ALBERT HANEN

Théorèmes limites pour une suite de chaînes de Markov

Annales de l'I. H. P., tome 18, nº 3 (1963), p. 197-301
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1963__18_3_197_0>

Théorèmes limites pour une suite de chaînes de Markov

par

Albert HANEN.

NOTATIONS.

$\to$, tend vers.
$\Rightarrow$, entraîne.
$\Leftrightarrow$, équivalent.
$\forall$, quel que soit.
$\exists$, il existe.
$\in$, élément de.
R, droite numérique.
$x, y \in \mathrm{R}$, $x = y \bmod (d) \quad \Leftrightarrow \quad x - y = kd$, où k entier.
$y_n = o\,(x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y_n}{x_n} \to 0.$
$y_n = \mathrm{O}\,(x_n) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y_n}{x_n}$ reste borné.
$\big)w : \ldots\big($, ensemble des points w vérifiant ce qui vient après le :
$\{\ \}$, l'événement : ce qui est à l'intérieur de $\{\ \}$ a lieu.
Pr, probabilité.
I_{A}, indicateur d'un événement (valant 1 si A se produit, 0 si A ne se produit pas).
E, espérance mathématique.
Pr (A/B), probabilité conditionnelle de A quand B a lieu.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ converge en loi.

INTRODUCTION.

1. **Chaîne de Markov. Cas discret.** — Soit X_i une suite de variables aléatoires pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, r$; i parcourt l'ensemble des entiers $\geqq 0$.

X_i peut s'interpréter comme l'état à l'instant i d'un système physique S ayant r états possibles notés $1, 2, \ldots, r$, dont l'évolution est aléatoire et se fait aux instants entiers.

La suite de variables aléatoires X_i forme une chaîne de Markov discrète, homogène, de matrice de transition P, si les conditions suivantes sont réunies :

1° pour tous k, j, conditionnellement lorsque $X_k = j$, les événements définis sur la suite de variables aléatoires X_i antérieurs à k et ceux postérieurs à k sont indépendants;

2° $\Pr[\{X_{k+1} = l\}/\{X_k = j\}] = p_{j,l}$ pour tout k.

La matrice P a pour éléments $p_{j,l}$ et possède les propriétés suivantes :

a. $p_{j,l} \geqq 0$ pour tous j, l;

b. $\sum_{l=1}^{r} p_{j,l} = 1$,

toute matrice vérifiant a et b est dite strictement markovienne. On montre qu'il lui correspond une suite de variables aléatoires X_i dont elle est la matrice de transition.

Nous appellerons matrice (r, s) une matrice à r lignes et s colonnes.

Soit P une matrice (r, r) strictement markovienne : soit $K = (1, 2, \ldots, r)$, $K_1 \subset K$, P_1 la restriction de P à $K_1 \times K_1$. P_1 vérifie les propriétés :

a. $p_{j,l} \geqq 0$ pour tous $j, l \in K_1$;

b'. $\sum_{l \in K_1} p_{j,l} \leqq 1$ pour tout $j \in K_1$.

Une matrice P_1 vérifiant a et b' est dite sous-markovienne; étant donné une matrice sous-markovienne P_1, on peut toujours la considérer comme une restriction d'une matrice strictement markovienne. Nous appellerons dans la suite système sous-markovien attaché à P_1 tout système lié à une extension strictement markovienne de P_1.

Soit P une matrice strictement markovienne, S le système de loi d'évolution P. Nous dirons que l'état i communique avec j, et noterons par $\rightsquigarrow$ cette relation s'il existe un entier n tel que

$$P^n(i, j) > 0 \quad (P^n \text{ désignant la } n^{\text{ième}} \text{ itérée de } P).$$

La relation $i \rightsquigarrow j$, $j \rightsquigarrow i$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des états k tels que $k \rightsquigarrow k$.

Une classe d'équivalence C pour cette relation est dite ergodique si

$$i \rightsquigarrow j, \quad i \in C \Rightarrow j \in C.$$

Les éléments des classes ergodiques sont appelés états ergodiques. Les autres états de S sont appelés transitoires.

Une classe ergodique C est fermée au sens suivant :si S prend un état de C, alors, avec une probabilité égale à 1, les états suivants appartiendront à C. On montre que les classes ergodiques sont les plus petites classes d'états fermées et qu'il n'y en a pas d'autres.

Chaque classe ergodique C se décompose à son tour en sous-classes cycliques $C_1, \ldots, C_d$, l'état succédant à un état de C_j (resp. C_d) appartenant presque sûrement à C_{j+1} (resp. C_1).

Rappelons également les propriétés spectrales de la matrice strictement markovienne P :

Soit τ l'ensemble des états transitoires, $E_1, \ldots, E_s$ les classes ergodiques,

$$E = \bigcup_{i=1}^{s} E_i,$$

si T est la restriction de P à $\tau \times \tau$;

$\underset{i}{R}$ est la restriction de P à $E_i \times E_i$;

B_i est la restriction de P à $\tau \times E_i$.

Nous pouvons, par une permutation convenable de $(1, \ldots, r)$, supposer que

$$\begin{array}{llll} i \in \tau, & j \in E & \Rightarrow & i < j, \\ i \in E_\alpha, & j \in E_\beta, & \alpha < \beta & \Rightarrow i < j. \end{array}$$

P s'écrit alors

$$P = \begin{bmatrix} T & B_1 & \ldots & B_i & \ldots & B_s \\ 0 & \underset{1}{R} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \underset{i}{R} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \underset{s}{R} \end{bmatrix}.$$

Un nombre complexe λ appartient au spectre de P si et seulement s'il appartient au spectre de T ou de l'un des $\underset{i}{R}$.

Soient :

l_i le nombre d'éléments de E_i, V_0^i le vecteur à l_i lignes toutes égales à 1 ;

d_i le nombre de classes cycliques de E_i relatives à $\underset{i}{R}$;

$\underset{i}{R}$ a d_i valeurs propres de module égal à 1, qui sont les racines $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ces valeurs propres sont simples. Les autres valeurs propres de $\underset{i}{R}$ ont un module < 1.

Soit $\underset{i}{\Pi}$ la matrice (l_i, l_i), vérifiant

$$\underset{i}{\Pi}\underset{i}{R} = \underset{i}{R}\underset{i}{\Pi} = \underset{i}{\Pi},$$
$$\underset{i}{\Pi} V_0^i = V_0^i;$$

$\underset{i}{\Pi}$ a toutes ses lignes égales au vecteur $\underset{i}{\Pi^*}$, appelé probabilité invariante relative à $\underset{i}{R}$.

T sera supposée avoir 0 éléments, nous désignerons sa norme par $\| \;\; \|$.

T a sa valeur propre maximale $r_1 < 1$. Par conséquent, puisque, d'après le théorème de Gelfand,

$$\| T^n \|^{1/n} \to r_1, \qquad \| T^n \| < r^n,$$

où $0 < r < 1$, pour n assez grand.

