ANNALES MATHÉMATIQUES BLAISE PASCAL

LEMNOUAR NOUI
PHILIPPE REVOY

Formes multilinéaires alternées

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 1, nº 2 (1994), p. 43-69
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1994__1_2_43_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 1, N° 2, 1994, pp. 43 - 69

FORMES MULTILINEAIRES ALTERNEES

Lemnouar NOUI et Philippe REVOY

Plusieurs auteurs ont étudiés les formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif. Le cas bilinéaire étant simple, celui des formes trilinéaires est l'objet principal des recherches : seules les dimensions 6 à 9 permettent une étude poussée soit sur un corps algébriquement clos ([6],[17],[19]), soit sur $\mathbb{R}$ ([5],[21]). Le second auteur ([14],[15]) ainsi que A. Cohen et A. Helminck ([4]) ont étudié les dimensions 6 et 7. Dans cet article, nous revenons sur ces questions en apportant compléments et précisions à la lumière de [10], complétant les classifications connues sur un corps quelconque par la considération d'autres invariants.

Résumé.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif K. L'objet de cet article est l'action du groupe linéaire $Gl(E)$ sur les espaces $\Lambda^p E$. Du fait des isomorphismes $\Lambda^p E^* \simeq (\Lambda^p E)^*$, on emploiera indifféremment le langage des formes alternées ou des p-vecteurs. Plusieurs études ont été consacrées au cas $p = 3$ et $n \leq 9$, soit sur un corps algébriquement clos, soit dans le cas général. Dans ce travail nous revenons sur le cas $n \leq 7$ après avoir donné un aperçu général sur les invariants arithmétiques, algébriques et géométriques que l'on peut associer à un p-vecteur. Nous donnons une description précise des résultats sur les corps finis et une démonstration du théorème de Schouten sur l'action de $Gl_7(K)$ sur $\Lambda^3 K^7$ dans le cas algébriquement clos.

Abstract.

Let E a finite dimensional K-vector space. The object of our work is the study of the action of the linear group $GL(E)$ on the spaces $\Lambda^p E$. As $\Lambda^p E^* \simeq (\Lambda^p E)^*$, there is no difference between alternating forms and p-vectors. Some papers have studied the case $p = 3$ and $\dim E \leq 9$, over an algebraically closed field and in the general case.

In this work, we are still interested by the $n = 7$ case; we, first, talk about invariants of arithmetical, algebraic and geometric meaning that one may assign to a p-vector. Then we apply this to the cases $n = 6$, $n = 7$ giving a complete analysis of the situation. We give a complete proof of Schouten's classification for $p = 3$, $n = 7$ and algebraically closed K and a precise description for the finite fields case.

§1 - Rappels sur l'algèbre extérieure

1.1. Rappelons l'action de E^*, dual de E, sur ΛE définie par : $d_f(1) = 0$, $d_f|E = f$ et $d_f(xu) = -xd_f(u) + f(x)u$ pour $x \in E$, $u \in \Lambda E$. Ainsi d_f est une antidérivation de degré -1, nulle sur la sous-algèbre $\Lambda(\operatorname{Ker} f)$, de carré nul et $f \mapsto d_f$ est une application linéaire ([3]). Pour $w \in \Lambda^p E$ fixé, $f \mapsto d_f(w)$ est une application linéaire de E^* dans $\Lambda^{p-1}E$, dont le noyau R_w est un sous-espace de E^* ; son orthogonal R_w° dans E est le support noté S_w de w : $S_w = \bigcap_{f\in R_w} \operatorname{Ker} f$ est le plus petit sous-espace F de E tel que $w \in \Lambda^p F$. Le rang de ω, noté $r(w)$, est la dimension de S_w et c'est un invariant sous l'action du groupe linéaire. Si on considère $w \in \Lambda^p E^*$ une forme p-linéaire, R_w le radical de w est l'ensemble des x de E tels que $w(x, x_2, \dots, x_p) = 0$ quels que soient $x_2, \dots, x_p$ dans E : si $R_w = \{0\}$, on dit que w est non dégénérée et w de rang maximal.

1.2. L'invariant $r(w)$ est le premier d'une suite d'invariants numériques. Soit α un sous-espace vectoriel de E et w_α l'image canonique de w dans $\Lambda^p(E/\alpha)$: on pose $d_k(w) = \inf_\alpha r(w_\alpha)$ où α parcourt la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension k de E et $d_0(w) = r(w)$. La suite $r(w), d_1(w), \dots, d_k(w)$ est strictement décroissante jusqu'à la valeur 0 où elle devient stationnaire.

La propriété suivante est immédiate : $d_1(w) = 0$ si et seulement si w est divisible par un vecteur. Dans le cas des 2-vecteurs ou formes bilinéaires alternées, la formule $d_k(w) = \sup(0, r(w) - 2k)$ se vérifie aisément.

1.3. La sous-algèbre commutative des éléments de degré pair de l'algèbre extérieure, $\Lambda_0 E = \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^{2k} E$ possède un système de puissances divisées et si K est de caractéristique 2, il y a des puissances divisées dans $\overline{\Lambda}(E) = \bigoplus_{k\neq 1} \Lambda^k E$ ([1],[13]) ce qui peut servir pour $p = 3$.

Rappelons que si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative, les puissances divisées sont définies par $\gamma_k(u) = \frac{u^k}{k!}$ et si $u = \sum_{i=1}^{i=r} x_{2i-1}x_{2i}$ où $\{x_1, \dots, x_{2r}, \dots, x_n\}$ est une base de E, $\gamma^k(u) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k} x_{2i_1-1}x_{2i_1}\cdots x_{2i_k-1}x_{2i_k}$ de sorte que $r(u) = 2k$ équivaut à : $\gamma^k(u) \neq 0$ et $\gamma^{k+1}(u) = 0$. Les puissances divisées permettent d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 E$ ([14]).

1.4. Un élément $w \in \Lambda^p E$ est dit *scindable* s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que w appartienne au facteur direct $E_1 \otimes \Lambda^{p-1}E_2$ de $\Lambda^p E$. Si $\dim E_1 = r$, on dira que w est r-scindable : si $r = 1$, cela signifie que w est divisible, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à : $E \to \Lambda^{p+1}E$, $x \mapsto xw$ n'est pas injective. Par contre, si $r \geq 2$ cette propriété dépend du corps de base ; notons aussi que w r-scindable implique $d_r(w) = 0$ car $w_{E_1} = 0$, mais la réciproque est fausse.

Soit w un élément r-scindable et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de E_1 : $w = \sum_{i=1}^{i=r} e_i u_i$ où les $u_i \in \Lambda^{p-1}E_2$ sont déterminées par les e_i car $u_i = d_{e_i^*}(w)$ où e_i^* est définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$. Si on change de base dans E_1, les u_i sont soumis au changement de base contragrédient : de l'isomorphisme $E_1 \otimes \Lambda^{p-1}E_2 \simeq \mathrm{Hom}(E_1^*, \Lambda^{p-1}E_2)$ on voit qu'à w est associé un sous-espace vectoriel F de $\Lambda^{p-1}E_2$ qui est de dimension r si les u_i sont indépendants. Si on s'intéresse aux éléments r-scindables de rang maximal $r(w) = \dim E$, il faut étudier l'action du groupe linéaire $Gl(E_2)$ sur la grasmanienne $Gr_r(E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\Lambda^{p-1}E_2$. C'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du couple $(r, n-r)$ dans [14], le cas $n - r$ pair étant plus simple car on dispose alors de puissances divisées à valeurs dans un espace vectoriel de dimension 1.

1.5. Les invariants algébriques classiques sont les automorphismes et les dérivations : si $w \in \Lambda^p E$, $\mathrm{Aut}(w)$ est le sous-groupe de $Gl(E)$ des automorphismes f de E qui laisse w invariant : $\Lambda^p f(w) = w$. Soit maintenant w une forme p-linéaire alternée sur E : on appelle $D(w)$ l'ensemble des applications linéaires $d : E \to E$ telles que $\sum_{i=1}^{i-p} w(x_1, \ldots, x_{i-1}, dx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) = 0$ quels que soient $x_1, \ldots, x_p$ dans E : c'est une K-algèbre de Lie et, en caractéristique 0, l'algèbre de Lie du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(w) = \{f | f \in Gl(E)$ et $w(fx_1, \ldots, fx_p) = w(x_1, \ldots, x_p)$ $\forall x_1, \ldots, x_p \in E\}$.

Un troisième invariant a été introduit par B. Kahn ([10]), le commutant de w. Si $w \in \Lambda^p E^*$, on désigne par $C(w)$ le sous-ensemble de $\mathrm{End}_K(E)$ formé des $f : E \to E$ telles que les p applications $w_i : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto w(x_1, \ldots, x_{i-1}, fx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ sont égales (i.e. ne dépendent pas de i). Nous montrerons que $C(w)$ est une K-algèbre qui possède des propriétés intéressantes.

1.6. Dans [15] sont définis, à la suite de [11], des covariants algébriques de certaines formes trilinéaires alternées de rang 6 et 7 qui permettent de mieux les comprendre. On peut généraliser à certains couples (p, n) ces deux constructions.

Dans le premier cas soit $w \in \Lambda^p E^*$ où $\dim E = 2p$: si $f \in E^*$ et $x \in E$, $f\ w\ d_x(w)$ est dans l'espace vectoriel $\Lambda^{2p}E^*$ de dimension 1 . L'application $(f, x) \mapsto f\ w\ d_x(w)$ est bilinéaire et induit une application linéaire $t_w : E^* \otimes E \to \Lambda^{2p}E^*$. La transposée de t_w est un élément de $\mathrm{Hom}(\Lambda^{2p}E, E^* \otimes E)$ qui est 0 ou qui détermine une droite D dans $E^* \otimes E \simeq \mathrm{End}_K(E)$; on peut donc associer à w une application linéaire $U_w : E \to E$ déterminée à une homothétie près qui est un covariant de w. Si p est pair, on verra que c'est une homothétie mais le cas $p = 3$ montre qu'on peut en espérer une information plus riche quand p est impair.

Dans le second cas, on généralise le covariant quadratique associée à un trivecteur de rang 7 : soit $w \in \Lambda^{2h+1}E^*$ où E est un espace vectoriel de dimension $6h + 1$. Soit $x \in E$; $d_x(w) \in \Lambda^{2h}E^*$ et si $f \in E^*$ vérifie $f(x) = 1$, $f\gamma_3(d_x(w))$ élément de $\Lambda^{6h+1}E^* = \text{dét}\, E^*$ ne dépend pas de f et dépend quadratiquement de x. Comme $\Lambda^{6h+1}E^*$ est de dimension 1, on obtient une droite de formes quadratiques sur E, généralisant la construction de [15].

§2 - Commutant et dérivations

Dans ce paragraphe, nous développons les propriétés de $C(w)$ et de $D(w)$ définis en 1.5. généralisant des résultats de [10].

Rappelons que, si $w \in \Lambda^p E^*$, $C(w)$ est l'ensemble des endomorphismes f de E tel que $w(x_1, \ldots, x_{i-1}, fx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$ ne dépend pas de l'entier i mais seulement des x_i. On suppose naturellement $p \geq 3$; il suffit alors de supposer que $w(x_1, fx_2, x_3, \ldots, x_p) = w(fx_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$. Si $f \in C(w)$, il est clair que la fonction $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto w(fx_1, x_2, \ldots, x_p)$ qu'on notera w_f est p-linéaire alternée.

2.1. Proposition. *$C(w)$ est une sous-algèbre unitaire de $\mathrm{End}_K(E)$ et $f \mapsto w_f$ est une application linéaire de $C(w)$ dans $\Lambda^p E^*$.*

Comme w est linéaire, $C(w)$ contient les homothéties et est stable par multiplication par un scalaire et par addition. La linéarité de $f \mapsto w_f$ est claire. Supposons donc que f et g sont dans $C(w)$: $w(fgx_1, x_2, x_3, \ldots, x_p) = w(gx_1, x_2, fx_3, x_4, \ldots, x_p) = w(x_1, gx_2, fx_3, x_4, \ldots, x_p) = w(x_1, fgx_2, x_3, \ldots, x_p)$ montre que $fg \in C(w)$ et on voit bien la nécessité de l'hypothèse $p \geq 3$.

