ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

M. ERRAOUI

Y. OUKNINE

Sur la convergence de la formule de Lie-Trotter pour les équations différentielles stochastiques

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 1, nº 2 (1994), p. 7-13

<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1994__1_2_7_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 1, N° 2, 1994, pp. 7 - 13

SUR LA CONVERGENCE DE LA FORMULE DE LIE-TROTTER POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

M. ERRAOUI et Y. OUKNINE

Introduction:

Dans [1], A.Bensoussan - R.Glowinski et A.Rascanu ont établi un théorème limite pour l'équation différentielle stochastique (E.D.S):

$$(1)\begin{cases} dX_t = \sigma(t,X_t)\, dB_t - b(t,X_t)\, dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

où σ et b sont deux fonctions lipschitziennes.

En utilisant essentiellement une méthode dûe à H. Kaneko et S. Nakao [3], nous étendons ce théorème à des fonctions continues bornées, en supposant uniquement que l'E.D.S.(1) possède la propriété d'unicité trajectorielle. En particulier, cette hypothèse est vérifiée pour des coefficients lipschitziens. Pour d'autres critères, plus faibles que la condition de Lipschitz, et assurant l'unicité trajectorielle de (1) voir Y.Ouknine [4].

Notations et hypothèses.

Dans la suite, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé complet, pourvu d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui vérifie les conditions habituelles.
On considère l'équation différentielle stochastique :

$$(1)\begin{cases} dX_t = \sigma(t,X_t)\, dB_t - b(t,X_t)\, dt \\ X_0 = x \qquad , \ t\in[0,T] \end{cases}$$

où σ et b sont deux fonctions définies sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On notera par $X(x,t)$ la solution de l'E.D.S (1) si elle existe.

L'objet de cette note est d'approximer la solution de (1) par un schéma itératif de type Lie - Trotter voir [1].

Considerons le schema défini de la façon suivante:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{T}{n+1}$ et $J_i = \begin{cases} [ih,(i+1)h[& ,i = 0,\ldots,n-1 \\ [nh,T] & , i = n \end{cases}$

$$(S)\quad \begin{cases} Y^n_{0-} = X^n_{0-} = x \\ X^n_t + \int_{ih}^{t} b(s, X^n_s)\, ds = Y_{ih-0} \\ Y^n_t = X^n_t + \int_{ih}^{t} \sigma(s, Y^n_s)\, dB_s \quad , \text{ si } \ t \in J_i \end{cases}$$

<u>Hypothèses (H)</u> :

Nous supposons que σ et b satisfont les hypothèses suivantes :

H(i) $\sigma(t,x)$ et $b(t,x)$ sont continues en (t,x).

H(ii) Il existe une constante positive L, indépendante de x et t, tel que:

$$|\sigma(t,x)| + |b(t,x)| \le L$$

On pose : $$d(n,t) = \begin{cases} \left[\frac{(n+1)}{T}\, t\right] \frac{T}{n+1} & , \quad t \in [0,T[\\ \frac{n}{n+1}\, T & , \quad t=T \end{cases}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Le schéma d'approximation (S) devient alors :

$$(S')\begin{cases} X_t^n + \int_0^t b(s, X_s^n)\, ds = x + \int_0^{d(n,t)} \sigma(s, Y_s^n)\, dB_s \\ Y_t^n + \int_0^t b(s, X_s^n)\, ds = x + \int_0^t \sigma(s, Y_s^n)\, dB_s \end{cases}$$

En posant :

$$\alpha_t^n = Y_t^n - X_t^n = \int_{d(n,t)}^t \sigma(s, Y_s^n)\, dB_s .$$

On voit donc que Y^n vérifie l'E.S.D (2) :

$$Y_t^n + \int_0^t b(s, Y_s^n - \alpha_s^n)\, ds = x + \int_0^t \sigma(s, Y_s^n)\, dB_s \qquad (2)$$

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

<u>Théorème 1:</u>

Supposons que σ et b vérifient les hypothèses (H), et que l'E.D.S (1) possède la propriété d'unicité trajectorielle alors :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in K} \mathbb{E}\left(\max\limits_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s|^2 \right) = 0$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in K} \mathbb{E}\left(\max\limits_{0\le s\le t} |Y_s^n - X_s|^2 \right) = 0$

où K étant un compact de $\mathbb{R}$

Pour prouver ce théorème nous avons besoin de quelques assertions. Pris ensembles, les deux lemmes qui suivent expriment le fait que, Y^n est tendue et que X^n et Y^n possèdent la même limite .