2. **Chaînes de Markov. Cas continu.** — Considérons une famille X_t de variables aléatoires, t parcourant la demi-droite numérique $\geqq 0$, pouvant prendre chacune des valeurs $1, 2, \ldots, r$. X_t peut alors s'interpréter comme l'état à l'instant t d'un système à nombre fini d'états r, dont l'évolution est aléatoire et peut se faire à tout instant $t \geqq 0$.

La famille X_t forme une chaîne de Markov continue et homogène, de semi-groupe de matrices de transition P_t, si les conditions suivantes sont réunies :

1° pour tous τ, j, conditionnellement lorsque $X_\tau = j$, les événements définis sur X_t antérieurs à τ et ceux postérieurs à τ sont indépendants;

2° pour tout τ,

$$\Pr[\{X_{t+\tau} = j\}/\{X_\tau = i\}] = P_t(i, j).$$

Les matrices P_t d'éléments $P_t(i, j)$ forment un semi-groupe, que nous supposerons continu à l'origine.

Soit I la matrice identité sur C^r, d'éléments $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_i^j = 1$ si $i = j$.

Si $P_0 = I$, alors la matrice P_t peut s'exprimer sous la forme :

$$P_t = \exp(Qt),$$

où Q est la matrice limite de $\dfrac{P_t - I}{t}$, lorsque $t \to 0$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } i \neq j & Q(i, j) \geqq 0 \\ \text{si } i = j & Q(i, j) \leqq 0 \end{array}\right\} (a)$$

et, de plus, si V_0 désigne le vecteur à r lignes égales à 1,

$$QV_0 = 0. \quad (b)$$

toute matrice Q vérifiant (*a*) et (*b*) s'appelle opérateur infinitésimal strictement markovien et il lui correspond une chaîne de Markov X_t.

De même que dans le cas discret, on introduit des opérateurs infinitésimaux sous-markoviens vérifiant (*a*) et la condition

$$(b') \quad QV_0 \leqq 0.$$

Soit $K = (1, 2, \ldots, r)$. Si Q est un opérateur infinitésimal sous-markovien, $\exp(Qt)$ peut être considéré comme la restriction à $K \times K$ d'un semi-groupe de matrices de transition strictement markoviennes $(r+1, r+1)$, d'opérateur infinitésimal

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad B = -QV_0.$$

Nous appellerons système associé à Q le système associé à Q_1 de la manière définie plus haut.

3. **Objet et résumé du présent travail. Principaux résultats.** — Soit S un système physique à nombre fini d'états *r*. Il a une suite de lois d'évolution markoviennes, homogènes et discrètes, représentées par des matrices strictement markoviennes P_n. Nous noterons ${}^{(n)}S$ le système S muni de la loi P_n.

Soient :

${}^{(n)}X_k$ l'état de ${}^{(n)}S$ à l'instant k;

${}^{(n)}\xi_j(k)$ le nombre de passages de ${}^{(n)}S$ par j en k épreuves;

f une fonction numérique définie sur $1, 2, \ldots, r$, telle que $f(j) = u_j$.

Les sommes ${}^{(n)}S_n = \sum_{k=1}^{n} f({}^{(n)}X_k)$ ont un comportement asymptotique qui se ramène, par l'identité

$${}^{(n)}S_n \equiv \sum_{j=1}^{r} {}^{(n)}\xi_j(n)\, u_j,$$

à celui de l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$.

L'étude de lois limites possibles et de théorèmes limites centraux correspondants pour l'ensemble de variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$, convenablement normées, fait l'objet de ce travail.

On peut tout de suite faire la remarque suivante : la suite de matrices P_n est compacte au sens de la convergence par éléments. Il existe donc une sous-suite n_k et une matrice P telle que $P_{n_k} \to P$. Les lois limites possibles n'étant pas modifiées, nous pouvons supposer $P_n \to P$.

Nous emploierons pour la matrice limite P les notations exposées au paragraphe 1.

Soit R l'ensemble des nombres réels

$$u = (u_1, \ldots, u_r) \in (\mathrm{R})^r;$$

D_u la matrice diagonale d'éléments $\exp(iu_k)$;

V_0 le vecteur dont toutes les lignes valent 1.

E désignant l'espérance mathématique, on montre, dans la suite, que

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n} iu_j\,{}^{(n)}\xi_j(n)\right)/\{{}^{n}\mathrm{X}_0 = i_0\}\right] = (\mathrm{P}_n.\mathrm{D}_u)^n\,\mathrm{V}_0(i_0)$$

le membre de gauche est la coordonnée i_0 du vecteur caractéristique des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$.

Cette formule introduit la théorie de la perturbation d'opérateurs analytiques du type $P.D_u$. Elle permet d'affirmer que pour n assez grand et u assez petit, les spectres de $P_n.D_u$ et de P sont voisins, les projecteurs sur un ensemble spectral $\sigma_{i,n,u}$ de $P_n.D_u$ voisin d'une valeur propre λ_i sont analytiques en u et de même dimension; si celle-ci vaut 1, $\sigma_{i,n,u}$ se réduit alors à la fonction analytique $\lambda_{i,n,u}$.

Le chapitre II envisage le cas où $P_n \equiv P$.

Lorsque P a une seule classe ergodique, Fréchet par la méthode analytique, Kolmogoroff et Doeblin par la méthode des temps de retour, Mihoc en utilisant le développement de $(P.D_u)^n$ par la formule de Perron, ont donné les théorèmes limites correspondants. En utilisant les résultats du chapitre I, qui donnent une expression asymptotique de $(P.D_{u_n})^n$, lorsque $u_n \to 0$, plus fine que celle de Perron, on parvient à montrer les théorèmes qui vont suivre.

Introduisons tout d'abord certaines notations :

Si :

$\tau, E_1, \ldots, E_s$ sont la classe des états transitoires et les classes ergodiques de P;

$(u^t, u^1, \ldots, u^s)$ les restrictions de $u = (u_1, \ldots, u_r) \in C^r$ à $\tau, E_1, \ldots, E_s$;

$D_{u^t}, D_{u^1}, \ldots, D_{u^s}$ les restrictions de D_u à $\tau, E_1, \ldots, E_s$;

$V_0^t, V_0^1, \ldots, V_0^s$ les restrictions de V_0 à $\tau, E_1, \ldots, E_s$;

$I^t, I^1, \ldots, I^s$ les restrictions de I à $\tau, E_1, \ldots, E_s$;

$\langle u^i, \underset{i}{\Pi^*} \rangle$ = produit scalaire des vecteurs u^i et $\underset{i}{\Pi^*}$ (au sens habituel de somme des produits des coordonnées);

V'_0 le vecteur à s lignes toutes égales à 1.