2.2. Proposition. *$\mathrm{Hom}_K(E, R_w)$ est un idéal bilatère I de $C(w)$ et le quotient $C(w)/I$ est commutatif; I est le noyau de l'application linéaire $f \mapsto w_f$.*

I est contenu dans $C(w)$ car $w(x_1, \ldots, fx_i, \ldots, x_p) = 0$ si $f \in I$ et réciproquement si $w_f = 0$, $f(x) \in R_w$ quel que soit x dans E, de sorte que I est bien le noyau de $f \mapsto w_f$. C'est aussi un idéal à droite de $C(w)$ car c'en est un dans $\mathrm{End}_K(E)$. Pour voir que c'est un idéal à gauche de $C(w)$, soit $g \in C(w)$ et $f \in I : w(gfx_1, x_2, \ldots, x_p) = w(fx_1, gx_2, x_3, \ldots, x_p) = 0$ car $fx_1 \in R_w$. Enfin soient f et g dans $C(w) : w(fgx_1, x_2, \ldots, x_p) = w(gx_1, fx_2, \ldots, x_p) = w(x_1, gfx_2, \ldots, x_p)$ est aussi égal à $w(x_1, fgx_2, \ldots, x_p)$ donc $fg - gf \in I$, ce qui montre que $C(w)/I$ est commutatif.

On suppose désormais E de dimension finie.

2.3. Proposition. *Soit w une p-forme non dégénérée : $C(w)$ est une K-algèbre commutative produit direct fini d'anneaux locaux commutatifs et il existe une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels $E_{i, 1 \leq i \leq k}$, et des formes p-linéaires $w_i \in \Lambda^p E_i^*$ telles que $w = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$ et $C(w)$ est produit des anneaux locaux $C(w_i)$.*

Comme $R_w = 0$, $C(w)$ est commutatif d'après 2.2. E étant de dimension finie, $C(w)$ l'est aussi ; c'est donc un produit fini d'anneaux locaux commutatifs et $1_E = e_1 + e_2 + \ldots + e_k$ où les e_i sont des idempotents de $C(w)$, orthogonaux deux à deux et indécomposables. Soit $E_i = e_i E : E = \oplus_i E_i$; si $x \in E_i$ et $y \in E_j$, $w(x, y, x_3, \ldots, x_p) = w(e_i x, e_j y, x_3, \ldots, x_p) = w(x, e_i e_j y, x_3, \ldots, x_p) = 0$.

Il en résulte que $w = w_1 + \ldots + w_k$ où w_i est la restriction de w_i à E_i ; on vérifie que $R_{w_i} = 0$ et que $C(w_i) = C(w)e_i$.

Remarquons que si $f \in C(w)$, ses parties semi-simples et nilpotentes sont dans $C(w)$ car ce sont des polynômes en f. On dira que w est *indécomposable* (resp. absolument indécomposable) si $C(w)$ est local (resp. le reste par extension des scalaires). Si w est indécomposable, $f \in C(w)$ est inversible si et seulement si sa partie semi-simple f_s est non nulle. Cela montre que l'application $f \mapsto f_s$ est un endomorphisme idempotent de $C(w)$ dont le noyau est le radical N de $C(w)$ et dont l'image est un sous-corps L de $C(w)$, isomorphe à $C(w)/N$ et extension algébrique finie de K. Comme $C(w)$ commute à l'extension des scalaires, L coïncide avec K si w est absolument simple. Dans le cas général, V est un L-espace vectoriel de dimension finie et $C(w)$ une L-algèbre. Si L est séparable, il existe une extension M de K telle que $L \otimes_K M \simeq M \times \ldots \times M \dim L$ fois et la forme w_M obtenue par extension des scalaires de K à M est décomposable en somme orthogonale de $h = \dim L$ formes sur des sous-espaces vectoriels de $V \otimes_K M = V_M$. Nous allons étudier plus en détail les formes absolument indécomposables : $A = C(w) = K \oplus N$ et regardons le cas où $\dim N = 1$. $A = K[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$ est l'algèbre des nombres duaux. Alors E est un A-module de type fini et de l'inclusion $0 \subset \operatorname{Im} \varepsilon \subset \operatorname{Ker} \varepsilon \subset E$, on déduit qu'il existe des entiers n_1 et n_2 tels que $E \simeq A^{n_1} \oplus N^{n_2}$ en tant que A-module.

Soit alors $w' : E^p \to A$ l'application définie par $w'(x_1, x_2, \ldots, x_p) = w(\varepsilon x_1, x_2, \ldots, x_p) + \varepsilon w(x_1, \ldots, x_p)$ qu'on écrit $w' = w_\varepsilon + \varepsilon w$.

2.4. Lemme. *w' est une forme A-multilinéaire alternée non dégénérée sur E.*

La seule propriété non immédiate est la A-linéarité : $w'(\varepsilon x_1, x_2, \ldots, x_p) = w(\varepsilon^2 x_1, x_2, \ldots, x_p) + \varepsilon w(\varepsilon x_1, \ldots, x_p) = \varepsilon w(\varepsilon x_1, x_2, \ldots, x_p) = \varepsilon[w(\varepsilon x_1, x_2, \ldots, x_p) + \varepsilon w(x_1, \ldots, x_p)]$.

Soit $d : A \to K$ la dérivation définie par $d(a + b\varepsilon) = b$: alors $w = d \circ w'$: $E^p \xrightarrow{w'} A \xrightarrow{d} K$. Ainsi il y a une bijection naturelle entre les triples (E, w, ε) et (E', w') où w est une forme p-linéaire alternée non dégénérée sur E et ε un élément de carré nul de $C(w)$ et où E' est un A-module de type fini et w' une A-forme p-linéaire alternée non dégénérée sur E'.

Une classe de tels exemples s'obtient ainsi : soit (E_0, w_0) un K-espace vectoriel de dimension finie munie d'une p-forme alternée non dégénérée : on pose $E' = E \otimes_K A$ et w' la forme déduite de w_0 par extension des scalaires. Alors

$$w'((x_i + \varepsilon y_i)) = w_0(x_1, \ldots, x_p) + \sum_{i=1}^{p} w_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

où $x_i, y_i \in E_0$. Sur le K-espace vectoriel $E_1 = E_0 \oplus \varepsilon E_0$, on obtient une p-forme non dégénérée $w = d \circ w'$: c'est une forme scindable qu'on peut décrire ainsi. Dans $\Lambda^p(E_0 \oplus E_0)^*$, on considère le sous-espace vectoriel $E_0^* \otimes \Lambda^{p-1} E_0^* \simeq \operatorname{Hom}(E_0, \Lambda^{p-1} E_0^*)$: à w_0 est associée l'application de E_0 dans $\Lambda^{p-1} E_0^*$ définie par $x \mapsto d_x(w_0)$. Alors w correspond exactement à cette application par les isomorphismes naturels.

Une autre classe d'exemples est la suivante : soit L une extension étale de K (produit fini d'extensions algébriques séparables) et soit $E = L^p$. Sur E, il y a une forme p-linéaire canonique le déterminant noté dét : $E \to L$. Pour toute forme linéaire $f : L \to K$, dont le noyau ne contient aucune sous-algèbre de L on considère sur E, la forme p-linéaire $w = f \circ \text{dét} : E^p \to K$ où E est considéré comme un K-espace vectoriel.

2.5. Proposition. *w est une forme p-linéaire alternée non dégénérée sur E telle que $C(w) = L$.*

Il est clair que $C(w)$ contient L ; si on étend les scalaires à une clôture séparable $\overline{K}$ de K, L devient $\overline{K}^m$, $m = \dim_K L$ et w la somme directe de m formes déterminant sur $\overline{K}^p$. Alors $C(\overline{w}) = \overline{K}^m$; comme $C(w) \otimes_K \overline{K}$ s'injecte dans $C(\overline{w})$ et que $\dim_K L = \dim_{\overline{K}} C(\overline{w})$, $C(w)$ est exactement égal à L.

Notons le résultat suivant dû à B. Kahn ([10]).

2.6. Proposition. *Supposons que $C(w)$ est une K-algèbre étale :*

$$\dim E \geq p \dim C(w).$$

On peut supposer K algébriquement clos ; alors $C(w) \simeq K^m$, $E = \oplus_{i=1}^m E_i$ et $w = w_1 + \ldots + w_m$ où $w_i \in \Lambda^p V_i^*$ est non dégénérée. Comme $\dim E_i \geq p$, on a bien $\dim E \geq p\, m = p \dim C(w)$.

Nous allons généraliser ce résultat à d'autres cas, quand $C(w)$ n'est plus étale. On suppose que K est algébriquement clos. Rappelons qu'une K-algèbre semi-locale de dimension finie A est dite *frobeniusienne* si le A-module $A^* = \operatorname{Hom}(A, K)$ est isomorphe à A. En voici deux caractérisations :

2.7. Proposition. *1) A est frobeniusienne si et seulement si il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $B : A \times A \to K$ telle que $B(ab, c) = B(a, bc)$ quels que soient a, b et c dans A.*

2) A est frobeniusienne si et seulement si le socle S de A (l'annulateur dans A de l'idéal maximal N) est de dimension 1.

Si A^* est isomorphe à A, on en déduit aisément une forme bilinéaire sur A vérifiant les conditions voulues ; pour la seconde partie, cela découle d'un isomorphisme naturel entre A^*/NA^* et le socle S de A.

Des exemples d'anneaux fröbeniusiens sont : $\Lambda_0 E = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} E$ où $\dim E$ est finie paire ; $K[T_1, \ldots, T_k]/(T_1^{n_1}, \ldots, T_k^{n_k})$ ou encore $A = K \oplus V \oplus K$ où V est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B_0 et le produit est donné par $(\lambda, v, \mu)(\lambda', v', \mu') = (\lambda\lambda', \lambda v' + \lambda' v, \lambda\mu' + \lambda'\mu + B_0(v, v'))$. Alors A est locale, $N = V \oplus K$ et $S = \{(0, 0, \mu) | \mu \in K\}$, donc A est frobeniusienne.

2.8. Théorème. *Soit $w \in \Lambda^p E^*$ une forme p-linéaire alternée non dégénérée telle que $A = C(w)$ est frobeniusienne : $\dim E \geq p \dim C(w)$.*

Considérons l'application de $E^p \times A$ dans K définie par $(x_1, \ldots, x_p, a) \mapsto w(ax_1, x_2, \ldots, x_p) = w_a(x_1, \ldots, x_p)$. Elle est K-multilinéaire, alternée par rapport aux x_i. Elle induit donc une application $\varphi : E^p \to A^* = \mathrm{Hom}\,(A, K)$ qui est A-p-linéaire alternée : pour $x_1, \ldots, x_p$ fixés dans E $\varphi(a.x_1, \ldots, x_p) = (a.\varphi)(x_1, \ldots, x_p)$. Il suffit de le vérifier sur un élément b de A : $\varphi(a.x_1, \ldots, x_p)(b) = \varphi(b.ax_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(a.\varphi)(x_1, \ldots, x_p)(b) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)(ab) = \varphi(abx_1, x_2, \ldots, x_p)$ coïncident. On en déduit une application A-linéaire $w' : \Lambda^p_A E \to A^*$ qui est surjective, sinon il existerait a non nul dans A tel que $\varphi(x_1, \ldots, x_p)(a) = 0$ pour tous $x_1, \ldots, x_p$ dans E, donc $w(ax_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$. Comme w est non dégénérée, $a.x_1 = 0$ et $a = 0$. Comme A est frobeniusienne, $A^* \xrightarrow[u]{\sim} A$ et $u \circ w' : \Lambda^p_A E \to A$ est surjectif : il existe $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E tels que $u \circ w'(x_1, \ldots, x_p) = 1$. Le sous A-module de E engendré par $x_1, \ldots, x_p$ est libre de rang p : E contient A^p et $\dim E \geq p \dim A$.

On peut construire un exemple de couple (E, w) tel que $C(w) = A$ est un anneau frobeniusien en généralisant 2.5 : soit $E = A^p$ et $\pi : A \to K$ une forme linéaire non nulle sur le socle de A. Alors $w = \pi \circ \mathrm{dét}_A : E = A^p \to K$ est une K-forme p-linéaire alternée non dégénérée sur E dont le commutant $C(w)$ est égal à A, comme on l'a montré en 2.5.

Une question naturelle se pose : y-a-t-il des p-formes alternées w telles que $C(w)$ ne soit pas frobeniusienne ? et, dans ce cas a-t-on encore $r(w) \geq p \dim C(w)$? L'exemple le plus simple à traiter est celui où $A = K \oplus N$ ou N est un idéal à produit nul avec $\dim N \geq 2$. Nous nous intéressons désormais à l'algèbre de Lie $D(w)$ introduite en 1.5, $D(w) = \{d : E \to E | \sum_{i=1}^{i=p} w(x_1, \ldots, x_{i-1}, dx_i, x_{i+1}, \ldots, x_p) = 0\}$. Pour simplifier, on supposera que $p = 3$ sans restreindre la généralité du propos.

