ANNALES DE L'I. H. P.

PHONG-CHAU NGUYEN

Contribution à l'étude des théories du champ unifié du type théorie d'Einstein-Schrödinger

Annales de l'I. H. P., tome 18, n° 4 (1964), p. 303-357
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1964__18_4_303_0>

Contribution à l'étude des théories du champ unifié du type théorie d'Einstein-Schrödinger

par

NGUYEN PHONG-CHAU.

RÉSUMÉ. — Se plaçant dans le cadre d'une variété à connexion linéaire, on construit une théorie du champ unifié du type théorie d'Einstein-Schrödinger, en partant d'un lagrangien linéaire en fonction des contractions du tenseur de courbure.

On analyse les équations approchées et étudie successivement les problèmes de Cauchy, des champs stationnaires partout réguliers, de l'interprétation physique de la théorie.

ABSTRACT. — A theory of the type of the Einstein-Schrödinger unified theory is constructed in a manifold cndowed with a general linear connection by the use of a lagrangien linear in terms of the contractions of the curvature tensor.

Approximate equations are analysed. Problems of Cauchy, of every regular stationnary solutions, of physical interpretation of the theory are successively studied.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons d'étudier quelques problèmes dans le cadre d'une théorie du champ unifié du type théorie d'Einstein-Schrödinger.

Nous adoptons comme point de départ, pour postuler les équations de champ, un principe variationnel portant sur un lagrangien général

$$\mathcal{L} = K_{\alpha\beta} \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta},$$

$$(1) \qquad K_{\alpha\beta} = a R_{\alpha\beta} + b \tilde{R}_{\beta\alpha} + a' R_{\beta\alpha} + b' \tilde{R}_{\alpha\beta} + c P_{\alpha\beta} + d \tilde{P}_{\alpha\beta} + e \Gamma_\alpha \Gamma_\beta$$

($R_{\alpha\beta}$, $P_{\alpha\beta}$ désignent deux contractions du tenseur de courbure dans une connexion linéaire $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$; $\tilde{R}_{\alpha\beta}$, $\tilde{P}_{\alpha\beta}$ les mêmes tenseurs dans la connexion transposée $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha}$; $\Gamma_{\alpha} = \Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\alpha\lambda}}$ le vecteur de torsion; a, b, c, d, a', b', e des constantes arbitraires).

Divers auteurs (N. Bose [6], J. Lévy [15], L. Bouche [4] ont étudié des lagrangiens rentrant dans le cadre (1), mais certains calculs systématiques n'ont été effectués que récemment par L. Bouche.

Nous essayons toujours, à partir des équations unitaires, de retrouver celles de la théorie d'Einstein-Maxwell.

Nous montrons que l'étude de (1) se ramène à celle de deux cas simples A et B :

Version A. — C'est la version de la théorie d'Einstein-Schrödinger :

$$K_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + p\,(\partial_{\alpha}\Gamma_{\beta} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha})$$

Version B. — Elle consiste à choisir

$$K_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + r\,Q_{\alpha\beta}$$

($W_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$ sont deux contractions du tenseur de courbure dans une connexion $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$ de vecteur de torsion $L_{\rho} = L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\rho\lambda}} = 0$; p et r des constantes arbitraires, $p \neq 0$).

Nous nous placerons dans la suite, soit dans le cas A, soit dans le cas B.

Nous examinons tout d'abord le problème de Cauchy des équations de champ. Ce problème a été examiné en détails dans le cas A par A. Lichnerowicz [2] et F. Maurer-Tison [16]. Les équations de champ possèdent trois variétés caractéristiques. L. Bouche a étudié le même problème dans le cas B, avec $r = 0$. Elle a démontré l'existence de quatre variétés caractéristiques des équations de champ dont les trois premières sont identiques à celles du cas A. Cependant, elle n'a pas réussi à expliciter les équations définissant la quatrième variété. Nous poursuivons ce travail en nous plaçant dans le cas B. La quatrième variété caractéristique est définie dans ce cas par les équations

$$[(1 + \varepsilon)\,\gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}]\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta} = 0,$$

avec

$$\varepsilon = -1 + \frac{4}{3}\,r\,(r - 1).$$

Si $\varepsilon = 0$, les équations du champ sont sous-déterminées.

Nous examinons ensuite le cas d'un champ $g_{\alpha\beta}$ stationnaire partout régulier sur un espace-temps V^4 — muni de la métrique minkowskienne $d\sigma^2 = \eta_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}$ — supposé compact ou complet et nous essayons de généraliser les théorèmes d'A. Lichnerowicz ([2], p. 136-142) tout en se bornant au cas analytique. Les résultats obtenus permettent de conclure que les équations unitaires correspondent essentiellement au cas extérieur. Pour introduire des sources matérielles, il faudra construire des tenseurs de matière convenables.

Afin d'obtenir des indications nécessaires pour la construction de tels tenseurs, nous étudions le problème de l'interprétation physique des équations de champ en supposant provisoirement que les soources du champ sont les singularités de ces équations. Nous montrons qu'il est possible, dans les cas A et B, de définir une métrique $a_{\alpha\beta}$ et un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ tels que les équations unitaires s'identifient aux équations du champ de la théorie d'Einstein-Maxwell jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$ inclusivement.

Il en résulte que :

1° la méthode des singularités d'Einstein-Infeld-Hoffmann [10] conduit aux équations de mouvements approchées compatibles avec la loi de Coulomb;

2° dans le cas où la source est constituée par une particule unique, statique, à symétrie sphérique, la solution approchée jusqu'à $\left(\frac{1}{c^4}\right)$ des équations unitaires et la solution rigoureuse des équations d'Einstein-Maxwell sont identiques.

Notre interprétation physique postule que le tenseur de torsion $L_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}^{\wedge}$ doit jouer le rôle de tenseur champ électromagnétique et permet une interprétation physique claire de la propriété d'invariance par transposition [10] des équations unitaires.

CHAPITRE I.

LES DIFFICULTÉS DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET LA VERSION GÉNÉRALISÉE.

1. Les éléments fondamentaux de la théorie d'Einstein-Schrödinger. — L'élément primitif de la théorie est constitué par une variété espace-temps V^4, de classe C^2, C^4 par morceaux, sur laquelle sont définis deux êtres géométriques distincts :

1° Un champ de tenseur $g_{\alpha\beta}$, de classe C^1, C^3 par morceaux, tel qu'en tout point de V^4 :

a. le déterminant g soit $\neq 0$;

b. la forme quadratique $\Phi(x) = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ soit non dégénérée, de type hyperbolique normal, à trois carrés négatifs et à un carré positif.

2° Un champ de connexion linéaire $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, de classe C^0, C^2 par morceaux.

Les objets géométriques ainsi introduits seront soumis aux équations de champ.

2. **Rappels et notations.** — Pour simplifier, une même notation sera utilisée pour désigner un tenseur (resp. une connexion) et les composantes (resp. les coefficients) de ce tenseur (resp. de cette connexion) par rapport à un système de coordonnées locales.

1° Nous utilisons la même lettre support pour désigner les composantes covariantes d'un tenseur d'orde 2, le déterminant de la matrice formée par ces composantes ainsi que le tenseur associé.

Ainsi $g^{\alpha\beta}$ est défini par

$$g^{\alpha\lambda} g_{\beta\lambda} = \delta^\alpha_\beta.$$

Posons

$$(2.1)\quad \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}) = g_{\underline{\alpha\beta}}, & \varphi_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}) = g_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}; \\ h^{\alpha\beta} = g^{\underline{\alpha\beta}}, & f^{\alpha\beta} = g^{\overset{\alpha\beta}{\vee}}; \end{cases}$$

$$\gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\lambda} = \varphi^{\alpha\lambda}\varphi_{\beta\lambda} = h_{\beta\lambda} h^{\alpha\lambda} = f_{\beta\lambda} f^{\alpha\lambda} = \delta^\alpha_\beta,$$

γ, φ, h, f désignent respectivement les déterminants des matrices d'éléments $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$,

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \text{indicateur de Levi Civita} = \pm 1 \text{ ou } 0.$$

Entre ces quantités, on peut établir les relations suivantes :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \varphi_{\alpha\beta} = \dfrac{\sqrt{\varphi}}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}, & \varphi^{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}, \\ h^{\mu\nu} = \dfrac{\gamma}{g}\gamma^{\mu\nu} + \dfrac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}, & \varphi^{\mu\nu} = \dfrac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\nu} + \dfrac{\gamma}{g}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}, \\ \gamma_{\mu\nu} = \dfrac{g}{h}h_{\mu\nu} + \dfrac{g}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, & \varphi_{\mu\nu} = \dfrac{g}{f}f_{\mu\nu} + \dfrac{g}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\rho\sigma}, \\ h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu\sigma}\gamma^{\rho\sigma}, & f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma}\varphi^{\rho\sigma}, \\ h^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\rho}f^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}; & \varphi^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}f_{\rho\sigma} \end{cases}$$

$$g = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\sigma\sigma},$$

Si $\varphi = 0 \left(\text{resp. } \frac{1}{f} = 0\right)$, pour rétablir l'écriture correcte des formules (2.2), il faudra y remplacer $\sqrt{\varphi}\,\varphi^{\mu\nu} \left(\text{resp. } \frac{1}{\sqrt{f}} f_{\mu\nu}\right)$ par $\frac{1}{2}.\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} \left(\text{resp. } \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\rho\sigma}\right)$ (*voir* M.-A. Tonnelat [1]).

2° $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ désigne une connexion linéaire quelconque;

$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}(\equiv \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})$ désigne la connexion transposée de $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$;

$R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} = \partial_\mu \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\beta}$: le tenseur de courbure dans la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$;

$\tilde{R}^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\mu} + \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta}\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\mu} - \tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\mu}\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}$: le tenseur de courbure dans la connexion transposée;

$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\lambda}$ (resp. $\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^{\lambda}{}_{\alpha\beta\lambda}$) : le tenseur de Ricci dans la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ (resp. $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}$);

$+$; ρ (resp. $-$; ρ) : la dérivée covariante par rapport à ρ dans la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ (resp. $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta}$);

$\Gamma_\alpha = \Gamma^{\lambda}_{\underset{\vee}{\alpha\lambda}}$: le vecteur de torsion de la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$;

$P_{\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\lambda\alpha\beta}$; $\tilde{P}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^{\lambda}{}_{\lambda\alpha\beta}$.

3. **Le principe variationnel.** — Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de V^4, et soit

$$I = \int_C \mathcal{L}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

avec

$$\mathcal{L} = R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta}. \tag{3.1}$$

Les équations de la théorie d'Einstein-Schrödinger sont celles qui définissent l'extrémum de l'intégrale I *par rapport à toute variation de* $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ *et de* $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$, *nulle sur le bord de* C.

On obtient trois groupes d'équations bien connues :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} &= -\frac{2}{3}\delta^{\nu}_{\rho}\mathcal{G}^{\mu\sigma}\Gamma_\sigma + \mathcal{G}^{\mu\nu}\Gamma_\rho,\\
\partial_\rho \mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} &= 0,\\
R_{\mu\nu} &= 0.
\end{aligned}$$

Définissons une nouvelle connexion $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$, liée à $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ par

$$L^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\delta^{\lambda}_{\alpha}\Gamma_\beta \qquad \left(L_\alpha = L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\alpha\lambda}} = 0\right), \tag{3.2}$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned}
&D_\rho \mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}} = 0,\\
&\partial_\rho \mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0,\\
&W_{\mu\nu} - \frac{2}{3}(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) = 0,
\end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

où D_ρ désigne la dérivée covariante, $W_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci dans la connexion $L^\lambda_{\alpha\beta}$.

4. **Les difficultés rencontrées par la théorie d'Einstein-Schrödinger.** — La théorie d'Einstein-Schrödinger a suscité, dès sa naissance, de grands espoirs et motivé de nombreuses recherches. Mais, malgré d'importants efforts, aucun résultat physiquement satisfaisant n'a pu être dégagé.

La richesse du formalisme rend difficiles les interprétations physiques possibles, et, jusqu'à maintenant, on ne sait pas encore quel est le rôle physique que doit jouer le tenseur $g_{\alpha\beta}$.

Aucune solution rigoureuse obtenue ne peut représenter une particule chargée statique à symétrie sphérique conformément à la théorie d'Einstein-Maxwell (M.-A. Tonnelat [1]).

L'espoir d'intégrer les sources au champ ne semble pas être réalisé par la théorie (M.-A. Tonnelat [20]).

La méthode des singularités d'Einstein-Infeld-Hoffmann ne conduit pas aux équations de mouvement des particules chargées compatibles avec la loi classique de Coulomb. (L. Infeld [13], J. Callaway [7], H. Treder [21], E. Clauser [8]).

Ces difficultés sont imbriquées les unes dans les autres, et il n'est pas impossible que la découverte d'une interprétation physique correcte pourra les résoudre toutes à la fois.

Cependant, divers auteurs ont pensé qu'il faudrait modifier la théorie d'Einstein-Schrödinger.

A cet effet, de nombreux essais ont été proposés.

5. **Diverses modifications de la théorie d'Einstein-Schrödinger.** — Pour fonder une géométrisation de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, se rapprochant plus ou moins de la théorie d'Einstein-Schrödinger, on peut adopter différents points de départ :

1° On peut adopter un tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ symétrique complexe, et une connexion linéaire symétrique complexe. On s'éloigne alors considérablement de l'esprit de la théorie d'Einstein-Schrödinger (J. Moffat [17]).

2° $g_{\alpha\beta}$, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ étant réels, on peut proposer des lagrangiens non linéaires par rapport au tenseur de courbure. Les calculs sont presques inextricables. On obtient des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à deux, d'où résultent de nombreuses difficultés (R. L. Arnowitt [3], Kilmister et G. Stephenson [11]).

3° On peut ajouter au lagrangien (3.1) d'Einstein des termes fonctions de $g_{\alpha\beta}$ seulement. Ces termes, dits « phénoménologiques », ne peuvent pas s'interpréter géométriquement dans le cadre d'une variété à connexion linéaire à quatre dimensions. De telles théories ne peuvent être considérées que comme provisoires, au même titre que la théorie d'Einstein-Maxwell (W. B. Bonnor [5], B. Kursunoglu [12]).

4° Une extension de la théorie d'Einstein-Schrödinger a été proposée par M.-A. Tonnelat. Nous exposons cette théorie au paragraphe suivant (M.-A. Tonnelat [20]).

6. **La version généralisée de la théorie d'Einstein-Schrödinger.** — Faisons tout d'abord les remarques suivantes :

a. Le choix du lagrangien (3.1) est assez arbitraire. Nous pouvons respecter les principes fondamentaux de la théorie d'Einstein-Schrödinger en remplaçant (3.1) par

$$\mathcal{L} = K_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta},$$

où $K_{\alpha\beta}$ est uniquement fonction du tenseur de courbure.

Pour obtenir des équations aux dérivées partielles du second ordre, il faut postuler que $K_{\alpha\beta}$ soit linéaire en fonction du tenseur de courbure. Dans une variété à connexion linéaire, on a deux tenseurs de courbure, à savoir $R^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu}$ et $\tilde{R}^{\lambda}{}_{\alpha\beta\mu}$ desquels on peut, par contractions, obtenir quatre tenseurs distincts d'ordre deux :

$$R_{\alpha\beta}, \quad \tilde{R}_{\alpha\beta}, \quad P_{\alpha\beta}, \quad \tilde{P}_{\alpha\beta}.$$

La forme la plus générale de $K_{\alpha\beta}$ respectant les principes précités est donc

$$K_{\alpha\beta} = a R_{\alpha\beta} + b\tilde{R}_{\beta\alpha} + a' R_{\beta\alpha} + b'\tilde{R}_{\alpha\beta} + c P_{\alpha\beta} + d\tilde{P}_{\alpha\beta} \tag{6.1}$$

(a, b, a', b', c, d sont des constantes).

Il convient d'ajouter à (6.1) le tenseur $\Gamma_\alpha\Gamma_\beta$ obtenu à l'aide du vecteur de torsion Γ_α.

b. Dans le cadre de la théorie d'Einstein-Schrödinger, le groupe d'équations

$$\mathcal{F}^{\alpha} \equiv \partial_\rho \overset{\alpha\rho}{\underset{\vee}{\mathcal{G}}} = 0 \tag{6.2}$$

apparaît comme une condition assez contraignante dans l'étude de nombreux problèmes. Ce groupe d'équations ne résulte pas nécessairement de (3.1) quand on y remplace $R_{\alpha\beta}$ par $K_{\alpha\beta}$. On peut espérer que la condition $\mathcal{F}^\alpha \neq 0$ permet de surmonter certaines difficultés rencontrées par la théorie d'Einstein-Schrödinger.

c. Dans une théorie du champ pur, le tenseur matériel doit être aussi intégré au schéma géométrique. Il est nécessaire d'introduire dans les équations de champ un vecteur normé qui sera identifié au vecteur vitesse unitaire. Comme le seul vecteur disponible est le vecteur de torsion Γ_α, on devra introduire dans le lagrangien une condition de normalisation du type

$$\sigma(g^{\alpha\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta - 2\varkappa^2)\sqrt{-g}. \tag{6.3}$$

On peut alors proposer le postulat suivant :

Les équations du champ unifié sont celles qui réalisent l'extrémum de l'intégrale d'action

$$J = \int_C \left[K_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta} + \sigma(g^{\alpha\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta - 2\varkappa^2)\sqrt{-g}\right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{6.4}$$

où

$$K_{\alpha\beta} = a R_{\alpha\beta} + b \tilde{R}_{\beta\alpha} + a' R_{\beta\alpha} + b' \tilde{R}_{\alpha\beta} + c P_{\alpha\beta} + d \tilde{P}_{\alpha\beta} + e \Gamma_\alpha \Gamma_\beta, \tag{6.5}$$

a, b, a', b', c, d, e sont des constantes arbitraires, par rapport à toutes les variations de σ, $g^{\alpha\beta}$, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ nulles sur le bord C.

Dans notre travail, nous supprimons la condition de normalisation (6.3), car, à notre avis, toute tentative pour intégrer les sources au champ est prématurée à l'état actuel de la théorie.

7. Passage à une connexion de vecteur de torsion nul. — Pour faciliter la déduction des équations de champ à partir de (6.4), effectuons d'abord dans $K_{\alpha\beta}$ le passage à une connexion $L^\lambda_{\alpha\beta}$, de vecteur de torsion nul, connexion liée à $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ par

$$L^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{3}\right)\delta^\lambda_\alpha \Gamma_\beta + \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{3}\right)\delta^\lambda_\beta \Gamma_\alpha, \tag{7.1}$$

où m est une constante arbitraire (on vérifie immédiatement que $L_\alpha = 0$ quel que soit m).

Désignons par $W_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$ les tenseurs correspondants à $R_{\alpha\beta}$ et $P_{\alpha\beta}$ respectivement dans la connexion $L^\lambda_{\alpha\beta}$. En choisissant

$$m(a + b + a' + b') = \frac{2}{3}(a - b + a' - b'), \tag{7.2}$$

on obtient, par un calcul facile,

$$K_{\alpha\beta} = a W_{\alpha\beta} + b \tilde{W}_{\beta\alpha} + a' W_{\beta\alpha} + b' \tilde{W}_{\alpha\beta} + c Q_{\alpha\beta} + d \tilde{Q}_{\alpha\beta}$$
$$+ p' (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) + q' \Gamma_\alpha \Gamma_\beta + s' \underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} \Gamma_\lambda,$$

p', q', s' étant des fonctions de a, b, ..., e qu'il est facile d'expliciter.