THÉORÈME 1. — *Si* P *a une classe ergodique* E_1 *et des états transitoires* τ, *le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires*

$$\xi_t(n), \qquad \frac{\xi_e(n) - n \underset{1}{\Pi^*_e}}{\sqrt{n}}, \qquad \text{où} \quad t \in \tau, \quad e \in E_1,$$

converge vers le vecteur valant

$$\begin{aligned} (I' - T.D_{u^t})^{-1} B_1 \Phi_1(u^1) V_0^1 \quad & \text{sur } \tau, \\ \Phi_1(u^1) V_0^1 \quad & \text{sur } E_1; \end{aligned}$$

$\Phi_1(u^1)$ *est la fonction caractéristique d'une loi de Laplace multidimensionnelle, d'ordre* $\leqq l_1 - d_1$.

THÉORÈME 2. — *Si* P *a plusieurs classes ergodiques et des états transitoires, le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires*

$$\xi_t(n), \qquad \frac{\xi_e(n)}{n}, \qquad \text{où} \quad t \in \tau, \quad e \in \bigcup_{i=1}^{s} E_i$$

converge vers le vecteur valant

$$\begin{aligned} (I' - T.D_{u^t})^{-1} \left(\sum_{j=1}^{s} B_j \exp i\left(\langle u^j, \underset{j}{\Pi^*} \rangle\right) V_0^j \right) \quad & \text{sur } \tau, \\ \exp i\left(\langle u^j, \underset{j}{\Pi^*} \rangle\right) V_0^j \quad & \text{sur } E_j. \end{aligned}$$

Le chapitre III aborde l'étude du cas général.

Koopman a commencé l'étude du cas $r = 2$, que Dobrouchine a complètement achevée. Il est bien évident que dans ce cas l'étude des lois marginales et celle de l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_i(n)$ se confondent, puisque ${}^{(n)}\xi_1(n) + {}^{(n)}\xi_2(n) = n$.

Les résultats de Dobrouchine sont les suivants :

Posons

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}, \qquad P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ \bar{q}_n & \bar{p}_n \end{pmatrix}.$$

1. P a une classe ergodique acyclique et pas d'états transitoires.

Alors $0 < \sup(p, \bar{p}) < 1$ et $\dfrac{{}^{(n)}\xi_1(n) - a_n}{b_n}$ converge en loi vers $N(0, 1)$ (loi normale de moyenne nulle, de variance 1)

$$a_n = \frac{n\bar{q}_n}{q_n + \bar{q}_n}, \qquad b_n^2 = \frac{nq_n\bar{q}_n(p_n + \bar{p}_n)}{q_n + \bar{q}_n}.$$

2. P a une classe ergodique, pas d'états transitoires et des cycles; alors nécessairement

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

a. ou bien $n(P_n - P) \to Q$, où Q est une matrice $< \infty$, et alors ${}^{(2n)}\xi_1(2n) - n$ converge en loi vers X, variable aléatoire continue sur $(-\infty, +\infty)$;

b. ou bien l'un des éléments de Q est infini, auquel cas on retrouve la loi normale de 1.

3. P a un état transitoire

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad 0 \leqq p < 1;$$

a. ou bien $n\bar{q}_n \to a$; alors ${}^{(n)}\xi_1(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire X, somme de ν variables aléatoires indépendantes et de même loi ζ_i; ν et ζ_i sont indépendantes, ζ_i suit une loi géométrique de paramètre p, $\nu - 1$ une loi de Poisson de paramètre a; résultats symétriques si c'est 2 qui est transitoire;

b. ou bien $n\bar{q}_n \to \infty$; alors $\dfrac{{}^{(n)}\xi_1(n)}{b_n} - a_n$ converge vers $N(0, 1)$.

4. P a deux classes ergodiques :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a. ou bien $n(P_n - P) \to \infty$, auquel cas on a la loi normale $N(0, 1)$;

b. ou bien $n\bar{q}_n \to a$, $nq_n \to \infty$;

alors la variable aléatoire $q_n\, {}^{(n)}\xi_1(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire à valeurs entières, somme de ν variables aléatoires indépen dantes et de même loi ζ_i; ζ_i a une loi exponentielle et $\nu - 1$ une loi de Poisson de paramètre a, ζ_i et ν sont indépendantes.

Résultats analogues si $nq_n \to a$, $n\bar{q}_n \to \infty$.

c. ou bien $n\bar{q}_n \to a$, $nq_n \to b$.

Dans ce cas, $\frac{{}^{(n)}\xi_1(n)}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, qui peut s'interpréter comme le temps de séjour dans l'état 1 pendant un temps unité d'un processus de Markov continu à deux états, d'opérateur infinitésimal

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

Dans tous ces théorèmes, l'état initial est 1.

L'extension du travail de Dobrouchine au cas d'un processus à nombre fini d'états $r > 2$ s'est faite par l'étude des lois marginales limites possibles et des théorèmes limites centraux correspondants.

Ilyachenko utilise la méthode des temps de retour à un état donné et l'expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $\alpha_n \xi_{1,n,t}$ où $\xi_{1,n,t}$ est le nombre de passages par l'état 1 en $[nt]$ épreuves ($[\ ]$ = partie entière), la loi d'évolution étant P_n. Il retrouve certaines lois limites de Dobrouchine et donne d'autres lois que nous pouvons également retrouver d'après nos résultats.

Meshalkin a fait une étude plus fine des lois marginales limites possibles, en utilisant une méthode analytique et l'interprétation probabiliste des mineurs centraux de la matrice I — P (I, matrice identité, P matrice strictement markovienne).

Venons-en aux résultats du chapitre III.

Lorsque P a plusieurs classes ergodiques (resp. des états transitoires), les restrictions de P_n à une classe P-ergodique (resp. aux états P-ergodiques), forment une suite de matrices sous-markoviennes convergeant vers une matrice strictement markovienne n'ayant qu'une (resp. au moins une) classe ergodique et pas d'états transitoires. De telles matrices sont envisagées dans la suite.

Dans les théorèmes 3.1 et 3.2, on considère une suite P_n de matrices sous-markoviennes, convergeant vers P strictement markovienne, n'ayant qu'une classe ergodique et pas d'états transitoires. Soit $K = (1, 2, \ldots, r)$, si P est une matrice (r, r).

Soit :

$\mu_n = nw + O(1)$, un entier > 0;

${}^{(n)}\xi_i(\mu_n)$ le nombre de passages par i d'un système sous-markovien ${}^{(n)}S$ lié à P_n en μ_n épreuves;

${}^{(n)}X_k$ l'état de ${}^{(n)}S$ à l'instant k;

${}^{(n)}A_{\mu_n}$ l'événement : ${}^{(n)}S$ reste en K jusqu'à l'instant μ_n au moins;

$\mathbf{I}_{{}^{(n)}A_{\mu_n}}$ son indicateur;

$\lambda_{0,n}$ la valeur propre positive maximale de P_n.

Les théorèmes 3.1 et 3.2 donnent des expressions asymptotiques de $(P_n . D_{u_n})^{\mu_n}$, lorsque $u_n \to 0$, en particulier pour $\mu_n = r \pmod d$, d étant le nombre de classes cycliques de P.