2.9. Proposition. *Soit w une forme non dégénérée, $f \in C(w)$ et $d \in D(w)$: alors $[d, f] = d \circ f - f \circ d \in C(w)$. Si $C(w)$ est étale, $[d, f] = 0$ et $D(w)$ est une $C(w)$-algèbre de Lie.*

La première affirmation se vérifie aisément : supposant $p = 3$, $w(fdx, y, z) = w(dx, fy, z) = -w(x, dfy, z) - w(x, fy, dz) = -w(x, dfy, z) - w(fx, y, dz) = -w(x, dfy.z) + w(fx, dy, z) + w(dfx, y, z) = -w(x, dfy, z) + w(x, fdy, z) + w(dfx, y, z)$ soit $w((fd - df)x, y, z) = w(x, (fd - df)(y), z)$.

Le reste de la proposition provient du

2.10. Lemme. *Si $V = V_1 \oplus V_2$ et $w = w_1 + w_2$, $w_i \in \Lambda^p V_i^*$, non dégénérés, $D(w) = D(w_1) \times D(w_2)$.*

Il suffit de montrer que si $d = \begin{pmatrix} 0 & d_{21} \\ d_{12} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_K(V_1 \oplus V_2)$ est une dérivation de w, $d = 0$. Prenons alors $x \in V$, y et $z \in V_2$: on a $w(x, dy, z) = w(x, y, dz) = 0$ car dy et z (resp. y et dz) sont dans deux sous-espaces orthogonaux. On a donc $w(dx, y, z) = 0$ quels que soient y et z dans V_2 et donc $d_{12} = 0$; de la même façon on montre que $d_{21} = 0$.

Pour démontrer 2.9, nous supposons $C(w)$ étale ; quitte à faire une extension des scalaires, on peut supposer que $C(w) = K^n$ et w est somme orthogonale de n formes non dégénérées w_i. Alors $D(w) = \Pi_i D(w_i)$ et tout élément de $C(w)$ est une homothétie sur le support de w_i d'où $[d, f] = 0$ si $d \in D(w)$ et $f \in C(w)$. Il est immédiat de vérifier aussi que $f \circ d \in D(w)$, c'est-à-dire que $D(w)$ est une $C(w)$-algèbre.

§3 - Trivecteurs et formes de rang 6

3.1. En dimension petite, les 3-vecteurs, comme les p-vecteurs se classent facilement : si dim $E < p$, $\Lambda^p E = \{0\}$ et si dim $E = p$, $\Lambda^p E$ est de dimension 1. En dimension p, il n'y a qu'une classe de p-vecteurs non nuls : si $w \in \Lambda^p E \backslash \{0\}$, il existe $\{e_1, \ldots, e_p\}$ base de E telle que $w = e_1 e_2 \ldots e_p$. Alors Aut $w = Sl(E) = \{f | \text{dét } f = 1\}$, $C(w) = K$ et $D(w) = sl(E)$ qui est simple si la caractéristique de K ne divise pas la dimension de E.

Il n'y a pas de p-vecteurs de rang $p + 1$: tout p-vecteur non nul w de $\Lambda^p E$, dim$E = p + 1$, est produit de p vecteurs linéairement indépendants et $S_w = \mathrm{Ker}\ (E \xrightarrow{u} \Lambda^{p+1} E)$ où $u(x) = xw$. En rang $p + 2$, il y a de nouvelles classes de p-vecteurs ; il y a un isomorphisme naturel entre $\Lambda^p E$ et $\Lambda^2 E^* \otimes \Lambda^{p+2} E$ par le produit $\Lambda^p E \times \Lambda^2 E \to \Lambda^{p+2} E$ car ce dernier espace est de dimension 1. Nous supposons désormais $p = 3$: si dim $E = 5$, un trivecteur w de rang maximal est nécessairement divisible par un vecteur e_1 : $w = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4. On peut choisir pour S_u tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base (e_i), $1 \le i \le 5$, de E telle que $w = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$. Pour le rang 6, la classification est plus délicate et nous rappelons les principaux résultats de [14].

3.2. Lemme. *Tout élément de rang 6 de $\Lambda^3 E$ est 2-scindable.*

Comme nous l'avons dit en 1.4, la classification des 3-vecteurs de rang 6 se fait à partir de celle des sous-espaces vectoriels V de dimension 2 de $\Lambda^2 K^4$, étudiés en [14]. Si K est quadratiquement clos, deux cas se présentent : géométriquement, la droite D associée à V dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 K^4)$ rencontre la grasmanienne $G_{2,4}$ (quadrique de Plücker $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$) en deux points distincts ou bien en un point double (elle est alors tangente à $G_{2,4}$), d'où :

3.3. Lemme. *Sur un corps quadratiquement clos, il y a deux classes d'isomorphisme* *de 3-vecteurs de rang 6. Dans une base e_i, $1 \leq i \leq 6$, de E ils s'écrivent*

$$w_1 = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$$
$$w_2 = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$$

Sur un corps arbitraire, les deux cas se décomposent ainsi : D rencontre $G_{2,4}$ en deux points distincts K-rationnels ou définis sur une extension quadratique séparable de K pour w_1. Dans le second cas, celui du contact, le point de contact est défini soit sur K pour w_2, soit sur une extension quadratique inséparable de K qui est non parfait de caractéristique 2. Cela donne les types suivants. Pour w_1 si $K' = K[x]$ avec $x^2 = d$, $d \notin K^{*2}$, car $K \neq 2$:

$$w_{1,d} = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_6 - de_4e_5)$$

Si car $K = 2$, le même $K' = K[x]$ avec $x^2 = d \notin K^{*2}$ est une extension inséparable de K et l'expression donnée plus haut est un 3-vecteur $w_{2,d}$ de type w_2.

Si car$K = 2$, $K' = K[x]$ avec $x^2 = x + a$, $a \notin \{\alpha^2 + \alpha | \alpha \in K\} = p(K)$, est une extension séparable de K :

$$w_{1,a} = e_1(e_3e_4 + ae_5e_6) + e_2(e_3e_6 + e_4e_5 + e_5e_6)$$

est une classe de type w_1.

3.4. Cette description des orbites du groupe $Gl_6(K) \simeq Gl(E)$ agissant sur l'espace vectoriel $\Lambda^3 K^6 \simeq \Lambda^3 E$ peut se faire autrement dans le langage des formes 3-linéaires alternées et cela nous donnera les invariants $C(w)$, Aut$w$ et $D(w)$. Soit pour cela L une extension quadratique séparable de K (éventuellement $K \times K$) et F un L-espace vectoriel de dimension 3. Choisissons une base (f_1, f_2, f_3) de F et soit $\varphi : \Lambda^3_L F \rightarrow L$ la forme déterminant normalisée par $\varphi(f_1, f_2, f_3) = 1$. Soit alors $Tr_L : L \rightarrow K$ la forme trace et $w_L = Tr_L \circ \varphi : E \times E \times E \rightarrow K$; c'est une forme K-multilinéaire alternée de rang 6 sur $E = F$ considéré comme espace vectoriel sur K. Un calcul explicite montre qu'en choisissant convenablement une K-base de E et en écrivant $L = K[x]$ avec $x^2 = d$ ou $x^2 = x + a$ suivant la caractéristique, on trouve pour expression de w_L, $w_{1,d}$ ou $w_{1,a}$ et si $L = K \times K$, $w_L = w_1 = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$.

Pour obtenir $w_{2,d}$ en caractéristique 2, on emploie un procédé parallèle : $K' = K[x]$ avec $x^2 = d$. Soit $F = K'^3$, $\varphi : \Lambda^3_{K'} F \rightarrow K'$ la forme déterminant canonique et $w_{K'} : F \times F \times F \rightarrow K$ la composée de φ et de la dérivation $d : K' \rightarrow K$ définie par $d(x) = 1$ et $d(1) = 0$. (Si K est parfait, K' est remplacé par $K[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$ et $d(a + b\varepsilon) = b$). Alors $w_{K'}$ est une forme K-multilinéaire alternée sur le K-espace vectoriel de dimension 6, K'^3 dont l'expression dans une base convenable est $w_{2,d}$ (respectivement w_2 si $K' = K[\varepsilon]$).

Dans ces deux cas, il devient facile de déterminer $C(w)$: en effet si $\alpha \in L$ ou K',

$$\varphi(\alpha x_1, x_2, x_3) = \alpha\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, \alpha x_2, x_3)$$

et la multiplication par α dans F est un élément de $C(w_L)$ ou de $C(w_{K'})$. Donc L (resp. K') s'injecte dans $C(w_L)$ (resp. $C(w_{K'})$).

Comme on l'a vu en 2.8, on a nécessairement $C(w_L) = L$ d'où

3.5 Théorème. *Soit $w \in \Lambda^3 E^*$ une forme 3-linéaire alternée de rang 6. La K-algèbre $C(w)$ est frobeniusienne de rang 2 et caractérise la classe d'équivalence de w sous l'action du groupe linéaire $Gl(E)$.*

On peut en déduire le groupe $\operatorname{Aut} w_L$: on suppose tout d'abord que L est séparable. Si $L = K \times K$, $w_L = w_1$ dont le groupe des automorphismes est produit semi-direct de $Sl_3(K) \times Sl_3(K)$ (groupe des automorphismes de K^6 qui laissent invariants $e_1e_2e_3$ et $e_4e_5e_6$) par le groupe $\mathbb{Z}/(2)$ correspondant à la permutation de ces deux 3-vecteurs. Si L est un corps extension séparable de K, le groupe $Sl_3(L)$ est un sous-groupe de $\operatorname{Aut} w_L$ car il fixe φ : $\varphi(ux, uy, uz) = (\text{dét}\, u)\varphi(x, y, z)$ si $u \in Gl_L(F)$. De même la conjugaison s de L sur K induit un K-automorphisme involutif $\overline{s}$ de F qui laisse invariant la base canonique de F. On a alors $\varphi(\overline{s}x, \overline{s}y, \overline{s}z) = s(\varphi(x, y, z))$ de sorte que $\overline{s} \in \operatorname{Aut} w_L$; alors $\operatorname{Aut} w_L$ est produit semi-direct de $Sl_3(L)$ par $\{1, \overline{s}\} \simeq \mathbb{Z}/(2) \simeq \operatorname{Gal}(L/K)$.

Le groupe des automorphismes de w_2 (et de $w_{2,d}$) contient $Sl_3(K[\varepsilon])$ (resp. $Sl_3(K')$) mais ne lui est pas égal. Remarquons que par $\varepsilon \mapsto 0$, $K[\varepsilon] \to K$, on obtient la suite exacte de groupes

$$1 \to sl_3(K) \to Sl_3(K[\varepsilon]) \to Sl_3(K) \to 1,$$

où $sl_3(K) \simeq K^8$ est considéré uniquement comme groupe additif. Le groupe $\operatorname{Aut} w_2$ possède $sl_3(K)$ comme sous-groupe distingué et le quotient est $Gl_3(K)$: si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de F sur $K[\varepsilon]$, et $e_{i+3} = \varepsilon e_i$, $w_2 = e_1e_2e_6 - e_1e_3e_5 + e_2e_3e_4$. Alors $F_0 = \varepsilon F$ est stable par $\operatorname{Aut} w_2$ et on a la suite exacte

$$1 \to sl_3(K) \to \operatorname{Aut} w_2 \to Gl(F_0) \to 1$$

Le sous-groupe à un paramètre $e_i \mapsto \lambda e_i$ pour $i \leq 3$ $e_i \mapsto \mu e_i$ pour $i > 3$ avec $\lambda^2\mu = 1$ est contenu dans $\operatorname{Aut} \omega_2$ sans être dans $Gl_3(K(\varepsilon])]$ car ce n'est pas $K[\varepsilon]$-linéaire. On détermine de la même manière $\operatorname{Aut}(w_{2,d})$ qui est strictement plus grand que $Sl_3(K')$.

3.6 Les formes trilinéaires alternées de rang 6 de type w_1 peuvent s'obtenir à partir des algèbres de Lie semi-simples de dimension 6. Soit A une K-algèbre de Lie semi-simple et $k : A \times A \to K$ sa forme de Killing (on supposera pour simplifier K de caractéristique 0) ; à k est associée, la forme trilinéaire alternée

$w : (a,b,c) \mapsto k([a,b],c)$ car k est invariante. De plus w est de radical nul car son radical est l'orthogonal pour k de l'idéal dérivé.

Supposons A de dimension 6 ; si K est algébriquement clos, $A \simeq so(4,K) \simeq sl(2,K) \times sl(2,K)$ et la forme w est w_1. Si K n'est pas algébriquement clos, w devient isomorphe à w_1 par extension des scalaires donc est du type $w_{1,d}$. On sait qu'alors le centroïde de A, (c'est la sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(A)$ formée des applications linéaires qui commutent avec les opérateurs adjoints cf. [12]), qui est $C(w)$, est une extension quadratique séparable L de K de sorte que A est une L-algèbre de Lie simple de dimension 3. Alors $A = so(\varphi_L)$ où φ_L est une L-forme quadratique non dégénérée de rang 3 et $k : A \times A \to K$ est la forme $Tr_{L/K} \circ k_L$.

