Annales mathématiques Blaise Pascal

François Geoffriau

Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Takiff

Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 1, n° 2 (1994), p. 15-31
<http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1994__1_2_15_0>

Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 1, N° 2, 1994, pp. 15 - 31

Sur le centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Takiff

FRANÇOIS GEOFFRIAU

RÉSUMÉ –L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple est un module libre sur son centre. Le but de cet article est de démontrer, par la méthode de Kostant ([5]), un résultat analogue pour les algèbres de Takiff associées à une algèbre de Lie semi-simple.

On the center of the enveloping algebra of a Takiff algebra

ABSTRACT –The enveloping algebra of a semisimple Lie algebra is a free module over its center. We prove (with the Kostant method [5]) a similar result for the Takiff algebra associated to a semisimple Lie algebra.

1. INTRODUCTION

1.1. – Dans cet article, $\mathbf{k}$ est un corps commutatif, algébriquement clos et de caractéristique nulle. Tous les espaces vectoriels et algèbres considérés sont définis sur $\mathbf{k}$, et les algèbres de Lie sont, sauf mention du contraire, de dimension finie. Nous renvoyons à [4] pour les concepts généraux utilisés.

1.2. – Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang ℓ. Notons $\widetilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Takiff associée à $\mathfrak{g}$; c'est le produit semi-direct de $\mathfrak{g}$ par son espace vectoriel sous-jacent (considéré comme algèbre de Lie abélienne), relativement à la représentation adjointe. Comme espace vectoriel, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ s'identifie à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et les crochets sont donnés par

$$[(x_0, x_1), (y_0, y_1)] = ([x_0, y_0], [x_0, y_1] + [x_1, y_0])$$

pour tous $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in \widetilde{\mathfrak{g}}$.

Nous considérerons $\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par l'injection qui à $x \in \mathfrak{g}$ associe $(x, 0) \in \widetilde{\mathfrak{g}}$.

1.3. – L'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ n'étant pas semi-simple, sa forme de Killing est dégénérée, mais il existe une forme bilinaire $\mathcal{B}$ non dégénérée et invariante sous l'action de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ définie par

$$\mathcal{B}\big((x_0,x_1),(y_0,y_1)\big) = \mathcal{K}(x_0,y_1) + \mathcal{K}(x_1,y_0)$$

où $\mathcal{K}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Ceci permet d'identifier $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ en tant que $\widetilde{\mathfrak{g}}$-modules.

1.4. – Soit N l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Soit P et $\widetilde{P}$ les ensembles des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$ et de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ respectivement (un élément d'une algèbre de Lie est dit régulier si son centralisateur est de dimension minimale).

D'après [6] 3.8, un élément (x_0,x_1) de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est régulier si et seulement si x_0 est un élément régulier de $\mathfrak{g}$.

1.5. – Soit J l'ensemble des fonctions polynomiales de $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ invariantes sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et J_+ l'ensemble des éléments de J sans terme constant. Notons $\widetilde{V}$, l'ensemble des zéros de l'idéal $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ de $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$.

Soit $p_1,\ldots,p_\ell$ des générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}$-invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$ ([4] 7.3.5 et 11.1.4).

Pour tout entier i tel que $1 \le i \le \ell$, définissons les fonctions polynomiales P_i, Q_i sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par : pour tout $x = (x_0,x_1) \in \widetilde{\mathfrak{g}}$

$$P_i(x_0,x_1) = p_i(x_0),$$
$$Q_i(x_0,x_1) = dp_i(x_0).x_1.$$

D'après [6] 4.5(ii), la famille de polynômes $(P_i,Q_i)_{1\le i\le \ell}$ est un système de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de J. L'ensemble $\widetilde{V}$ est alors l'ensemble des zéros de la famille de polynômes $(P_i,Q_i)_{1\le i\le \ell}$,

$$\widetilde{V} = \big\{(x_0,x_1) \in \widetilde{\mathfrak{g}} \mid p_i(x_0) = 0,\ dp_i(x_0).x_1 = 0,\ i = 1,\ldots,\ell\big\}.$$

L'isomorphisme de $\widetilde{\mathfrak{g}}$-modules entre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ permet, par prolongement, d'identifier $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ en tant que $\widetilde{\mathfrak{g}}$-modules. Par conséquent $Y(\widetilde{\mathfrak{g}})$, l'ensemble des éléments $\widetilde{\mathfrak{g}}$-invariants de $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$, s'identifiant à J, est lui aussi un anneau de polynômes ainsi que, par symétrisation, $Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$ le centre de $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$.