En interprétant $(P_n . D_{u_n})^{\mu_n}(i_0, j)$ comme

$$(1) \qquad E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_{n,j}\, {}^{(n)}\xi_j(\mu_n)\right)\mathbf{I}_{{}^{(n)}A_{\mu_n}}\mathbf{I}_{\{{}^{(n)}X_{\mu_n}=j\}}/\{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right]$$

on montre que si $n(1 - \lambda_{0,n}) \to s$,

a. $\Pr({}^{(n)}A_{\mu_n}/\{{}^{(n)}X_0 = i_0\}) \to \exp(-sw)$;

b. $$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n)}{n}\right)\mathbf{I}_{{}^{(n)}A_{\mu_n}}/\{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right] \to \exp(-sw)\exp(iw\langle u, \Pi^*\rangle)\, V_0(i_0).$$

c. Il existe une suite de constantes ${}^{(n)}a_i(\mu_n)$ telles que

$$E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{r} u_j\left(\frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n) - {}^{(n)}a_j(\mu_n)}{\sqrt{n}}\right)\right)\mathbf{I}_{{}^{(n)}A_{\mu_n}}/\{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right] \to \exp(-sw)\,\Phi(uw),$$

Φ et Π^* étant relatives à la matrice limite P.

En particulier, si P_n est strictement markovienne, et si $\mu_n = n$, la condition $n(1 - \lambda_{0,n}) \to s$ est toujours vérifiée et l'ensemble des variables aléatoires $\dfrac{{}^{(n)}\xi_j(n) - {}^{(n)}a_j(n)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi multidimensionnelle de fonction caractéristique Φ relative à P.

Considérons maintenant une suite de matrices sous-markoviennes P_n, convergeant vers une matrice P strictement markovienne, ayant s classes ergodiques $E_1, \ldots, E_s$ et pas d'états transitoires, à laquelle nous appliquerons les notations du paragraphe 1. On cherche le comportement asymptotique de $\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}(i_0, j)$, μ_n étant de la forme $nt + O(1)$, i_0 appartenant à E_α et j à E_β.

Soit ${}^{(n)}S$ un système sous-markovien lié à P_n, ${}^{(n)}\zeta_j(\mu_n)$, ${}^{(n)}X_k$, ${}^{(n)}A_{\mu_n}$ ont la même signification que ci-dessus, et la formule (1) est encore valable.

Soit ${}^{(n)}A_{\alpha, k_1, \ldots, k_{l-1}, \beta, r_1, \ldots, r_{l+1}, \mu_n}$, noté plus brièvement ${}^{(n)}A_{\alpha, k_i, \beta, r_i, l, \mu_n}$ l'événement : ${}^{(n)}S$ reste en K au moins jusqu'à l'instant $\mu_n + 1$, va successivement dans les classes ergodiques — P $E_\alpha, E_{k_1}, \ldots, E_{k_{l-1}}, E_\beta$, restant dans les classes E_{k_i} un temps τ_i tel que $\tau_i - 1 = r_{i+1} \pmod d$.

Les lemmes 3.1 et 3.2 permettent alors d'écrire

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n)}{n}\right) \mathbf{1}_{{}^{(n)}\Lambda_{\alpha, k_i, \beta, r_i, l, n}} \mathbf{1}_{\{{}^{(n)}X_{\mu_n} = j\}} / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right].$$

comme une intégrale portant sur les durées de séjour relatives dans chaque classe ergodique successive. Cette intégrale contient des termes du type de ceux envisagés aux théorèmes 3.1 et 3.2. Si l'on remplace ces termes par une approximation déduite de ces théorèmes, et si l'on somme les intégrales ainsi obtenues par rapport à k_i, r_i, l, on montre qu'on obtient alors une approximation à $o(1)$ de $\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}(i_0, j)$ lorsque les conditions suivantes sont réunies (lemmes 3.3, 3.4, 3.5) :

a. $\mu_n = nt + O(1)$;

b. $n\left(1 - \underset{i}{\lambda}_{0, n}\right) \to q_i$, où $\underset{i}{\lambda}_{0, n}$ désigne la valeur propre maximale de la restriction de P_n à $E_i \times E_i$, notée $\underset{i}{R}_n$;

c. $n \underset{i, j}{S_n}$ reste bornée, où $\underset{i, j}{S_n}$ est la restriction de P_n à $E_i \times E_j$.

Si, de plus, $n \langle \underset{i}{\Pi}^*, \underset{i, j}{S_n} V_0^j \rangle \to q_i^j$, avec les notations du paragraphe 1, alors c est remplie et $\sum_{j \in E_\beta} \left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}(i_0, j)$ converge vers la série

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1}} \int_{Q_{l, t}} \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \ldots \exp(-q_{k_\beta} w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l,$$

$$Q_{l, t} = \left\rangle w : \begin{array}{ll} w_i \geq 0, & i = 1, \ldots, l+1 \\ \sum_{i=1}^{l+1} w_i = t & \end{array} \right\langle$$

On en déduit immédiatement le théorème 3.4 donnant la loi limite de l'ensemble des variables aléatoires $\frac{{}^{(n)}\xi_i(n)}{n}$, dans le cas P_n strictement markovien convergeant vers P.

Soit Q la matrice (s, s) d'éléments q_i^j, $i \neq j$, $q_i^i = -q_i$.

On montre que Q est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu sous-markovien (resp. strictement markovien), lorsque P_n est sous-markovienne (resp. strictement markovienne).

Soit S_c le système associé à Q. Il a donc s états possibles dans le cas strictement markovien, $s + 1$ états possibles dans le cas sous-markovien.

Soit $K_1 = \{ 1, 2, \ldots, s \}$.

Soit $T_i(t)$ la durée de séjour de S_c dans l'état i pendant un intervalle de temps $(0, t)$, Z_t l'état de S_c à l'instant t.

Soit A_t l'événement : S_c reste en K_1 au moins jusqu'à t. Alors la limite trouvée au corollaire 3.3 s'écrit

$$E\left[\exp i\left(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\right) 1_{A(t)}/\{ Z_0 = \alpha \}\right], \qquad \text{avec} \quad v_j = \langle u^j, \underset{j}{\Pi^\star}\rangle.$$

Les théorèmes suivants calculent cette expression : si V est la matrice diagonale d'éléments v_j, si V'_0 est le vecteur à s lignes égales à 1, alors, dans des conditions du corollaire 3.3,

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0(i_0) \to \exp((Q + iV)t) V'_0(\alpha) \qquad \text{si} \quad i_0 \in E_\alpha.$$

On obtient, en particulier ainsi, la loi limite du théorème 3.4.

Considérons dans ce dernier cas le processus $Z_n(t)$ valant i si ${}^{(n)}X_{[nt]} \in E_i$ ($[nt]$ = partie entière de nt). On montre que $Z_n(t)$ converge, au sens de Prohorof, vers le processus $Z(t)$ (th. 3.7 et 3.8).

Les échanges entre classes P-ergodiques sont donc dans ce cas asymptotiquement markoviens.