Pour la forme trilinéaire w_2, on a une interprétation analogue sur un corps de caractéristique différente de 2. On considère l'algèbre de Lie $sl_2(K)$ et le produit semi direct A de $sl_2(K)$ par le $sl_2(K)$-module $sl_2(K)^*$. C'est une algèbre de Lie de dimension 6 sur laquelle la forme hyperbolique canonique $\langle\, , \rangle$ est invariante par les opérateurs adjoints. Comme $D(A) = A$, le produit mixte w défini comme plus haut par $w(a,b,c) = \langle [a,b],c \rangle$ est une forme trilinéaire alternée de rang 6 et un calcul direct montre que $w \simeq w_2$. On a aussi

3.7. Proposition. *L'algèbre de Lie $D(w_1)$ est isomorphe à $sl_3(K) \times sl_3(K)$. Celle de $w_{1,d} = w_L$ est isomorphe à $sl_3(L)$ où L est l'extension quadratique $C(w)$.*

Pour w_1, c'est immédiat par exemple en utilisant 2.10. Pour $w_{1,d} = \omega_L$, on sait déjà que $D(w)$ est une L-algèbre de Lie par 2.9. Par extension des scalaires $D(w) \otimes_K L \simeq sl_3(L) \times sl_3(L)$; donc $D(w)$ est semi-simple et de dimension 8, soit $sl_3(L)$, soit une L-forme non décomposée de sl_3 : $sl(D)$ ou $su(\varphi)$ où φ est hermitienne de rang 3. Ces deux cas sont impossibles : $D \otimes_K L$ est un corps gauche de centre L et $su(\varphi) \otimes_K L = su(\varphi_L)$ reste simple.

3.8. Proposition. *a) Si $car(K) \neq 2$, l'algèbre de Lie $D(w_2)$ vérifie la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow K^8 \longrightarrow D(w_2) \longrightarrow gl_3(K) \longrightarrow 0$$

b) Si $car(K) = 2$, $D(w_2) = Kv \oplus H$ où $v^2 = 0$ et v est de rang 3 et H vérifie la suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow K^8 \longrightarrow H \longrightarrow gl_3(K) \longrightarrow 0.$$

a). On détermine $D(w_2)$ en caractéristique différente de 2 en remarquant que c'est le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Aut}\,(w_2)_{K[\varepsilon]} \to \mathrm{Aut}\,(w_2)_K : \varepsilon \mapsto 0$.

On a les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K[\varepsilon]^8 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{K[\varepsilon]}[w_2] & \longrightarrow & Gl_3(K[\varepsilon]) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon=0} & & {\scriptstyle \varepsilon=0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon=0} & & \\
1 & \longrightarrow & K^8 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}\, w_2 & \longrightarrow & Gl_3(K) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

d'où la suite exacte d'algèbres de Lie.

$$0 \to K^8 \to D(w_2) \to gl_3(K) \to 0$$

Ainsi $D(w_2)$ est produit semi-direct de $gl_3(K)$ par la représentation adjointe restreinte à $K^8 = sl_3(K)$.

On peut obtenir le résultat a) autrement : en effet on sait que $C(w_2) = K[\varepsilon]$ où $\varepsilon^2 = 0$ est de rang 3, $V_0^* = \{x \in E^*/w_2(x)\}$ est de rang 3$\} \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E^*, de dimension 3, stable par $\mathrm{Aut}(w_2)$. On a $E = V_0 \oplus \varepsilon V_0$ et $w_2 \in (\varepsilon V_0)^* \otimes \Lambda^2(V_0^*)$; notons aussi ε l'élément correspondant dans $gl_3(K)$ à l'isomorphisme $\varepsilon : V_0 \to \varepsilon V_0$.

Alors si $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et si $f \in D(w_2)$ sa matrice $M(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$, par conséquent l'application linéaire $\psi : D(w_2) \to gl_3(K)$ définie par $\psi(M) = C$, est un homomorphisme d'algèbres de Lie, surjectif et de noyau $sl_3(K)$.

b) En caractéristique 2, tout élément f de $D(w_2)$ s'écrit d'une manière unique $f_1 + f_2$ où $f_1 \in Kv$, v étant l'isomorphisme réciproque de $\varepsilon : V_0 \to \varepsilon V_0$, et f_2 appartient à la sous-algèbre de Lie H formée des matrices $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ telles que $C \in sl_3(K)$, $B \in \varepsilon sl_3(K)$ et $A = A_0 - \lambda_3 I_3$ avec $\lambda_3 \in K$ et $A_0 = (a_{ij}) \in gl_3(K)$, $a_{33} = 0$, A et C vérifiant la relation $A + Tr(A)I_3 = \varepsilon^{-1}C\varepsilon$.

Alors l'application linéaire $\varphi : H \to sl_3(K) \times K$ définie par $\varphi(M) = (C, \lambda_3)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, surjectif et de noyau $sl_3(K)$, d'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow K^8 \longrightarrow H \longrightarrow gl_3(K) \longrightarrow 0.$$

3.9. Un covariant peut être associé à un trivecteur de rang 6. Plus généralement soit $w \in \Lambda^k E$ où E est un espace vectoriel, $n = 2k$. Si $f \in E^*$ et $x \in E$, l'application $(x, f) \mapsto xwd_f(w)$ induit une application linéaire $t_w : E \otimes E^* \to \Lambda^{2k} E$ c'est à dire un élément U_w de $E^* \otimes E \otimes \Lambda^{2k} E \simeq \mathrm{End}_K(E) \otimes \Lambda^{2k} E$.

Si k est pair, ou si k est impair supérieur ou égal à 3 et K de caractéristique 2, w possède des puissances divisées et on a $x\,w\,d_f(w) = f(x)\gamma_2(w)$. Comme les deux membres de l'égalité sont quadratiques en w, il suffit de vérifier le résultat sur une base convenable de $\Lambda^k E$, ainsi que la relation polarisée. Soit e_i, $1 \leq i \leq 2k$, une base de E et $e_I = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2k$ la base de $\Lambda^k E$ qu'on en déduit : $\gamma_2(e_I) = 0$ et $e_I d_f(e_I) = 0$ quel que soit f. La relation polarisée est vraie également pour e_I et e_J si $I \cap J \neq \emptyset$; reste le cas où I et J sont deux parties complémentaires de $\{1, \dots, 2k\}$, par exemple $I = \{1, \dots, k\}$ et $J = \{k+1, \dots, 2k\}$. On vérifie la propriété cas par cas en prenant $x = e_i$, $f = e_j^*$ et en calculant $e_i e_I d_{e_j^*}(e_J) + e_i e_J d_{e_j^*}(e_I)$: si $i \neq j$, il est clair que c'est 0. Si $i = j$, $e_i e_I = 0$ ou bien $e_i e_I$ ou $e_i e_J = 0$ suivant que $i \leq k$ ou non. On supposera $i = 1$ et $e_1 e_J d_{e_1^*}(e_I) = e_1 e_J e_{I-\{1\}} = e_I e_J$.

Cette relation montre que l'élément U_w associé à w est $1_E \otimes \gamma_2(w)$. Dans le cas où on ne dispose pas de puissances divisées de w (k impair et car $K \neq 2$), on peut prendre la trace de U_w en appliquant $\mathrm{End}_K(E) \otimes \Lambda^{2k}E$ dans $\Lambda^{2k}E$ par la trace. Alors $\mathrm{Tr}\ U_w = 0$: la démonstration est analogue à la précédente. On a $\dim E = 4h + 2 = 2k$ et on prend une base e_i, $1 \leq i \leq 4h + 2$, de E : $\mathrm{Tr}\ U_w = \sum_i e_i w\, d_{e_i^*}(w)$ dépend quadratiquement de w. On démontre que c'est constamment nul en le montrant pour $e_I = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 4h+2$ et en montrant que

$$\sum (e_i e_I d_{e_i^*}(e_J) + e_i e_J d_{e_i^*}(e_I)) = 0$$

pour deux parties I et J à $k = 2h + 1$ éléments de $\{1, \dots, 2k\}$.

Si $U_w \neq 0$, on peut lui associer une droite D dans $\mathrm{End}_K(E)$ donc un endomorphisme de E ou de son dual E^* par transposition. On a alors si $p = 3$, si w est de rang 6 et si la caractéristique de K diffère de 2.

3.10. Théorème. $C(w) = K\,1_{E^*} \oplus D$.

Notons que $\mathrm{Tr}\ (U_w) = 0$ signifie que D est formée d'endomorphismes de trace nulle. Pour démontrer le théorème, il suffit de le démontrer si K est algébriquement clos, c'est-à-dire pour w_1 et pour w_2. Un calcul élémentaire montre que pour $w_1 = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$, $e_i w\, d_{e_j^*}\, w = 0$ si $i \neq j$, $e_i\, w\, d_{e_i^*}\, w = e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ si $i \leq 3$ et $-e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ si $i > 3$. Cela montre que $D = Kv$ où v a pour matrice dans la base (e_i) $\mathrm{Diag}\,(1, 1, 1, -1, -1, -1)$ et donc $K\,1_E \oplus D = C(w_1)$. On obtient un résultat analogue pour $w_2 = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$: les seuls $e_i\, w\, d_{e_j^*}(w)$ qui ne sont pas nuls sont : $e_4\, w\, d_{e_3^*}(w)$, $e_5\, w\, d_{e_1^*}(w)$ et $e_6\, w\, d_{e_2^*}(w)$ qui valent $-2t, -2t$ et $2t$ où $t = e_1e_2e_3e_4e_5e_6$. Cela montre que $D = K\,v$ où $v^2 = 0$, et v est de rang 3 : on trouve encore $C(w_2) = K1_E \oplus D$. On peut aussi calculer $e_i\, w\, d_{e_j^*}\, w$ pour les trivecteurs $w_{1,d}$ ce qui est un autre moyen d'obtenir ce résultat.

On peut alors faire un calcul formel : soit K une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}(X_{ijk})$ des fractions rationnelles à C_6^3 indéterminées et sur $E = K^6$

soit $w = \sum X_{ijk}e_ie_je_k$ un 3-vecteur générique. On sait que par changement de base dans E, w se met sous la forme de w_1 de sorte $C(w) = K1_E \oplus Kv$ et v^2 est une homothétie dont le rapport s'exprime polynomialement en fonction des composantes X_{ijk} de w. En fait $U_w \in E^* \otimes E \otimes \Lambda^6 E$ donne par produit tensoriel $U_w \otimes U_w \in E^* \otimes E \otimes \Lambda^6 E \otimes E^* \otimes E \otimes \Lambda^6 E$: en contractant ce tenseur au moyen de la trace appliquée au premier facteur E et au second facteur E^*, on obtient $\tilde{U}_w$ de $E^* \otimes E \otimes (\Lambda^6 E)^{\otimes^2}$ correspondant à $U_w \circ U_w$. Dire que v^2 est une homothétie signifie que $\tilde{U}_w = 1_E \otimes P(w)$ où $P(w)$ est un élément de $(\Lambda^6 E)^{\otimes^2}$ et le principe de prolongement des identités algébriques nous dit que

3.11. Théorème. *Il existe un élément $P(w) \in \Lambda^6 E \otimes \Lambda^6 E$ dépendant au quatrième degré de w tel que*

$$\tilde{U}_w = 1_E \otimes P(w)$$

En caractéristique 2, $P(w)$ est $\gamma_2(w) \otimes \gamma_2(w)$.

Notons aussi que les covariants $P(w)$ et $C(w)$ peuvent avoir une interprétation topologique. Soit M une variété différentielle réelle munie d'une 3-forme différentielle fermée w : en chaque point x de M, il y a une forme 3-linéaire alternée, w_x, sur l'espace tangent $T_x(M)$. Supposons M de dimension 6 et w_x de rang maximal en chaque point, il est associé à w un faisceau de $\mathbb{R}$-algèbres de fibre en x, $C(w_x)$, qui est soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, soit $\mathbb{R}[\varepsilon]$ avec $\varepsilon^2 = 0$ et ceci dépendant du signe du nombre réel $P(w_x)$ (négatif, positif ou nul). Sur l'ouvert U (resp. V) des point x de M où $P(w_x) < 0$ (resp. $P(w_x) > 0$) la variété M a une structure presque complexe (resp. presque produit) car $(U_w)_x$ donne un endomorphisme du fibré tangent de carré $sg(P(w_x))\, Id$.

§4 - Trivecteurs de rang 7.

Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration du théorème de classification des 3-vecteurs de rang 7 sur un corps algébriquement clos dû à Schouten et abordons le cas d'un corps quelconque ([17],[4],[15]).