Lemme 1 :

Sous les hypothèses (H) on a :

(i) $\sup\limits_{x\in K}\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big(\max\limits_{s\le u,v\le t} | Y^n(x,u) - Y^n(x,v) |^4 \Big) \le L_1 |t-s|^2$

(ii) $\sup\limits_{x\in K} \mathbb{E}\Big(\max\limits_{s\le u,v\le t} | X(x,u) - X(x,v) |^4 \Big) \le L_2 |t-s|^2$

pour tout $t,s \in [0,T]$.

Preuve : (i) D'après l'inégalité $(a + b)^4 \le 8 a^4 + 8 b^4$ on a :

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le u,v\le t} | Y^n_u - Y^n_v|^4\Big) \le 8\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le u,v\le t} \Big(\int_v^u \sigma(r,Y^n_r)\, dB_r\Big)^4 + 8\mathbb{E}\Big(\sup_{s\le u,v\le t} \Big(\int_v^u b(r,Y^n_r)\, dr\Big)^4$$

$$\le L_1 |t-s|^2$$

où L est une constante donnée par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et l'hypothèse H (ii).

La même preuve reste valable pour (ii).

Lemme 2:

Si (X^n,Y^n) est une solution du système (S') alors :

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} | X^n_t - Y^n_t|^2\Big) \le C\, h^{1/2} \quad ; \ h = \frac{T}{n+1}$$

Preuve : Posons

$$\begin{cases} t_i = ih \ , \ i = 0,\dots,n \\ t_{n+1} = T \end{cases} \qquad J_i = \begin{cases} [t_i,t_{i+1}[\ ,i=0,\dots,n-1 \\ [t_n ,T] \qquad , \ i=n \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T} | X^n_t - Y^n_t|^4\Big) = \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} \Big(\int_{d(n,t)}^t \sigma(s,Y^n_s)\, dB_s\Big)^4$$

$$\leq \sum_{l=1}^{n+1} \mathbf{E} \sup_{t_{l-1}\leq t\leq t_l} \left(\int_{t_{l-1}}^{t} \sigma(s,Y_s^n)\, dB_s\right)^4$$

D'après l'inégalité de Doob, on obtient :

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} | X_t^n - Y_t^n|^4\right) \leq \sum_{l=1}^{n+1} \mathbf{E} \sup_{t_{l-1}\leq t\leq t_l} \left(\int_{t_{l-1}}^{t} \sigma(s,Y_s^n)^2 ds \right)^2$$

$$\leq C_1 h \qquad \text{où } C_1 = L^4.T$$

<u>Preuve du théorème</u> :

ii) Supposons que notre conclusion n'est pas vraie, alors il existe deux constantes positives δ et T, une sous suite $(Y^{n'})$ et une sous suite $(x_{n'})$ contenue dans une boule de rayon R telles que :

$$(*) \quad \inf_{n'} \mathbf{E} \sup_{0\leq t\leq T} |Y^{n'}(x_{n'},t) - X(x_{n'},t)|^2 \geq \delta > 0 .$$