Le chapitre IV envisage l'existence d'états transitoires pour la matrice limite P.

Considérons l'événement $A_{j_1, \ldots, j_{l-1}, \rho_1, \ldots, \rho_l, n}$ noté encore $A_{j_i, \rho_i, l, n}$: ${}^{(n)}S$, système de loi d'évolution strictement markovienne P_n, part d'un état P-ergodique et revient à l'instant n dans les états P-ergodiques, ayant passé dans les états P-transitoires des temps $j_1 + 1, \ldots, j_{l-1} + 1$, et des temps τ_i dans les états ergodiques tels que $\tau_i - 1 = \rho_i \pmod d$.

Lorsque P a plusieurs classes ergodiques, on étudie

$$E\left[\exp\left(\sum_{j\in\tau} iu_j {}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} iu_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\right)/\{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \}\right]$$
$$= \sum_{l, j_i, r_i} E\left[\exp\left(\sum_{j\in\tau} iu_j {}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} iu_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\right) 1_{A_{j_i, \rho_i, l, n}}/\{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \}\right].$$

Cette dernière expression peut s'écrire comme une somme sur j_i, ρ_i, l d'intégrales par rapport aux fréquences des séjours successifs dans les états ergodiques. Ces intégrales contiennent des termes du type de ceux envisagés aux lemmes 3.3, 3.4 et 3.5; si on les remplace par une approximation déduite de ces lemmes (en supposant donc que les conditions de ces lemmes sont vérifiées pour la restriction de P_n à $E \times E$), et si de plus, Q_n désignant la restriction de P_n à $E \times \tau$, nQ_n reste borné, on obtient, en sommant sur l, j_i, ρ_i les intégrales ainsi approchées, une approximation à o (1) de

$$E\left[\exp\left(\sum_{j\in\tau} iu_j\, {}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} iu_k \frac{1}{n}\, {}^{(n)}\xi_k(n)\right) / \{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \} \right].$$

Si les conditions du corollaire 3.3 sont remplies pour la restriction de P_n à $E \times E$ et si, de plus, $n \underset{i}{\Pi} Q_{i,n} \to S_i$ ($Q_{i,n}$ désignant la restriction de P_n à $E_i \times \tau$), on montre alors que

$$E\left[\exp\left(\sum_{j\in\tau} iu_j\, {}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} iu_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\right) / \{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \} \right]$$

$$\to (I' - T.D_{u'})^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} B_\alpha V_0^\alpha \exp(\Lambda(u') + Q + iV)\, V_0'(\alpha)\right) \qquad \text{si } i_0 \in \tau,$$

$$\exp(\Lambda(u') + Q + iV)\, V_0'(\alpha) \qquad \text{si } i_0 \in E_\alpha;$$

$\Lambda(u')$ décrit les passages des états ergodiques aux états transitoires

$$(\Lambda(u'))(\alpha, \beta) = \langle \underset{\alpha}{\Pi}^*, S_\alpha . D_{u'}(I' - T.D_{u'})^{-1}) B_\beta V_0^\beta \rangle \quad (\text{th. } 4.2).$$

Lorsque P a une classe ergodique et des états transitoires, on peut faire des approximations analogues en utilisant les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2.

On trouve finalement que l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_t(n)$, $\dfrac{{}^{(n)}\xi_e(n) - a_e(n)}{\sqrt{n}}$, où $t \in \tau$, $e \in E_1$, converge en loi vers l'élément aléatoire multidimensionnel de fonction caractéristique

$$(I' - T.D_{u'})^{-1} \exp(\lambda(u') - q)\, \Phi_1(u^1)\, B_1 V_0^1(i_0) \qquad \text{si } i_0 \in \tau,$$

$$\exp(\lambda(u^t) - q)\, \Phi_1(u^1)\, V_0^1 \quad (i_0) \qquad \text{si } i_0 \in E_1,$$

avec

$$\lambda(u^t) = \langle \underset{1}{\Pi}^*, S_1 . D_{ut}(I' - T.D_{ut})^{-1} B_1 V_0^1 \rangle.$$

Sous la seule condition

$$n \underset{1}{\Pi} Q_n \to S_1 \quad (\text{th. } 4.1).$$

Le chapitre V envisage d'autres cas.

Dans la première partie, supposant que P a une seule classe ergodique et des états transitoires, la condition du théorème 4.1 n'a pas lieu, et l'on a par contre la relation

$$n^{\alpha}(\mathrm{P}_n - \mathrm{P}) \to \mathrm{S}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

P_n est supposé n'avoir pas d'états transitoires pour n assez grand. Les lemmes 5.1 et 5.2 calculent les dérivées partielles jusqu'au troisième ordre de $\lambda_0(u)$, valeur propre de $\mathrm{P}.\mathrm{D}_u$ qui $\to 1$ si $u \to 0$. Ces dérivées partielles s'annulent lorsque l'une des variables u_i par rapport à laquelle on dérive correspond à un état i P-transitoire.

L'hypothèse faite entraîne, on le montre,

$$n^{\alpha}(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \to l(u)$$

fonction analytique de u, uniformément sur $)u : \| u \| < \eta($, et la convergence uniforme locale des dérivées partielles correspondantes. $\lambda_{0,n,u}$ désigne la valeur propre de $\mathrm{P}_n.\mathrm{D}_u$ proche de $\lambda_0(u)$; le développement limité au troisième ordre de $(\lambda_{0,n,u})^n$ donne alors le théorème 5.1, qui affirme qu'il existe une normalisation sur tous les états donnant une loi limite Laplacienne, les lois marginales étant N (0, 1).

Le théorème 5.2 envisage le cas de deux classes ergodiques acycliques pour la matrice limite P, et pas d'états transitoires.

On étudie les hypothèses $n(1 - {}_1\lambda_{0,n}) \to \infty$, $n(1 - {}_2\lambda_{0,n}) \to q$.

Soit ${}^{(n)}\zeta_1(n)$ la durée totale de séjour dans E_1 au cours de n épreuves; on s'aperçoit que la loi asymptotique de ${}^{(n)}\zeta_1(n)$ est « équivalente » à celle obtenue dans le cas d'une suite p_n de matrices de transition à deux lignes et deux colonnes

$$p_n = \begin{pmatrix} {}_1\lambda_{0,n} & 1 - {}_1\lambda_{0,n} \\ 1 - {}_2\lambda_{0,n} & {}_2\lambda_{0,n} \end{pmatrix} \to p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $(1 - {}_1\lambda_{0,n})\,{}^{(n)}\zeta_1(n)$ converge vers la loi déjà donnée par Dobrouchine (loi 4 b).

Je remercie M. le Professeur Fortet de l'attention bienveillante avec laquelle il a dirigé mon travail, je remercie également M. le Professeur Neveu de m'avoir indiqué ce domaine de recherches et des nombreux conseils qu'il m'a prodigués.

Je suis très vivement reconnaissant à M. le Professeur Ehresmann d'avoir dirigé ma seconde thèse et d'avoir bien voulu présider mon jury.