La connexion $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$ étant de vecteur de torsion nul, on a

$$W_{\alpha\beta} = \tilde{W}_{\beta\alpha} + \tilde{Q}_{\beta\alpha}, \qquad Q_{\alpha\beta} = \tilde{Q}_{\alpha\beta}.$$

Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\mathcal{L}^{\alpha\beta} = (a + b) \mathcal{G}^{\alpha\beta} + (a' + b') \mathcal{G}^{\beta\alpha} \tag{7.3}$$

en supposant

$$a + b + a' + b' \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a + b - a' - b' \neq 0$$

(ces hypothèses sont nécessaires si l'on ne veut pas n'introduire dans $K_{\alpha\beta}$ que la partie antisymétrique ou que la partie symétrique de $W_{\alpha\beta}$) on obtient

$$K_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \mathcal{L}^{\alpha\beta}$$

avec

$$H_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + p (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) + q \Gamma_\alpha \Gamma_\beta + r Q_{\alpha\beta} + s \underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} \Gamma_\lambda, \tag{7.4}$$

p, q, r, s étant des fonctions de a, b, ..., e [*voir*, plus loin, formules (10.8)].

On constate que le changement de variables (7.3) revient à supposer

$$a + b = 1, \qquad a' + b' = 0. \tag{7.5}$$

Nous pouvons donc substituer au postulat du paragraphe 6 (avec $\sigma = 0$) le postulat suivant :

Les équations du champ unifié sont celles qui réalisent l'extrémum de l'intégrale d'action

$$L = \int_C (H_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + 2 \sigma^\alpha L_\alpha) \sqrt{-g}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \tag{7.6}$$

où

$$H_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + p (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) + q \Gamma_\alpha \Gamma_\beta + r Q_{\alpha\beta} + s \underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} \Gamma_\lambda \tag{7.7}$$

par rapport à toutes les variations de σ^α, Γ_α, $g^{\alpha\beta}$, $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$, *nulles sur le bord de* C.

($2\sigma^\alpha$ est le multiplicateur de Lagrange, introduit par la condition $L_\alpha = 0$.)

8. Les équations de champ de la version généralisée. — Du principe variationnel portant sur (7.6), résultent les équations d'Euler suivantes :

1° Pour les variations de $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$,

$$\mathrm{D}_{\lambda}\mathcal{G}^{\underset{+-}{\alpha\beta}} = -\frac{2}{3}\delta^{\alpha}_{\lambda}\mathcal{F}^{\beta} + \frac{2}{3}r\left(\delta^{\alpha}_{\lambda}\mathcal{F}^{\beta} + \delta^{\beta}_{\lambda}\mathcal{F}^{\alpha}\right) + s\left[\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\Gamma_{\lambda} + \frac{1}{3}\left(\delta^{\alpha}_{\lambda}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\beta\rho}}\Gamma_{\rho} - \delta^{\beta}_{\lambda}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\alpha\rho}}\Gamma_{\rho}\right)\right]; \tag{8.1}$$

2° Pour les variations de Γ_{α},

$$\mathcal{K}^{\alpha} \equiv p\mathcal{F}^{\alpha} + q\mathcal{G}^{\underline{\alpha\lambda}}\Gamma_{\lambda} + \frac{s}{2}L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\lambda\mu}}\mathcal{G}^{\lambda\mu} = 0; \tag{8.2}$$

3° Pour les variations de $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$,

$$H_{\alpha\beta} = 0, \tag{8.3}$$

soit

$$a.\quad H_{\underline{\alpha\beta}} = 0; \qquad b.\quad H_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0; \tag{8.4}$$

4° Pour les variations de σ^{α},

$$L_{\alpha} = 0 \tag{8.5}$$

CHAPITRE II.

LES ÉQUATIONS APPROCHÉES AU SECOND ORDRE ET LES IDENTITÉS DE CONSERVATION.

9. Introduction. — La théorie d'Einstein-Schrödinger a été proposée comme une géométrisation de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Mais, après de nombreuses recherches, et en tenant compte surtout des difficultés d'ordre physique systématiquement accumulées, certains auteurs pensent que la théorie ne remplit pas son but, et doit être considérée comme une géométrisation du champ de gravitation et d'autres champs physiques, étrangers à l'électromagnétisme, qu'il s'agit de dégager.

Pour la version généralisée, il est bien entendu possible d'admettre deux points de vue distincts :

1° On peut adopter *a priori* les groupes d'équations (8.2), (8.3), (8.4) et chercher à mettre en évidence son contenu physique. On peut, en particulier, interpréter la théorie comme théorie gravitationnelle des particules à spin (O. Costa de Beauregard [9], D. Sciama [19]).

2° Nous adoptons le point de vue classique d'Einstein et considérons la version généralisée comme une géométrisation de la Gravitation et de l'Électromagnétisme. Nous lui imposons la condition fondamentale suivante : La théorie doit se réduire à la théorie d'Einstein-Maxwell pour un champ $\underset{\vee}{g_{\alpha\beta}}$ *faible.*

Rappelons tout d'abord les équations de champ de la théorie d'Einstein-Maxwell. Elles s'écrivent

$$\nabla_\rho F^{\alpha\rho} = 0, \qquad \nabla_\alpha F_{\beta\rho} + \nabla_\beta F_{\rho\alpha} + \nabla_\rho F_{\alpha\beta} = 0, \tag{9.1}$$

$$S_{\alpha\beta} = \varkappa\tau_{\alpha\beta} = \varkappa\left(\frac{1}{4} a_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\lambda} F_\beta{}^\lambda\right) \tag{9.2}$$

($F_{\alpha\beta}$ désigne le tenseur champ électromagnétique de Maxwell; $a_{\alpha\beta}$ la métrique; $S_{\alpha\beta}$ le tenseur d'Einstein et $\varkappa$ la constante de gravitation de Newton).

Nous considérons les équations unitaires (8.2) et (8.4, *b*); soient

$$\mathcal{H}^\alpha = 0, \qquad \underset{\vee}{H_{\alpha\beta}} = 0 \tag{9.3}$$

comme généralisant les équations (9.1), et les équations (8.4, *a*); soient

$$\underline{H_{\alpha\beta}} = 0 \tag{9.4}$$

comme généralisant les équations (9.2).

Notons que $F_{\alpha\beta}$ intervient dans (9.1) de façon linéaire, et dans (9.2) au second ordre. Considérons maintenant un champ $\varphi_{\alpha\beta}$ faible et prenons $\varphi_{\alpha\beta}$ comme infiniment petit principal. Désignons par $(9.3)_1$ [resp. $(9.4)_2$] les équations (9.3) [resp. (9.4)] obtenues à la première (resp. deuxième) approximation. Pour simplifier, nous disons que $(9.3)_1$ et $(9.4)_2$ sont les équations unitaires à l'approximation Einstein-Maxwell.

Notre condition fondamentale s'énonce de la façon suivante : *Les équations du champ de la version généralisée doivent se réduire aux équations de la théorie d'Einstein-Maxwell à l'approximation Einstein-Maxwell.*

Toutes les versions rentrant dans le cadre (7.7), versions qui ne diffèrent entre elles que par le choix des constantes *a*, *b*, ..., *e*, et, conduisant aux mêmes équations de champ à l'approximation Einstein-Maxwell, seront considérées comme équivalentes.

Parmi les versions équivalentes, nous choisirons celle qui est la plus simple.

Nous étudions dans ce chapitre les équations unitaires à l'approximation Einstein-Maxwell, et montrons que la version généralisée du paragraphe 6 est équivalente à l'une ou à l'autre des deux versions simples distinctes dont l'une n'est autre que celle de la théorie d'Einstein-Schrödinger.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\rho}(\partial_\alpha\gamma_{\rho\beta}+\partial_\beta\gamma_{\rho\alpha}-\partial_\rho\gamma_{\alpha\beta}),$$

$$L^\lambda_{\underline{\alpha\beta}} = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} + u^\lambda_{\alpha\beta}, \qquad u_\alpha = u^\lambda_{\alpha\lambda};$$

$$u_{\alpha\beta,\rho} = \gamma_{\rho\lambda}u^\lambda_{\alpha\beta}, \qquad L_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\rho} = \gamma_{\rho\lambda}L^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\beta}};$$

$\nabla_\rho =$ dérivée covariante dans la connexion $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$;

$G^\lambda{}_{\alpha\beta\mu} =$ tenseur de courbure dans la connexion $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$;

$$G_{\alpha\beta} = G^\lambda{}_{\alpha\beta\lambda}, \qquad \Box = \gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta;$$

$$f^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\left(\sqrt{-g}\, g^{\underset{\vee}{\rho\sigma}}\right), \qquad A_{\bar\lambda} = \varphi_{\lambda\sigma}A^\sigma;$$

$$\varphi_{\alpha\beta\rho} = \partial_\alpha\varphi_{\beta\rho} + \partial_\beta\varphi_{\rho\alpha} + \partial_\rho\varphi_{\alpha\beta}.$$

D'une façon générale, $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\gamma^{\alpha\beta}$ seront utilisés pour abaisser et pour monter les indices. Pour éviter des confusions, posons

$$\varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}} = \gamma^{\lambda\alpha}\gamma^{\mu\beta}\varphi_{\alpha\beta}, \qquad \varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}\,\underline{\nu}} = \gamma^{\lambda\alpha}\gamma^{\mu\beta}\gamma^{\nu\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma}.$$

10. **Hypothèse** $s = 0$. — Écrivons l'équation (8.1) sous la forme

$$D_\rho \overset{\alpha\beta}{g^{+-}} = G_{\alpha\beta,\rho}. \tag{10.1}$$

Scindons cette équation en parties symétrique et antisymétrique, puis faisons les combinaisons habituelles, il vient

$$u_{\alpha\beta,\rho} = \left(L^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\rho}}\varphi_{\lambda\beta} + L^\lambda_{\underset{\vee}{\beta\rho}}\varphi_{\lambda\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(G_{\underline{\alpha\rho},\beta} + G_{\underline{\beta\rho},\alpha} - G_{\underline{\alpha\beta},\rho}\right), \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} L_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\rho} = & -\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta\rho} + \nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta} - \left(u^\lambda_{\alpha\rho}\varphi_{\lambda\beta} - u^\lambda_{\beta\rho}\varphi_{\lambda\alpha}\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(G_{\underset{\vee}{\alpha\rho},\beta} + G_{\underset{\vee}{\rho\beta},\alpha} + G_{\underset{\vee}{\beta\alpha},\rho}\right). \end{aligned} \tag{10.3}$$

En scindant (8.3) en parties symétrique et antisymétrique, il vient

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda L^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha) + L^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}u_\lambda - \left(L^\rho_{\underset{\vee}{\lambda\beta}}u^\lambda_{\alpha\rho} + L^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\rho}}u^\rho_{\lambda\beta}\right) & \\ + p(\partial_\alpha\Gamma_\beta - \partial_\beta\Gamma_\alpha) + rQ_{\alpha\beta} + sL^\lambda_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\Gamma_\lambda = 0, & \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$(10.5) \qquad G_{\alpha\beta} + \nabla_\lambda u^\lambda_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) + u^\lambda_{\alpha\beta} u_\lambda - \left(u^\lambda_{\alpha\rho} u^\rho_{\lambda\beta} + \underset{\vee}{L}{}^\lambda_{\alpha\rho} \underset{\vee}{L}{}^\rho_{\lambda\beta}\right) + q\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = 0.$$

Rappelons ici les équations (8.2) :

$$(10.6) \qquad p\mathcal{F}^\alpha + q\mathcal{G}^{\underline{\alpha\lambda}}\Gamma_\lambda + \frac{s}{2}\underset{\vee}{L}{}^\alpha_{\lambda\mu}\mathcal{G}^{\lambda\mu} = 0.$$

Supposons $\varphi_{\alpha\beta}$ petit, et prenons $\varphi_{\alpha\beta}$ comme infiniment petit principal. D'après (8.1), (10.2), (10.3), les termes en s n'interviennent dans $u_{\alpha\beta,\rho}$ qu'à partir du troisième ordre et dans $\underset{\vee}{L}{}_{\alpha\beta,\rho}$ qu'à partir du second ordre. Il en résulte que ces termes n'interviennent dans (10.4) et (10.6) qu'à partir du second ordre, et dans (10.5) qu'à partir du troisième ordre.

D'après le paragraphe 9, nous pouvons supposer :

$$(10.7) \qquad s = 0.$$

Tenant compte de (10.7) et (7.5), les expressions de p, q, r, m se simplifient :

$$(10.8) \qquad \begin{cases} m = \dfrac{3}{2}(2a - 1), \\ p = \dfrac{1}{6} - \dfrac{15}{8}m^2 + c - d + \dfrac{5}{2}m(c + d), \\ q = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4}m^2 + e, \\ r = c + d + 1 - a. \end{cases}$$

Ces équations déterminent p, q, r, m de façon univoque. Inversement, si p, q, r, m sont donnés, arbitraires, la première des équations (10.8) détermine a, la troisième e, et les deux autres c et d. Ainsi les constantes p, q, r qui interviennent dans (7.7) peuvent être choisies de façon quelconque.

Dans la suite de notre travail, nous nous placerons dans l'hypothèse

$$s = 0$$

11. Les équations de liaison. — 1° Posons

$$(11.1) \qquad L^\lambda_{\alpha\beta} = \Delta^\lambda_{\alpha\beta} + \delta^\lambda_\alpha A_\beta + \delta^\lambda_\beta B_\alpha + g_{\alpha\beta}C^\lambda$$

et désignons par $;\rho$ la dérivée covariante dans la connexion $\Delta^\lambda_{\alpha\beta}$.

Les équations (8.1) s'écrivent, en fonction de $\Delta^{\lambda}_{\alpha\beta}$,

$$\mathcal{G}^{\underset{+-}{\alpha\beta}}{}_{;\rho} + \left(\delta^{\alpha}_{\lambda} A_{\rho} + \delta^{\alpha}_{\rho} B_{\lambda} + g_{\lambda\rho} C^{\alpha}\right)\mathcal{G}^{\lambda\beta} + \left(\delta^{\beta}_{\rho} A_{\lambda} + \delta^{\beta}_{\lambda} B_{\rho} + g_{\rho\lambda} C^{\beta}\right)\mathcal{G}^{\alpha\lambda}$$
$$- \left[\frac{5}{2}(A_{\rho} + B_{\rho}) + \gamma_{\rho\lambda} C^{\lambda}\right]\mathcal{G}^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}\delta^{\alpha}_{\rho}\mathcal{F}^{\beta} + \frac{2}{3} r\left(\delta^{\alpha}_{\rho}\mathcal{F}^{\beta} + \delta^{\beta}_{\rho}\mathcal{F}^{\alpha}\right).$$

Par identifications des coefficients de $\delta^{\alpha}_{\rho}\sqrt{-g}$, $\delta^{\beta}_{\rho}\sqrt{-g}$, $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$, on a

$$\mathcal{G}^{\underset{+-}{\alpha\beta}}{}_{;\rho} = 0, \tag{11.2}$$

avec les conditions

$$g^{\lambda\beta} B_{\lambda} + C^{\beta} = -\frac{2}{3} f^{\beta} + \frac{2}{3} r f^{\beta},$$
$$g^{\alpha\lambda} A_{\lambda} + C^{\alpha} = \frac{2}{3} f^{\alpha},$$
$$A_{\rho} + B_{\rho} - \frac{5}{2}(A_{\rho} + B_{\rho}) - \gamma_{\rho\lambda} C^{\lambda} = 0,$$

soit

$$\left\{\begin{aligned} A_{\rho} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3}\right) f_{\rho} + \frac{r}{3} f_{\overline{\rho}} - \frac{1}{2} f_{\overline{\overline{\rho}}}, \\ B_{\rho} &= -\left(\frac{1}{6} + \frac{r}{3}\right) f_{\rho} + \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{3}\right) f_{\overline{\rho}} + \frac{1}{2} f_{\overline{\overline{\rho}}}, \\ C_{\rho} &= -\frac{1}{2}\left(f_{\rho} + f_{\overline{\rho}}\right) + r f_{\rho}. \end{aligned}\right. \tag{11.3}$$

Rappelons les notations

$$f_{\rho} = \gamma_{\rho\lambda} f^{\lambda}, \qquad f_{\overline{\rho}} = \varphi_{\rho\lambda} f^{\lambda}.$$

La méthode de M.-A. Tonnelat [1], appliquée à (11.2) fournit une solution $\Delta^{\lambda}_{\alpha\beta}$ unique, sauf dans le cas où l'on a simultanément

$$\gamma = 0, \qquad g = 2\varphi.$$

Ce cas sera écarté dans la suite. La formule (11.1), avec les valeurs (11.3) de A_{ρ}, B_{ρ}, C^{ρ} fournit alors une solution $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$ unique.

2° Cherchons maintenant à obtenir l'expression de $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$ au second ordre. Posons

$$\Delta^{\lambda}_{\alpha\beta} = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} + v^{\lambda}_{\alpha\beta} + \underset{\vee}{\Delta}{}^{\lambda}_{\alpha\beta},$$

on déduit, d'après (10.2) et (10.3),

$$\left\{\begin{aligned} \underset{\vee}{\Delta}{}_{\alpha\beta,\rho} &\overset{2}{=} -\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta\rho} + \nabla_{\rho}\varphi_{\alpha\beta}, \\ v_{\alpha\beta,\rho} &\overset{2}{=} \left(-\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\rho\lambda} + \nabla_{\lambda}\varphi_{\alpha\rho}\right)\varphi^{\lambda}{}_{\beta} + \left(-\frac{1}{2}\varphi_{\beta\rho\lambda} + \nabla_{\lambda}\varphi_{\beta\rho}\right)\varphi^{\lambda}{}_{\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{11.4}$$

où la notation $\overset{2}{=}$ indique que l'égalité n'est valable qu'au second ordre.