1.6. – Soit $\widetilde{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. C'est le groupe engendré par les automorphismes élémentaires de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, ([2] proposition 1 p159, théorème 14 p175 et corollaire 3 p123) puisque l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est engendrée par ses éléments nilpotents (en effet, $\mathfrak{g}$ étant semi-simple, est engendrée par ses éléments nilpotents et tous les éléments de $(0,\mathfrak{g})$ sont nilpotents).

Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, il s'identifie à un sous-groupe de $\widetilde{G}$ et ce dernier est engendré par G et les exponentielles des éléments de $\mathrm{ad}(0,\mathfrak{g})$.

1.7. – Pour $x \in \mathfrak{g}$, le rang de la famille $(dp_1(x),\ldots,dp_\ell(x))$ sera noté $\mathrm{rg}\, d\pi_x$.

2. Irréductibilité de la variété $\widetilde{V}$

2.1. Lemme – *L'ensemble $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est un ouvert non vide de $\widetilde{V}$ et il se compose d'une seule $\widetilde{G}$-orbite.*

Démonstration – D'après [4] 1.11.5, $\widetilde{P}$ est une partie ouverte de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et donc $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est une partie ouverte de $\widetilde{V}$. Il est clair que les ensembles $\widetilde{V}$ et $\widetilde{P}$ sont stables sous l'action de $\widetilde{G}$.

D'après [4] 8.1.3(i), les zéros de la famille $p_1, \cdots, p_\ell$ sont les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ et pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $Q_i(x, 0) = dp_i(x).0 = 0$, $i = 1 \ldots \ell$, ainsi $\widetilde{V} \cap \mathfrak{g} = N$.

Comme (x_0, x_1) est régulier dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$ si et seulement si x_0 est régulier dans $\mathfrak{g}$, $\widetilde{V} \cap \widetilde{P} \cap \mathfrak{g} = N \cap P$. L'ensemble $N \cap P$ est non vide d'après [4] 8.1.1(i) et donc $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est non vide.

Soit $(z_0, z_1) \in \widetilde{V} \cap \widetilde{P}$, z_0 est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$. Alors pour tout $y \in \mathfrak{g}$, $e^{\mathrm{ad}(0,y)}(z_0, z_1) = (z_0, z_1 + [y, z_0])$. Cet élément appartient à $\widetilde{V}$, d'où

$$dp_i(z_0).(z_1 + [y, z_0]) = Q_i(z_0, z_1 + [y, z_0]) = 0.$$

Il en résulte que $z_1 + [\mathfrak{g}, z_0]$ est inclus dans $\bigcap_{i=1\ldots\ell} \ker dp_i(z_0)$. Or z_0 étant régulier, ces deux ensembles sont des sous-espaces affines de $\mathfrak{g}$ de dimension $n - \ell$. Ils sont donc égaux, et il existe $y \in \mathfrak{g}$ tel que

$$z_1 + [y, z_0] = 0,$$
$$e^{\mathrm{ad}(0,y)}(z_0, z_1) = (z_0, 0).$$

Ainsi (z_0, z_1) et z_0 appartiennent à la même orbite.

D'après [4] 8.1.3(iv), l'ensemble $N \cap P$ est constitué d'une seule orbite sous l'action de G. Ainsi $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est constitué d'une seule $\widetilde{G}$-orbite.

2.2. Lemme – *Soit X la variété des zéros communs d'une famille de r polynômes sur $\mathbf{k}^n$. Si X est la réunion d'une famille de fermés irréductibles $(F_i)_{1 \le i \le n}$ telle que*

$$\dim F_i < \dim F_1 = n - r \quad \forall i = 2, \ldots, n$$

alors X est une variété irréductible.

Démonstration – Soit Y une composante irréductible de X, alors

$$Y = Y \cap X = Y \cap \bigcup F_i = \bigcup Y \cap F_i$$

Pour chaque i, $Y \cap F_i$ est une partie fermée de Y, donc Y étant irréductible, toutes les parties $Y \cap F_i$ sont vides sauf une. Ainsi, il existe un entier i tel que $Y \subseteq F_i$. Or, la variété X étant définie par une famille de r polynômes, ses composantes irréductibles ont une dimension supérieure ou égale à $n - r$ ([8] corollaire 5 p57). Donc d'après [3] proposition 2 p91, $n - r \le \dim Y \le \dim F_i$, et $i = 1$. Par conséquent X, réunion de ses composantes irréductibles, est égal à F_1 qui est irréductible.