Sans perte de généralité, on suppose que $Y^{n'} = Y^n$ et $x_{n'}$ converge vers x. La famille des processus $(X(x_n,t),Y^n(x_n,t),B_t)_{n=0}^{\infty}$ est tendue (d'après le lemme 1), il en résulte d'après les théorèmes (4.2) et (4.3) dans [2] qu'il existe un espace de probabilité $(\bar{\Omega},\bar{F},\bar{P})$ et une suite de processus $(\bar{X}_t^n,\bar{Y}_t^n,\bar{B}_t^n)$ définie sur $(\bar{\Omega},\bar{F},\bar{P})$ vérifiant (i) et (ii) :

i) Loi $(\bar{X}^n,\bar{Y}^n,\bar{B}^n) = \text{Loi}(X(x_n),Y^n(x_n),B) \qquad n = 1,2 \ldots$

ii) Il existe une sous suite $(\bar{X}^{n'}, \bar{Y}^{n'}, \bar{B}^{n'})$ qui converge uniformément sur tout compact presque surement vers $(\bar{X} ,\bar{Y}, \bar{B})$.

D'après l'égalité en loi de (i) on a :

$$\bar{Y}_t^{n'} + \int_0^t b(s, \bar{Y}_s^{n'} - \bar{\alpha}_s^{n'})\, ds = x_{n'} + \int_0^t \sigma(s, \bar{Y}_s^{n'})\, d\bar{B}_s^{n'}.$$

où

$$\bar{\alpha}_t^{n'} = \int_{d(n,t)}^{t} \sigma(s,\bar{Y}_s^{n'})d\bar{B}_s^{n'}$$

$$\bar{X}_t^{n'} = x_{n'} - \int_0^t b(s, \bar{X}_s^{n'})\, ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s^{n'})\, d\bar{B}_s^{n'}.$$

d'après le lemme 2 on a :

$$\bar{E} \sup_{0\le t\le T} (\bar{\alpha}_t^{n'})^2 = E \sup_{0\le t\le T} (\alpha_t^{n'})^2 \xrightarrow[n' \longrightarrow +\infty]{} 0$$

Donc il existe une sous suite ($\bar{\alpha}^{n''}$) qui converge uniformément sur tout compact presque surement vers 0 ; on suppose que ($\bar{\alpha}^{n'}$) tend vers 0 uniformément sur tout compact p.s.

Par passage à la limite on obtient (voir [5]):

$$\bar{Y}_t + \int_0^t b(s, \bar{Y}_s)\, ds = x + \int_0^t \sigma(s, \bar{Y}_s)\, d\bar{B}_s.$$

$$\bar{X}_t = x - \int_0^t b(s, \bar{X}_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s)\, d\bar{B}_s.$$

Donc, d'après la propriété d'unicité trajectorielle de (1) on a: $\bar{X} = \bar{Y}$ ce qui contredit (*). En effet :

$$0 < \delta \le \liminf_{n'} E \sup_{0\le t\le T} |Y^{n'}(x_{n'},t) - X(x_{n'},t)|^2$$

$$\le \liminf_{n'} \bar{E} \sup_{0\le t\le T} |\bar{Y}^{n'}(x_{n'},t) - \bar{X}(x_{n'},t)|^2 = \bar{E} \sup_{0\le t\le T} | \bar{X}_t - \bar{Y}_t|^2$$

(i) découle de (ii) et du lemme 2 .

Remerciements : Nous remercions le referee pour ses remarques qui ont permis d'améliorer le présent travail.

REFERENCES

[1] A. BENSOUSSAN - R. GLOWINSKI - A. RASCANU ; Approximation of some stochastic differential equations by the splitting up method. Applied Math and Optimization 25 p 81-106 (1992).

[2] N. IKEDA-S. WATANABE ; Stochastic differential equations and diffusion processes ; North - Holland (1981).

[3] H. KANEKO-S. NAKAO. A note on approximation for stochastic differential equations ; Séminaire de Probabilités XXII Lect. Notes in Maths 1321 Springer Verlag, p 155-162, (1988) .

[4] Y. OUKNINE ; Unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques ; Annales de l'université de Clermont, Série Probabilité, N°6, (1987).

[5] A. V. SKOROHOD. Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley, Washington (1965).

M. ERRAOUI et Y. OUKNINE
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Université Cadi Ayyad,
MARRAKECH
MAROC

Manuscrit reçu le 29 novembre 1993