Utilisant (11.4), on obtient, par symétrisation et antisymétrisation de (11.1),

$$(11.5) \quad u_{\alpha\beta,\rho} \overset{2}{=} \left(-\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\rho\lambda} + \nabla_\lambda \varphi_{\alpha\rho}\right)\varphi^{\underline{\lambda}}{}_{\beta} + \left(-\frac{1}{2}\varphi_{\beta\rho\lambda} + \nabla_\lambda \varphi_{\beta\rho}\right)\varphi^{\underline{\lambda}}{}_{\alpha} + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\rho}\left(\frac{1-2r}{3}f_\beta + \frac{1}{3}f_{\overline{\beta}}\right) + \frac{1}{2}\gamma_{\beta\rho}\left(\frac{1-2r}{3}f_\alpha + \frac{1}{3}f_{\overline{\alpha}}\right) + \gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{2r-1}{2}f_\rho - \frac{1}{2}f_{\overline{\rho}}\right),$$

$$(11.6) \quad \underset{\vee}{L}_{\alpha\beta,\rho} \overset{2}{=} -\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta\rho} + \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\rho}\left(\frac{2}{3}f_\beta + \frac{2r-1}{3}f_{\overline{\beta}}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{\beta\rho}\left(\frac{2}{3}f_\alpha + \frac{2r-1}{3}f_{\overline{\alpha}}\right) + \frac{2r-1}{3}\varphi_{\alpha\beta}f_\rho.$$

D'où, par contraction,

$$(11.7) \quad \begin{cases} u_\alpha = u^{\rho}_{\alpha\rho} \overset{2}{=} v_\alpha + \dfrac{1-2r}{3}f_\alpha + \dfrac{1}{3}f_{\overline{\alpha}}, \\ v_\alpha \overset{2}{=} \dfrac{1}{4}\nabla_\alpha\left(\varphi^{\underline{\lambda\mu}}\varphi_{\lambda\mu}\right). \end{cases}$$

12. **Les équations antisymétriques.** — A l'aide des formules (11.5), (11.6), (11.7), il est facile de calculer l'expression de (10.4) au second ordre d'approximation. On obtient

$$(12.1) \quad \Box\varphi_{\alpha\beta} + G^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\varphi_{\mu\nu} + \frac{4}{3}r(r-1)(\partial_\alpha f_\beta - \partial_\beta f_\alpha) + 2p(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) \overset{2}{=} 0.$$

13. **Les équations liant f_α et $\Gamma\alpha$.** — Elles s'écrivent

$$p\,\partial_\rho(\sqrt{-g}\,f^{\alpha\rho}) + q\sqrt{-g}\,h^{\alpha\rho}\Gamma_\rho = 0,$$

soit, au second ordre,

$$(13.1) \quad p\nabla_\rho\varphi^{\underline{\alpha\rho}} + q\Gamma^\alpha \overset{2}{=} 0.$$

14. **Les équations symétriques.** — En portant les valeurs approchées de $u_{\alpha\beta,\rho}$, $\underset{\vee}{L}_{\alpha\beta,\rho}$, u_α dans (10.5), on obtient, après quelques calculs simples,

$$(14.1) \quad G_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\varphi_\alpha{}^{\underline{\lambda}}\Box\varphi_{\lambda\beta} + \varphi_\beta{}^{\underline{\lambda}}\Box\varphi_{\lambda\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left[\varphi_\alpha{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\lambda f_\beta + \nabla_\beta f_\lambda) + \varphi_\beta{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\lambda f_\alpha + \nabla_\alpha f_\lambda)\right] - \nabla_\rho\varphi_\alpha{}^{\underline{\lambda}}\nabla_\lambda\varphi_\beta{}^{\underline{\rho}} - \frac{1}{4}\nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\varphi^{\underline{\lambda\mu}}\varphi_{\lambda\mu}\right) - \frac{1}{4}\varphi_{\alpha\lambda\mu}\varphi_\beta{}^{\underline{\lambda\mu}} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\nabla_\rho f^{\overline{\rho}} - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4}{3}r(r-1)\right]f_\alpha f_\beta + q\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \overset{2}{=} 0.$$

15. **Discussions des équations du champ au second ordre. Formes finales.** — En examinant (12.1), (13.1), (14.1), on constate qu'il est essentiel de distinguer deux cas :

1° *Cas* A : $p \neq 0$, $q = 0$. — (13.1) devient

$$f_\rho \overset{2}{=} 0, \tag{15.1}$$

(12.1) s'écrit simplement

$$\square \varphi_{\alpha\beta} + \overset{A}{F}_{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma} = 0, \tag{15.2}$$

avec

$$\overset{A}{F}_{\alpha\beta} = 2p\,(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha.$$

Par contraction, on déduit de (14.1) la valeur de $G = \gamma^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$. Se servant ensuite de (15.1), (15.2), et des identités

$$-\nabla^\lambda \varphi_{\alpha\rho} \nabla^\rho \underline{\varphi}^{\alpha}{}_{\lambda} = \frac{1}{6}\varphi_{\alpha\beta\gamma}\underline{\varphi}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\nabla^\alpha \underline{\varphi}^{\beta\gamma}\nabla_\alpha \varphi_{\beta\gamma},$$

$$-\frac{1}{2}\nabla^\alpha \underline{\varphi}^{\beta\gamma}\nabla_\alpha \varphi_{\beta\gamma} = -\frac{1}{4}\square\left(\underline{\varphi}^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{2}\underline{\varphi}^{\alpha\beta}\square\varphi_{\alpha\beta},$$

on obtient

$$G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} G \overset{2}{=} \overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{A}{T}_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \tag{15.3}$$

avec

$$\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\lambda}\overset{A}{F}_\beta{}^\lambda + \varphi_{\beta\lambda}\overset{A}{F}_\alpha{}^\lambda\right) + \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\lambda\mu}\overset{A}{F}{}^{\lambda\mu},$$

$$\overset{A}{T}_{\alpha\beta} = \nabla^\rho \varphi_{\alpha\lambda}\nabla^\lambda \varphi_{\beta\rho} + \frac{1}{4}\left(\varphi_{\alpha\lambda\mu}\underline{\varphi}_\beta{}^{\lambda\mu} - \frac{1}{6}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\lambda\mu\nu}\underline{\varphi}^{\lambda\mu\nu}\right),$$

$$I_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(G_{\rho\sigma\alpha}{}^\lambda \varphi_{\beta\lambda} + G_{\rho\sigma\beta}{}^\lambda \varphi_{\alpha\lambda}\right)\underline{\varphi}^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta} G^{\rho\sigma\lambda\mu}\varphi_{\rho\sigma}\varphi_{\lambda\mu},$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[\nabla_\alpha \nabla_\beta\left(\underline{\varphi}^{\lambda\mu}\varphi_{\lambda\mu}\right) - \gamma_{\alpha\beta}\square\left(\underline{\varphi}^{\lambda\mu}\varphi_{\lambda\mu}\right)\right].$$

2° *Cas* B :

a. Si $p = 0$, $q = 0$, (13.1) n'intervient pas, le vecteur Γ_α n'intervient pas dans la théorie;

b. Si $p = 0$, $q \neq 0$, (13.1) entraîne $\Gamma_\alpha = 0$, et les équations (12.1) et (14.1) sont exactement les mêmes que dans le cas *a*;

c. Si $p \neq 0$, $q \neq 0$, (13.1) permet de calculer Γ_α en fonction de f_α.

Dans les cas B, *a*; B, *b*; B, *c*, les équations approchées sont analogues à celles du cas A. On a, après quelques simplifications simples,

$$\square \varphi_{\alpha\beta} + (1+\varepsilon)\overset{B}{F}_{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma} \overset{2}{=} 0, \tag{15.4}$$

avec

$$\overset{B}{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha f_\beta - \partial_\beta f_\alpha$$

et

$$G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} G \overset{2}{=} \overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{B}{T}_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \tag{15.5}$$

avec

$$\overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\varphi_{\alpha\lambda}\overset{B}{F}_\beta{}^\lambda + \varphi_{\beta\lambda}\overset{B}{F}_\alpha{}^\lambda\right) + \frac{\varepsilon}{4}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\lambda\mu}\overset{B}{F}{}^{\lambda\mu},$$

$$\overset{B}{T}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\left(f_\alpha f_\beta - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} f_\rho f^\rho\right) + f_\alpha f_\beta + (\varphi_{\alpha\lambda}\nabla^\lambda f_\beta + \varphi_{\beta\lambda}\nabla^\lambda f_\alpha)$$
$$+ \nabla^\lambda\varphi_{\alpha\rho}\nabla^\rho\varphi_{\beta\lambda} + \frac{1}{4}\left(\varphi_{\alpha\lambda\mu}\varphi_\beta{}^{\lambda\mu} - \frac{1}{6}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\lambda\mu\nu}\varphi^{\underline{\lambda}\underline{\mu}\underline{\nu}}\right);$$

les tenseurs $I_{\alpha\beta}$ et $A_{\alpha\beta}$ ont, en fonction de $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta}$, les mêmes expressions que dans le cas A.

La constante ε est égale à

$$\varepsilon_1 = -1 + \frac{4}{3} r(r-1) \qquad \text{dans les cas B, } a\text{; B, } b,$$

$$\varepsilon_2 = -1 + \frac{4}{3} r(r-1) - 2\frac{p^2}{q} \qquad \text{dans les cas B, } c.$$

Comme ε_1 varie entre $-\frac{4}{3}$ et $+\infty$, et ε_2 entre $-\infty$ et $+\infty$, les cas B, a et B, c ne sont pas équivalents. Cependant, dans une interprétation physique, on peut toujours définir un système d'unités tel que ε prenne une valeur comprise entre $-\frac{4}{3}$ et $+\infty$. Il suffit donc d'étudier le cas B, a. A cette réserve près, on peut donc énoncer le résultat :

16. Les versions A et B.

Proposition. — La version généralisée (6.4) est équivalente à l'une ou à l'autre des deux versions distinctes suivantes :

1° *Version* A : C'est la version de la théorie d'Einstein-Schrödinger. Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = W_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta} + p(\partial_\alpha\Gamma_\beta - \partial_\beta\Gamma_\alpha)\mathcal{G}^{\alpha\beta} \qquad (p \neq 0) \tag{16.1}$$

et fait intervenir le tenseur de Ricci dans une connexion linéaire de vecteur de torsion nul d'une part, et le rotationnel d'un champ de vecteur, d'autre part. Les équations de champ sont

$$D_\rho \mathcal{G}^{\underset{+-}{\alpha\beta}} = 0, \tag{16.2}$$

$$\mathcal{F}^\alpha = 0, \tag{16.3}$$

$$W_{\alpha\beta} + p\,(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0. \tag{16.4}$$

A l'approximation Einstein-Maxwell, on a les équations (15.1), (15.2), (15.3). Le vecteur Γ_α n'étant défini qu'à un gradient d'une fonction à valeur scalaire près, nous pouvons toujours imposer à Γ_α la condition supplémentaire

$$\nabla^\alpha \Gamma_\alpha = 0. \tag{16.5}$$

2° *Version* B : Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = W_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta} + r\,Q_{\alpha\beta}\mathcal{G}^{\alpha\beta} \qquad (r \text{ quelconque}) \tag{16.6}$$

et fait intervenir deux contractions du tenseur de courbure dans une connexion linéaire de vecteur de torsion nul. Les équations de champ sont

$$D_\rho \mathcal{G}^{\underset{+-}{\alpha\beta}} = -\frac{2}{3}\delta^\alpha_\rho \mathcal{F}^\beta + \frac{2}{3} r\left(\delta^\alpha_\rho \mathcal{F}^\beta + \delta^\beta_\rho \mathcal{F}^\alpha\right), \tag{16.7}$$

$$W_{\alpha\beta} + r\,Q_{\alpha\beta} = 0. \tag{16.8}$$

A l'approximation Einstein-Maxwell, elles se réduisent à (15.4), (15.5), avec

$$\varepsilon = -1 + \frac{4}{3} r\,(r-1). \tag{16.9}$$

Les équations approchées au second ordre ont été explicitées par M.-A. Tonnelat dans le cas A, et par L. Bouche dans le cas B, avec $r = 0$, mais les résultats obtenus ont été mis sous une forme différente (L. Bouche [4]).

Dans la suite de notre travail, nous nous placerons, soit dans le cas A, soit dans le cas B.

17. — **Les identités de conservation.** — La méthode de déduction des identités de conservation à partir de (7.6) est bien connue. Nous nous contenterons d'indiquer ici les résultats.

1° *Cas* A : Toute connexion $L^\lambda_{\alpha\beta}$, $L_\rho = 0$, solution de (16.2) vérifie les identités suivantes :

$$\partial_\rho(\mathcal{G}^{\rho\lambda} W_{\sigma\lambda} + \mathcal{G}^{\lambda\rho} W_{\lambda\sigma}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_\sigma W_{\alpha\beta} = 0. \tag{17.1}$$

2° *Cas* B : Toute connexion $L^{\lambda}_{\alpha\beta}$, $L_{\rho} = 0$, solution des équations (16.7) vérifient les identités suivantes :

$$\partial_{\rho}(\mathcal{G}^{\rho\lambda} W_{\sigma\lambda} + \mathcal{G}^{\lambda\rho} W_{\lambda\sigma} - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_{\sigma} W_{\alpha\beta} + 2r Q_{\lambda\sigma} \mathcal{F}^{\lambda} = 0. \tag{17.2}$$

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} & H_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + r Q_{\alpha\beta}, \\ & \mathcal{K}_{\rho}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{\lambda\alpha} H_{\rho\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha\lambda} H_{\alpha\rho}\right) - \frac{1}{2} \delta^{\lambda}_{\rho} \mathcal{G}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}; \end{aligned} \right. \tag{17.3}$$

(17.2) s'écrit

$$\partial_{\lambda} \mathcal{K}_{\rho}{}^{\lambda} + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} \partial_{\rho} \mathcal{G}^{\alpha\beta} = 0.$$

18. Invariance par transposition des équations de champ.

1° *Le cas* A : Dans le cas A, (16.3) est conséquence de (16.2). On peut donc prendre comme équations de champ (16.2) et (16.4) en se souvenant que la connexion $L^{\rho}_{\lambda\mu}$ admet un vecteur de torsion nul.

(16.2) entraîne

$$L^{\sigma}_{\underline{\lambda\sigma}} = \partial_{\lambda} \log \sqrt{-g}.$$

On en déduit que $Q_{\alpha\beta} = 0$ et $W_{\alpha\beta} = \tilde{W}_{\beta\alpha}$. Les premiers membres de (16.2) et de (16.4) se transforment en eux-mêmes si l'on effectue les transformations : $g^{\lambda\mu}$ en $\tilde{g}^{\lambda\mu}$ $(\equiv g^{\mu\lambda})$, $L^{\rho}_{\lambda\mu}$ en $\tilde{L}^{\rho}_{\lambda\mu}$ $(\equiv L^{\rho}_{\mu\lambda})$, Γ_{λ} en $\tilde{\Gamma}_{\lambda}$ $(\equiv -\Gamma_{\lambda})$ en permutant simultanément les indices α et β. On exprime cette propriété en disant que les équations du champ sont invariantes par transposition (A. Einstein [10]).

2° *Le cas* B : Dans le cas B, nous avons

$$Q_{\alpha\beta} = \tilde{Q}_{\alpha\beta}, \qquad \tilde{W}_{\beta\alpha} = W_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta},$$

$$D_{\rho} \overset{\alpha\beta}{\mathcal{G}}_{+-} = D_{\rho} \overset{\beta\alpha}{\tilde{\mathcal{G}}}_{-+}, \qquad \mathcal{F}^{\alpha} = \partial_{\rho} \overset{\alpha\rho}{\mathcal{G}}_{\vee} = -\partial_{\rho} \overset{\alpha\rho}{\tilde{\mathcal{G}}}_{\vee} = -\tilde{\mathcal{F}}^{\alpha}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\beta\alpha} + r\tilde{Q}_{\beta\alpha} = {} & W_{\alpha\beta} + rQ_{\alpha\beta} + (1 - 2r)\, Q_{\alpha\beta} \\ & - \frac{2}{3} \delta^{\beta}_{\rho} \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha} + \frac{2}{3} r\left(\delta^{\beta}_{\rho} \tilde{\mathcal{F}}^{\alpha} + \delta^{\alpha}_{\rho} \tilde{\mathcal{F}}^{\beta}\right) \\ = {} & - \frac{2}{3} \delta^{\alpha}_{\rho} \mathcal{F}^{\beta} + \frac{2}{3} r\left(\delta^{\alpha}_{\rho} \mathcal{F}^{\beta} + \delta^{\beta}_{\rho} \mathcal{F}^{\alpha}\right) + \frac{2}{3}(1 - 2r)\left(\delta^{\alpha}_{\rho} \mathcal{F}^{\beta} + \delta^{\beta}_{\rho} \mathcal{F}^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

On déduit que les équations du champ du cas B sont invariantes par transposition si et seulement si

$$r = \frac{1}{2}. \tag{18.1}$$

Nous donnons au paragraphe 41 une interprétation physique de cette invariance.

CHAPITRE III.

LE PROBLÈME DE CAUCHY DES ÉQUATIONS DE CHAMP.

19. **Introduction.** — Le problème de Cauchy a été étudié en détails dans le cas A par A. Lichnerowicz [2] et F. Maurer-Tison [16]. Les équations de champ possèdent trois variétés caractéristiques. L. Bouche a étudié le même problème dans le cas $r = s = 0$, p, q quelconques. Elle a démontré l'existence de quatre variétés caractéristiques des équations de champ dont les trois premières sont identiques à celles du cas A. Cependant, elle n'a pas réussi à expliciter les équations définissant la quatrième variété [4].

Nous poursuivons ce travail en nous plaçant dans le cas B.

La méthode suivie est due à A. Lichnerowicz. Les théorèmes établis par A. Lichnerowicz sont énoncés sans démonstration quand ils s'appliquent sans changement au cas B.

Rappelons d'abord les équations du cas B :

$$D_\rho \overset{\alpha\beta}{\mathcal{G}_{+-}} = -\frac{2}{3}\delta^\alpha_\rho \mathfrak{F}^\beta + \frac{2}{3} r\left(\delta^\alpha_\rho \mathfrak{F}^\beta + \delta^\beta_\rho \mathfrak{F}^\alpha\right), \tag{19.1}$$

$$H_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + r Q_{\alpha\beta} = 0 \tag{19.2}$$

et les identités de conservation

$$\partial_\lambda \mathcal{K}_\rho{}^\lambda + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta}\, \partial_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} = 0, \tag{19.3}$$

avec

$$\mathcal{K}_\rho{}^\lambda = \frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{\lambda\alpha} H_{\rho\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha\lambda} H_{\alpha\rho}\right) - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}. \tag{19.4}$$

Contractons (19.1) par $g_{\alpha\beta}$, on obtient

$$\partial_\rho \log\sqrt{-g} - L^\sigma_{\underline{\rho\sigma}} = \frac{2r-1}{3}\gamma_{\rho\lambda} f^\lambda - \frac{1}{3}\varphi_{\rho\lambda} f^\lambda. \tag{19.5}$$

20. **Énoncé du problème.** — *Étant donné sur une hypersurface* S *les composantes du tenseur fondamental ainsi que leurs dérivées premières, déterminer au voisinage de* S *le tenseur fondamental supposé satisfaire aux équations* (19.2).

Nous supposons S représenté localement par l'équation

$$x^0 = 0 \tag{20.1}$$

et satisfaisant à la condition

$$g^{00} \neq 0. \tag{20.2}$$

Cette condition veut dire que S n'est pas tangent en chaque point x au cône Γ_x d'équation

$$h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0. \tag{20.3}$$

21. **Recherche des données de Cauchy.** — A. Lichnerowicz démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Au voisinage d'une hypersurface* S, *représentée localement par* $x^0 = 0$ *et telle que* $g^{00} \neq 0$, *la connaissance des quantités* g_{ij}, $\mathcal{G}^{\overset{i0}{\vee}}$, $\mathcal{G}^{\overset{0\lambda}{\vee}}$ *est équivalente à celle des composantes du tenseur* $g_{\alpha\beta}$.

Nous prendrons donc comme données de Cauchy sur S les quantités

$$g_{ij}, \quad \mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}, \quad \mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}, \quad \partial_0 g_{ij}, \quad \partial_0 \mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}, \quad \partial_0 \mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}. \tag{21.1}$$

22. **Un théorème sur les changements de coordonnées à la traversée de** S. — Le théorème suivant est dû à A. Lichnerowicz :

THÉORÈME 2. — *Le changement de coordonnées*

$$x^{\lambda'} = x^\lambda + \frac{(x^0)^3}{3!}\left[\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^\lambda\right] \qquad (\lambda = \lambda' \text{ numériquement}), \tag{22.1}$$

ou ε^λ *tend vers zéro quand* x^0 *tend vers zéro :*

1° *conserve les valeurs numériques des coordonnées de tout point de* S;

2° *conserve les données de Cauchy sur* S;

3° *conserve les valeurs numériques sur* S *des quantités* $\partial_{00} g_{ij}$, $\partial_{00}\, \mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}$;

4° *permet de donner aux quantités* $\partial_{00}\, \mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}$ *des valeurs arbitraires sur* S.