2.3. – Nous avons montré (lemme 2.1) que la sous-variété $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est un ouvert non vide de $\widetilde{V}$ composé d'une seule $\widetilde{G}$-orbite. Donc $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est irréductible de dimension

$$\dim \widetilde{G}.x = \dim \widetilde{\mathfrak{g}} - \dim \widetilde{\mathfrak{g}}^x = \dim \widetilde{\mathfrak{g}} - \chi(\widetilde{\mathfrak{g}}) = 2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$$

où $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ est nilpotent régulier et où $\chi(\widetilde{\mathfrak{g}}) = 2\ell$ est l'indice de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ([6] 2.8).

2.4. Théorème – *Pour toute algèbre de Lie semi-simple* $\mathfrak{g}$*, la variété* $\widetilde{V}$ *est irréductible.*

Démonstration – Supposons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit produit de deux algèbres de Lie semi-simples $\mathfrak{g}^{(1)}$ et $\mathfrak{g}^{(2)}$. Alors les algèbres $S(\mathfrak{g}^{(1)*})$ et $S(\mathfrak{g}^{(2)*})$ s'injectent naturellement dans $S(\mathfrak{g}^*)$. Si $(p_1^{(1)}, \ldots, p_{\ell(1)}^{(1)})$ (resp. $(p_1^{(2)}, \ldots, p_{\ell(2)}^{(2)})$) est une famille de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}^{(1)}$-invariants (resp. $\mathfrak{g}^{(2)}$-invariants) de $S(\mathfrak{g}^{(1)*})$ (resp. $S(\mathfrak{g}^{(2)*})$) alors la famille de polynômes $(p_1^{(1)}, \ldots, p_{\ell(1)}^{(1)}, p_1^{(2)}, \ldots, p_{\ell(2)}^{(2)})$ est une famille de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre des polynômes $\mathfrak{g}$-invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$

La variété $\widetilde{V}$ est donc le produit des variétés $\widetilde{V}^{(1)}$ et $\widetilde{V}^{(2)}$. Si ces deux dernières variétés sont irréductibles, alors $\widetilde{V}$ l'est aussi ([3] corollaire de la proposition 7 p52). Par conséquent, nous pouvons supposer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple.

Soit $\eta\colon \widetilde{V} \to \mathfrak{g}$ la projection de $\widetilde{V}$ sur $\mathfrak{g}$ qui à (x_0, x_1) associe x_0, l'image de η est l'ensemble N des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

Soit $x \in N$. L'idéal des polynômes s'annulant sur la variété N étant engendré par $p_1, \ldots, p_\ell$, l'espace tangent de Zariski de N en x, $T_x(N)$, est l'intersection des noyaux de $dp_1(x), \ldots, dp_\ell(x)$. Ainsi, la fibre $\eta^{-1}(x)$ est égale à $(x, T_x(N))$, et sa dimension est $\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} d\pi_x$.

Les fonctions polynomiales $p_1, \ldots, p_\ell$ étant $\mathfrak{g}$-invariantes, pour tout $\alpha \in G$, $T_{\alpha(x)}(N) = \alpha(T_x(N))$. Ainsi, la variété $\eta^{-1}(G.x)$ est irréductible, car image de la variété irréductible $G \times T_x(N)$ par le morphisme surjectif $(\alpha, y) \mapsto (\alpha(x), \alpha(y))$ ([3] T4 p186). Et, comme le morphisme de $\eta^{-1}(G.x)$ sur $G.x$ déduit de η est un morphisme équivariant d'espaces homogènes pour G, donc d'après [9] théorème 4.3.3, on a

$$\dim \eta^{-1}(x) = \dim \eta^{-1}(G.x) - \dim G.x,$$
$$\dim \eta^{-1}(G.x) = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x = 2 \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} d\pi_x - \dim \mathfrak{g}^x.$$

De plus, l'orbite $G.x$ est localement fermée ([9] lemme 4.3.1). Donc $\eta^{-1}(G.x)$ est localement fermé, la projection η étant une application continue pour la topologie de Zariski. Ainsi, la variété est ouverte dans son adhérence qui est donc irréductible ([3] T2 p185). Cette dernière a, par conséquent, la même dimension que $\eta^{-1}(G.x)$ ([3] proposition 2 p91).

La variété N est la réunion finie d'orbites $\mathcal{O}_i$ ([4] 8.1.3). Ainsi

$$\widetilde{V} = \eta^{-1}(N) = \bigcup \eta^{-1}(\mathcal{O}_i) = \bigcup \overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)}.$$

De plus, pour toute orbite $\mathcal{O}_i$ de N, $\overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)}$ est une partie fermée irréductible de $\widetilde{V}$. Donc, d'après le lemme 2.2, pour prouver que la variété $\widetilde{V}$ est irréductible, il suffit de montrer que

$$\dim \overline{\eta^{-1}(\mathcal{O}_i)} < 2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$$

pour toute orbite $\mathcal{O}_i$ sauf pour l'orbite des éléments réguliers qui est de dimension $2(\dim \mathfrak{g} - \ell)$.