4.1. Lemme. *Soit $u \in \Lambda^2 V^*$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit W un sous-espace de codimension k de V, W^0 son orthogonal dans V^* et w un k-vecteur non nul de $\Lambda^k W^0 \subset \Lambda V^*$: W est totalement isotrope pour u si et seulement si $uw = 0$.*

Soit $\{f_1, \ldots, f_k\}$ une base de W^0 telle que $w = f_1 f_1 \ldots f_k$ complétée en une base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de V^* et soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base duale de V : $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ est une base de W. Ecrivons $u = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} f_i f_j$: $uw = 0$ signifie que $a_{ij} = 0$ pour $k < i < j$. Comme $a_{ij} = u(e_i, e_j)$, le lemme s'en déduit.

4.2. Lemme ([14]). *Soit H un plan vectoriel dans $\Lambda^2 K^5$ non contenu dans $\Lambda^2 V$, pour tout hyperplan V de K^5. Alors H possède une base de l'un des types suivants :*

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 \\ u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 \\ u_2 = e_1e_3 + e_4e_5 \end{cases}$$

où $\{e_1, \ldots, e_5\}$ *est une base de* K^5.

Supposons d'abord que H contient un bivecteur u_1 de rang 2. Tout bivecteur u_2 non collinéaire à u_1 est de rang 4 car $H \subset \Lambda^2 (S_{u_1} + S_{u_2})$. Alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite Ke_2 et on peut écrire $u_1 = e_1e_2$ $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5$ d'où le premier type.

Supposons maintenant que tout élément non nul de H est de rang 4. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de H : $S_{u_1} \cap S_{u_2} = W$ est de dimension 3. Considérons l'application $\pi : \Lambda^2 W \to \Lambda^4 S_{u_1} \oplus \Lambda^4 S_{u_2}$ qui à v associe le couple (vu_1, vu_2). Comme $\dim \Lambda^2 W = 3$, $\operatorname{Ker} \pi$ est une droite $D = Ke_1e_4$ de $\Lambda^2 H$ et on peut écrire : $u_i = e_1x_i + e_4y_i$. Posons $x_1 = e_2$, $y_1 = -e_3$ et $y_2 = e_5$: on a alors $x_2 = \sum_i a_ie_i$. Alors on peut prendre $a_1 = 0$ et absorber a_5e_5 dans e_4e_5 d'où une modification de e_4 donc de e_3 et $u_2 = e_1(a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) + e_4e_5$: le terme a_4e_4 disparaît en modifiant e_5 en $e_5 - a_4e_1$ et on a $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$, $u_2 = e_1(a_2e_2 + a_3e_3) + e_4e_5$. Si a_3 était nul, $u_1 - a_2u_2$ serait de rang 2 : par homothétie sur u_2 et e_5, on peut supposer $a_3 = 1$ et en remplaçant u_2 par $u_2 - a_2u_1$, on achève d'amener la base $\{u_1, u_2\}$ à la forme annoncée.

En utilisant ces préliminaires, nous pouvons démontrer le

4.3. Théorème (Schouten). *Sur un corps algébriquement clos, il existe cinq classes d'équivalence de 3-vecteurs de rang 7. Dans une base* (e_i) *de* E, $1 \leq i \leq 7$, *un représentant de chaque classe est donné par*

$w_1 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$
$w_2 = w_1 + e_2e_4e_6$
$w_3 = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$
$w_4 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$
$w_5 = w_2 + e_3e_5e_7$.

La démonstration utilise l'invariant $d_1(w)$, la classification des 3-vecteurs de rang inférieur et les lemmes précédents. Rappelons que si $d_1(w) = k$, il existe $e_1 \in E - \{0\}$, $u \in \Lambda^2 E'$, $w' \in \Lambda^3 E'$ où E' est un supplémentaire de Ke_1 dans E tels que

$$w = e_1u + w' \quad \text{avec} \quad rg(w') = k.$$

Comme $\dim E = 7$, l'invariant $d_1(w)$ est un des entiers 0, 3, 5 ou 6 et on étudie successivement les différents cas. Si $d_1(w) = 0$, $w' = 0$ et w est divisible : u est de rang 6 et w est de type w_1.

Si $d_1(w) = 3$, w' est décomposable; le rang de u est au moins 4 car $S_w \subset Ke_1 + S_u + S_{w'}$. Si le rang de u vaut 4, $\dim S_u \cap S_{w'} = 1$ et on peut écrire dans E' $w' = abc$ et $u = aa' + b'c'$ où $\{a, b, c, a', b', c'\}$ sont six vecteurs de E'. Comme w est de rang 7, ils forment une base de E' et en les numérotant, on obtient w_3. Si le rang de u est 6 et si $uw' = 0$, le lemme 4.1. permet d'écrire $u = aa' + bb' + cc'$ et $w' = abc$: en numérotant convenablement $\{a, b, c, a', b', c'\}$ on obtient w_2. Si $uw' \neq 0$, soit $E' = E_1 \oplus E_2$ où $S_{w'} = E_2$: $u = u_1 + v + u_2$ où $u_i \in \Lambda^2 E_i$ et $v \in E_1 \otimes E_2$. Comme $uw' = u_1 w' \neq 0$, u_1 est non nul. On peut donc écrire $u = e_2e_4 + e_2x + e_4y + e_6z + u_2$ où $\{e_2, e_4, e_6\}$ est une base de E_1 et x, y, z trois vecteurs de E_2 : $u = (e_2 - y)(e_4 + x) + e_6 z + yx + u_2$ et $yx + u_2 \in \Lambda^2 E_2$ est nul ou divise w', de sorte qu'en changeant E_2, on peut le supposer nul. On est ramené au cas où le rang de u vaut 4, déjà étudié.

Supposons $d_1(w) = 5$: $w = e_1 u + w'$ où w' de rang 5 est divisible par un vecteur e_2. Posant $\alpha = Ke_2$, on a $w_\alpha = \overline{e}_1 \overline{u}$ et le rang de w_α est au moins 5 : donc le rang de u est au moins 4. Si le rang de u vaut 4, $w = e_1 u + e_2 u'$ où u et u' sont deux bivecteurs de rang 4 : on ne peut avoir $e_1 \in S_{e_2 u'}$, ni $e_2 \in S_{e_1 u}$ car on aurait alors $d_1(w) < 5$. On peut alors prendre u et u' de sorte que leurs supports soient dans un supplémentaire E" du plan $Ke_1 \oplus Ke_2$ de E. En utilisant le lemme 4.2., on voit que l'on obtient pour w la forme w_4. Si le rang de u vaut 6, $e_2 \in S_u$ et $u = e_2 x + v$ où v est de rang 4. Si $x \in S_{u'}$, $w = e_1 v + e_2(u' + xe_1)$ et $u' + xe_1$ est de rang inférieur ou égal à 5, donc au plus 4 et on est ramené au cas précédent. Si $x \notin S_{u'}$, $w = e_1e_2x + e_1v + e_2u'$ et $e_1v + e_2u'$ est de rang 6, donc 2-scindable Donc il existe $y \in Ke_1 \oplus Ke_2$ tel que l'image de $e_1v + e_2u'$ dans $\Lambda^3 E/Ky$ est de rang 3 (c'est la première fois que nous utilisons l'hypothèse K algébriquement clos). Comme l'image de e_1e_2x dans $\Lambda^3 E/Ky$ est 0, le rang de w est au plus 3, ce qui n'est pas.

Supposons que $d_1(w) = 6$: nous désignerons par $w_{6,1}$ et $w_{6,2}$, les 3-vecteurs notés w_1 et w_2 en 3.3. Alors $w = xu + w'$ où w' est de type $w_{6,1}$ ou $w_{6,2}$. Le rang de u est au moins 4 ; sinon prenant pour α une droite contenue dans S_u, on aurait $w_\alpha = w'_\alpha$ est de rang au plus 5. Supposons rg$u = 4$ et w' de type 6.1. Alors $w' = w'_1 + w'_2$ où w'_i est décomposable et soit $F_i = S_{w_i}$: si $a_i \in S_u \cap F_i - \{0\}$ et $ua_1a_2 = 0$, $u \doteq a_1b_1 + a_2b_2$ et w_{Ka_1} est divisible par a_2 de sorte que $d_1(w) < 6$. Donc $ua_1a_2 \neq 0$: u peut s'écrire $\lambda_1 a_1 a_2 + v$ avec rg $v = 2$ et quitte à changer l'un des a_i on peut supposer $\lambda = 1$. On a donc $w = xa_1a_2 + xv + a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2$ où $\{x, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}$ est une base de E et rg $v = 2$. Posons $P_i = Kb_i \oplus Kc_i$: si $S_v \cap P_i \neq \{0\}$, il existe une droite $\alpha = Ky$ tel que y divise $xv + a_ib_ic_i$. Alors w_{Ky} est divisible et $d_1(w) \leq 5$. Donc $S_v \cap P_1 = S_v \cap P_2 = \{0\}$: $v = yz$ avec $y = y_1 + y_2$, $z = z_1 + z_2$ avec $y_i, z_i \in P_i - \{0\}$. Comme on peut remplacer y par une combinaison linéaire de y et z, $\{y_i, z_i\}$ est une base de P_i et $b_ic_i = \lambda_i y_i z_i$. On a donc $w = xa_1a_2 + x(y_1+y_2)(z_1+z_2) + \lambda_1 a_1 y_1 z_1 + \lambda_2 a_2 y_2 z_2$. En ajoutant à a_i un multiple convenable de x, on peut écrire : $w = xa_1a_2 + x(y_1z_2 + y_2z_1) + \lambda_1 a_1 y_1 z_1 + \lambda_2 a_2 y_2 z_2$. Prenant $x = e_1$ et remplaçant les a_i, y_i, z_i par des vecteurs collinéaires, on met w sous la forme w_5.

Reste le cas où le rang de u vaut 4 et w' est de type 6.2. et celui où le rang de u vaut 6. Examinons le premier cas : $w' = f_1f_2f_4 + f_2f_3f_5 + f_1f_3f_6$ et w'_α est de rang 3 si α est contenu dans $V = Kf_1 \oplus Kf_2 \oplus Kf_3$. Comme $S_u \cap V \neq \{0\}$, w_α

sera somme de 2 trivecteurs décomposables et donc w_α est soit de rang 5, soit de rang 6 et de type 6.1. Supposons que u est de rang 6 et que w' est de type 6.1 : on utilise encore la décomposition $w' = w'_1 + w'_2$ où w'_i est décomposable de support F_i : si $uw'_i = 0$ pour un indice i, le lemme 4.1. donne $u = a_1a'_1 + b_1b'_1 + c_1c'_1$ et $w'_1 = a_1b_1c_1$. On décompose a'_1, b'_1 et c'_1 suivant $F_1 \oplus F_2$ en $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$ et $z_1 + z_2$, de sorte que $u = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 = u_1 + u_2$ où $u_1 \in \Lambda^2 F_1$ divise w'_1 et où $u_2 \in F_1 \otimes F_2$. Si $u_1 \neq 0$, u_1 divise w'_1 et en modifiant les vecteurs a_1, b_1 et c_1, on peut supposer $u_1 = 0$. Si le rang de $a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2$ est 4, on est ramené à un cas déjà étudié ; sinon $x_2y_2z_2$ et $a_2b_2c_2$ sont proportionnels et on obtient w_5 en remplaçant x par un multiple convenable.

Il ne reste plus que le cas où $\mathrm{rg}\,u = 6$ et w' est de type 6.2. Soit alors F l'espace de dimension 3 tel que si $\alpha \in \mathbb{P}(F)$, w'_α est de rang 3. Si F° est totalement isotrope pour u, $u \in F \otimes G$ où G est un supplémentaire arbitraire de F dans E'. Comme $w' \in \Lambda^2 F \otimes G'$ où G' est un supplémentaire de F dans E', on peut prendre $G = G'$. Soit $H = F \oplus Kx$: on a $w' \in \Lambda^2 H \otimes G$ et $xu \in Kx \otimes F \otimes G \subset \Lambda^2 H \otimes G$ donc w est 3-scindable. La classification des sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\Lambda^2 K^4$ faite en [14] montre que w est de l'un des types w_1, w_2, w_3 ou w_4 et donc que $d_1(w) < 6$. Il reste le cas où F° n'est pas totalement isotrope pour u ; on raisonne alors comme lorsque $d_1(w) = 3$: on pose $x = e_1$ et $w' \in \Lambda^2 F \otimes G$ s'écrit $\sum_{i=2}^4 v_ie_i$ où $\{v_i\}$ est une base de $\Lambda^2 F$ et $\{e_i\}$ une base de G. De $E' = F \oplus G$, résulte $u = u_1 + v + u_2$ où $u_1 \in \Lambda^2 F$, $u_2 \in \Lambda^2 G$ et $v = \sum_2^4 y_ie_i \in F \otimes G$. L'hypothèse sur F° signifie que $u_2 \neq 0$; en changeant de base dans G, on peut écrire $u_2 = e_2e_3$. Alors $u = u_1 + y_3y_2 + y_4e_4 + (e_2 + y_3)(e_3 - y_2)$ et $u_1 + y_3y_2 \in \Lambda^2 F$. En modifiant G, on peut supposer $e_2 + y_3, e_3 - y_2$ et e_4 est une base de G (les v_i sont modifiés mais on les désigne encore par v_i). On a alors $u_1 + y_3y_2 = \sum_{i=2}^4 \lambda_i v_i$ et $w = e_1\left(\sum_i \lambda_i v_i + y_4e_4 + e_2e_3\right) + \sum_i v_ie_i$ soit

$$e_1\left[y_4(e_4 + \lambda_4 e_1) + (e_2 + \lambda_2 e_1)(e_3 + \lambda_3 e_1)\right] + \sum_i v_i(e_i + \lambda_i e_1)$$

Cela donne $w = e_1u' + w''$ où u' est de rang 4 et w'' de type 6.2, cas déjà étudié.