Pour toute solution de (19.1), $H_{\alpha\beta}$ n'est fonction que de g_{ij}, $\mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}$, $\mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}$ et de leurs dérivées premières et secondes (§ 19). Ce tenseur est évidemment invariant par rapport au changement de coordonnées (22.1). Or ce changement de coordonnées permet de donner à $\partial_{00}\mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}$ des valeurs arbitraires. On déduit le

COROLLAIRE. — *Pour toute connexion* $L^{\rho}_{\lambda\mu}$, *solution de* (19.1), $H_{\alpha\beta}$ *ne fait intervenir comme dérivées d'indice* 2 [1] *que les dérivées*

$$\partial_{00} g_{ij}, \quad \partial_{00} \mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}$$

à l'exclusion des dérivées $\partial_{00}\mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}$.

23. **Décomposition du problème de l'intégration des équations de champ.** — Tout comme dans le cas A, les équations du champ du cas B forment un système en involution au sens d'Élie Cartan. Elles se divisent en deux groupes, soient (I) et (II) (théorème 3). (II) ne fait intervenir que les données de Cauchy sur S et les quantités directement calculables à partir des données de Cauchy sur S par calculs algébriques ou dérivations sur S (théorème 4). (II) constitue donc les conditions que doivent satisfaire les données de Cauchy sur S. Nous démontrons que toute solution de (I) vérifiant (II) sur S vérifie aussi (II) au voisinage de S. (théorème 5).

THÉORÈME 3. — *Le système* (19.2) *est équivalent aux deux systèmes suivants :*

$$\text{(I)} \qquad H_{\underline{ij}} = 0, \qquad H_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0;$$

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{K}_{\rho}{}^{0} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{G}^{0\lambda}H_{\rho\lambda} + g^{\lambda 0}H_{\lambda\rho}) - \frac{1}{2}\delta^{0}_{\rho}\mathcal{G}^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta} = 0.$$

En effet, (I) et (II) sont équivalents à (I) et

$$\text{(II)}' \qquad \mathcal{K}_{0}{}^{0} = \mathcal{G}^{00}H_{00} = 0, \qquad \mathcal{K}_{i}{}^{0} = \mathcal{G}^{00}H_{\underline{0i}} = 0.$$

Si (19.2) est vérifié, il est clair que (I) et (II) sont satisfaits. Inversement, si (I) et (II), donc (I) et (II)′ sont satisfaits, on déduit de (II)′ ($g^{00} \neq 0$)

$$H_{00} = 0 \qquad H_{\underline{0i}} = 0.$$

Ces équations, jointes à (I), sont équivalentes à (19.2).

THÉORÈME 4. — *Les quantités* $\mathcal{K}_{\rho}{}^{0}$ *ne sont fonctions que des quantités*

$$g_{ij}, \quad \mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}, \quad \mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}, \quad \partial_0 g_{ij}, \quad \partial_0\mathcal{G}^{\overset{0i}{\vee}}, \quad \partial_0\mathcal{G}^{\underline{0\lambda}}$$

et de leurs dérivées par rapport à x^k.

---

[1] Nous appelons indice d'une dérivée par rapport aux cordonnées locales auxquelles S se frouve rapportée le nombre de fois que l'indice zéro y figure.

En effet, d'après (19.3),

$$\partial_0 \mathcal{K}_\rho{}^0 = -\partial_i \mathcal{K}_\rho{}^i - \frac{1}{2} \mathrm{H}_{\alpha\beta}\, \partial_\rho \mathfrak{G}^{\alpha\beta}.$$

Le deuxième membre ne comporte pas les quantités

$$\partial_{000} g_{ij}, \quad \partial_{000} \mathfrak{G}^{\overset{i0}{\vee}}, \quad \partial_{000} \mathfrak{G}^{\underline{0\lambda}},$$

donc

$$\frac{\partial \mathcal{K}_\rho{}^0}{\partial(\partial_{00} g_{ij})} = \frac{\partial \mathcal{K}_\rho{}^0}{\partial\left(\partial_{00} \mathfrak{G}^{\overset{i0}{\vee}}\right)} = \frac{\partial \mathcal{K}_\rho{}^0}{\partial\left(\partial_{00} \mathfrak{G}^{\underline{0\lambda}}\right)} = 0,$$

d'où le théorème.

THÉORÈME 5. — *Toute solution de* (I), *satisfaisant à* (II) *sur* S, *satisfait aussi à* (II) *au voisinage de* S.

En effet, si (I) est supposé vérifié, (19.3) devient

$$(23.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\partial_0 \mathcal{K}_0{}^0 + \partial_i \mathcal{K}_0{}^i + \mathrm{H}_{\underline{0i}}\, \partial_0 \mathfrak{G}^{\underline{0i}} + \frac{1}{2} \mathrm{H}_{00}\, \partial_0 \mathfrak{G}^{00} = 0, \\ &\partial_0 \mathcal{K}_j{}^0 + \partial_i \mathcal{K}_j{}^i + \mathrm{H}_{\underline{0i}}\, \partial_0 \mathfrak{G}^{\underline{0i}} + \frac{1}{2} \mathrm{H}_{00}\, \partial_j \mathfrak{G}^{00} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathcal{K}_0{}^i = \mathfrak{G}^{0i}\, \mathrm{H}_{00} + \mathfrak{G}^{\underline{is}} \mathrm{H}_{\underline{0s}}, \qquad \mathcal{K}_i{}^j = \mathfrak{G}^{\underline{j0}} \mathrm{H}_{\underline{i0}} - \frac{1}{2} \delta_i^j \left(\mathfrak{G}^{00}\, \mathrm{H}_{00} + 2 \mathfrak{G}^{\underline{s0}} \mathrm{H}_{\underline{s0}} \right),$$

$$\mathcal{K}_0{}^0 = \mathfrak{G}^{00}\, \mathrm{H}_{00}, \qquad \mathcal{K}_i{}^0 = \mathfrak{G}^{00}\, \mathrm{H}_{\underline{i0}}.$$

Des deux dernières équations, on déduit les valeurs de H_{00} et $\mathrm{H}_{\underline{i0}}$ en fonction de $\mathcal{K}_0{}^0$ et $\mathcal{K}_i{}^0$, ce qui permet d'écrire (23.1) sous la forme

$$\partial_0 \mathcal{K}_\rho{}^0 = \mathrm{A}_\rho^{i\lambda}\, \partial_i \mathcal{K}_\lambda{}^0 + \mathrm{B}_\rho^\lambda \mathcal{K}_\rho{}^0;$$

ce système est linèaire, homogène, du premier ordre en $\mathcal{K}_\rho{}^0$, résoluble par rapport à $\partial_0 \mathcal{K}_\rho{}^0$. Il n'admet, pour les données initiales sur S

$$(\mathcal{K}_\rho{}^0)_{\mathrm{S}} = 0$$

que la solution nulle

$$\mathcal{K}_\rho{}^0 = 0.$$

Le problème de l'intégration locale des équations de champ se décompose en deux problèmes distincts :

a. Recherche des données de Cauchy satisfaisant à (II) sur S;

b. Intégration de (I) pour les données de Cauchy satisfaisant à (II) sur S.

24. **Calculs des dérivées d'indice 2 sur** S. — Supposons maintenant les données de Cauchy satisfaisant à (II) sur S. Utilisons la notation de congruence $\sim$ modulo des termes fonctions des données de Cauchy et des quantités calculables à partir des données de Cauchy par calculs algébriques ou dérivations sur S. Le système (I) s'écrit

$$\partial_0 L^0_{ij} \sim 0, \tag{24.1}$$

$$\partial_0 \underset{\vee}{L^0_{i0}} + \left(r - \frac{1}{2}\right) \partial_0 L^{\alpha}_{i\alpha} \sim 0. \tag{24.2}$$

Comme les $H_{\alpha\beta}$ sont linéaires par rapport aux dérivées secondes de $g_{\alpha\beta}$, on a donc, compte tenu du corollaire du théorème 2,

$$\partial_0 L^0_{ij} \sim A^{rs}_{ij}\, \partial_{00} g_{rs} + B_{ijk}\, \partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{k0}} \sim 0, \tag{24.3}$$

$$\partial_0 \underset{\vee}{L^0_{i0}} + \left(r - \frac{1}{2}\right) \partial_0 L^{\alpha}_{i\alpha} \sim C^{rs}_{i}\, \partial_{00} g_{rs} + D_{ik}\, \partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{k0}} \sim 0. \tag{24.4}$$

Nous montrons que ces équations permettent de calculer $\partial_{00} g_{ij}$ et $\partial_{00} g^{\underset{\vee}{i0}}$ en fonction des données de Cauchy, sauf dans certains cas que nous expliciterons.

1° *Calcul de* $\partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}}$. — Le système (24.4) est linéaire en $\partial_0\, \underset{\vee}{L^0_{i0}}$ et $\partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}}$ d'après (19.5). Nous allons établir une deuxième relation linéaire reliant ces quantités, ce qui permet de calculer $\partial_{00}\, \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}}$.

Désignons par $(19.1)_0$ l'équation obtenue à partir de (19.1) par dérivation en x^0. Écrivons $(19.1)_0$ pour $\alpha = i$, $\beta = 0$, $\rho = 0$, puis pour $\alpha = 0$, $\beta = i$, $\rho = 0$. On déduit, par soustraction

$$2\partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}} \sim -\partial_0 L^i_{\lambda 0} \mathcal{G}^{\lambda 0} - \partial_0 L^0_{0\lambda} \mathcal{G}^{i\lambda} + \partial_0 L^0_{\lambda 0} \mathcal{G}^{\lambda i} + \partial_0 L^i_{0\lambda} \mathcal{G}^{0\lambda} + \frac{2}{3} \partial_0 \mathcal{F}^i + 2\, \partial_0 L^{\lambda}_{0\lambda} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}},$$

soit

$$\frac{4}{3} \partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}} \sim 2\, \partial_0 L^s_{\underline{0s}} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}} + (\partial_0 L^i_{0h} \mathcal{G}^{0h} - \partial_0 L^i_{h0} \mathcal{G}^{h0}) + 2\, \partial_0 \underset{\vee}{L^0_{h0}} \mathcal{G}^{\underline{hi}} + 2\, \partial_0 L^0_{\underline{h0}} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{hi}}. \tag{24.5}$$

Cherchons maintenant à calculer

$$\partial_0 L^s_{\underline{0s}}, \quad \partial_0 L^i_{0h} \mathcal{G}^{0h} - \partial_0 L^i_{h0} \mathcal{G}^{h0}, \quad \partial_0 L^0_{\underline{h0}}$$

en fonction de

$$\partial_{00} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i0}}, \quad \partial_0 \underset{\vee}{L^0_{i0}}, \quad \partial_0 L^0_{ij}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation T pour désigner les termes linéaires en $\partial_0 L^0_{ij}$.

De $(19.1)_0$, calculons $\partial_{0k}\,\mathcal{G}^{0i}$ et $\partial_{0k}\,\mathcal{G}^{i0}$ en donnant à α, β, ρ des valeurs o, i, k, et i, o, k respectivement. Faisons ensuite la combinaison

$$-\mathcal{G}^{k0}\,\partial_{0k}\mathcal{G}^{0i}+\mathcal{G}^{0k}\,\partial_{0k}\mathcal{G}^{i0},$$

il vient

$$\mathcal{G}^{0h}\,\partial_0 L^i_{0h}-\mathcal{G}^{h0}\,\partial_0 L^i_{h0}=\partial_0 L^s_{\underline{hs}}\,\frac{\mathcal{G}^{i0}\mathcal{G}^{0h}-\mathcal{G}^{0i}\mathcal{G}^{h0}}{\mathcal{G}^{00}}-\partial_0 L^0_{\underset{\vee}{h0}}\,\frac{\mathcal{G}^{i0}\mathcal{G}^{0h}+\mathcal{G}^{0i}\mathcal{G}^{h0}}{\mathcal{G}^{00}}+T^i.$$

D'après $(19.1)_0$,

$$\partial_0 L^0_{\underline{0h}}\sim\partial_0 L^s_{\underline{hs}}+T_h.$$

Or, par dérivation de (19.5) en x^0, on déduit

$$\partial_0 L^\sigma_{\underline{k\sigma}}\sim-\frac{2r-1}{3}\,\frac{\gamma_{ks}\,\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}}+\frac{1}{3}\,\varphi^{ks}\,\frac{\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}},$$

d'où

$$(24.6)\qquad \partial_0 L^0_{\underline{k0}}\sim\partial_0 L^s_{\underline{ks}}\sim\frac{1-2r}{6}\,\gamma_{ks}\,\frac{\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}}+\frac{1}{6}\,\varphi_{ks}\,\frac{\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}}.$$

Enfin, $(19.1)_0$, pour $\alpha=0$, $\beta=j$, $\rho=j$, donne

$$\partial_0 L^s_{\underline{0s}}\sim T.$$

Portons enfin les résultats dans (24.5), on obtient

$$(24.7)\qquad \left(\mathcal{G}^{\underline{hi}}-\frac{\mathcal{G}^{i0}\mathcal{G}^{0h}+\mathcal{G}^{0i}\mathcal{G}^{h0}}{2\mathcal{G}^{00}}\right)\partial_0 L^0_{\underset{\vee}{h0}}+\left(\mathcal{G}^{\overset{hi}{\vee}}+\frac{\mathcal{G}^{i0}\mathcal{G}^{0h}-\mathcal{G}^{0i}\mathcal{G}^{h0}}{2\mathcal{G}^{00}}\right)$$
$$\times\left(\frac{1-2r}{6}\,\gamma_{hs}+\frac{1}{6}\,\varphi_{hs}\right)\frac{\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}}-\frac{2}{3}\,\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{i0}{\vee}}\sim T^i.$$

D'autre part, (24.6) et (24.2) conduisent à

$$(24.8)\qquad \partial_0 L^0_{\underset{\vee}{i0}}+(2r-1)\left(\frac{1-2r}{6}\,\gamma_{is}+\frac{1}{6}\,\varphi_{is}\right)\frac{\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{s0}{\vee}}}{\sqrt{-g}}\sim 0.$$

Des équations (24.7) et (24.8) on obtient, par élimination de $\partial_0 L^0_{\underset{\vee}{i0}}$,

$$(24.9)\qquad B^i{}_k\,\partial_{00}\mathcal{G}^{\overset{k0}{\vee}}\sim T^i.$$

avec

$$B^i{}_k=\left[(2r-1)\left(g^{\underline{hi}}-\frac{g^{i0}g^{0h}+g^{0i}g^{h0}}{2g^{00}}\right)+g^{\overset{ih}{\vee}}-\frac{g^{i0}g^{0h}-g^{0i}g^{h0}}{2g^{00}}\right]$$
$$\times[(2r-1)\,\gamma_{hk}-\varphi_{hk}]-4\,\delta^i_k.$$

Le calcul de $\partial_{00}\mathfrak{g}^{\overset{k0}{\vee}}$ est donc possible si

$$\det(B^i{}_k) \neq 0.$$

Si $r = 0$, on retrouve les résultats de L. Bouche.

Il est facile d'évaluer la valeur du det $(B^i{}_k)$. Les détails des calculs sont exposés dans l'Appendice (p. 355). On trouve

$$\det(B^i{}_k) = 27\varepsilon\left(\frac{gg^{00} - (1+\varepsilon)\gamma\gamma^{00}}{gg^{00}}\right)^2 \qquad \left[\varepsilon = -1 + \frac{4}{3}r(r-1)\right].$$

Ce déterminant est nul si

$$(24.10) \qquad \varepsilon = 0 \quad \text{ou si} \quad gg^{00} - (1+\varepsilon)\gamma\gamma^{00} = 0.$$

2° *Calcul de* $\partial_{00}g_{ij}$. — Si $\det(B^i{}_k) \neq 0$, on obtient par inversion de (24.9) les valeurs de $\partial_{00}\mathfrak{g}^{\overset{k0}{\vee}}$. Le calcul de $\partial_{00}g_{ij}$ s'effectue alors exactement comme dans le cas A. Il existe une solution unique, sauf dans les circonstances suivantes :

$$(24.11) \qquad g^{00} = 0, \quad \gamma^{00} = 0, \quad 2\gamma\gamma^{00} - gg^{00} = 0.$$

25. **Intégration des équations de champ. Les variétés caractéristiques.** — Supposons que sur une hypersurface S ($x_0 = 0$) telle, que (24.10) et (24.11) ne soient pas satisfaites, les données de Cauchy vérifient le système (II). D'après le théorème 5, toute solution de (I) vérifiant (II) sur S vérifie aussi (II) au voisinage de S. On peut calculer sur S les dérivées secondes de $g_{\alpha\beta}$. Les dérivées $\partial_{00}\mathfrak{g}^{\overset{i0}{\vee}}$, $\partial_{00}g_{ij}$ ont des valeurs bien déterminées. Aucune équation ne contient les $\partial_{00}\mathfrak{g}^{\underline{0\lambda}}$ qui peuvent avoir des valeurs quelconques. Ces dérivées peuvent être discontinues à la traversée de S, mais ces discontinuités peuvent toujours être annulées par un changement de coordonnées du type (22.1).

A cette réserve près, le problème de Cauchy admet donc, tout au moins dans le cas analytique, une solution unique, à un changement de coordonnées admissibles près.

La situation est totalement différente dans l'un ou l'autre des cas suivants :

$$\varepsilon = 0, \qquad \gamma^{00} = 0, \qquad h^{00} = 0,$$
$$2\gamma\gamma^{00} - gg^{00} = 0, \qquad (1+\varepsilon)\gamma\gamma^{00} - gg^{00} = 0.$$

Le calcul des dérivées secondes est ou impossible ou indéterminé.

Si $\varepsilon = 0$, le système des équations de champ est sous-déterminé.

Si $\varepsilon \neq 0$, les équations du cas B possèdent quatre variétés caractéristiques, à savoir :

a. $\gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$; *b*. $h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$;

c. $(2\gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta})\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$; *d*. $[(1+\varepsilon)\,\gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}]\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$.

Pour obtenir l'équation *d*, il suffit d'inverser la matrice

$$b^{\alpha\beta} = (1+\varepsilon)\,\frac{\gamma}{g}\,\gamma^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}.$$

On obtient, par un calcul simple,

$$b_{\alpha\beta} = \mathrm{A}\,[(1+\varepsilon)\,\gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}],$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{\gamma}{g}\,\varepsilon^2 - \left(1 - \frac{\gamma + \varphi}{g}\right)\varepsilon + \frac{\varphi}{g},$$

avec, bien entendu, la condition

$$\frac{\gamma}{g}\,\varepsilon^2 - \left(1 - \frac{\gamma+\varphi}{g}\right)\varepsilon + \frac{\varphi}{g} \neq 0.$$

La variation de ε en fonction de r peut être représentée par une parabole. A toute valeur de $\varepsilon \geqq -\frac{4}{3}$ correspondent deux valeurs de r. Les valeurs de r égales à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ conduisant à $\varepsilon = 0$ doivent être exclues.

Pour $r = 0$ ou $r = 1$, *d* redonne *b*.

Pour $r = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$, *d* redonne *c*.

On peut dire que *d* tend vers *a* lorsque $\varepsilon \to \infty$, c'est-à-dire lorsque $r \to \pm\infty$.

L'axe de symétrie de la parabole correspond à $r = \frac{1}{2}\cdot$ Il est intéressant de remarquer que c'est la seule valeur de r pour laquelle les équations de champ sont invariantes par transposition (*voir* § 18).

CHAPITRE IV.