Il nous reste donc à démontrer que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent non régulier,

$$\begin{gathered}\dim \eta^{-1}(G.x) < 2(\dim \mathfrak{g} - \ell),\\ 2\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rg} d\pi_x - \dim \mathfrak{g}^x < 2(\dim \mathfrak{g} - \ell),\\ 2\ell < \operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x.\end{gathered}$$

ce qui est fait dans les points suivants pour chaque type d'algèbre de Lie simple.

2.5. – Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique, à tout $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent, est associée une suite d'entiers strictement positifs $\lambda(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ qui caractérise l'orbite de x. Ces entiers sont les diviseurs élémentaires de la matrice sous-jacente dans la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$.

R. W. Carter exprime ([1] chapitre 13) la dimension du centralisateur de x en fonction des entiers r_i ($i \in \mathbb{N}$) où $r_i = \operatorname{card}\{j \mid 1 \le j \le k, \lambda_j = i\}$ et R. W. Richardson exprime ([7] chapitre 4) le rang de $d\pi_x$ en fonction de $\lambda(x)$.

2.6. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type A_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{gathered}\lambda(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k),\\ \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_k \ge 1,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = \ell + 1.\end{gathered}$$

Et alors

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} d\pi_x &= \lambda_1 - 1,\\ \dim \mathfrak{g}^x &= \sum_{i \ge 1}\Big(\sum_{j \ge i} r_j\Big)^2 - 1,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= \lambda_1 + \sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 - 2 \\
&= \lambda_1 + \sum_{i\geq 1} i r_i^2 + \sum_{i<j} 2 i r_i r_j - 2 \\
&\geq \lambda_1 + \lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + 2 \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i r_{\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i^2 - 2 \\
&\geq 2\lambda_1 r_{\lambda_1} + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + 2 \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i^2 - 2 \\
&\geq 2 \sum_{1\leq i\leq \lambda_1} i r_i + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i^2 - 2 \\
&\geq 2(\ell+1) + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i^2 - 2 \\
&\geq 2\ell + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i^2 .
\end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \lambda_1 (r_{\lambda_1} - 1)^2 > 2\ell.$$

Sinon, x étant non régulier, λ_1 est distinct de $\ell + 1$, $k \geq 2$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \lambda_2 r_{\lambda_2}^2 > 2\ell.$$

2.7. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type B_ℓ :
Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{gathered}
\lambda(x) = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_h), \\
\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 1, \\
\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_h \geq 1;\ \beta_i \text{ impair}, \\
2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h = 2\ell + 1.
\end{gathered}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, nous pouvons supposer que

$$\begin{gathered}
\lambda(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \\
\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1, \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 2\ell + 1, \\
\text{si } \lambda_i \text{ est pair, } r_{\lambda_i} \text{ est pair.}
\end{gathered}$$

Et alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x = E(\frac{1}{2}\lambda_1),$$
$$\dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i,$$

où $E(z)$ est la partie entière de z ($z \in \mathbb{R}$). Donc si λ_1 est pair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} i r_i^2 + \sum_{i<j} i r_i r_j - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ pair}} i r_i^2 + \sum_{i<j} i r_i r_j + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i(i r_i - 1) \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i r_{\lambda_1} \\
&\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i \\
&\geq 2\ell + 1 \\
&> 2\ell.
\end{aligned}$$

Si λ_1 est impair, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} i r_i^2 + \sum_{i<j} i r_i r_j - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} i r_i^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i r_{\lambda_1} - \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} i r_i + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(i r_i - 1) \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + 2\ell + 1 - \lambda_1 r_{\lambda_1} + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(i r_i - 1) \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}(r_{\lambda_1} - 2)(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(i r_i - 1).
\end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 3$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}(r_{\lambda_1} - 2)(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 2$, alors λ_1 est distinct de 1 (car $\lambda(x)$ ne peut être égal à $(1,1)$) et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 1$, x étant non régulier, λ_1 est distinct de $2\ell + 1$, $k \geq 2$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2} r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) > 2\ell$$

car $\lambda(x)$ est distinct de $(\lambda_1, 1)$, λ_1 étant impair.