Comme l'a montré Westwick, seuls les trivecteurs w_1, w_3 et w_4 sont de longeur 3, c'est-à-dire somme de 3 trivecteurs décomposables. Il est clair que w_2 n'étant pas de longueur 3, ext exactement de longueur 4 ; il en est de même pour w_5 car dans la discussion précédente, nous avons obtenu :

$$w_5 = e_1[e_2e_3 + (e_4 + e_7)(e_5 - e_6)] + (e_1 + e_2)e_4e_6 + (e_1 + e_3)e_5e_7,$$

comme on l'a vu plus haut.

Un calcul direct sur les w_i donne le résultat suivant : si w est de rang 7, $C(w) = K$. On peut alors montrer

4.5. Proposition. *Supposons que $\dim E = n$: alors les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) pour tout trivecteur w de rang n : $C(w) = K$, (ii) $n \in \{3,5,7\}$.*

L'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 et différent de 4. Comme on l'a vu, si $n \in \{3,5,7\}$, $C(w) = K$. Supposons donc $n \notin \{3,5,7\}$: $n = 6$ ou $n \geq 8$. Dans le premier cas, $C(w)$ est de dimension 2 donc différent de K ; si $n \geq 8$, $n = 3p + 5q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p + q \geq 2$. Soient α un 3-vecteur de rang 3 et β un 3-vecteur de rang 5 : la somme orthogonale de p exemplaires de α et de q exemplaires de β est un 3-vecteur w de rang n tel que $C(w) = K^{p+q}$, donc $C(w) \neq K$.

§5 - Trivecteurs de rang 7 sur un corps quelconque.

5.1. L'étude des 3-vecteurs de rang 7 sur un corps ([4],[15]) repose sur le théorème 4.4. On dira que $w \in \Lambda^3 E$ est de type w_i si sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K, $w_{\overline{K}} \simeq w_i$. Suivant 1.6, on associe à ω une application quadratique de E^* dans $\Lambda^7 E$ qui devient une forme quadratique q_w en fixant dans $\Lambda^7 E$ un générateur. Pour $x \in E$ et $f \in E^*$ tels que $f(x) = 1$, on considère $x\,\gamma_3(d_f(w)) \in \Lambda^7 E$ et 0 si $f = 0$: cela ne dépend pas du choix de x et c'est quadratique en f. En caractéristique différente de 2 et de 3, l'application bilinéaire associée est $(f,g) \mapsto w\, d_f(w) d_g(w)$ et il est clair que si w est de rang 6, $q_w = 0$.

La forme q_w commute à l'extension des scalaires ; on calcule donc q_w pour les w_i de 4.4. et on trouve pour rang des q_i, les entiers 1, 1, 2, 4 et 7 (q_w ne distingue pas w_1 et w_2) en caractéristique différente de 2 et 0, 0, 2,4 et 6 en caractéristique 2 (dans ce dernier cas, il existe donc une partie semilinéaire non nulle pour w_1, w_2 et w_5 qui est non singulière). Comme l'action du groupe linéaire commute aux opérateurs d_f et aux puissances divisées, le groupe Aut$w$ conserve q_w et donc son radical R_w contenu dans E^* ainsi que l'orthogonal $(R_w)^\circ$, sous-espace vectoriel de E.

On peut considérer $w \in \Lambda^3 E$ comme une forme 3-linéaire sur E^* : le sous-groupe des $\varphi \in Gl(E^*)$ tels que $w(\varphi f, \varphi g, \varphi h) = w(f,g,h)$ quels que soient $f, g, h \in E^*$ est isomorphe à Aut$w$ par $\varphi \mapsto {}^t\varphi^{-1}$. Ce groupe laisse invariant R_w. On pose $A_i = \mathrm{Aut}\, w_i$.

5.2. Un 3-vecteur w est de type w_1 si et seulement si il est isomorphe à w_1 car w_1 est divisible et cette propriété se descend : elle équivaut à la non injectivité de l'application $x \mapsto xw$ de E dans $\Lambda^4 E$. Le groupe A_1 se détermine en remarquant que ce noyau Ke_1 est stable par A_1 : les matrices de A_1 s'écrivent par blocs dans la base e_i : $M = \begin{pmatrix} \lambda & v \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ où $\lambda \in K^*$, $v \in \mathrm{Hom}(V, Ke_1)$, $\varphi \in Gl(V)$ où $V = \bigoplus_{i \geq 2} Ke_i$. φ est une similitude symplectique de rapport λ^{-1} de la forme $\sum_k e^*_{2k} e^*_{2k+1}$.

On a les deux suites exactes de groupes :

$$1 \to A'_1 \to A_1 \to K^* \to 1$$

$$1 \to \operatorname{Hom}(V, Ke_1) \to A'_1 \to Sp_6(K) \to 1$$

Si K est le corps fini $\mathbb{F}_q$, card $A_1 = q^6(q-1)\mathrm{Card}\, Sp_6(K)$.

5.3. En ce qui concerne w_2, on suppose d'abord K algébriquement clos : l'orthogonal du radical de q_{w_2} (du noyau de la forme semi-linéaire q_{w_2} en caractéristique 2) est invariant par A_2 et le calcul montre que c'est Ke_1. Les matrices M de A_2 s'écrivent par blocs sous la même forme que celles de A_1 et on a la suite exacte de groupes :

$$1 \to A'_2 \to A_2 \to K^* \to 1$$

Si $f \in A'_2$ $\Lambda^4 f(e_1 w) = e_1 w = e_1e_2e_4e_6$ donc $W = Ke_1 \oplus \left(\oplus_{i\geq 1} Ke_{2i}\right) = Ke_1 \oplus V_0$ est invariant par A'_2 : alors $f_{|W}$ a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & f_{V_0} \end{pmatrix}$ où $f_{V_0} \in SL(V_0)$ et $v_0 \in \operatorname{Hom}_K(V_0, Ke_1)$. On a donc une seconde suite exacte de groupes :

$$1 \to A"_2 \to A'_2 \to Sl(V_0) \to 1$$

où la surjectivité est immédiate. Les éléments de $A"_2$ s'écrivent alors dans la base $e_1, e_2, e_4, e_6, e_3, e_5, e_7$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & & 1_3 & & & A & \\ & & & & & & \\ 0 & & 0 & & & 1_3 & \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée symétrique d'ordre 3 : $A"_2$ est un groupe 2-nilpotent de type Heisenberg et on a la suite exacte $1 \to K^3 \to A''_2 \to K^9 \to 1$. Ceci montre que si G désigne le groupe de Galois absolu de $\overline{K}$ sur K, K corps quelconque, $H^1(G, A_2(\overline{K})) = \{1\}$ c'est-à-dire que ([15]) tout 3-vecteur $w \in \Lambda^3 E$ de type w_2 est isomorphe à w_2 sur K. Le groupe $\mathrm{Aut} w_2 = A_2(K)$ se décrit comme dans le cas algébriquement clos ; si K est le corps fini $\mathbb{F}_q$, $\mathrm{Card} A_2(\mathbb{F}_q) = q^{12}\mathrm{Card} Sl - 3(\mathbb{F}_q)$. Si K est le corps fini $\mathbb{F}_q$, alors $\mathrm{Card} A_2 = q^{12}(q-1)$ $\mathrm{Card} Sl_3(\mathbb{F}_q)$.

5.4. Soit $w_3 = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$; la forme q_3 est de rang 2 et l'orthogonal de son radical est le plan $P = Ke_3 \oplus Ke_5$. Dans P, Ke_3 et Ke_5 sont caractérisés comme les droites α telles que $w_\alpha \in \Lambda^3(E/\alpha)$ est de rang 3 (pour les autres droites, w_α est de rang 5). Donc A_3 laisse invariant $Ke_3 \cup Ke_5$: les matrices des restrictions à P des éléments de A_3 sont de l'un des 2 types suivants : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ \mu_1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc les suites exactes de groupes :

$$1 \longrightarrow A'_3 \longrightarrow \underset{f}{A_3} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{f|P}{G} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow 1$$

car G est le produit semi direct du groupe des matrices diagonales par $\mathbb{Z}/2$ opérant par échange des vecteurs de base. Alors $A_3' = \{f | f \in A_3\ f(e_3) = e_3, f(e_5) = e_5\}$

Il en résulte que $\Lambda^4 f(e_3 w) = e_3 w$ et $\Lambda^4 f(e_5 w) = e_5 w$. Comme $e_3 w = e_3 e_5 e_6 e_7$ et $we_5 = e_1 e_2 e_3 e_5$, on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow A"_3 \longrightarrow A_3' \longrightarrow Sl_2(K) \times Sl_2(K) \longrightarrow 1$$

en associant à f le couple formé des sous-matrices carrées d'ordre deux formées des deux premières, et des deux dernières, lignes et colonnes. Le groupe $A"_3$ est un groupe additif isomorphe à K^{10} : si $f \in A"_3$, $f(e_i) = e_i + z_i$ où $z_i \in P$ pour $i = 1, 2, 6$ et 7 et $f(e_4) = e_4 + z_4 + t_4$ où $z_4 \in P$ et t_4 dépend des autres z_i. On voit alors que A_3 contient un sous-groupe distingué A_3° d'indice 2, noyau de l'homomorphisme qui vaut $\overline{1}$ sur les f qui échangent Ke_3 et Ke_5 et $\overline{0}$ sur les autres. De plus, A_3° est produit direct de deux sous-groupes isomorphes à un groupe B, qui agissent respectivement sur $\oplus_{i \leq 4} Ke_i$ et $\oplus_{i \geq 4} Ke_i$: on a les suites exactes

$$1 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow B'' \longrightarrow B' \longrightarrow Sl_2(K) \longrightarrow 1$$

et $B'' \simeq K^5$ de sorte que $H^1(G, B(\overline{K})) = 1$. Le lemme de [14] nous donne alors $H^1(G, A_3(\overline{K})) \simeq H^1(G, \mathbb{Z}/(2)) \simeq Q(K)$ le groupe des extensions quadratiques séparables de K. Il en résulte que pour chaque extension quadratique séparable L de K, il existe $w_L \in \Lambda^3 E$ tel que $w_L \not\simeq w_3$ et $w_L \otimes L \in \Lambda^3(E \otimes_K L)$ est L-isomorphe à w_3.