LES CHAMPS UNITAIRES STATIONNAIRES PARTOUT RÉGULIERS.

26. **Introduction.** — L'étude des espaces-temps stationnaires partout réguliers a été faite par A. Lichnerowicz en Relativité générale [2]. Quand on veut appliquer la méthode de calcul à la théorie unitaire d'Einstein-Schrödinger, on constate que les difficultés sont multiples : on ne sait pas quels sont les tenseurs qui doivent jouer les rôles de

métrique et de champ électromagnétique. On peut choisir $\gamma_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ ou toute combinaison linéaire de ces tenseurs pour définir les notions de longueur, d'orthogonalité, d'orientation dans l'espace et dans le temps, d'espace-temps complet et de comportement asymptotique euclidien. La méthode du repère mobile est difficilement adaptable à un espace purement affiné. Les calculs directs sont presque inextricables. Même en se plaçant dans le cas très restrictif où l'on suppose l'existence globale d'un système de coordonnées dans lequel

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \gamma_{0i} = 0, \qquad \varphi_{0i} = 0,$$

on ne peut démontrer les théorèmes de régularité d'A. Lichnerowicz (M. Lenoir [14]).

Nous sommes obligé de nous placer dans le cas ou l'hypothèse suivante est vérifiée : les $g_{\alpha\beta}$ sont développables en série convergente en fonction d'un paramètre λ. Il est alors possible d'adopter un processus de démonstration par récurrence. Cette hypothèse est certes très restrictive, mais les résultats obtenus permettent de dégager certaines propriétés des équations de champ, propriétés qui sont intéressantes au point de vue physique.

27. **Hypothèses stationnaires et de développements en série.** — Nous considérons le champ $g_{\alpha\beta}$ comme donné sur un espace-temps V^4 doué d'une structure de variété (improprement) riemannienne de métrique hyperbolique

$$d\sigma^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{27.1}$$

1° Suivant A. Lichnerowicz [2], nous dirons que le champ $g_{\alpha\beta}$ est stationnaire sur V^4 s'il existe globalement sur V^4 un groupe connexe transitif G à un paramètre de transformations infinitésimales satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a. Les trajectoires Z du groupe sont intérieures aux cônes caractéristiques des équations de champ;

b. Les trajectoires Z sont homéomorphes à la droite R;

c. On peut trouver une variété différentiable V^3, à trois dimensions, de classe C^2, C^4 par morceaux telle qu'il existe un homéomorphisme de V^4 sur le produit topologique $V^3 \times R$ dans lequel Z s'applique sur les droites facteurs.

V^3 sera dit l'espace-quotient ou l'espace;

d. Le groupe G laisse invariants les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et Γ_α.

Nous savons qu'il existe, dans ce cas, un système de coordonnées locales adaptées x^α défini à la transformation suivante près :

$$x^i \to x^{i'} = \psi^{i'}(x^j), \qquad x^0 \to x^{0'} = x^0 + \psi(x^j) \tag{27.2}$$

tel que, dans ce système :

a. le vecteur ξ^α engendrant le groupe G admet les composantes

$$\xi^0 = 1, \qquad \xi^i = 0;$$

b. les composantes de $g_{\alpha\beta}$ et de Γ_α sont indépendantes de x^0

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0, \qquad \partial_0 \Gamma_\alpha = 0. \tag{27.3}$$

Les variétés W^3 (dites sections d'espace), définies par $x^0 =$ Cte, sont homéomorphes à V^3.

Nous douons les variétés V^3 et W^3 de la même métrique

$$d\bar{\sigma}^2 = \left(\eta_{ij} - \frac{\eta_{0i}\eta_{0j}}{\eta_{00}}\right) dx^i\, dx^j. \tag{27.4}$$

2° Nous supposons que les $g_{\alpha\beta}$ et Γ_α admettent des développements en séries convergentes de la forme

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sum_1^\infty \lambda^p \underset{p}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \Gamma_\alpha = \sum_1^\infty \lambda^p \underset{p}{\Gamma}_\alpha; \tag{27.5}$$

(27.3) entraîne

$$\partial_0 \eta_{\alpha\beta} = 0, \qquad \partial_0 \underset{p}{g}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \partial_0 \underset{p}{\Gamma}_{\alpha\beta} = 0.$$

28. **Propositions préliminaires.** — Nous allons analyser les équations de champ dans les cas A et B et établit deux propositions presque évidentes.

1° Proposition 1. — *Tout champ $g_{\alpha\beta}$ tel que $\nabla_\lambda \varphi_{\alpha\beta} = 0$ est purement gravitationnel.*

Nous entendons par champ purement gravitationnel tout champ $g_{\alpha\beta}$ tel que

$$L^\lambda_{\alpha\beta} = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} \qquad \text{et} \qquad G_{\alpha\beta} = 0.$$

a. Dans le cas A, on déduit de (16.2)

$$\gamma_{\rho\lambda} u^\lambda_{\alpha\beta} = \underset{\vee}{L}^\sigma_{\alpha\rho} \varphi_{\sigma\beta} + \underset{\vee}{L}^\sigma_{\beta\rho} \varphi_{\sigma\alpha},$$

$$\gamma_{\rho\lambda} \underset{\vee}{L}^\lambda_{\alpha\beta} = \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \varphi_{\alpha\beta\rho} - \left(u^\sigma_{\alpha\rho} \varphi_{\sigma\beta} - u^\sigma_{\beta\rho} \varphi_{\sigma\alpha}\right).$$

Si $\nabla_\lambda \varphi_{\alpha\beta} = 0$, on obtient pour $\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\alpha\beta}$ et $u^{\lambda}_{\alpha\beta}$ un système de Cramer homogène à solution unique. Donc

$$\underset{\vee}{L}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0, \qquad u^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0, \qquad L^{\lambda}_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\};$$

(16.4) donne

$$p(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0, \qquad G_{\alpha\beta} = 0.$$

b. Dans le cas B, si $\nabla_\lambda \varphi_{\alpha\beta} = 0$, on a $A_\rho = B_\rho = C_\rho = 0$ (*voir* § 11), et l'on est ramené au cas A, avec $\Gamma_\alpha = 0$.

2° Introduisons maintenant dans les équations de champ les développements (27.5). On a d'abord

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = \lambda \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \\ 1 \end{matrix} \right\} + \lambda^2 \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \\ 2 \end{matrix} \right\} + \dots,$$

avec

$$(28.1) \qquad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\sigma} \left(\mathring{\nabla}_\alpha \underset{1}{\gamma}_{\sigma\beta} + \mathring{\nabla}_\beta \underset{1}{\gamma}_{\sigma\alpha} - \mathring{\nabla}_\sigma \underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} \right),$$

$\mathring{\nabla}_\alpha$ désigne la dérivée covariante riemannienne dans la métrique $d\sigma^2$. Posons

$$\mathring{\Box} = \eta^{\alpha\beta} \mathring{\nabla}_\alpha \mathring{\nabla}_\beta.$$

a. Les équations du cas A s'écrivent en première approximation

$$(28.2) \qquad \underset{1}{W}_{\underline{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} \mathring{\Box} \underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\mathring{\nabla}_\alpha \underset{1}{h}_\beta + \mathring{\nabla}_\beta \underset{1}{h}_\alpha \right) = 0$$

$$(28.3) \qquad \underset{1}{W}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \mathring{\Box} \underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta} = -p\left(\partial_\alpha \underset{1}{\Gamma}_\beta - \partial_\beta \underset{1}{\Gamma}_\alpha \right) \qquad \left(\eta^{\alpha\beta} \mathring{\nabla}_\alpha \underset{1}{\Gamma}_\beta = 0 \right),$$

$$(28.4) \qquad \underset{1}{f}_\sigma = \eta^{\rho\lambda} \mathring{\nabla}_\lambda \underset{1}{\varphi}_{\sigma\rho} = 0$$

avec

$$\underset{1}{h}_\alpha = \mathring{\nabla}_\rho \underset{1}{\gamma}_\alpha{}^\rho - \frac{1}{2} \mathring{\nabla}_\alpha \underset{1}{\gamma}_\rho{}^\rho \qquad \left(\underset{1}{\gamma}_\rho{}^\rho = \eta^{\rho\sigma} \underset{1}{\gamma}_{\rho\sigma} \right).$$

Si $\underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ est une solution des équations de champ, alors

$$\underset{1}{\gamma}'_{\alpha\beta} = \underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} + \mathring{\nabla}_\alpha \underset{1}{k}_\beta + \mathring{\nabla}_\beta \underset{1}{k}_\alpha \qquad (\underset{1}{k}_\alpha \text{ est un vecteur quelconque})$$

en est aussi une. On peut donc toujours imposer au choix de solution de (28.2) la condition

$$(28.6) \qquad \underset{1}{h}_\alpha = 0,$$

ce qui simplifie (28.2) en

$$(28.7) \qquad \mathring{\Box} \underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} = 0,$$

(28.5) est la transformation de jauge gravitationnelle, mise en évidence par A. Lichnerowicz.

b. Dans le cas B, $\underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ vérifie aussi les équations (28.6) et (28.7) tandis que $\underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta}$ vérifie le système

$$(28.8)\qquad \underset{1}{W}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + r\underset{1}{Q}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\square}\underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta} + \frac{1+\varepsilon}{2}\left(\partial_\alpha \underset{1}{f}_\beta - \partial_\beta \underset{1}{f}_\alpha\right) = 0.$$

On déduit, par dérivation contractée,

$$\varepsilon\overset{\circ}{\square}\underset{1}{f}_\alpha = 0.$$

Si $\varepsilon \neq 0$, on a donc

$$(28.9)\qquad \overset{\circ}{\square}\underset{1}{f}_\alpha = 0.$$

Si $\varepsilon = 0$, alors si $\underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta}$ est une solution de (28.8),

$$\underset{1}{\varphi'}_{\alpha\beta} = \underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \underset{1}{k}_\beta - \overset{\circ}{\nabla}_\beta \underset{1}{k}_\alpha \qquad \left(\underset{1}{k}_\alpha \text{ est un vecteur quelconque}\right)$$

en est aussi une. On peut donc toujours imposer au choix de solution de (28.8) la condition

$$\underset{1}{f}_\alpha = 0,$$

ce qui simplifie (28.8) en

$$\overset{\circ}{\square}\underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta} = 0.$$

Supposons maintenant que

$$\overset{\circ}{\nabla}_\lambda \underset{1}{g}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla}_\lambda \underset{1}{\Gamma}_\alpha = 0.$$

On vérifie sans difficulté que $\underset{2}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{2}{\Gamma}_\alpha$ vérifient exactement les mêmes équations que les $\underset{1}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{1}{\Gamma}_\alpha$. On déduit, par récurrence, le même résultat pour $\underset{p}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{p}{\Gamma}_\alpha$.

Proposition 2. — Dans les cas A et B, si

$$\overset{\circ}{\nabla}_\lambda \underset{q}{g}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla}_\lambda \underset{q}{\Gamma}_\alpha = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, p-1),$$

alors $\underset{p}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{p}{\Gamma}_\alpha$, vérifient exactement les équations :

(28.6), (28.7), (28.3), (28.4), (cas A);
(28.6), (28.7), (28.8), (cas B).

29. **Théorèmes de Hopf-Bochner-Lichnerowicz.** — Nous rappelons brièvement les théorème de Hopf-Bochner-Lichnerowicz et nous essayons de les appliquer à nos équations (*voir* A. Lichnerowicz [2], p. 126-136).

Considérons une variété riemannienne V^n, munie d'une métrique

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

définie positive, et posons

$$\Delta\Phi = a^{ij} \nabla_i \partial_j \Phi,$$

Φ étant une fonction à valeur scalaire sur V^n. Nous appelons « distance de deux points x_1 et x_2 de V^n » et désignons par $d\,(x_1, x_2)$ la borne inférieure des longueurs des chemins continûment différentiable par morceaux joignant ces deux points.

Nous considérons dans la suite les cas où V^n est compact ou complet. La notion de variété complète étant entendue au sens de la métrique précédente. Si la variété est complète, mais non compacte, elle admet un domaine à l'infini. Nous disons que Φ tend uniformément vers zéro dans le domaine à l'infini de V^n si, a étant un point donné de V^n, à tout nombre $\rho > 0$, on peut associer un nombre $R\,(\rho) > 0$, tel que

$$d(a, x) > R(\rho) \quad \Rightarrow \quad |\,\Phi(x)\,| < \rho.$$

Théorème 1. — *Si une fonction $\Phi(x)$, de classe C^2, bornée sur une variété riemannienne V^n compacte est telle que $\Delta\Phi \geqq 0$, elle se réduit à une constante sur V^n.*

Théorème 2. — *Si une fonction $\Phi\,(x)$, de classe C^2, bornée sur une variété riemannienne complète mais non compacte est telle que $\Delta\Phi \geqq 0$, et tend uniformément vers zéro par valeurs positives dans le domaine de l'infini de V^n, elle est identiquement nulle sur V^n.*

30. **Les champs unitaires stationnaires partout réguliers.** — Revenons à notre espace-temps V^4 et admettons les hypothèses stationnaires du paragraphe 27. L'espace-temps sera dit compact ou complet si W^3 (muni de la métrique $d\bar{\sigma}^2$) est compact ou complet.

Plaçons-nous dans un système de coordonnées locales adaptées. Si l'espace-temps est compact ou complet dans lequel $\eta_{00} \to 1$ dans le domaine à l'infini par valeurs inférieures ou égales-hypothèses que nous admettons — les hypothèses stationnaires du paragraphe 27 et les résultats d'A. Lichnerowicz [2] permettent de conclure que $d\sigma^2$ est statique et $\eta_{00} = 1$. Donc

$$(30.1) \qquad d\sigma^2 = (dx^0)^2 + \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (\partial_0 \eta_{ij} = 0).$$

Les symboles de Christoffel des $\eta_{\alpha\beta}$ ayant un (ou plusieurs) indices égaux à zéro sont nuls, les dérivées $\mathring{\nabla}_0 g_{\alpha\beta}$ sont nulles; les dérivées $\mathring{\nabla}_i g_{jk}$ se réduisent à $\overline{\nabla}_i g_{jk}$ ($\overline{\nabla}$ désigne la dérivée covariante rémannienne dans la métrique $d\bar{\sigma}^2 = \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j$); les dérivées $\mathring{\nabla}_i g_{j0}$ se réduisent à $\mathring{\nabla}_i g_{j0}$ où g_{j0} est considéré comme un vecteur de W^3.

Des équations de champ explicitées au paragraphe 28, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Si W^3 est compact ou si W^3 est complet et si $\underset{p}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{p}{\Gamma}_\alpha$ tendent uniformément vers zéro dans le domaine à l'infini de W^3, alors

$$\mathring{\nabla}_\lambda \underset{1}{g}_{\alpha\beta} = 0, \qquad \mathring{\nabla}_\lambda \underset{1}{\Gamma}_\alpha = 0.$$

La démonstration est immédiate.

Considérons, par exemple, les composantes $\underset{1}{\gamma}_{ij}$. En coordonnées locales adaptées, on a, d'après (28.7),

$$-\eta^{rs}\overline{\nabla}_r \overline{\nabla}_s \underset{1}{\gamma}_{ij} = 0,$$

d'où

$$-\eta^{rs}\overline{\nabla}_r \overline{\nabla}_s \left(\underset{1}{\gamma}^{ij} \underset{1}{\gamma}_{ij}\right) = -2\eta^{rs}\overline{\nabla}_r \underset{1}{\gamma}^{ij}\, \overline{\nabla}_s \gamma_{ij}. \tag{30.2}$$

Les hypersurfaces $x^0 = \mathrm{Cte}$ ne sont pas tangentes aux cônes caractéristiques par hypothèses, les $g_{\alpha\beta}$ sont de classe C^2. La quantité

$$\underset{1}{\gamma}^{ij} \underset{1}{\gamma}_{ij} = \eta^{ik}\eta^{jl} \underset{1}{\gamma}_{ij} \underset{1}{\gamma}_{kl}$$

est de classe C^2. La métrique $-\eta_{rs}\, dx^r\, dx^s$ est définie positive. Le second membre de (30.2) est positif ou nul. On déduit, d'après les théorèmes du paragraphe 29,

$$\overline{\nabla}_r \underset{1}{\gamma}_{ij} = 0,$$

soit

$$\mathring{\nabla}_\lambda \underset{1}{\gamma}_{ij} = 0.$$

On démontre exactement de la même façon pour les autres composantes de $\underset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$, et pour les composantes de $\underset{1}{\varphi}_{\alpha\beta}$ et $\underset{1}{\Gamma}_\alpha$. Des résultats obtenus et en se servant du lemme 2 du paragraphe 28, on peut répéter la même démonstration pour $\underset{2}{g}_{\alpha\beta}$, $\underset{2}{\Gamma}_\alpha$, On obtient donc finalement

$$L^\lambda_{\alpha\beta} = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\mathring{\lambda} \atop \alpha\beta} \right\}.$$

THÉORÈME. — *Tout champ $g_{\alpha\beta}$ développable en série convergente*

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sum_{1}^{\infty} \lambda^p \underset{p}{g_{\alpha\beta}}$$

stationnaire, partout régulier sur un espace-temps V^4 *muni de la métrique* $d\sigma^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ *compact ou complet dans lequel les* $\underset{p}{g_{\alpha\beta}}$ *tendent uniformément vers zéro dans le domaine à l'infini de* V^4 *est nécessairement localement euclidien.*

CHAPITRE V.

L'INTERPRÉTATION PHYSIQUE ET LE PROBLÈME DE MOUVEMENT.

31. **Introduction.**— Revenons aux équations d'Einstein-Maxwell (9.1), (9.2) et aux équations approchées du paragraphe 15. Étant donnée la complexité des seconds membres de (15.3) et (15.5), il ne semble pas qu'il soit possible de définir un « tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ » et un « tenseur électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ » tels que (15.3) et (15.5) puissent se réduire exactement à la forme (9.2).

Cependant, on sait que le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ qui intervient dans (9.2) a été introduit par son expression formelle en Relativité restreinte, où $a_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Nous sommes amenés à substituer à la condition fondamentale du paragraphe 9, la condition plus faible suivante :

Les équations unitaires doivent se réduire aux équations Einstein-Maxwell à l'approximation Einstein-Maxwell et pour un champ $\gamma_{\alpha\beta}$ faible.

Nous nous proposons d'examiner soigneusement dans ce chapitre les interprétations physiques possibles des équations unitaires. Nous examinons d'abord les « interprétations physiques classiques » dans les cas A et B. Nous proposons ensuite une interprétation physique nouvelle et montrons que les équations unitaires, dans les cas A et B, satisfont effectivement la condition fondamentale ci-dessus.