2.8. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type C_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{gathered}\lambda(x) = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_k, 2\beta_1, \ldots, 2\beta_h),\\ \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 1,\\ \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_h \geq 1,\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_h = \ell.\end{gathered}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, on peut supposer que

$$\begin{gathered}\lambda(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k),\\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 1,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 2\ell,\\ \text{si } \lambda_i \text{ est impair, } r_{\lambda_i} \text{ est pair.}\end{gathered}$$

Et alors

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} d\pi_x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1),\\ \dim \mathfrak{g}^x &= \frac{1}{2}\sum_{i \geq 1}\Big(\sum_{j \geq i} r_j\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i.\end{aligned}$$

Donc si λ_1 est impair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} ir_i^2 + \sum_{i<j} ir_ir_j + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_ir_{\lambda_1} + \frac{1}{2}r_{\lambda_1} \\
&\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_i + \frac{1}{2}r_{\lambda_1} \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}r_{\lambda_1} \\
&> 2\ell.
\end{aligned}$$

Si λ_1 est pair, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&= \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} ir_i^2 + \sum_{i<j} ir_ir_j + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_ir_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_i^2 \\
&\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_i + \frac{1}{2}\lambda_1(r_{\lambda_1}-1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_i^2 \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}\lambda_1(r_{\lambda_1}-1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1-1} ir_i^2.
\end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}\lambda_1(r_{\lambda_1}-1)^2 > 2\ell.$$

Sinon, x étant non régulier, λ_1 est distinct de 2ℓ, $k \geq 2$, $\lambda_2 > \lambda_1$ et

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}\lambda_2 r_{\lambda_2}^2 > 2\ell.$$

2.9. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type D_ℓ :

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent non régulier, $\lambda(x)$ est déterminée par

$$\begin{gathered}\lambda(x) = (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_h),\\ \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1,\\ \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_h \geq 1;\ \beta_i \text{ impair},\\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_h = 2\ell.\end{gathered}$$

Quitte à réordonner la suite $\lambda(x)$, nous pouvons supposer que

$$\begin{gathered}\lambda(x) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k),\\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 2\ell,\\ \text{si } \lambda_i \text{ est pair, } r_{\lambda_i} \text{ est pair.}\end{gathered}$$

L'expression de $\dim \mathfrak{g}^x$ est

$$\dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1}\Big(\sum_{j\geq i} r_j\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} i r_i^2 + \sum_{i<j} i r_i r_j - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i.$$

Le calcul de $\operatorname{rg} d\pi_x$ distingue plusieurs cas. Si $\lambda(x) = (2\ell - i, i)$ où i est un entier impair inférieur ou égal à ℓ,

$$\operatorname{rg} d\pi_x = \frac{1}{2}(2\ell - i + 1),$$

et alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}(2\ell - i + 1) + \ell + i - 1 \geq 2\ell + \frac{1}{2}(i-1) > 2\ell.$$

L'élément x étant non régulier, $d\pi_x < \ell$ ([4] 8.5.3) et $i > 1$.

Si $\lambda(x) = (\ell, \ell)$ lorsque ℓ est pair,

$$\operatorname{rg} d\pi_x = \frac{1}{2}\ell,$$

et alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x = \frac{1}{2}\ell + 2\ell > 2\ell.$$

Si $k \geq 3$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x = E(\frac{1}{2}\lambda_1).$$

Donc si λ_1 est pair, $r_{\lambda_1} \geq 2$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} ir_i^2 + \sum_{i<j} ir_ir_j - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ pair}} ir_i^2 + \sum_{i<j} ir_ir_j + \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i(ir_i - 1) \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda_1 r_{\lambda_1}^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} ir_ir_{\lambda_1} + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
&\geq \lambda_1 r_{\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}\lambda_1 \\
&> 2\ell.
\end{aligned}$$

Si λ_1 est impair, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &= E(\frac{1}{2}\lambda_1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} ir_i^2 + \sum_{i<j} ir_ir_j - \frac{1}{2}\sum_{i \text{ impair}} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} ir_i^2 + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} ir_ir_{\lambda_1} - \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} r_i \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} ir_i + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\
&\geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + 2\ell - \lambda_1 r_{\lambda_1} + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1) \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq \lambda_1 - 1} r_i(ir_i - 1).
\end{aligned}$$

Si $r_{\lambda_1} \geq 4$, alors

$$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \geq 2\ell + 2 > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 3$, alors λ_1 est distinct de 1 (car $\lambda(x)$ ne peut être égal à $(1,1,1)$) et

$$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \geq 2\ell + \frac{3}{2}(\lambda_1 - 1) > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_1} = 2$, k étant supérieur ou égal à 3, $\lambda_3 < \lambda_1$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2}r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\
&\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 3) + \frac{1}{2}r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\
&> 2\ell.
\end{aligned}$$