Il existe donc une L-base e_i de $E \otimes_K L$ telle que $w_L = e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 e_5 + e_5 e_6 e_7$; on note $-$ la conjugaison de $E \otimes_K L$ qui se prolonge en une conjugaison de $\Lambda E \otimes_K L$ et laisse w_L invariant. L'orthogonal du radical de q_{w_L} est un plan P de E : par extension à L, $P \otimes_K L = Le_3 \oplus Le_5$. Comme $w_L \not\simeq w_3$, e_3 et e_5 ne sont pas dans E : les droites Le_3 et Le_5 sont donc conjuguées sur K et on peut supposer $e_5 = \overline{e}_3$. De $\overline{w}_L = w_L$, on déduit

$$\overline{e}_1 \overline{e}_2 \overline{e}_3 + \overline{e}_3 \overline{e}_4 e_3 + e_3 \overline{e}_6 \overline{e}_7 = e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 \overline{e}_3 + \overline{e}_3 e_6 e_7$$

Multipliant par e_3 (ou $\overline{e}_3$), on trouve :

$$\overline{e}_1 \overline{e}_2 \overline{e}_3 e_3 = e_6 e_7 \overline{e}_3 e_3 \neq 0 \text{ dans } E \otimes L.$$

On a donc $e_6 = a\overline{e}_1 + b\overline{e}_2 + c\overline{e}_3 + de_3$ et $e_7 = a'\overline{e}_1 + b'\overline{e}_2 + c'\overline{e}_3 + d'e_3$. De l'égalité précédente, on déduit $ab' - a'b = 1$; remplaçant dans w_L, on obtient $w_L = e_1 e_2 e_3 + e_3 e_4 \overline{e}_3 + \overline{e}_3(\overline{e}_1 \overline{e}_2 + e_3 x)$, soit $e_1 e_2 e_3 + \overline{e}_1 \overline{e}_2 \overline{e}_3 + e_3 e_4' \overline{e}_3$. Comme on l'a vu pour $w_{6,1}$, on trouve $e_1 e_2 e_3 + \overline{e}_1 \overline{e}_2 \overline{e}_3 = w_{6,1,d}$ ou bien $w_{6,1,a}$ suivant la caractéristique de K. On pose pour cela $e_i = f_i + x f_{8-i}$ pour $i = 1, 2, 3$ où $f_i, f_{8-i} \in E$, $L = K[x]$ avec $x^2 = d$ ou $x^2 = x + a$ et $\overline{e}_i = f_i + \overline{x} f_{8-i}$ ($\overline{x} = -x$ ou $x + 1$ suivant la caractéristique de K). On remarque également que $e_3 e_4' \overline{e}_3$ doit être invariant par conjugaison ce qui nous donne $w_L = w_{3,d} = f_1(f_2f_3 - df_5f_6) + f_7(f_2f_5 - f_3f_6) + f_3f_4f_5$ ou bien $w_L = w_{3,a} = f_1(f_2f_3 + af_5f_6) + f_7(f_2f_5 + f_3f_6 + f_5f_6) + f_3f_4f_5$ et le 3-vecteur w_L est 3-scindable : $w_L \in E_1 \otimes \Lambda^2 E_2$ où E_1 est engendré par f_1, f_4 et f_7.

Le groupe Aut$w_L = A_{3,L}$ se détermine ainsi : il laisse invariant le plan $P = Kf_3 \oplus Kf_5$ et, dans $P \otimes_K L$, ses éléments sont diagonalisables dans la base $\{e_3, \overline{e}_3\}$ ou échangent ces 2 vecteurs : on a donc les suites exactes

$$1 \longrightarrow A^\circ_{3,L} \longrightarrow A_{3,L} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A'_{3,L} & \longrightarrow & A^\circ_{3,L} & \longrightarrow & \mathbb{L}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & & & f & \longmapsto & \lambda & & \end{array}$$

où λ est la valeur propre de f relativement au vecteur $e_3 = f_3 + xf_5 (\lambda \in L^*)$. Soit $f \in A'_{3,L}$: on a $\Lambda^4 f(f_3 w) = f_3 w$ et $\Lambda^4 f(f_5 w) = f_5 w$. Donc $\Lambda^4 f$ laisse invariant $f_3f_5(f_7f_2 + df_1f_6)$ et $f_3f_5(f_1f_2 + f_7f_6)$. Donc modulo le plan P, $\Lambda^2 f$ laisse invariant $u_1 = f_1f_2 + f_7f_6$ et $u_2 = f_7f_2 + df_1f_6$ donc $u_2 + xu_1$ (et son conjugué $u_2 - xu_1$) qui sont de rang 2 sur L. Il existe donc des vecteurs $p, q \in E \otimes_K L$ tels que $u_2 + xu_1 = pq$ et $u_2 - xu_1 = \overline{pq}$ et $\{p, q, \overline{p}, \overline{q}\}$ est une base de $W \otimes_K L$ où W est le sous-espace engendré par f_1, f_2, f_6 et f_7. La matrice de la restriction de f est donc de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A et $B \in Sl_2(L)$; comme f est définie sur K, $B = \overline{A}$ et on a la suite exacte $1 \longrightarrow A"_{3,L} \longrightarrow A'_{3,L} \longrightarrow Sl_2(L) \longrightarrow 1$ et comme pour w_3, $A"_{3,L} \simeq K^{10}$.

Si $K = \mathbb{F}_q$, L est le corps $\mathbb{F}_{q^2}$ et Card$A_{3,L} = 2q^{10}(q^2 - 1) Card(Sl_2(\mathbb{F}_{q^2}))$.

5.5. L'étude de $w_4 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$ se fait à l'aide de q_4 : son rang est 4 et R_{w_4} est le sous-espace vectoriel de base e_1^*, e_6^* et e_7^* qui est globalement invariant par Aut$w_4 = A_4$. Le sous-espace $(R_w)^\circ$ de E, de dimension 4, et l'image de R_w dans $\Lambda^2 E$ par l'application $f \mapsto d_f(w)$, sous-espace vectoriel V de dimension 3 de $\Lambda^2 E$ sont également globalement invariants par A_4. De plus si $f \in R_w$ $d_f(w)$ est de rang au plus 4 et son support est contenu dans $(R_w)^\circ = \bigcap_{g \in R_w} Ker g$; il y a donc une application quadratique, de R_w dans $\Lambda^4(R_w)^\circ$, $f \mapsto \gamma_2(d_f(w))$. Si $\varphi \in A_4$, la restriction de ${}^t\varphi^{-1}$ à R_w et celle de $\Lambda^4\varphi$ à $\Lambda^4(R_w)^\circ$ sont compatibles avec cette application. On a donc la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A'_4 & \longrightarrow & A_4 & \xrightarrow{u} & Gl(R_w) \\ & & & & \varphi & \longmapsto & {}^t\varphi^{-1}_{|R_w} \end{array}$$

et l'image de φ dans $Gl(R_w)$ est une similitude de la forme quadratique associée. Le groupe $u(A_4)$ vérifie la suite exacte

$$1 \longrightarrow SO(q) \longrightarrow u(A_4) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$

où q est la forme quadratique ternaire $(u, v, w) \mapsto uv - w^2$. Le groupe A'_4 est le sous-groupe de Autw_4 formé des φ qui laissent invariants les 2-vecteurs

$d_{e_1^*}(w) = e_2e_3 + e_4e_5$, $d_{e_6^*}(w) = e_2e_4$ et $d_{e_7^*}(w) = e_3e_5$: on a la suite exacte $1 \to A_4'' \to A_4' \to Sl_2(K) \to 1$ car si $\varphi \in A_4'$ φ laisse invariants les plans $Ke_2 \oplus Ke_4$ et $Ke_3 \oplus Ke_5$; ses deux restrictions sont de déterminant 1 et φ s'écrit $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^tM^{-1} \end{pmatrix}$ car $e_2e_3 + e_4e_5$ est également invariante par $\Lambda^2\varphi$. Le groupe A_4'' est le sous-groupe de A_4 formé des $\varphi \in Gl(E)$ telles que $\varphi(e_i) = e_i$ pour $i \in \{2, 3, 4, 5\}$: c'est un groupe commutatif de matrices triangulaires qui est isomorphe à K^8. On a donc $H^1(G, A_4') = \{0\}$. Le groupe $SO(\varphi)$ s'identifie au groupe $PGl_2(K) = \mathrm{Aut}_{K-alg}(M_2(K))$ car un automorphisme de $M_2(K)$ est déterminé par sa restriction à $sl_2(K)$, et par sa conservation de la forme quadratique déterminant sur cet espace.

Si le corps K est de groupe de Brauer nul, par exemple un corps fini ou un corps C^1, $H^1(G, PGl_2(K)) = \{1\}$ car toute algèbre simple sur K est une algèbre de matrices. Il en résulte que $H^1(G, A_4) = \{1\}$ et tout 3-vecteur de type w_4 est isomorphe à w_4. Dans le cas général, on peut montrer que $H^1(G, A_4) \to H'(G, PGl_2(K))$ est une bijection d'ensembles pointés : l'ensemble des classes de K-isomorphismes de 3-vecteurs de type w_4 est en bijection avec celui des classes de K-algèbres de quaternions, ou encore avec celui des formes quadratiques ternaires de discriminant 1 (à l'aide de la norme réduite sur l'espace des quaternions purs). Ces classes se retrouvent directement par le même raisonnement que celui qui a été fait pour w_4. On considère l'espace V de dimension 3, image par $f \mapsto d_f(w)$ de R_w dans $\Lambda^2 E$: comme V est contenu dans $\Lambda^2(R_w)^\circ$, l'application quadratique $\gamma_2 : R_w \to \Lambda^2(R_w)^\circ$ induit une forme quadratique non dégénérée à 3 variables, définie à un multiple près, d'où une algèbre de quaternions Q_w. On peut obtenir directement ces 3-vecteurs w car on sait écrire ([14]) les sous-espaces vectoriels V de dimension 3 de $\Lambda^2 K^4$ dont la forme quadratique est non singulière. Cela nous décrit l'image de R_w dans $\Lambda^2(R_w)^\circ$. Prenant une base $\{x_i\}$ d'un supplémentaire de $(R_w)^\circ$ dans E, on en déduit une base de E et w s'écrit $\sum_{i=1}^3 x_iu_i$ où u_i est une base de V et on peut énoncer.

5.6. Proposition. *Tout trivecteur de type w_4 est 3-scindable.*

Leurs groupes d'automorphismes se décrivent comme celui de w_4 ; notons que les 3-vecteurs de type w_1, w_2 et w_3 sont également 3-scindables, pouvant être considéré comme des singularités du cas 3-scindable générique w_4.

Pour étudier w_5, on supposera la caractéristique de K différente de 2 et de 3, bien que cela ne soit pas toujours indispensable. Pour K algébriquement clos, soit 0_K l'algèbre des octonions, extension cayleyenne de $M_2(K)$ ([2]). C'est une algèbre alternative de dimension 8 possédant une norme multiplicative non dégénérée N et une trace. Sur l'espace $\overline{0}_K$ des octonions purs, noyau de la trace, de dimension 7, il existe un produit vectoriel $u : \Lambda^2\overline{0}_K \to \overline{0}_K$, vérifiant $N(u(x, y)) = N(x)N(y) - \langle x, y\rangle^2$ où $2\langle x, y\rangle = N(x + y) - N(x) - N(y)$. Sur $\overline{0}_K$ est canoniquement définie une forme trilinéaire alternée $w \in \Lambda^3\overline{0}_K$ par $w(x, y, z) = \langle u(x, y), z\rangle$ et on a

5.7. Proposition. *w est isomorphe à w_5.*

Cela se vérifie par un calcul direct. Il en résulte que Aut$w_5 = A_5$ contient le groupe des automorphismes de 0_K, le groupe algébrique simple $G_2(K)$. Comme il est de dimension 14 et que dim$Gl_7(K) - \dim \Lambda^3 K^7 = 14$, $G_2(K)$ est la composante connexe de l'identité de A_5 et $A_5 \simeq G_2(K) \times H$, où H est un sous-groupe discret formé d'homothéties de 0_K qui laissent w invariant ; c'est-à-dire de rapport une racine cubique de l'unité : $A_5 = G_2(K) \times \mu_3$ (μ_n est le groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité).

Si K est un corps quelconque de clôture algébrique $\overline{K}$, les 3-vecteurs de type w_5 sont en bijection avec l'ensemble pointé $H^1(G, G_2(\overline{K})) \times H^1(G, \mu_3)$: $H^1(G, G_2(\overline{K}))$ est en bijection ([7]) avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de K-algèbres octonions (en bijection avec celui des 3-formes quadratiques de Pfister au moyen de la norme de ces algèbres). Le second ensemble est, si K contient une racine cubique primitive de l'unité, en bijection avec l'ensemble K^*/K^{*3} ; une description explicite des 3-vecteurs w de type w_5 s'obtient ainsi. (On note w_A le produit mixte de l'algèbre d'octonions A).

5.8. Théorème. *Tout trivecteur $w \in \Lambda^3 K^7$ de type w_5 est K-isomorphe à un 3-vecteur λw_A, $\lambda \in K^*$; $\lambda w_A \simeq \mu w_B$ si et seulement si $A \simeq B$ et $\lambda\mu^{-1} \in K^{*3}$.*

Remarquons que si $K^* = K^{*3}$, tout 3-vecteur de type w_5 est isomorphe à un trivecteur w_A. Sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, il n'y a qu'une seule classe d'algèbres d'octonions car toute forme quadratique à 3 variables représente 0. Si $q \equiv 2(3)$, $K^* = K^{*3}$ et il existe un seul type de 3-vecteurs de type w_5 ; si $q \equiv 1(3)$, K^*/K^{*3} a trois éléments et il existe 3 classes : w_5, λw_5 et $\lambda^2 w_5$ où $\lambda \notin K^{*3}$. Dans le premier cas Aut$w_5 = G_2(K)$ et, dans le second, Aut$w_5 =$ Aut$\lambda w_5 =$ Aut$\lambda^2 w_5 = G_2(K) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Cela montre que dans les deux cas le nombre de 3-vecteurs de type w_5 est donné par la même expression Card$Gl_7(K)/$Card$(G_2(K)$.