CHAPITRE I.

Préliminaires. — Soit C l'ensemble des nombres complexes.

C^r est muni de la norme

$$\| z \| = \sup_i | z_i | \quad \text{si} \quad z = (z_1, \ldots, z_r) \in C^r.$$

P, matrice (r, r), définit un opérateur linéaire continu sur C^r, de norme

$$\leq \sup_i \sum_{j=1}^{r} | p_{i,j} | \quad (= \text{si } p_{i,j} \geq 0, \ \forall\, i, j = 1, \ldots, r).$$

Nous exposerons ici rapidement la théorie des opérateurs analytiques et de leur perturbation, d'après le livre de Dunford et Schwartz.

1. Opérateur analytique.

DÉFINITION 1.1. — *Soit* B *un espace de Banach,* $\mathcal{L}(B)$ *l'espace de toutes les applications linéaires continues de* B *dans* B. *Toutes les normes seront notées* $\| \ \|$. $\mathcal{L}(B)$ *est muni de la norme*

$$T \in \mathcal{L}(B), \qquad \| T \| = \sup_{f,\, \| f \| \leq 1} \| T f \|.$$

Soit $u \to T(u)$ une application de D, ouvert de C^r, dans $\mathcal{L}(B)$. $T(u)$ est dite analytique dans D si, pour tout i, $\dfrac{\partial T}{\partial u_i}$ existe dans D, au sens de la topologie de $\mathcal{L}(B)$ définie par sa norme.

2. Spectre et résolvante d'un opérateur.

— Reprenons les mêmes notations que précédemment.

Soit I l'identité de $\mathcal{L}(B)$.

DÉFINITION 1.2. — *Soit* $T \in \mathcal{L}(B)$; *l'ensemble* $\sigma(T) \subset C$, *défini de la manière suivante :*

$z \notin \sigma(T) \Leftrightarrow (T - zI)^{-1}$ *existe, s'appelle le spectre de* T; $(T - zI)^{-1}$ *pour* $z \notin \sigma(T)$, *s'appelle la résolvante de* T *en* z *et sera notée* $\mathcal{R}(z, T)$.

On montre que $\sigma(T)$ est fermé dans C et $\mathcal{R}(z, T)$ analytique sur $\complement(\sigma(T))$.

Lorsque $B = C^r$, $z \in \sigma(T) \Leftrightarrow$ déterminant $(T - zI) = 0$.

DÉFINITION 1.3. — $\sigma \subset \sigma(T)$ *est un ensemble spectral s'il est à la fois ouvert et fermé pour la topologie induite sur* σ *par* $\sigma(T)$.

Si $B = C^r$, tous les points du spectre sont des ensembles spectraux.

3. **Espace** $\mathcal{F}(T)$.

DÉFINITION 1.4. — $f \in \mathcal{F}(T) \Leftrightarrow f$ *analytique dans un ouvert* D_f *contenant* $\sigma(T)$ *et à valeurs dans* C. *Soit* C_1 *une courbe de Jordan entourant* $\sigma(T)$ *et contenue dans* D_f. *On définit l'opérateur* $f(T)$ *par la formule*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_1} f(\lambda)\,\mathcal{R}(\lambda, T)\,d\lambda.$$

4. **Projecteur**. — Soit σ un ensemble spectral, V_1 et V_2 deux voisinages ouverts disjoints de σ et $\sigma(T) - \sigma$ respectivement, f une fonction analytique valant 1 sur V_1 et o sur V_2; l'opérateur $f(T)$ correspondant s'appelle $E(\sigma)$ et est un projecteur de $\mathcal{L}(B)$, c'est-à-dire un opérateur idempotent.

De plus,

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad E(\sigma_1)(B) \cap E(\sigma_2)(B) = \{o\}.$$

Si $B = C^r$,

$$E\{\lambda_1\}\,E\{\lambda_2\} = o, \qquad \sum_{i=1}^{r} E\{\lambda_i\} = I,$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^r$ est le spectre de T.

On montre également les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1.1 :

$$\forall f \in \mathcal{F}(T), \qquad f(T) = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T - \lambda I)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda)\,E(\lambda),$$

où $\nu(\lambda) = \sup \mu \{B_{\mu-1} \subset B_\mu$ *strictement* $\}$, B_μ *étant l'espace vectoriel défini par*

$$x \in B_\mu \iff (T - \lambda I)^\mu x = o;$$

$\nu(\lambda) \leqq \mu(\lambda) =$ *dimension de* $E(\lambda)(B) =$ *ordre de la racine* λ *dans l'équation : déterminant* $[\lambda I - T] = o$

$$x \in E(\lambda)(B) \iff (T - \lambda I)^{\nu(\lambda)}(x) = o.$$

THÉORÈME 1.2. — *Si* $f(\lambda) = \lambda^n$,

$$T^n = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} [\lambda I + N_\lambda]^n\,E(\lambda),$$

où N_λ *est l'opérateur nilpotent*

$$E(\lambda)[T - \lambda I]; \qquad (N_\lambda)^{\nu(\lambda)} = o.$$

THÉORÈME 1.3. — *Soient* E_1 *et* E_2 *deux projecteurs de* $\mathcal{L}$ (B). *La relation*

$$\| E_1 - E_2 \| \leq \inf \left(\frac{1}{\| E_1 \|}, \frac{1}{\| E_2 \|} \right)$$

entraîne l'équivalence des relations suivantes :

a. dimension de E_1 (B) $= s$;
b. dimension de E_2 (B) $= s$.

5. Perturbation d'opérateurs analytiques.

THÉORÈME 1.4. — *Soit* $T \in \mathcal{L}$ (B) : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_T(\varepsilon)$ *tel que*

$$T_1 \in \mathcal{L}(B), \qquad \| T - T_1 \| < \delta_T(\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

a. $\sigma(T_1) \subset S(\sigma(T), \varepsilon)$ (*ensemble des boules ouvertes centrées sur* σ (T) *et de rayon* ε);

b. $\lambda \notin S(\sigma(T), \varepsilon) \Rightarrow \| \mathcal{R}(\lambda, T_1) - \mathcal{R}(\lambda, T) \| < \varepsilon$;

c. Si $f \in \mathcal{F}(T)$,

$$D_f \supset S(\sigma(T), \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{F}(T_1), \qquad \| f(T) - f(T_1) \| \leq M\varepsilon,$$

où, si C_1 *désigne une courbe de Jordan entourant* $S(\sigma(T), \varepsilon)$,

$$M = \sup_{z \in C_1} | f(z) | \frac{1}{2\Pi} (\text{longueur de } C_1.)$$

THÉORÈME 1.5. — *Soit* $u \in C^r$, $T(u)$ *un opérateur analytique sur* C^r. $f \in \mathcal{F}(T(0))$, D_f *son domaine de définition; il existe donc* ε_1 *tel que*

$$D_f \supset S(\sigma(T(0)), \varepsilon_1).$$

a. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\exists\, \delta_1$ *tel que*

$$\| u \| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \| T(u) - T(0) \| < \delta_{T(0)}(\varepsilon);$$

les conclusions du théorème 1.4 *sont alors valables pour* $T = T(0)$, $T_1 = T(u)$ *et* ε.

b. Soit U_1 *ouvert,* $\overline{U}_1 \subset D_f \cap \complement (S(\sigma(T(0)), \varepsilon))$. *Il existe* δ_2 *tel que*

$$\| u \| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \| T(u) - T(0) \| \leq \inf_{\lambda \in U_1} \| R(\lambda, T(0)) \|^{-1}.$$

Si $\| u \| \leq \inf(\delta_1, \delta_2)$, $f(T(u))$ est analytique en u.