En effet $\lambda_1 \geq 3$, λ_1 étant impair, et $\lambda_3 r_{\lambda_3} \geq 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, \lambda_1, 1)$. Si $r_{\lambda_1} = 1$, $\lambda_2 < \lambda_1$ et

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \frac{1}{2} r_{\lambda_1}(\lambda_1 r_{\lambda_1} - 2\lambda_1 - 1) \\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_1 - 1} r_i(i r_i - 1) \\ &\geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2} r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq \lambda_2 - 1} r_i(i r_i - 1).\end{aligned}$$

Trois sous-cas apparaissent alors. Si $r_{\lambda_2} \geq 3$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2} r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) \geq 2\ell - 1 + \frac{3}{2}(3\lambda_2 - 1) \geq 2\ell + 2 > 2\ell.$$

Si $r_{\lambda_2} = 2$, alors

$$\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x \geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2} r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) \geq 2\ell - 1 + 2\lambda_2 - 1 \geq 2\ell + 2 > 2\ell$$

car $\lambda_2 \geq 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, 1, 1)$.
Si $r_{\lambda_2} = 1$, alors k étant supérieur ou égal à 3, λ_3 est strictement inférieur à λ_2 qui est un entier impair supérieur ou égal à 3. Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x &\geq 2\ell - 1 + \frac{1}{2} r_{\lambda_2}(\lambda_2 r_{\lambda_2} - 1) + \frac{1}{2} r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\ &\geq 2\ell + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 3) + \frac{1}{2} r_{\lambda_3}(\lambda_3 r_{\lambda_3} - 1) \\ &> 2\ell\end{aligned}$$

car $\lambda_3 r_{\lambda_3} > 2$, $\lambda(x)$ étant distinct de $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$.

2.10. – Pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles, nous suivons les notations de [1] quant aux dénominations des orbites nilpotentes.

Soit $x \in \mathfrak{g}$, nilpotent. La dimension du centralisateur de x est calculée dans [1] chapitre 13 et le rang de $d\pi_x$ est calculé en appendice pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles (le rang de $d\pi_x$ est égal au nombre d'exposants de $(\mathfrak{g}, x)$, [7] chapitre 2).

2.11. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_6 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 6. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 12 sauf pour les orbites $E_6(a_3)$, D_5 et $E_6(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$E_6(a_3)$	12	3	15
D_5	10	4	14
$E_6(a_1)$	8	5	13

2.12. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_7 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 7. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 14 sauf pour les orbites E_6, $E_7(a_3)$, $E_7(a_2)$ et $E_7(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
E_6	13	4	17
$E_7(a_3)$	13	4	17
$E_7(a_2)$	11	5	16
$E_7(a_1)$	9	6	15

2.13. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type E_8 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 8. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 16 sauf pour les orbites E_7, $E_8(a_4)$, $E_8(a_3)$, $E_8(a_2)$ et $E_8(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
E_7	16	5	21
$E_8(a_4)$	16	4	20
$E_8(a_3)$	14	5	19
$E_8(a_2)$	12	5 ou 6	17 ou 18
$E_6(a_1)$	10	7	17

2.14. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type F_4 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 4. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est strictement supérieure à 8 sauf pour les orbites $F_4(a_2)$ et $F_4(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$F_4(a_2)$	8	2	10
$F_4(a_1)$	6	3	9

2.15. – Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de type G_2 :

Le rang ℓ de $\mathfrak{g}$ est 2. Pour toutes les orbites nilpotentes non régulières, la dimension du centralisateur $\mathfrak{g}^x$ d'un des éléments x de l'orbite est supérieure strictement à 4 sauf pour l'orbite $G_2(a_1)$, mais alors

orbite nilpotente	$\dim \mathfrak{g}^x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x$	$\mathrm{rg}\, d\pi_x + \dim \mathfrak{g}^x$
$G_2(a_1)$	4	1	5

2.16. PROPOSITION – *L'idéal $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ de $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ est un idéal premier.*

DÉMONSTRATION – La variété $\widetilde{V}$ est irréductible et les fonctions polynomiales $P_1, \ldots, P_\ell, Q_1, \ldots, Q_\ell$ sont linéairement indépendantes en tout point de $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ ([6] 3.8). Donc, d'après [4] 11.2.3, l'idéal $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ est premier.