32. **Rappels des équations approchées à l'approximation Einstein-Maxwell. Développemencs limités et hypothèse quasi-statique.** — 1° Écrivons de nouveau les équations approchées déjà explicitées au paragraphe 15.

a. Le cas A : On a

$$\Box \varphi_{\alpha\beta} + \overset{A}{F}_{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\, \varphi_{\rho\sigma} = 0, \tag{32.1}$$

$$f_\rho = 0, \tag{32.2}$$

$$G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} G = \overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{A}{T}_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \tag{32.3}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{A}{F}_{\alpha\beta} = 2p(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha), \qquad \nabla^\alpha \Gamma_\alpha = 0,\\
&\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\lambda}\overset{A}{F}_\beta{}^\lambda + \varphi_{\beta\lambda}\overset{A}{F}_\alpha{}^\lambda\right) + \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma}\overset{A}{F}{}^{\rho\sigma},\\
&\overset{A}{T}_{\alpha\beta} = \nabla^\lambda \varphi_{\alpha\rho}\nabla^\rho \varphi_{\beta\lambda} + \frac{1}{4}\left(\varphi_{\alpha\rho\sigma}\varphi_\beta{}^{\underline{\rho\sigma}} - \frac{1}{6}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma\lambda}\varphi^{\underline{\rho\sigma\lambda}}\right),\\
&I_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(G_{\rho\sigma\alpha}{}^\lambda \varphi_{\beta\lambda} + G_{\rho\sigma\beta}{}^\lambda \varphi_{\alpha\lambda})\varphi^{\underline{\rho\sigma}} + \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta} G^{\rho\sigma\lambda\tau}\varphi_{\rho\sigma}\varphi_{\lambda\tau},\\
&A_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\varphi^{\underline{\rho\sigma}}\varphi_{\rho\sigma}) - \gamma_{\alpha\beta}\square(\varphi^{\underline{\rho\sigma}}\varphi_{\rho\sigma})\right].
\end{aligned}\right. \tag{32.4}$$

b. Le cas B : On a

$$\square\varphi_{\alpha\beta} + (1+\varepsilon)\overset{B}{F}_{\alpha\beta} + G^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma} = 0, \tag{32.5}$$

$$G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} G = \overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{B}{T}_{\alpha\beta} + I_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \tag{32.6}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{B}{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha f_\beta - \partial_\beta f_\alpha, \qquad \varepsilon = -1 + \frac{4}{3}r(r-1),\\
&\overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\varphi_{\alpha\lambda}\overset{B}{F}_\beta{}^\lambda + \varphi_{\alpha\lambda}\overset{B}{F}_\beta{}^\lambda\right) + \frac{1}{4}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma}\overset{B}{F}{}^{\rho\sigma},\\
&\overset{B}{T}_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\left(f_\alpha f_\beta - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} f_\rho f^\rho\right) + f_\alpha f_\beta + (\varphi_{\alpha\lambda}\nabla^\lambda f_\beta + \varphi_{\beta\lambda}\nabla^\lambda f_\alpha)\\
&\qquad + \nabla^\lambda \varphi_{\alpha\rho}\nabla^\rho \varphi_{\beta\lambda} + \frac{1}{4}\left(\varphi_{\alpha\rho\sigma}\varphi_\beta{}^{\underline{\rho\sigma}} - \frac{1}{6}\gamma_{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma\lambda}\varphi^{\underline{\rho\sigma\lambda}}\right),
\end{aligned}\right. \tag{32.7}$$

$I_{\alpha\beta}$ et $A_{\alpha\beta}$ ont mêmes expressions en fonction de $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta}$ que dans le cas A.

2° Dans la suite, nous faisons sur $g_{\alpha\beta}$ et Γ_α les hypothèses de développements limités suivants :

Les $\gamma_{\alpha\beta}$ possèdent des développements limités de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma_{00} = 1 + \sum_{q=1}^{p}\frac{1}{c^{2q}}\underset{2q}{\gamma_{00}} + o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right),\\
&\gamma_{ij} = -\delta_{ij} + \sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q}}\underset{2q}{\gamma_{00}} + o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right),\\
&\gamma_{0i} = \sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q+1}}\underset{2q+1}{\gamma_{0i}} + o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right).
\end{aligned}\right. \tag{32.8}$$

Les $\varphi_{\alpha\beta}$ et les Γ_α possèdent l'un ou l'autre des développements limités suivants :

$$(32.9,a)\quad \begin{cases} \varphi_{0i}=\displaystyle\sum_{q=1}^{p}\frac{1}{c^{2q}}\underset{2q}{\varphi_{0i}}+o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right), & \Gamma_0=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2p}}\underset{2p}{\Gamma_0}+o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right),\\ \varphi_{ij}=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q+1}}\underset{2q+1}{\varphi_{ij}}+o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right), & \Gamma_i=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q+1}}\underset{2q+1}{\Gamma_i}+o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right); \end{cases}$$

$$(32.9,b)\quad \begin{cases} \varphi_{0i}=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q+1}}\underset{2q+1}{\varphi_{0i}}+o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right), & \Gamma_0=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q+1}}\underset{2q+1}{\Gamma_0}+o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right),\\ \varphi_{ij}=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q}}\underset{2q}{\varphi_{ij}}+o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right), & \Gamma_i=\displaystyle\sum_{1}^{p}\frac{1}{c^{2q}}\underset{2q}{\Gamma_0}+o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right). \end{cases}$$

3° Nous supposons les dérivées ∂_0 petites devant les dérivées ∂_i. Plus précisément, posons

$$(32.10)\qquad \partial_0=\frac{1}{c}\underset{1}{\partial_0},$$

les $\underset{1}{\partial_0}$ et ∂_i sont du même ordre de grandeur.

33. **Rappels des équations de la théorie d'Einstein-Maxwell. Développements limités et hypothèse quasi-statique.** — 1° Les équations de la théorie d'Einstein-Maxwell correspondant au schéma extérieur s'écrivent

$$(33.1)\qquad \nabla_\rho F^{\alpha\rho}=0,\qquad \nabla_\rho F_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha F_{\beta\rho}+\nabla_\beta F_{\rho\alpha}=0,$$

$$(33.2)\qquad \overset{a}{S}_{\alpha\beta}=\overset{a}{G}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\overset{a}{G}=\chi\tau_{\alpha\beta}=\chi\left(\frac{1}{4}a_{\alpha\beta}F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}-F_{\alpha\lambda}F_\beta{}^\lambda\right)$$

$a_{\alpha\beta}$ et $F_{\alpha\beta}$ sont respectivement le tenseur métrique et le tenseur champ électromagnétique, $\overset{a}{G}_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci, les indices sont montés et abaissés par $a^{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$.

Désignons par $\overset{\star}{F}_{\alpha\beta}$ le tenseur dual de $F_{\alpha\beta}$ au sens de $a_{\alpha\beta}$

$$(33.3)\qquad \overset{\star}{F}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sqrt{-a}\,\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}F^{\rho\sigma},$$

(33.1) exprime qu'il existe localement deux champs de vecteur φ_α et $\overset{\star}{\varphi}_\alpha$ tels que

$$(33.4)\qquad F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\varphi_\beta-\partial_\beta\varphi_\alpha,\qquad \overset{\star}{F}_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\overset{\star}{\varphi}_\beta-\partial_\beta\overset{\star}{\varphi}_\alpha,$$

φ_α (resp. $\overset{\star}{\varphi}_\alpha$) est appelé vecteur potentiel (resp. vecteur antipotentiel) de Maxwell.

2° Supposons que $a_{\alpha\beta}$ admette les développements (32.8) et les φ_α et φ^*_α les développements suivants :

$$(33.5)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{q=1}^{p} \frac{1}{c^{2q}} \underset{2q}{\varphi_0} + o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right), \\ \varphi_i &= \sum_{1}^{p} \frac{1}{c^{2q+1}} \underset{2q+1}{\varphi_i} + o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right); \end{aligned}\right.$$

$$(33.6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi^*_0 &= \sum_{1}^{p} \frac{1}{c^{2p+1}} \underset{2q+1}{\varphi^*_0} + o\left(\frac{1}{c^{2p+1}}\right), \\ \varphi^*_i &= \sum_{1}^{p} \frac{1}{c^{2p}} \underset{2q}{\varphi^*_i} + o\left(\frac{1}{c^{2p}}\right), \end{aligned}\right.$$

3° Nous supposerons aussi ici que l'hypothèse quasi statique (32.10) est valable.

Dans ces conditions, les équations (33.2) s'écrivent, jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$,

$$(33.7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\underset{2}{S_{00}} = 0, \qquad \underset{2}{S_{ij}} = 0, \qquad \underset{3}{S_{0i}} = 0; \\ &\underset{4}{S_{00}} = \frac{\chi}{2} \underset{2}{\varphi}_{,s} \underset{2}{\varphi}_{,s} \qquad \left(\underset{2}{\varphi} = \underset{2}{\varphi_0}\right), \\ &\underset{4}{S_{ij}} = \chi\left(- \underset{2}{\varphi}_{,i} \underset{2}{\varphi}_{,j} + \frac{1}{2}\delta_{ij} \underset{2}{\varphi}_{,s} \underset{2}{\varphi}_{,s}\right), \end{aligned}\right.$$

$\underset{2}{\varphi}_{,i}$ désigne la dérivée partielle de $\underset{2}{\varphi}$ par rapport à x^i.

Considérons maintenant le cas particulier d'une distribution de N particules chargées, de charge $\overset{P}{e}$, placées aux points $\overset{P}{\xi^i}(t)$ (P = 1, 2, ..., N) et adoptons pour $\underset{2}{\varphi_0}$ et $\underset{3}{\varphi_i}$ les solutions classiques :

$$(33.8)\qquad \underset{2}{\varphi_0} = \underset{2}{\varphi} = \sum_{1}^{N} \frac{\overset{P}{\underset{2}{e}}}{\overset{P}{r}}, \qquad \underset{3}{\varphi_i} = -\sum_{1}^{N} \left(\frac{\overset{P}{\underset{2}{e}}}{\overset{P}{r}}\right) \overset{P}{\dot{\xi}^i},$$

avec

$$\overset{P}{r^2} = \left(x^i - \overset{P}{\xi^i}\right)\left(x^i - \overset{P}{\xi^i}\right), \qquad \overset{P}{\dot{\xi}^i} = \frac{d\overset{P}{\xi^i}}{dt},$$

les potentiels étant calculés aux points X^i.

Dans ces conditions, (33.2) s'écrit à l'ordre 5,

$$(33.9)\qquad \underset{5}{S_{0i}} = \chi \underset{2}{\varphi}_{,s} \left(\overset{P}{\underset{2}{\varphi}}_{,i} \overset{P}{\underset{1}{\dot{\xi}^s}} - \overset{P}{\underset{2}{\varphi}}_{,s} \overset{P}{\underset{1}{\dot{\xi}^i}} \right),$$

où nous avons posé, pour simplifier,

$$\sum_{1}^{N} \overset{P}{\varphi} \overset{P}{\xi^i} = \overset{P}{\varphi} \overset{P}{\xi^i} \tag{33.10}$$

34. **Formule auxiliaire.** — Posons :

$$a_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}, \tag{34.1}$$

$b_{\alpha\beta}$ étant un tenseur symétrique, fonction de $\gamma_{\alpha\beta}$ et de $\varphi_{\alpha\beta}$, du second ordre par rapport à $\varphi_{\alpha\beta}$. Affectons d'indice a (resp. γ) les quantités — connexions ou tenseurs de Ricci — correspondantes à la métrique $a_{\alpha\beta}$ (resp. $\gamma_{\alpha\beta}$).

On a, en se limitant au second ordre en $\varphi_{\alpha\beta}$

$$\left\{\begin{matrix} a \\ \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \gamma \\ \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix}\right\} + \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\sigma}(\nabla_\alpha b_{\beta\sigma} + \nabla_\beta b_{\alpha\sigma} - \nabla_\sigma b_{\alpha\beta}),$$

∇_α désigne la dérivée covariante dans la connexion $\left\{\begin{matrix} \gamma \\ \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix}\right\}$,

$$\overset{a}{S}_{\alpha\beta} = \overset{\gamma}{S}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\lambda(\nabla_\alpha b_{\beta\lambda} + \nabla_\beta b_{\alpha\lambda} - \nabla_\lambda b_{\alpha\beta}) \tag{34.2}$$

$$- \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\nabla^\rho\nabla^\sigma b_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\nabla_\beta b - \gamma_{\alpha\beta}\Box b),$$

avec

$$b = \gamma^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}.$$

En particulier, si

$$b_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\Phi, \tag{34.3}$$

on a

$$\overset{a}{S}_{\alpha\beta} - \overset{\gamma}{S}_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi - \gamma_{\alpha\beta}\Box\Phi). \tag{34.4}$$

Au second membre, on voit apparaître un tenseur ayant la même forme que $A_{\alpha\beta}$ [*voir* (32.4)].

35. **Les interprétations physiques.** — Revenons maintenant aux équations approchées du paragraphe 32. D'après (34.4), le tenseur $A_{\alpha\beta}$ peut être absorbé dans $S_{\alpha\beta}$ par un changement de métrique en métrique conforme.

Le tenseur $I_{\alpha\beta}$ bien qu'ayant la forme d'un tenseur impulsion-énergie de Maxwell, n'intervient pas en première approximation pour un champ $\gamma_{\alpha\beta}$ faible.

Il nous reste dans le cas A (resp. B) deux tenseurs identifiables avec $\tau_{\alpha\beta}$, à savoir $\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta}$ et $\overset{A}{T}_{\alpha\beta}$ $\left(\text{resp. } \overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} \text{ et } \overset{B}{T}_{\alpha\beta}\right)$ (¹).

Nous appellerons interprétations physiques « classiques » celles qui identifient $\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta}\left(\text{ou } \overset{B}{\tau}_{\alpha\beta}\right)$, avec $\tau_{\alpha\beta}$, et interprétations physiques « nouvelles » celles qui identifient $\overset{A}{T}_{\alpha\beta}\left(\text{ou } \overset{B}{T}_{\alpha\beta}\right)$ avec $\tau_{\alpha\beta}$.

36. **Les interprétations physiques classiques.** — *a. Le cas* A : L'identification de $\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta}$ avec $\tau_{\alpha\beta}$ conduit à quatre possibilités d'interprétations : on peut identifier, soit $\varphi_{\alpha\beta}$, soit $\overset{A}{F}_{\alpha\beta}$ avec le tenseur de Maxwell ou bien avec son dual.

Dans le cas A, le groupe d'équations (32.2) est conséquence des équations de liaison et ne saurait admettre des singularités. L'identification de $\varphi_{\alpha\beta}$ ou de $\overset{A}{F}_{\alpha\beta}$ avec $F_{\alpha\beta}$ doit être rejetée. Il nous reste deux possibilités, à savoir :

$$\begin{aligned}\overset{\star}{\varphi}_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha,\\ \overset{\star}{F}_{\alpha\beta} &= F_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

La première interprétation a été proposée par L. Infeld [13] et J. Callaway [7]. Utilisant la méthode des singularités d'Einstein-Infeld-Hoffmann, ces auteurs ont montré que la contribution de $\varphi_{\alpha\beta}$ dans les équations de mouvement est identiquement nulle jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$ inclusivement.

La deuxième interprétation a été proposée par H. Treder [21] et E. Clauser [8]. Adoptant pour $\varphi_{\alpha\beta}$ les développement (32.9, *b*) avec

$$\underset{2}{\varphi}_{ij} = \varepsilon_{ijs}\left[\left(\frac{\overset{\mathrm{I}}{a}}{\overset{\mathrm{I}}{r}} + \overset{\mathrm{I}}{c}\,\overset{\mathrm{I}}{r}\right)_{,s} + \left(\frac{\overset{\mathrm{II}}{a}}{\overset{\mathrm{II}}{r}} + \overset{\mathrm{II}}{c}\,\overset{\mathrm{II}}{r}\right)_{,s}\right] \tag{36.1}$$

pour le cas de deux particules chargées, ils aboutissent à la loi de force suivante, exercée par le champ $\varphi_{\alpha\beta}$ sur la première particule

$$\underset{4}{F}_i = 2\,\frac{\overset{\mathrm{I}}{a}\,\overset{\mathrm{II}}{c} + \overset{\mathrm{II}}{a}\,\overset{\mathrm{I}}{c}}{\rho^3}\,X^i - 2\,\frac{\overset{\mathrm{I}}{c}\,\overset{\mathrm{II}}{c}}{\rho}\,X^i, \tag{36.2}$$

(¹) En fait, c'est la somme $\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{A}{T}_{\alpha\beta}$ $\left(\text{resp. } \overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} + \overset{A}{T}_{\alpha\beta}\right)$ qu'il faut identifier avec $\tau_{\alpha\beta}$. Nous verrons que, dans notre interprétation physique, $\overset{A}{\tau}_{\alpha\beta} = \overset{B}{\tau}_{\alpha\beta} = o\left(\frac{1}{C^5}\right)$ (*voir* § 37 et 38).

les particules étant placées aux points $\overset{\mathrm{I}}{\xi}{}^i$, $\overset{\mathrm{II}}{\xi}{}^i$, et

$$X^i = \overset{\mathrm{I}}{\zeta}{}^i - \overset{\mathrm{II}}{\xi}{}^i, \qquad \rho^2 = X^i X^i.$$

Si l'on choisit les constantes a et c proportionnelles à la charge, on peut interpréter le premier terme de (36.2) comme une force de Coulomb. Mais il intervient en même temps dans les équations de mouvement la force radiale

$$-2\frac{\overset{\mathrm{I}}{c}\overset{\mathrm{II}}{c}}{\rho} X^i$$

de module indépendant de la distance. Au point de vue physique, une force d'interaction de ce type n'a aucune signification. Si l'on choisit $\overset{\mathrm{I}}{c} = \overset{\mathrm{II}}{c} = 0$, on annule en même temps la force de Coulomb et retrouve les résultats d'Infeld et de Callaway, soit

$$\underset{4}{F}_i = 0.$$

b. Le cas B : L'identification de $\overset{\mathrm{B}}{\tau}_{\alpha\beta}$ avec $\tau_{\alpha\beta}$ conduit aux quatre possibilités d'interprétation comme dans le cas A.

Si l'on choisit les développements (32.9, *b*), avec

$$\underset{2}{\varphi}_{ij} = \varepsilon_{ijs} \underset{2}{\Omega}_{,s},$$

on déduit immédiatement $\underset{2}{f}_i = 0$, quel que soit Ω, et retrouve le cas A, avec $\underset{2}{\Gamma}_i = 0$.

Si l'on adopte les développements (32.9, *a*), avec

$$\underset{2}{\varphi}_{i0} = \underset{2}{\Omega}_{,i}$$

on déduit de (32.5)

$$\varepsilon \underset{2}{\Omega}_{,iss} = 0.$$

Alors, ou bien $\varepsilon = 0$, ou bien $\underset{2}{\Omega}_{,ss} = 0$. Dans les deux cas, on retrouve dans le problème de mouvement, les mêmes difficultés du cas A.

37. **Les nouvelles interprétations physiques.** — Les interprétations physiques classiques se heurtent à la difficulté suivante :

Il existe entre champ et induction une relation du type

$$\Box \varphi_{\alpha\beta} = k \overset{\mathrm{A}}{F}_{\alpha\beta} \qquad (k = \mathrm{Cte}).$$

Une telle relation n'existe pas en théorie de Maxwell et s'avère être trop restrictive.

Nous allons maintenant essayer d'identifier dans le cas A (resp. B) le tenseur $\overset{A}{T}_{\alpha\beta}$ $\left(\text{resp. } \overset{B}{T}_{\alpha\beta}\right)$ avec $\tau_{\alpha\beta}$. Cela nous conduit à relier $\varphi_{\alpha\beta}$ non pas au champ électromagnétique de Maxwell, mais aux potentiels de Maxwell.

