de degré p. Il suffit de décomposer les polynômes : $X^p - X - f(T)$ où f(T) est une série de $\widetilde{K}$. Or ceci est vrai . Donc F est inclus dans $\widetilde{K}$.

4 . 2.Remarque :

Le corps $\widetilde{K}$ n'est pas une clôture algébrique de K((T)) car les polynômes irréductibles et non séparables : $X^{p^n} - T$ de K((T)) [X] ne peuvent pas admettre de racine dans l'extension séparable $\widetilde{K}$ de K((T)).

Remarquons que la clôture algébrique $\overline{K((T))}$ de K((T)) peut être obtenue à partir de $\widetilde{K}$ par extraction des racines p^n ème pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Si la série : $f(T) = \sum_{s \in S} a_s T^s$ appartient à $\widetilde{K}$, alors sa racine p^n ème est la série :

$$g(T) = \sum_{s \in S} a_s^{\frac{1}{p^n}} T^{\frac{s}{p^n}} .$$

On a la décomposition suivante :

$$\begin{array}{l} \overline{K((T))} \\ \quad \Big| \ \text{extension purement inséparable} \\ \quad \widetilde{K} \\ \quad \Big| \ \text{extension séparable} \\ K((T)) \end{array}$$

Références

[1] **A. BIGARD ; M.CRESTEY ; J. GRAPPY** : Problèmes d'algèbre générale. Dunod , Paris , 1971 .

[2] **N. BOURBAKI** : Algèbre , ch . 4 et 5 , Hermann 1973 .

[3] **W. BRANDAL** : Commutative rings whose finitely generated modules decompose ; lecture notes in mathematics 723.

[4] **B.DIARRA** : Corps de Puiseux généralisés (d'après F.J. Rayner) ; séminaire d'Algèbre - Clermont-Ferrand 1981-82 (non publié).

[5] **F. J. RAYNER** : An algebraically closed field, Glasgow Mathematical Journal vol.9 , Part 2, (1968) pp146-151.

[6] **F. J. RAYNER** : Algebraically closed fields analogous to fields of Puiseux series ; Journal of the London Math. Soc., vol.8 , n°3 , 1974 , p. 504 - 506.

[7] **P. RIBENBOIM** : L'arithmétique des corps, Hermann 1972 .

[8] **P. RIBENBOIM ; L.VAN DEN DRIES** : The absolute galois group of a rational function field in characteristic zero is a semi-direct product, Canad. Math. Bull. Vol 27 (3), 1984 , pp 313 - 315.

[9] **D. STEFANESCU** : A method to obtain algebraic elements over K((T)) in positive characteristic, Bull. Math. de la Soc.Sci . Math. de la R. S. de Roumanie, Tome 26 (74), n°1, 1982 , pp 77-91.

[10] **D. STEFANESCU**: On meromorphic formal power series, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie , Tome 27 (75), n°2, 1983 , pp 170-178.

[11] **O. ZARISKI; P. SAMUEL** : Commutative Algebra vol II , 1960 , Springer Verlag .

Ali BENHISSI

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
5000 Monastir - TUNISIE