3. L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE MODULE LIBRE SUR SON CENTRE

3.1. LEMME – *Soit $h_1, \ldots, h_k \in S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$, linéairement indépendants modulo $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$. Il existe une partie ouverte non vide Ω de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ telle que pour tout $x \in \Omega$, les fonctions $h_1|_{\widetilde{G}.x}, \ldots, h_k|_{\widetilde{G}.x}$ soient linéairement indépendantes.*

DÉMONSTRATION – Soit $x_0 \in \widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{k}$ tels que

$$(\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k)|_{\widetilde{G}.x_0} = 0.$$

D'après le lemme 2.1, l'ensemble $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est un ouvert non vide constitué d'une seule $\widetilde{G}$-orbite, donc

$$(\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k)|_{\widetilde{V} \cap \widetilde{P}} = 0.$$

La variété $\widetilde{V}$ étant irréductible, $\widetilde{V} \cap \widetilde{P}$ est dense dans $\widetilde{V}$ et

$$(\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k)|_{\widetilde{V}} = 0.$$

De plus, l'ensemble des polynômes de $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ s'annulant sur $\widetilde{V}$ est l'idéal $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ (2.16), donc

$$\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k \in J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$$

Ainsi $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont nuls et $h_1|_{\widetilde{G}.x_0}, \ldots, h_k|_{\widetilde{G}.x_0}$ sont linéairement indépendants.

Soit θ l'application de $\widetilde{G} \times \widetilde{\mathfrak{g}}$ dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$ qui à (α, x) associe $\alpha(x)$. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k$, posons $\ell_i = h_i \circ \theta$. Chaque application ℓ_i est une fonction régulière sur $\widetilde{G} \times \widetilde{\mathfrak{g}}$, il existe donc ([3] proposition 9 p35) des fonctions régulières $\phi_{i,s}$ sur $\widetilde{G}$ et des applications polynômes $\zeta_{i,s}$ $(1 \leq s \leq p)$ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ telles que pour tout couple (α, x) de $\widetilde{G} \times \widetilde{\mathfrak{g}}$,

$$\ell_i(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{p} \phi_{i,s}(\alpha)\ \zeta_{i,s}(x).$$

Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_q)$ une base de l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{i,s})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q}$. Il existe alors des applications polynômes $\psi_{i,s}$ $(1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q)$ sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ telles que pour tout couple (α, x) de $\widetilde{G} \times \widetilde{\mathfrak{g}}$,

$$\ell_i(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{q} \phi_s(\alpha)\ \psi_{i,s}(x).$$

Soit $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $h_1|_{\widetilde{G}.x}, \ldots, h_k|_{\widetilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes;

(ii) $\ell_1|_{\widetilde{G} \times \{x\}}, \ldots, \ell_k|_{\widetilde{G} \times \{x\}}$ sont linéairement indépendantes;

(iii) la matrice $M(x) = \big(\psi_{i,s}(x)\big)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq s \leq q}$ est de rang k.

D'après le début de la démonstration, il existe $x_0 \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ tel que les assertions précédentes soient vérifiées. Ainsi q est supérieur ou égal à k et il existe une matrice $k \times k$ extraite de $M(x_0)$ dont le déterminant $D(x_0)$ est non nul. La fonction D de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sur $\mathbf{k}$ est une application polynomiale de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Soit Ω l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ tel que $D(x)$ soit non nul. C'est un ouvert non vide de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Pour tout $x \in \Omega$, $D(x)$ étant non nul, la matrice $M(x)$ est de rang k et donc $h_1|_{\widetilde{G}x}, \ldots, h_k|_{\widetilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes.

3.2. LEMME – *Soit H un supplémentaire gradué de $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ dans $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$. L'application linéaire $f\colon H \otimes J \to S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*); h \otimes j \mapsto hj$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Ainsi $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ est un J-module libre.

DÉMONSTRATION – Nous avons $S^0(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) = H_0 \subseteq H \subseteq HJ$. Supposons que $S^0(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) + \cdots + S^k(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) \subseteq HJ$ alors

$$S^{k+1}(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) = H_{k+1} + J_+\big(S^0(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) + \cdots + S^k(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)\big) \subseteq H + J_+HJ \subseteq HJ,$$

donc $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*) = HJ$ et ainsi f est surjective.

Soit $h_1, \ldots, h_k \in H$ linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$. L'ensemble H étant un supplémentaire de $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$, $h_1, \ldots, h_k$ sont linéairement indépendants modulo $J_+S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$. Soit $j_1, \ldots, j_k \in J$ tels que $h_1 j_1 + \cdots + h_k j_k = 0$.