Nous allons maintenant montrer un corollaire de ces théorèmes, qui nous servira directement dans notre étude.

COROLLAIRE 1.1. — *Soit* $B = C^r$.

Soit $T_n(u)$ *une suite d'opérateurs analytiques dans* C^r, *équicontinus à l'origine et tendant vers l'opérateur analytique* $T(u)$.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_j$ *constituant* $\sigma(T(o))$, x_i *un vecteur de* C^r, *tel que*

$$\| x_i \| = 1 \qquad \text{et} \qquad x_i = E(\lambda_i)(x_i).$$

Soit $y_i \in (C^r)^*$, *dual de* C^r, *tel que* $\langle y_i, x_i \rangle = 1$. y_i *peut se représenter par une matrice* $(1, r)$.

Soit

$$\varepsilon_1 = \inf_{i,j} \left(|\lambda_i - \lambda_j|, 2\| E(\lambda_i) \|, \frac{1}{\| E(\lambda_i) \|}, 2\|y_i\| \right),$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$, $N(\varepsilon)$ *et* $\eta(\varepsilon)$ *existent tels que*

$$\| u \| < \eta(\varepsilon), \qquad n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

1° *les boules ouvertes* $B(\lambda_i, \varepsilon)$, *de centre* λ_i *et de rayon* ε, *contiennent un ensemble spectral* $\sigma_{i,n,u}$ *de* $T_n(u)$ et

$$\bigcup_{i=1}^{i=s} \sigma_{i,n,u} = \sigma(T_n(u))$$

2° $E(\sigma_{i,n,u})(C^r)$ et $E(\lambda_i)(C^r)$ *ont même dimension et* $\sigma_{i,n,u} \neq \emptyset$;

3° $u \to E(\sigma_{i,n,u})$ *est analytique sur*

$$)\, u : \| u \| < \eta(\varepsilon)\, (, \qquad \forall\, n > N(\varepsilon);$$

4° *Si dimension de* $E(\lambda_i)(C^r) = 1$, $\sigma_{i,n,u}$ *n'a qu'un seul élément* $\lambda_{i,n,u}$ *et* $u \to \lambda_{i,n,u}$ *est analytique.*

Démonstration. — 1° Soit $\varepsilon > 0 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ et soit $\delta_{T(0)}(\varepsilon)$ pris comme au théorème 1.4 appliqué à $T(o)$

$$\| T_n(u) - T(o) \| \leq \| T_n(u) - T_n(o) \| + \| T_n(o) - T(o) \|,$$

$$\| T_n(u) - T_n(o) \| < \frac{1}{2} \delta_{T(0)}(\varepsilon) \qquad \text{si} \quad \| u \| < \eta_1(\varepsilon),$$

uniformément en n, par équicontinuité des T_n.

Puisque $T_n \to T$, $\exists\, N_1(\varepsilon)$, tel que $\forall\, n > N_1(\varepsilon)$,

$$\| T_n(o) - T(o) \| < \frac{\delta_{T(0)}}{2}(\varepsilon).$$

Donc

$$\| u \| < \eta_1(\varepsilon), \qquad n > N_1(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \| T_n(u) - T(o) \| < \delta_{T(0)}(\varepsilon).$$

D'après le théorème 1.4,

$$\sigma(\mathrm{T}_n(u)) \subset \mathrm{S}(\sigma(\mathrm{T}(o)), \varepsilon) = \bigcup_{i=1,\ldots,s} \mathrm{B}(\lambda_i, \varepsilon).$$

Les boules $\mathrm{B}(\lambda_i, \varepsilon)$ sont disjointes, chacune contient un ensemble spectral de $\mathrm{T}_n(u)$, $\sigma_{i,n,u}$ et

$$\bigcup_{i=1}^{r} \sigma_{i,n,u} = \sigma(\mathrm{T}_n(u)).$$

Donc, si

$$\eta(\varepsilon) \leqq \eta_1(\varepsilon), \qquad \mathrm{N}(\varepsilon) \geqq \mathrm{N}_1(\varepsilon),$$

le 1° est démontré.

2° Soit $f_i = 1$ sur $\mathrm{B}(\lambda_i, \varepsilon')$, o sur $\mathrm{B}(\lambda_j, \varepsilon')$, $j \neq i$, où $\varepsilon < \varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Soit $\mathrm{B}^*(\lambda_j, \varepsilon)$ la frontière de $\mathrm{B}(\lambda_j, \varepsilon)$.

Si $\|u\| < \eta_1(\varepsilon)$ et $n > \mathrm{N}_1(\varepsilon)$,

$$f_i \in \mathcal{F}(\mathrm{T}_n(u))$$

et l'on a

$$f_i(\mathrm{T}) = \mathrm{E}(\lambda_i), \qquad f_i(\mathrm{T}_n(u)) = \mathrm{E}(\sigma_{i,n,u}),$$

en vertu des théorèmes précédents.

En fait,

$$f_i(\mathrm{T}) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{\mathrm{B}^*(\lambda_i,\varepsilon)} \mathcal{R}(\lambda, \mathrm{T}(o))\, d\lambda,$$

$$f_i(\mathrm{T}_n(u)) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{\mathrm{B}^*(\lambda_i,\varepsilon)} \mathcal{R}(\lambda, \mathrm{T}_n(u))\, d\lambda$$

en prenant comme courbe de Jordan entourant $\sigma(\mathrm{T}_n(u))$

$$\bigcup_k \mathrm{B}^*(\lambda_k, \varepsilon),$$

circonférences disjointes, et en remarquant que $f_i(\lambda) = 0$ sur $\mathrm{B}^*(\lambda_j, \varepsilon)$, $j \neq i$, $= 1$ si $j = i$.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\|\mathrm{E}(\sigma_{i,n,u}) - \mathrm{E}(\lambda_i)\| &\leqq \sup_{\lambda \in \mathrm{B}^*(\lambda_i,\varepsilon)} \|\mathcal{R}(\lambda, \mathrm{T}_n(u)) - \mathcal{R}(\lambda, \mathrm{T}(o))\| \frac{1}{2\Pi} l(\mathrm{B}^*(\lambda_i, \varepsilon))\\ &\leqq \varepsilon^2, \qquad \text{en vertu des résultats du théorème 1.4.}\end{aligned}$$