Les remarques suivantes sont favorables à une telle interprétation :

a. En première approximation, $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta}$ vérifient les équations

$$\square\gamma_{\alpha\beta} = 0, \qquad \square\varphi_{\alpha\beta} = 0$$

qui sont des généralisations manifestes des équations imposées aux potentiels de Newton et de Maxwell.

b. Les champs $\varphi_{\alpha\beta}$ tels que $\nabla_\lambda\varphi_{\alpha\beta} = 0$ n'apportent aucune contribution aux équations de champ (*voir* lemme 1, § 28). Ils doivent jouer le rôle de champs physiques à potentiels constants.

c. Toutes les fois qu'on est amené à faire des hypothèses générales sur $g_{\alpha\beta}$ sans faire des hypothèses distinctes sur $\gamma_{\alpha\beta}$ et sur $\varphi_{\alpha\beta}$, on donne implicitement à $\varphi_{\alpha\beta}$ le rôle de potentiel (*exemple :* l'hypothèse $g_{\alpha\beta}$ de classe C^1, C^3 par morceaux, élimine des discontinuités de $\partial_\lambda\varphi_{\alpha\beta}$ à travers les variétés caractéristiques. L'hypothèse $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$ tend vers zéro à « l'infini » comme $\frac{1}{r}$, etc.).

Cela étant, comment relier $\varphi_{\alpha\beta}$ aux potentiels de Maxwell ?

Rappelons qu'en théorie de Maxwell, les potentiels φ_α et φ^*_α admettent les développements (33.5) et (33.6) respectivement. Les quantités qui interviennent en première approximation dans les équations de champ sont $\underset{2}{\varphi_0}$ et $\underset{2}{\varphi^*_i}$.

Les composantes $\varphi_{\alpha\beta}$ peuvent *a priori* admettre l'un ou l'autre des développements (32.9, *a*) et 32.9, *b*). Les quantités qui interviennent en première approximation dans les équations de champ sont $\underset{2}{\varphi_{i0}}$ et $\underset{2}{\varphi_{ij}}$.

Nous voyons donc apparaître deux possibilités d'interprétation : Nous pouvons :

(37.1, *a*) Soit adopter pour $\varphi_{\alpha\beta}$ les développements (32.9, *a*) et identifier $\underset{2}{\varphi_{i0}}$ avec $\underset{2}{\varphi^*_i}$;

(37.1, *b*) Soit adopter pour $\varphi_{\alpha\beta}$ les développements (32.9, *b*) et identifier $\underset{2}{\varphi_{ij}}$ avec $\varepsilon_{ijs}\varphi^*_s$.

Rappelons que $\underset{2}{\varphi}{}^{*}_{i}$ vérifie le système

$$(37.2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\underset{2}{\varphi}{}^{*}_{i,j}-\underset{2}{\varphi}{}^{*}_{j,i}=\varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}_{0,s},\\ &\underset{2}{\varphi}{}^{*}_{i,i}=0.\end{aligned}\right.$$

L'intégration effective de ces équations sera faite au paragraphe 45.

Nous verrons que les valeurs de $\underset{2}{\varphi}_{i0}$ et de $\underset{2}{\varphi}_{ij}$ ainsi déterminées sont effectivement solutions des équations du champ dans les cas A et B.

38. **Les interprétations physiques nouvelles dans le cas A.** — Considérons successivement les interprétations *a* et *b* du paragraphe 37 dans le cas A.

a. Interprétation a. — 1° *Choix d'une solution pour* $\varphi_{\alpha\beta}$ *et* Γ_α. — Les équations déterminant $\varphi_{\alpha\beta}$ et Γ_α à la première approximation s'écrivent

$$(38.1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi_{i0,ss}=2p(\Gamma_{0,i}-\Gamma_{i,0}), &\quad f_0=\varphi_{0i,i}=0;\\ &\varphi_{ij,ss}=2p(\Gamma_{j,i}-\Gamma_{i,j}), &\quad f_i=\varphi_{ij,j}=0.\end{aligned}\right.$$

Adoptons pour $\varphi_{\alpha\beta}$ et Γ_α les développements (32.9, *a*). Il est facile de voir que

$$(38.2)\qquad \underset{2}{\varphi}_{i0}=\underset{2}{\varphi}{}^{*}_{i},\qquad \underset{2}{\Gamma}_0=0$$

est une solution de (38.1). Avec cette solution,

$$(38.3)\qquad \overset{A}{\tau}_{\alpha\beta}=0\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

et (32.3) devient, à l'ordre 4,

$$(38.4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\underset{4}{S}_{00}=-\frac{1}{2}\underset{4}{\tau}_{00}+\left[-\frac{1}{4}\left(\underset{2}{\varphi}\underset{2}{\varphi}\right)_{,ss}\right],\\ &\underset{4}{S}_{ij}=-\frac{1}{2}\underset{4}{\tau}_{ij}+\left[\frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\underset{2}{\varphi}_{r0}\underset{2}{\varphi}_{r0}\right)_{,ss}-\frac{1}{2}\left(\underset{2}{\varphi}_{r0}\underset{2}{\varphi}_{r0}\right)_{,ij}\right].\end{aligned}\right.$$

2° *Choix de métrique.* — Nous allons montrer qu'il est possible d'absorber dans $S_{\alpha\beta}$ les termes qui figurent entre crochets aux seconds membres de (38.4) par un changement de métriques convenable.

Examinons d'abord deux types de métriques qui interviennent fréquemment en Relativité générale :

α. Métrique conforme. — Posons

$$a_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}+\eta_{\alpha\beta}\Phi.$$

On déduit de (34.4)

$$
(38.5)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{00} = \overset{\gamma}{\underset{4}{S}}_{00} - \underset{4}{\Phi}_{,ss},\\
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{ij} = \overset{\gamma}{\underset{4}{S}}_{ij} - \big(\underset{4}{\Phi}_{,ij} - \delta_{ij}\underset{4}{\Phi}_{,ss}\big).
\end{aligned}
\right.
$$

β. *Métrique du type* $\gamma_{\alpha\beta} + v_\alpha v_\beta$. — Considérons le cas où la source est constituée par une distribution de N particules chargées. Désignons par $\overset{P}{\xi}{}^\alpha$ les coordonnées de la P[ième] particule, $\overset{P}{u}{}^\alpha$ son vecteur vitesse unitaire, et posons

$$
\begin{aligned}
&a_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta},\\
&b_{\alpha\beta} = \sum_{P,Q=1}^{N}\big(p\,\overset{P}{\varphi}\,\overset{Q}{\varphi} + q\,\overset{P}{\varphi}_{r0}\,\overset{Q}{\varphi}_{r0}\big)\overset{P}{u}_\alpha\,\overset{Q}{u}_\beta \qquad \left(\overset{P}{u}{}^\alpha = \frac{d\overset{P}{\xi}{}^\alpha}{ds}\right)
\end{aligned}
$$

(p et q sont deux constantes arbitraires).

On obtient à partir de (34.2)

$$
(38.6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{00} = \overset{\gamma}{\underset{4}{S}}_{00},\\
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{ij} = \overset{\gamma}{\underset{4}{S}}_{ij} - \frac{1}{2}\big(\underset{4}{b}_{,ij} - \delta_{ij}\underset{4}{b}_{,ss}\big),
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
\underset{4}{b} = p\,\underset{2}{\varphi}\,\underset{2}{\varphi} + q\,\underset{2}{\varphi}_{r0}\,\underset{2}{\varphi}_{r0} \qquad \left(\underset{2}{\varphi} = \sum_{P}\underset{2}{\overset{P}{\varphi}},\ \underset{2}{\varphi}_{r0} = \sum_{P}\underset{2}{\overset{P}{\varphi}}_{r0}\right).
$$

En se servant des formules (38.5), (38.6) et des équations (38.4), on obtient par identifications :

$$
\underset{4}{\Phi} = -\frac{1}{4}\underset{2}{\varphi}\,\underset{2}{\varphi}, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad q = -1,
$$

le résultat suivant :

Les équations unitaires du cas A *s'écrivent en première approximation sous la forme*

$$
(38.7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{00} = -\frac{1}{2}\underset{4}{\tau}_{00},\\
&\overset{a}{\underset{4}{S}}_{ij} = -\frac{1}{2}\underset{4}{\tau}_{ij},
\end{aligned}
\right.
$$

les deux membres étant exprimés en fonction du potentiel $\underset{2}{\varphi}$ *de Maxwell, et de la métrique approchée*

$$
(38.8)\qquad a_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\varphi\cdot\varphi\,\eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\big(\overset{P}{\varphi}\,\overset{Q}{\varphi} + \overset{P}{\varphi}_{\lambda\mu}\,\overset{Q}{\varphi}{}^{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}\big)\overset{P}{u}_\alpha\,\overset{Q}{u}_\beta.
$$

Ce résultat est purement *local*, et n'est valable que dans le cas très restrictif où la source du champ électromagnétique est constituée par une distribution de N particules chargées animées d'un mouvement de vitesse faible par rapport à la vitesse de la lumière.

b. Interprétation b. — D'après les équations (38.1), on voit immédiatement que l'interprétation *b* du paragraphe 37 est inacceptable dans le cas A, car elle conduit à

$$\underset{2}{f_i} = \underset{2}{\varphi}_{ij,j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijs}\left(\underset{2}{\varphi}^{*}_{s,j} - \underset{2}{\varphi}^{*}_{j,s}\right) = \underset{2}{\varphi}_{,i} \neq 0,$$

ce qui est en contradiction avec (38.1).

39. Les interprétations physiques nouvelles dans le cas B. — *a. Interprétation a.* — On voit aisément que (38.2) est une solution des équations (32.5), avec ε quelconque. L'interprétation *a* conduit dans le cas B aux mêmes résultats que dans le cas A, jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$ inclusivement.

b. Interprétation b. — On montre sans difficulté que

$$\underset{2}{\varphi}_{ij} = \varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}^{*}_{s} \tag{39.1}$$

constitue une solution de (32.5), avec ε quelconque.

Les équations (32.6) s'écrivent, jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$

$$\left\{\begin{aligned} \underset{4}{S}_{00} &= -\frac{\varepsilon}{2}\underset{4}{\tau}_{00} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\underset{2}{\varphi}\,\underset{2}{\varphi}\right)_{,ss} + \underset{4}{A}_{00}. \\ \underset{4}{S}_{ij} &= -\frac{\varepsilon}{2}\underset{4}{\tau}_{ij} + \left(\underset{2}{\varphi}_{ir}\underset{2}{\varphi}_{js}\right)_{,rs} + \underset{4}{A}_{ij}. \end{aligned}\right. \tag{39.2}$$

Un résultat analogue à (38.7) pourrait être obtenu avec l'interprétation *b*, dans le cas B. Nous pensons que la discussion de l'interprétation *a* — qui est valable dans les cas A et B — est suffisante pour nous montrer le chemin à suivre dans la construction des tenseurs matériels.

40. Le problème de mouvement. — *a.* Notre interprétation physique *a* permet de ramener les équations unitaires à la forme

$$S_{\alpha\beta} = \chi\tau_{\alpha\beta}$$

jusqu'aux termes en $\frac{1}{c^4}$ inclusivement. Il est bien connu que la méthode des singularités d'Einstein-Infeld-Hoffmann conduit alors aux équations de mouvements des particules chargées compatibles avec la loi de Coulomb.

b. L'interprétation *b* nous fournit dans le cas B le système

$$\underset{4}{S}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2}\underset{4}{\tau}_{ij} + \left(\underset{2}{\varphi}_{ir}\underset{2}{\varphi}_{js}\right)_{,rs} + \underset{4}{A}_{ij}.$$

La somme $\left(\underset{2}{\varphi}_{ir}\underset{2}{\varphi}_{js}\right)_{rs} + \underset{4}{A}_{ij}$ se présente sous la forme

$$\underset{4}{F}_{ijs,s} = -\underset{4}{F}_{isj,s}.$$

Cependant, la contribution de $\underset{4}{F}_{ijs,s}$ dans l'intégrale de mouvement n'est pas nécessairement nulle (*voir* le lemme d'Einstein [10]), car, comme nous le verrons au paragraphe 45, à chaque singularité de $\underset{2}{\varphi}_{i0,j} - \underset{2}{\varphi}_{j0,i} = \varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}_{,s}$ qui définit une particule, correspond une ligne de singularité de $\underset{2}{\varphi}_{i0}$.

Nos interprétations sont essentiellement différentes de celle proposée par H. Treder [21] et par E. Clauser [8]. Ces auteurs identifient $\partial_\alpha\Gamma_\beta - \partial_\beta\Gamma_\alpha$ avec le dual du tenseur de Maxwell, tandis que nous identifions les composantes φ_{i0} (ou $\varepsilon_{ijs}\varphi_{js}$) avec les composantes $\varphi_i^\star$ du vecteur $\varphi_\alpha^\star$ défini par

$$F^\star_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi^\star_\beta - \partial_\beta\varphi^\star_\alpha.$$

L'interprétation proposée, par H. Treder et par E. Clauser ne permet pas de ramener les équations unitaires à la forme (38.7), en première approximation. Elle conduit à des difficultés dans le problème du mouvement (la nécessité d'introduire des potentiels statiques biharmoniques, donc non maxwelliens; l'existence des forces d'interaction de module indépendant de la distance des particules, etc.).

En ce qui concerne la première approximation, notre interprétation *a* du paragraphe 37 semble préférable à celle de H. Treder et de E, Clauser. Elle conduit cependant à de grandes difficultés quand on veut étudier les équations unitaires aux approximations supérieures.

41. **Interprétation physique de la propriété d'invariance par transposition.** — Notre choix de solution

$$(41.1)\qquad \underset{4\,\vee}{L}{}^{0}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\underset{2}{\varphi}_{i0,j} - \underset{2}{\varphi}_{j0,i}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}_{,s} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijs}\left(\sum_{P=1}^{N}\frac{\overset{P}{\underset{2}{e}}}{\overset{P}{r}}\right)_{,s}$$

permet de donner à la propriété d'invariance par transposition des équations de champ une signification physique claire.

Comme

$$\varphi = \sum_{P=1}^{N}\frac{\overset{P}{\underset{2}{e}}}{\overset{P}{r}},$$

on voit, d'après (41.1) que si $\underset{2}{\varphi}_{i0}$, $\underset{2\vee}{\mathrm{L}}{}^{0}_{ij}$ décrivent une distribution de particules chargées, de charges $\overset{\mathrm{P}}{\underset{2}{e}}$, alors $\underset{2}{\tilde{\varphi}}_{i0}$ $\left(\equiv - \underset{2}{\tilde{\varphi}}_{i0}\right)$, $\underset{2\vee}{\tilde{\mathrm{L}}}{}^{0}_{ij}\left(\equiv - \underset{\vee}{\mathrm{L}}{}^{0}_{ij}\right)$ décrivent la même distribution de particules, mais de charges $-\overset{\mathrm{P}}{\underset{2}{e}}$. L'invariance par transposition des équations de champ exprime simplement le fait que deux distributions identiques de particules, de charges $+\overset{\mathrm{P}}{e}$ dans la première et $-\overset{\mathrm{P}}{e}$ dans la seconde sont régies par les mêmes équations approchées du champ (*voir* A. Einstein [10]).

CHAPITRE VI.

LE CHAMP D'UNE PARTICULE CHARGÉE STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

42. **Introduction.** — Considérons le cas particulier d'une particule chargée, statique, à symétrie sphérique par rapport à un espace-temps déterminé et cherchons à résoudre les équations du champ dans ce cas.

Nous étudions dans ce chapitre deux problèmes distincts :

1° Détermination de la forme des composantes (resp. coefficients) d'un tenseur (resp. d'une connexion linéaire) possédant la symétrie sphérique. Ce problème est purement mathématique et ne fait pas intervenir les équations de champ.

2° Calcul des valeurs de $g_{\alpha\beta}$, solution des équations approchées du champ, dans le cas où la source est une particule chargée statique à symétrie sphérique. La solution obtenue dépend essentiellement de l'interprétation physique de $g_{\alpha\beta}$.

43. **Les composantes (resp. les coefficients) d'un tenseur (resp. d'une connexion linéaire) à symétrie sphérique.** — Pour déterminer les composantes (resp. les coefficients) d'un tenseur (resp. d'une connexion linéaire) possédant la symétrie sphérique, nous utilisons une méthode due à Vaidya [22]. Notre définition de symétrie sphérique correspond à celle de symétrie sphérique sans polarisation de Vaidya.

Le mot « symétrie sphérique » — statique ou non statique — a essentiellement une signification de symétrie dans l'espace. Pour définir cette symétrie, il faut supposer tout d'abord l'espace-temps décomposé en un espace et un temps déterminé et définir ensuite la symétrie dans l'espace et la staticité par rapport au temps ainsi précisés.

a. Soit.

(43.1) $$d\sigma^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = (dx^0)^2 + \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

la métrique de Minkowski rapportée à un espace-temps orthogonal de la Relativité restreinte. Soit $\vec{\xi}$ le vecteur d'espace, solution générale de l'équation

(43.2) $$\overline{\mathcal{L}}(\vec{\xi})\,\eta_{ij} = 0 \qquad (\overline{\mathcal{L}} = \text{dérivée de Lie dans l'espace})$$

tel que $\vec{\xi}$ soit orthogonal au vecteur d'espace $\overrightarrow{OM}$ de composantes (x^i).

b. Soit ξ le vecteur de V^4, tel que dans le système de coordonnées précisé dans *a*,

(43.3) $$\xi^0 = 0, \qquad (\xi^i) = \vec{\xi}.$$

Un tenseur ou connexion linéaire Ω possède la symétrie sphérique par rapport à l'espace précisé dans *a* si, pour tout vecteur ξ,

(43.4) $$\mathcal{L}(\xi)\,\Omega = 0 \qquad (\mathcal{L} = \text{dérivée de Lie dans } V^4).$$

La symétrie est dite statique si, dans l'espace-temps précisé dans *a*, les composantes de Ω ne dépendent pas de x^0.

On peut évidemment rapporter l'espace de *a* à un système de coordonnées quelconques.

En coordonnées rectangulaires, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, la solution générale de (43.2) est

(43.5) $$\vec{\xi}\begin{cases} -Cy + (A\cos b)\,z \\ -(A\cos b)\,x + (A\sin b)\,y \\ -(A\sin b)\,z + Cx \end{cases} \qquad (A,\ b,\ C = \text{Cte}).$$

Soit

$$\overrightarrow{OM}:\ x,\ y,\ z;$$

$$\overrightarrow{OQ}:\ A\sin b,\ A\cos b,\ C,$$

on a

(43.6) $$\vec{\xi} = \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

En coordonnées polaires $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, (43.5) s'écrit

(43.7) $$\vec{\xi}:\ 0,\quad A\cos(\varphi + b),\quad -A\sin(\varphi + b)\cot g\,\theta + C.$$

La signification géométrique de notre définition est claire :

La donnée d'un système de constantes A, *b*, C définit un axe OQ. Le vecteur $\vec{\xi}$ est orthogonal à cet axe. (43.4) exprime l'invariance de Ω

par rapport à toute rotation autour de OQ, c'est-à-dire la symétrie axiale de Ω par rapport à cet axe.

Pour toutes les valeurs de A, b, C, (43.4) exprime la symétrie axiale de Ω par rapport à tout axe passant par O, c'est-à-dire la symétrie sphérique de Ω autour de O.

1° *Cas d'un tenseur d'ordre* 2. — Considérons le cas où Ω est un tenseur $m_{\alpha\beta}$ quelconque. En exprimant que

$$\mathcal{L}(\xi)\, m_{\alpha\beta} = 0 \tag{43.8}$$

quels que soient A, b, C, on a le résultat suivant (coordonnées polaires) :

$$m_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} -\alpha(r, t) & 0 & 0 & u(r, t) \\ 0 & -\beta(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta(r, t)\sin^2\theta & 0 \\ u(r, t) & 0 & 0 & \sigma(r, t) \end{pmatrix}, \tag{43.9}$$

$$m_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w(r, t) \\ 0 & 0 & v(r, t)\sin\theta & 0 \\ 0 & -v(r, t)\sin\theta & 0 & 0 \\ -w(r, t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{43.10}$$

En effectuant la transformation

$$x'^i = x^i,$$
$$x'^0 = x^0 + f(x^1),$$

on peut déterminer $f(x^1)$ tel que, dans le nouveau système de coordonnées,

$$m'_{\underline{10}} = 0,$$

mais cette transformation peut admettre des singularités.