Soit Ω l'ensemble défini au lemme 3.1 pour $h_1, \ldots, h_k$ et soit $x \in \Omega$. Alors

$$(h_1 j_1 + \cdots + h_k j_k)|_{\widetilde{G}.x} = 0,$$
$$(j_1(x) h_1 + \cdots + j_k(x) h_k)|_{\widetilde{G}.x} = 0,$$
$$j_1(x) = \cdots = j_k(x) = 0,$$

car les applications $j_1, \ldots, j_k$ sont constantes sur $\widetilde{G}.x$, et car les fonctions $h_1|_{\widetilde{G}.x}, \ldots, h_k|_{\widetilde{G}.x}$ sont linéairement indépendantes.

Les fonctions polynomiales $j_1, \ldots, j_k$ sont nulles sur l'ouvert non vide Ω de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, elles sont donc nulles sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $h_1, \ldots, h_k$ sont linéairement indépendantes sur J. Ainsi f est injective.

Par conséquent $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ s'identifie à $H \otimes J$ et toute base de l'espace vectoriel H est une base du J-module $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$.

3.3. THÉORÈME – *a) L'algèbre symétrique $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un $Y(\widetilde{\mathfrak{g}})$-module libre.*
b) L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un $Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$-module libre.

DÉMONSTRATION – a) Reprenons les notations du lemme 3.2. L'ensemble $Y(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est l'image de J par l'isomorphisme de $S(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ sur $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$, notons H' l'image de H par cet isomorphisme.

Alors, d'après 3.2, l'application linéaire $f' \colon H' \otimes Y(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to S(\widetilde{\mathfrak{g}}); h \otimes j \mapsto hj$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ce qui entraîne que $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un $Y(\widetilde{\mathfrak{g}})$-module libre.

b) Soit H'' l'image de H' par la symétrisation de $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$ sur $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et l'application linéaire $f'' \colon H'' \otimes Z(\widetilde{\mathfrak{g}}) \to \mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}); h \otimes z \mapsto hz$.

La filtration de $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ induit une filtration sur $Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et sur H''. L'application f'' est compatible avec ces filtrations et définit donc, par passage au gradué, une application

$$\mathrm{gr}(f'') \colon \mathrm{gr}(H'') \otimes \mathrm{gr}(Z(\widetilde{\mathfrak{g}})) \to \mathrm{gr}(\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})).$$

Les ensembles $\mathrm{gr}(\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}))$, $\mathrm{gr}(Z(\widetilde{\mathfrak{g}}))$ et $\mathrm{gr}(H'')$ s'identifient à $S(\widetilde{\mathfrak{g}})$, $Y(\widetilde{\mathfrak{g}})$ et H' respectivement (H étant gradué par construction, H' est gradué) et l'application $\mathrm{gr}(f'')$ s'identifie à f'. D'après a), f' est bijective, il en est donc de même de $\mathrm{gr}(f'')$ et de f''. Ainsi $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ est un $Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$-module libre.

3.4. – Soit m un entier non nul. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_m$ quotient de l'algèbre de Lie de dimension infinie $\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[T]$ par l'idéal $\sum_{n \geq m+1} \mathfrak{g} \otimes T^n$. Lorsque $m = 1$, $\mathfrak{g}_1$ s'identifie à l'algèbre de Takiff associée à $\mathfrak{g}$.

On peut conjecturer que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_m$ est un module libre sur son centre. Nous l'avons prouvé lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est produit d'algèbres isomorphes à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{k})$. Le point qu'il reste à démontrer dans le cas général est l'irréductibilité de la variété $\widetilde{V}$.

REMERCIEMENT

Je remercie M. Brion qui m'a donné d'utiles indications pour la démonstration du théorème 2.4.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. R. W. CARTER, *Finite groups of Lie type : Conjugacy classes and complex characters*, John Wiley and Sons, Chichester - New York, 1985.
2. C. CHEVALLEY, *Théorie des groupes de Lie, tome II, groupes algébriques*, Hermann & Cie, éditeurs, 1951.
3. J. DIEUDONNE, *Cours de géométrie algébrique tome 2*, Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1974.
4. J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Cahiers scientifiques, fascicule 37, Gauthier-Villars, 1974.
5. B. KOSTANT, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., 85, p327–404, 1963.
6. M. RAÏS ET P. TAUVEL, *Indice et polynômes invariants pour certaines algèbres de Lie*, J. reine angew. Math., 425, p123–140, 1992.
7. R. W. RICHARDSON, *Derivatives of invariant polynomials on a semisimple Lie algebra*, Miniconference on harmonic analysis and operators algebras, Camberra, Proc. Centre of Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 1987.
8. I. R. SHAFAREVICH, *Basic algebraic geometry*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
9. T. A. SPRINGER, *Linear algrebraic groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1981.

François GEOFFRIAU
Département de Mathématiques,
URA CNRS 1322
Université de Poitiers

86022 POITIERS CEDEX

Manuscrit reçu en Décembre 1993