6. Trivecteurs de rang 7 sur les corps finis et les corps locaux.

Les résultats précédents permettent de décrire complètement les 3-vecteurs sur un espace vectoriel de dimension au plus 7 sur un corps fini. On sait que si G est un groupe fini et X un G-ensemble fini, X est réunion d'un nombre fini d'orbites O_i : si $x_i \in 0_i$ et si G_i est le stabilisateur de x_i, Card$X = \sum_i \mathrm{Card}\, 0_i = \sum_i \mathrm{Card}\, G/\mathrm{Card}\, G_i$. Cela permet de vérifier l'exactitude dans le cas des corps finis des résultats trouvés en 3 et 5 en prenant $G = Gl_n(\mathbb{F}_q)$, $X = \Lambda^3 K^n$ avec $n = 6$ et 7 (pour $n = 7$, on supposera la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ supérieure à 3).

Rappelons des résultats classiques et faciles à vérifier ([2],[3]) : Card$Gl_n(\mathbb{F}_q) = (q-1)\mathrm{Card}\, Sl_n(\mathbb{F}_q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$; Card $G_{n,p}(\mathbb{F}_q) =$ Card $Gl_n(\mathbb{F}_q)/\mathrm{Card}\, Gl_p(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{Card}\, Gl_{n-p}(\mathbb{F}_q) \times q^{p(n-p)}$ où $G_{n,p}(\mathbb{F}_q)$ est la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathbb{F}_q^n$, $1 \leq p \leq n-1$.

Le cardinal de $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ est le nombre de bases symplectiques de $\mathbb{F}_q^{2n}$ pour une forme bilinéaire alternée B non dégénérée quelconque. On calcule d'abord le nombre $f_n(q)$ de paires symplectiques (x,y) i.e. x et $y \in \mathbb{F}_q^{2n}$ et $B(x,y)=1$: on choisit d'abord $x \neq 0$ puis y dans l'hyperplan affine d'équation $B(x,y)=1$, d'où $f_n(q) = q^{2n-1}(q^{2n}-1)$ puis

$$\mathrm{Card}\, Sp_{2n}(q) = q^{n^2} \prod_{k=1}^{n} (q^{2k}-1).$$

6.1. Pour $n=6$, il y a six orbites dans $\Lambda^3 K^6$ pour l'action de $Gl_6(\mathbb{F}_q)$: 1 de rang 0, 3 et 5 et trois orbites de rang 6 $w_{6,1}$, $w_{6,2}$ et $w_{\mathbb{F}_{q^2}}$. La première orbite a un seul élément ; les orbites de rang 6, $0_{6,1}$, $0_{6,2}$ et $0_{\mathbb{F}_{q^2}}$ ont pour cardinaux respectifs $\mathrm{Card}\, Gl_6(\mathbb{F}_q)/2\,\mathrm{Card}^2 Sl_3(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{Card}\, Gl_6(\mathbb{F}_q)/q^8\,\mathrm{Card}\, Gl_3(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{Card}\, Gl_6(\mathbb{F}_q)/2\,\mathrm{Card}\, Sl_3(\mathbb{F}_{q^2})$. Soit $w = e_1e_2e_3$: l'orbite de w dans $\Lambda^3 K^n$ se déduit de la connaissance du support de $\Lambda^3 f(w)$, un élément de $G_{n,3}(\mathbb{F}_q)$ et du nombre d'éléments w ayant même support. On a donc si $n=6$, $\mathrm{Card}0(w) = (q-1)\ \mathrm{Card}G_{6,3}(\mathbb{F}_q)$. Pour $w = e_1(e_2e_3+e_4e_5)$, on calcule tout d'abord son orbite dans $\Lambda^3 K^5$: c'est $\mathrm{Card}\ \Lambda^3\mathbb{F}_q^5 - (q-1)\mathrm{Card}\, G_{5,3}(\mathbb{F}_q) - 1$ ou bien $\mathrm{Card}Gl_5(\mathbb{F}_q)/\mathrm{Card}\ \mathrm{Aut}w$; ensuite le cardinal de son orbite dans $\Lambda^3 K^6$ s'obtient en multipliant par $\mathrm{Card}G_{6,5}(\mathbb{F}_q) = \mathrm{Card}(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q))$. On obtient alors

6.2. Proposition. $\sum_i \mathrm{Card}\, 0_i = \mathrm{Card}\, \Lambda^3\mathbb{F}_q^6$.

Pour $n=7$, on suppose que la caractéristique de K dépasse 3. Le nombre d'orbites dépend de la valeur de q modulo 3 et les résultats de 5 disent

6.3. Proposition. *Si $q \equiv 1(3)$ (resp. $q \equiv 2(3)$), il y a quatorze (resp. douze) orbites sous l'action de Gl_7 sur $\Lambda^3 K^7$ dont huit (resp. six) de rang 7.*

Comme on l'a remarqué en 5.8, cela n'affecte pas le poids des orbites de type w_5 dans $\Lambda^3\mathbb{F}_q^7$ et on a encore, après vérification, $\sum_i \mathrm{Card}\, 0_i = \mathrm{Card}\, \Lambda^3\mathbb{F}_q^7$ en utilisant $\mathrm{Card}G_2(\mathbb{F}_q) = q^6(q^6-1)(q^2-1)$. Remarquons aussi que les résultats obtenus pour les orbites qui ne sont pas de type w_5 sont encore valables en caractéristique 2 et 3 et on obtient

$$\sum_w \mathrm{Card}\ 0_w = \mathrm{Card}\, \Lambda^3\mathbb{F}_q^7 - \mathrm{Card}\, Gl_7(\mathbb{F}_q)/q^6(q^6-1)(q^2-1).$$

où la sommation est étendue aux orbites qui ne sont pas de type w_5.

6.4 Rappelons qu'un corps local K est un corps valué complet pour une valuation discrète v de corps résiduel fini k. C'est une extension algébrique finie du corps $\mathbb{Q}_p$ ou du corps $\mathbb{F}_p((X))$ des séries formelles sur $\mathbb{F}_p$. La caractéristique de k est finie et égale à p et le degré de k sur $\mathbb{F}_p$, appelé degré résiduel de K, est noté f ; la caractéristique de K est 0 ou p suivant que K contient $\mathbb{Q}_p$ ou non, le premier cas est dit d'inégale caractéristique ([18]).

Alors le groupe $Q(K)$ des extensions quadratiques séparables de K est un gorupe abélien fini $(\mathbb{Z}/2)^r$, où $r = 2$ sauf si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_2$. L'ensemble des classes de K-algèbres de quaternions a 2 éléments car $Br(K) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et ces classes constituent le sous-groupe des éléments d'ordre 2 de $Br(K)$. De plus il n'y a qu'une seule algèbre d'octonions sur K car toute forme quadratique à 5 variables a un zéro non trivial.

6.5. Proposition. *Si K est un corps local de caractéristique résiduelle différente de 2, il y a 8 classes de 3-vecteurs de rang inférieur ou égal à 6 ; si la caractéristique de k diffère de 3, il y a 17 3-vecteurs de rang 7 si card $k \equiv 1(3)$ et 11 3-vecteurs de rang 7 si card $k \equiv 2(3)$.*

En rang 6, cela provient de la considération de $Q(K)$ qui a 4 éléments. Si le rang est 7, w_1 et w_2 donnent une seule orbite, w_3, comme $w_{6,1}$, donne 4 orbites et w_4 en donne deux. Pour w_5, il faut distinguer deux cas suivant que K contient une racine cubique primitive de l'unité, ce qui est le cas si et seulement si k en contient une. Suivant les cas, K^*/K^{*3} est formé de 9 ou 3 éléments, d'où les orbites de type w_5.

Reste le cas où K est un corps dyadique, soit une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_2$ en rang 6 et 7, soit une extension finie de $\mathbb{F}_2((X))$ en rang 6. On a alors

6.6. Proposition. *Soit K une extension de degré n de $\mathbb{Q}_2$: il y a $4+2^{n+2}$ classes de 3-vecteurs de rang au plus 6. Si f est pair (resp. impair), il y a $13+2^{n+2}$ classes (resp. $7+2^{n+2}$ classes) de 3-vecteurs de rang 7.*

En rang 7, on raisonne d'après Card $k = 2^f$ modulo 3. En rang 6, on utilise un résultat classique ([18]) sur les corps dyadiques : $\mathrm{Card}(K^*/K^{*2}) = 2^{n+2}$.

6.7. La classification de 3-vecteurs de rang 8 est connu dans le cas algébriquement clos et dans le cas du corps des réels ([5]). Il n'y a encore qu'un nombre fini d'orbites dont la liste est donnée pour $\mathbb{C}$ dans [6]. Un calcul sur les expressions données dans ce livre montre que $C(w) = K$ à l'exception des trois cas suivants $w = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$, somme directe des 3-vecteurs de rang 3 et 5 pour lequel $C(w) = K \times K$ ainsi que $w + e_2e_5e_8$ et $w' = e_8(e_2e_5 - e_3e_4 + e_6e_7) + e_1e_4e_5$ pour lesquels on trouve $K[\varepsilon]$, avec rang $\varepsilon = 3$.

Remarquons également que le trivecteur de rang 8 dont l'orbite est ouverte dans $\Lambda^3\mathbb{C}^8$ peut s'obtenir de la façon suivante : on considère l'algèbre de Lie $sl_3(\mathbb{C})$ et la forme de Killing $(x,y) \overset{k}{\mapsto} Tr(adx \circ ady)$. Comme on a vu en rang 6, $w : sl_3(\mathbb{C})^3 \to \mathbb{C}$ définie par $w(x,y,z) = k([x,y],z)$ est une forme trilinéaire alternée de rang 8. En prenant une base adaptée, on trouve pour expression de w celle du 3-vecteur de rang maximal dans $\Lambda^3\mathbb{C}^8$.

Bibliographie

[1] M. André, Algèbre homologique des anneaux locaux à corps résiduels de caractéristique 2, Sém. P. Dubreuil, Paris, 1977-1978, Lect. Notes 740, p. 237-242.

[2] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitre 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitre 9, Hermann, Paris, 1959.

[4] A. Cohen et A. Helminck, Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7, Comm. in Algebra 16 (1), 1988, p. 1-25.

[5] D. Djokovics, Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space, Lin. and multilin. Algebra, 13 (3),1983,p. 3-39.

[6] G.B. Gurevitch, Theory of algebraic invariants, P. Noordhof LTD, Groningen, the Netherland, 1964.

[7] H. Hijikata, A remark on the groups of type G_2 and F_4, J. Math. Soc. Jap. vol. 15, 2, 1963, p. 159-164.

[8] J. Igusa, Arithmetic of a singular invariant, Amer. J. of Math. 100, 2, 1988, p. 197-233.

[9] N. Jacobson, Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G. Duke Math. J. 5, 1939, p. 775-783.

[10] B. Kahn, Sommes de tenseurs décomposables, prépublication de l'université Paris VII, mai 1991, 28 p. et correspondance personnelle.

[11] T. Kimura, On the construction of some relative invariants for $Gl(n)$, $n = 6,7,8$, by the decomposition of the Young diagrams, Sém. Alg. P. Dubreil et M.P. Malliavin, 1980, Lect. Notes 867, p. 38-48.

[12] A. Médina, et Ph. Revoy, Algèbres de Lie et produits scalaires invariants, Ann. E.N.S. t. 18, 1985, p. 553-561.

[13] Ph. Revoy, Formes alternées et puissances divisées, Sém. P. Dubreil, 26ème année, 1972-73.

[14] Ph. Revoy, Trivecteurs de rang 6, in Coll. sur les formes quadratiques, Mémoire SMF 59, 1979, p. 141-155.

[15] P. Revoy, Formes trilinéaires alternées de rang 7, Bull. Sc. Math. 112, 1988, p. 357-368.

[16] N. Roby, Les algèbres à puissances divisées, Bull. Sc. Math. 89, 1965, p. 75-91.

[17] J. Schouten, Klassifizierung der alternierenden Grössendritten Grades in 7 dimensions, Rend. Circ. Mat. Palermo, 55, 1931, p. 137-156.

[18] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

[19] E. Vinberg et A. Elasvili, Classification of trivectors of a nine-dimensional space, Trudy. Sem. Vekt. Tenz. Analyizn, MGU n°XIX, 1979, p. 155-177.

[20] A. Weil, Algebras with involution and classical groups, J. Indian. Math. Soc. 24, 1961, p. 589-623.

[21] R. Westwick, Real trivectors of rank seven, Lin. and multilin. Algebra, 10 (3), 1981, p. 183-204.

Lemmouar NOUI et Philippe REVOY
Université de Montpellier 2
Département des Sciences Mathématiques
Place Eugène Bataillon

34095 MONTPELLIER CEDEX 5

Manuscrit reçu le 28 février 1994