2° *Cas d'une connexion linéaire.* — Des équations

$$\mathcal{L}(\xi)\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = 0, \tag{43.11}$$

où ξ est donné par (43.7), on déduit le résultat suivant :

(43.12) *a.* 29 coefficients de la connexion sont nuls :

$$\Gamma^1_{11},\quad \Gamma^1_{13},\quad \Gamma^1_{21},\quad \Gamma^1_{31},\quad \Gamma^1_{20},\quad \Gamma^1_{30},\quad \Gamma^1_{02},\quad \Gamma^1_{03};$$
$$\Gamma^2_{11},\quad \Gamma^2_{22},\quad \Gamma^2_{00},\quad \Gamma^2_{10},\quad \Gamma^2_{01},\quad \Gamma^2_{23},\quad \Gamma^2_{32};$$
$$\Gamma^3_{11},\quad \Gamma^3_{22},\quad \Gamma^3_{33},\quad \Gamma^3_{00},\quad \Gamma^3_{10},\quad \Gamma^3_{01};$$
$$\Gamma^0_{11},\quad \Gamma^0_{13},\quad \Gamma^0_{21},\quad \Gamma^0_{31},\quad \Gamma^0_{20},\quad \Gamma^0_{30},\quad \Gamma^0_{02},\quad \Gamma^0_{03};$$

b. 3 coefficients sont bien déterminés :

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \operatorname{cotg}\theta;$$

c. 24 coefficients sont fonctions de r et de θ. Les quantités suivantes sont fonctions de r :

$$\Gamma^1_{11},\quad \Gamma^1_{22},\quad \frac{\Gamma^1_{33}}{\sin^2\theta},\quad \Gamma^1_{00},\quad \Gamma^1_{10},\quad \Gamma^1_{01},\quad \frac{\Gamma^1_{23}}{\sin^2\theta},\quad \frac{\Gamma^1_{32}}{\sin^2\theta};$$

$$\Gamma^1_{12},\quad \Gamma^1_{21},\quad \frac{\Gamma^2_{13}}{\sin^2\theta},\quad \frac{\Gamma^3_{21}}{\sin\theta},\quad \Gamma^2_{20},\quad \Gamma^2_{02},\quad \frac{\Gamma^2_{30}}{\sin\theta},\quad \frac{\Gamma^2_{03}}{\sin\theta};$$

$$\Gamma^3_{12}\sin\theta,\quad \Gamma^3_{21}\sin\theta,\quad \Gamma^3_{13},\quad \Gamma^3_{31},\quad \Gamma^3_{20}\sin\theta,\quad \Gamma^3_{02}\sin\theta,\quad \Gamma^3_{30},\quad \Gamma^3_{03};$$

$$\Gamma^0_{11},\quad \Gamma^0_{22},\quad \frac{\Gamma^0_{33}}{\sin^2\theta},\quad \Gamma^0_{00},\quad \Gamma^0_{01},\quad \Gamma^0_{10},\quad \frac{\Gamma^0_{23}}{\sin\theta},\quad \frac{\Gamma^0_{32}}{\sin\theta}.$$

d. Entre les coefficients précédents, existent les relations suivantes :

$$\Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\sin^2\theta,\qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31},\qquad \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{30};$$
$$\Gamma^0_{33} = \Gamma^0_{22}\sin^2\theta,\qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13},\qquad \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03};$$
$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32},\qquad \sin^2\theta\,\Gamma^3_{12} + \Gamma^2_{13} = 0,\qquad \sin^2\theta\,\Gamma^3_{21} + \Gamma^2_{31} = 0;$$
$$\Gamma^0_{23} = -\Gamma^0_{32},\qquad \sin^2\theta\,\Gamma^0_{32} + \Gamma^2_{03} = 0,\qquad \sin^2\theta\,\Gamma^3_{20} + \Gamma^2_{30} = 0.$$

44. **Solution approchée des équations du champ dans le cas d'une particule chargée à symétrie sphérique statique.** — Revenons aux équations (38.7). Considérons le cas où la source est constituée par une particule unique statique à symétrie sphérique placée à l'origine des coordonnées. Adoptons pour $a_{\alpha\beta}$ et $\underset{2}{\varphi}$ les formes à symétrie sphérique classiques en coordonnées polaires

$$(44.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11} = a_{11}(r),\qquad a_{22} = -r^2,\qquad a_{33} = -r^2\sin^2\theta,\qquad a_{00} = a_{00}(r); \\ a_{ij} = 0\quad (i \neq j),\qquad a_{i0} = 0; \\ \underset{2}{\varphi} = \dfrac{\underset{2}{e}}{r}. \end{array}\right.$$

Les équations approchées (38.7) admettent la solution

$$(44.2)\qquad a_{00} = -\frac{1}{a_{11}} + o\left(\frac{1}{c^4}\right) = 1 - \frac{1}{c^2}\,2\,\frac{\underset{2}{m}}{r} - \frac{1}{c^4}\,\frac{1}{4}\,\frac{\underset{2}{e}\,\underset{2}{e}}{r^2} + o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Cette solution est exactement la même que celle — rigoureuse — des équations d'Einstein-Maxwell.

45. **La forme des composantes $\varphi\alpha\beta$ dans le cas d'une particule chargée à symétrie sphérique statique.** — *a.* Il est clair que si nous adoptons pour $\underset{2}{\varphi}_{i0}$ la forme à symétrie sphérique (43.10), alors

$$(45.1)\qquad \underset{2}{\varphi}_{i0,j} - \underset{2}{\varphi}_{j0,i} = 0$$

et le tenseur $\underset{4}{\tau}_{\alpha\beta}$ disparaît des équations (38.7). Ceci explique le fait qu'aucune solution rigoureuse obtenue à partir des équations de la théorie d'Einstein-Schrödinger en partant des composantes de $g_{\alpha\beta}$ à symétrie sphérique ne soit susceptible de représenter une particule chargée au repos compatible avec la théorie d'Einstein-Maxwell.

b. Proposons-nous maintenant d'intégrer le système

$$(45.2)\qquad \begin{cases} \underset{2}{\varphi}_{i0,j} - \underset{2}{\varphi}_{j0,i} = \varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}_{,s} & \left(\underset{2}{\varphi} = \dfrac{e}{r}\right) \\ \underset{2}{\varphi}_{i0,i} = 0, \end{cases}$$

la solution générale de cette équation est manifestement la somme d'une solution particulière et le gradient d'une fonction harmonique arbitraire. Il est facile de voir que

$$(45.3)\qquad \underset{2}{\varphi}_{10} = \frac{e}{r}\frac{yz}{x^2+y^2}, \qquad \underset{2}{\varphi}_{20} = -\frac{e}{r}\frac{xz}{x^2+y^2}, \qquad \underset{2}{\varphi}_{30} = 0$$

est une solution particulière de (45.2). En coordonnées polaires,

$$(45.4)\qquad \underset{2}{\varphi}_{10} = 0, \qquad \underset{2}{\varphi}_{20} = 0, \qquad \underset{2}{\varphi}_{30} = -e\cos\theta.$$

On déduit la solution générale de (45.2) en coordonnées polaires

$$(45.5)\qquad \varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Lambda,r \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda,\theta \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda,\varphi - e\cos\theta \\ -\Lambda,r & -\Lambda,\theta & -\Lambda,\varphi - e\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad (\Lambda,_{ii} = 0).$$

Comparant (45.5) et (43.10), on voit que $\varphi_{\alpha\beta}$ ne possède pas la symétrie sphérique. (45.5) n'est valable qu'en première approximation, mais toute forme rigoureuse de $\varphi_{\alpha\beta}$ susceptible de représenter une particule chargée statique à symétrie sphérique doit être compatible avec (45.5).

46. **La forme des composantes $\gamma\alpha\beta$ dans le cas d'une particule chargée à symétrie sphérique statique.** — Des formules (38.8), on déduit

$$(46.1)\qquad \varphi_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\underset{2}{\varphi}\,\underset{2}{\varphi}\,\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(\underset{2}{\overset{P}{\Phi}}\,\underset{2}{\overset{Q}{\varphi}} + \underset{2}{\overset{P}{\varphi}}_{\lambda\mu}\,\underset{2}{\overset{Q}{\varphi}}{}^{\lambda\mu}\right)\overset{P}{u}_{\alpha}\,\overset{Q}{u}_{\beta} + o\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Dans notre cas, P = 1, $\overset{P}{u}_i = 0$, $\overset{P}{u}_0 = 1$, les $a_{\alpha\beta}$ sont donnés par (44.2), les composantes non nulles de $\eta_{\alpha\beta}$ sont

$$\eta_{11} = -1, \qquad \eta_{22} = -r^2, \qquad \eta_{33} = -r^2\sin^2\theta, \qquad \eta_{x} = +1.$$

Prenons pour $\underset{2}{\varphi}_{r0}$ les valeurs (45.4). On a donc

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(r) & 0 & 0 & \gamma_{10}(r) \\ 0 & \gamma_{22}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22}(r)\sin^2\theta & 0 \\ \gamma_{10}(r) & 0 & 0 & \gamma_{00}(r,\theta) \end{pmatrix}. \tag{46.2}$$

Du fait que γ_{00} est une fonction de r et de θ, les composantes (46.2) de $\gamma_{\alpha\beta}$ ne possèdent pas la symétrie sphérique. (46.2) n'est valable qu'en première approximation, mais toute forme rigoureuse de $\gamma_{\alpha\beta}$ susceptible de représenter une particule chargée à symétrie sphérique statique doit être compatible avec (46.2).

47. **Sur la forme rigoureuse de $g_{\alpha\beta}$ dans le cas d'une particule chargée à symétrie statique.** — D'après notre choix de solution

$$\underset{2}{\mathrm{L}}{}^{0}_{\underset{\vee}{ij}} = \frac{1}{2}\left(\underset{2}{\varphi}_{i0,j} - \underset{2}{\varphi}_{j0,i}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijs}\underset{2}{\varphi}_{,s}.$$

Pour $\underset{2}{\varphi} = \frac{e}{r}$, il est clair que $\underset{2}{\mathrm{L}}{}^{0}_{\underset{\vee}{ij}}$ possède la symétrie sphérique. Nous sommes amenés à représenter une particule chargée statique à symétrie sphérique, sous la forme rigoureuse par une connexion $\mathrm{L}^{\zeta}_{\alpha\beta}$ telle que

$$\mathcal{L}(\xi)\,\mathrm{L}^{\zeta}_{\alpha\beta} = 0, \tag{47.1}$$

où ξ est donné par (43.7).

D'après l'identité,

$$\mathrm{D}_{\rho}\left(\mathcal{L}\,g_{\underset{+-}{\alpha\beta}}\right) = \left(\mathcal{L}\,\mathrm{L}^{\lambda}_{\alpha\rho}\right)g_{\lambda\beta} + \left(\mathcal{L}\,\mathrm{L}^{\lambda}_{\rho\beta}\right)g_{\alpha\lambda},$$

(47.1) entraîne

$$\mathrm{D}_{\rho}\left(\mathcal{L}\,g_{\underset{+-}{\alpha\beta}}\right) = 0. \tag{47.2}$$

Cette condition est moins forte que la condition

$$\mathcal{L}\,g_{\alpha\beta} = 0. \tag{47.3}$$

La forme générale des coefficients $\mathrm{L}^{\zeta}_{\alpha\beta}$ vérifiant (47.1) est donnée par le tableau (43.12). Nous n'avons pas réussi à en déduire la forme générale des composantes $g_{\alpha\beta}$.

La détermination des composantes rigoureuses de $g_{\alpha\beta}$ représentant une particule chargée statique à symétrie sphérique est donc une question ouverte. D'après notre interprétation physique, et les résultats des paragraphes 45 et 46, la condition de symétrie (47.3) est trop restrictive, car à la première approximation, une solution du problème a été donnée par (45.5), (46.2) où l'on voit que (47.3) n'est pas vérifié.

CONCLUSION GÉNÉRALE.

1° Nous avons montré que la version générale proposée par M.-A. Tonnelat est équivalente à l'une ou à l'autre des deux versions distinctes A et B, et que ces deux versions réalisent effectivement une géométrisation de la Gravitation et de l'Électromagnétisme compatible avec la théorie d'Einstein-Maxwell.

Jusqu'à présent, il ne semble pas qu'il y ait une raison profonde pour préférer l'une de ces versions à l'autre. Nous voudrions seulement faire quelques remarques :

a. La version B fait intervenir comme éléments fondamentaux le tenseur $g_{\alpha\beta}$ et une connexion $L^{\xi}_{\alpha\beta}$ de vecteur de torsion nul, soit $16 + 60 = 76$ inconnues. La version A fait intervenir, outre ces éléments, un vecteur Γ_α, soit $76 + 4 = 80$ inconnues.

b. D'après notre choix de solution approchée du cas A,

$$\underset{2}{\Gamma}_0 = 0, \qquad \underset{3}{\Gamma}_i = 0,$$

le vecteur Γ_α, qui semble toujours être un élément étranger aux équations de champ, ne joue aucun rôle à la première approximation.

c. Dans le cas B, le cas $r = \frac{1}{2}$ est le seul dans lequel les équations de champ sont invariantes par transposition.

Ces remarques semblent favorables au choix du cas B, avec $r = \frac{1}{2}$.

2° Notre interprétation physique nous oblige à adopter un point de vue radicalement nouveau qui est le suivant :

L'Électromagnétisme, à l'approximation non linéaire, devrait être décrit non par un vecteur potentiel φ_α, moins par un tenseur potentiel $\varphi_{\alpha\beta}$. Il est clair que le mot électromagnétisme ne doit pas être entendu ici au sens d'électromagnétisme maxwellien.

Le tenseur potentiel $g_{\alpha\beta}$ décrit donc un champ « unifié » formé de plusieurs champs, dont la partie principale, celle qui, seule, manifeste à la première approximation est composée du champ gravitationnel et du champ électromagnétique maxwellien.

Une théorie de l'Électromagnétisme, construite sur un tenseur potentiel $\varphi_{\alpha\beta}$ ne pourrait être élaboré qu'à partir de nouvelles hypothèses sur la structure des particules : un électron devrait être décrit non seulement par sa masse et par sa charge — ayant la symétrie sphérique — mais aussi par d'autres caractéristiques — intrinsèques ou non — n'ayant pas la symétrie sphérique (moment cinétique propre, polarisation, etc.).

APPENDICE.

CALCUL DU DÉTERMINANT DE $B^i{}_k$.

Définissons en chaque point x de V^4 un système de quatre vecteurs $\underset{X}{u}^\alpha$ ($X = 0, 1, 2, 3$) linéairement indépendants et posons

$$g_{XY} = \underset{X}{u}^\alpha \underset{Y}{u}^\beta g_{\alpha\beta};$$

les vecteurs $\underset{X}{u}^\alpha$ définissant en x un repère en général non holonome. Pour un choix approprié de $\underset{X}{u}^\alpha$, on peut simplifier l'expression de g_{XY}. Ce choix a été discuté par V. Hlavaty. Nous nous contentons d'indiquer ici le résultat.

Soit

$$D = \left(\frac{1}{2}\gamma\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}\right)^2 - 4\gamma\varphi.$$

a. Si $D \neq 0$ *:* Il existe au moins un système $\underset{X}{u}^\alpha$ tel que

$$(\mathrm{I}\,a) \qquad g_{XY} = \begin{pmatrix} -\tau & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \tau \end{pmatrix} \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

b. Si $D = 0$ *:* Il existe au moins un système $\underset{X}{u}^\alpha$ tel que

$$(\mathrm{I}\,b) \qquad g_{XY} = \begin{pmatrix} -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & \gamma & \rho\gamma \\ 0 & -\gamma & -\tau & 0 \\ 0 & -\rho\gamma & 0 & \tau \end{pmatrix} \qquad (\rho = \pm 1,\ \gamma \neq 0).$$

Dans chaque cas, les $\underset{X}{u}^\alpha$ sont définis à une rotation du groupe de Lorentz près, rotation qui conserve les valeurs de g_{XY}.

Dans les tableaux (I *a*) et (I *b*), nous pouvons évidemment supposer $\tau = 1$.

Plaçons-nous en un point déterminé de V^4 et proposons-nous de calculer en ce point la valeur du $\det(B^i{}_k)$. Le calcul du déterminant étant purement algébrique, il est toujours permis de se placer dans un repère non holonome.

Le calcul du déterminant de $B^i{}_k$ avec les formes réduites (I *a*) et (I *b*) de g_{XY} est facile. On trouve :

a. Si $D \neq 0$ *:*

$$\det(B^i{}_k) = 27\varepsilon\left[\frac{-\tau(\alpha^2+\tau^2) + \tau^3(1+\varepsilon)}{\tau(\alpha^2+\tau^2)}\right]^2;$$

b. Si $\mathrm{D} = 0$:

$$\det(\mathrm{B}^i{}_k) = 27\varepsilon\left[\frac{-\tau(\gamma^2+\tau^2)+\tau^3(1+\varepsilon)}{\tau(\tau^2+\gamma^2)}\right]^2.$$

Dans les deux cas,

$$\det(\mathrm{B}_i{}^k) = 27\varepsilon\left(\frac{\det g_{ij} - (1+\varepsilon)\det\gamma_{ij}}{\det g_{ij}}\right)^2 = 27\varepsilon\left[\frac{gg^{00} - (1+\varepsilon)\gamma\gamma^{00}}{gg^{00}}\right]^2.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.-A. Tonnelat, *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
[2] A. Lichnerowicz, *Théorie relativistes de la Gravitation et de l'Électomagnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1954.
[3] R. L. Arnowitt, *Phys. Rev.* t. 105, 1957, p. 735.
[4] L. Bouche, *Thèse*, Paris, 1961.
[5] W. B. Bonnor, *Proc. Roy. Soc.*, A, t. 226, 1954, p. 366.
[6] N. Bose, *J. Phys. Rad.*, t. 14, 1953, p. 641.
[7] J. Callaway, *Phys. Rev.*, t. 92, 1953, p. 1567.
[8] E. Clauser, *Nuovo Cimento*, t. 7, 1958, p. 764.
[9] O. Costa de Beauregard, *Cahier de Physique*, t. 105, 1959.
[10] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, 1953; Einstein, Infeld et Hoffmann, *Ann. Math.*, t. 39, 1938, p. 65.
[11] Kilmister et Stephenson,
[12] Kursunoglu, *Phys. Rev.*, t. 88, 1952, p. 1369.
[13] L. Infeld, *Nature*, t. 166, 1950, p. 1075.
[14] M. Lenoir, *Thèse*, Paris, 1962.
[15] J. Lévy, *J. Phys. Rad.*, t. 20, 1959, p. 747.
[16] F. Maurer-Tison, *Thèse*, Paris, 1958.
[17] J. Moffat, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 53, 1957, p. 473.
[18] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.*, A, t. 52, 1948, p. 69.
[19] D. Sciama, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 226, 1954, p. 366.
[20] M.-A. Tonnelat, *Colloque de Royaumont*, 1959.
[21] H. Treder, *Ann. Physik.*, t. 19, 1956, p. 369.
[22] P. C. Vaidya, *Phys. Rev.*, t. 90, 1953, p. 695.

TABLE DES MATIÈRES.