D'autre part, puisque

$$\varepsilon < \frac{1}{2\|\mathrm{E}(\lambda_i)\|} \qquad \text{et que} \qquad \|\mathrm{E}(\lambda_i)\| \leqq \|\mathrm{E}(\lambda_i)\|^2,$$

on a $\varepsilon < \frac{1}{2} < 1$, puisque $E(\lambda_i) \neq 0$, donc

$$\| E(\sigma_{i,n,u}) - E(\lambda_i) \| < \varepsilon.$$

Alors

$$\| E(\sigma_{i,n,u}) \| \geqq \| E(\lambda_i) \| - \varepsilon > 0$$

par hypothèse, donc

$$E(\sigma_{i,n,u}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{i,n,u} \neq \emptyset.$$

D'autre part, la relation

$$\varepsilon < \frac{1}{2 \| E(\lambda_i) \|}$$

entraîne, pour $\| u \| < \eta_1(\varepsilon)$ et $n > N_1(\varepsilon)$,

$$\| E(\sigma_{i,n,u}) - E(\lambda_i) \| < \varepsilon < \frac{1}{2} \frac{1}{\| E(\lambda_i) \|} < \frac{1}{\| E(\lambda_i) \| + \varepsilon}$$
$$\leqq \inf \left[\frac{1}{\| E(\lambda_i) \|} ; \frac{1}{\| E(\sigma_{i,n,u}) \|} \right],$$

donc, d'après le théorème 1.3, $E(\sigma_{i,n,u})$ et $E(\lambda_i)$ ont la même dimension, ce qui démontre la deuxième partie du corollaire.

3° Examinons maintenant l'analyticité de $E(\sigma_{i,n,u})$.

Soient η_2 et N_2, analogues à η_1 et N_1, mais relatifs à $\frac{\varepsilon}{4}$.

Alors

$$\sigma_{i,n,u} \subset B\left(\lambda_i, \frac{\varepsilon}{4}\right), \qquad \forall u, n, \text{ vérifiant } \| u \| < \eta_2,\ n > N_2,$$

$S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ est telle que, pour $n > N_2$, $\| u \| < \eta_2$,

$$1^\circ \quad \sigma_{i,n,u} \subset S\left(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \iff \sigma(T_n(u)) \subset S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (a),$$

$$2^\circ \quad S\left(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \supset B\left(\lambda_i, \frac{\varepsilon}{4}\right) \iff S\left(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (b);$$

$$3^\circ \quad S\left(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B\left(\lambda_i, \frac{3\varepsilon}{4}\right) \iff S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset S\left(\sigma(T), \frac{3\varepsilon}{4}\right) \quad (c),$$

en posant

$$T_n = T_n(0), \qquad \sigma_{i,n} = \sigma_{i,n,0}.$$

Pour tout i, f_i a un domaine contenant $S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right)$, pour $n \geqq N_2$.

La condition $(a) \Rightarrow f_i \in \mathcal{F}(T_n(u))$ pour $\| u \| < \eta_2$. Soit U_1 un ouvert tel que

$$\bar{U}_1 \subset U \cap \complement\left(S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right),$$

où $U = \bigcup_j B(\lambda_j, \varepsilon')$ est le domaine de définition des f_i. Montrons que $\inf_{\lambda \in U_1} \| \mathcal{R}(\lambda, T_n(o)) \|^{-1}$ est borné inférieurement lorsque U_1 et n varient, pour $n \geqq N_2$;

$$\bar{U}_1 \subset U \cap \complement S\left(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset U \cap \complement S\left(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

en vertu de (*b*), donc

$$\inf_{\lambda \in U_1} \| \mathcal{R}(\lambda, T_n(o)) \|^{-1} \geqq \inf_{\lambda \in U \cap \complement S\left(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4}\right)} \| R(\lambda, T_n(o)) \|^{-1}.$$

Or le théorème 1.4 entraîne

$$\| \mathcal{R}(\lambda, T_n(o)) - \mathcal{R}(\lambda, T(o)) \| < \frac{\varepsilon}{4},$$

si $\lambda \notin S\left(\sigma(T(o)), \frac{\varepsilon}{4}\right)$, pour $n \geqq N_2$.

Donc

$$\| \mathcal{R}(\lambda, T_n(o)) \| \leqq \| \mathcal{R}(\lambda, T(o)) \| + \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$\inf_{\lambda \in U_1} \| \mathcal{R}(\lambda, T_n(o)) \|^{-1} \geqq \inf_{\lambda \in U \cap \complement S\left(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4}\right)} \frac{1}{\| \mathcal{R}(\lambda, T(o)) \|} + \frac{\varepsilon}{4} = \delta_\varepsilon > 0,$$

car $\| \mathcal{R}(\lambda, T(o)) \|$ est borné uniformément en λ sur $\complement\left(S\left(\sigma(T_0), \frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$, étant une fonction de λ continue et s'annulant à l'infini sur cet ensemble. Or il existe $\eta_3(\varepsilon)$ tel que

$$\| u \| < \eta_3(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \| T_n(u) - T_n(o) \| < \delta_\varepsilon,$$

en vertu de l'équicontinuité des $T_n(u)$.

Si l'on prend

$$\eta(\varepsilon) = \inf(\eta_1(\varepsilon), \eta_2(\varepsilon), \eta_3(\varepsilon)),$$
$$N(\varepsilon) = \sup(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)).$$

Si $\| u \| < \eta(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$, les conditions du théorème 1.5 sont remplies pour tout projecteur $E(\sigma_{i,n,u})$, ce qui montre le 3°.

4° Si dimension de $E(\lambda_i)(C^r) = 1$, alors $\sigma_{i,n,u}$ se réduit à un seul élément $\lambda_{i,n,u}$. $E(\lambda_{i,n,u})$ vérifie alors

$$T_n(u) E(\lambda_{i,n,u}) x = \lambda_{i,n,u} E(\lambda_{i,n,u}) x \qquad \forall x \in C^r.$$

Soient alors x_i et y_i pris comme l'énoncé l'indique.

On a, au sens du produit scalaire habituel sur C^r,

$$\langle y_i, T_n(u)\,E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle = \lambda_{i,n,u}\langle y_i, E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle,$$

$$\lambda_{i,n,u} = \frac{\langle y_i, T_n(u)\,E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle}{\langle y_i, E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle}$$

est donc le quotient de deux fonctions analytiques. Le dénominateur est tel que si

$$\|u\| < \eta(\varepsilon),\ n > N(\varepsilon),\quad |\langle y_i, E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle - \langle y_i, E(\lambda_i)\,x_i\rangle|$$
$$\leqq \|y_i\|.\|E(\lambda_{i,n,u}) - E(\lambda_i)\|.\|x_i\| \leqq \varepsilon\|y_i\|.\|x_i\| = \varepsilon\|y_i\| < 1$$

par hypothèse. Comme $\langle y_i, E(\lambda_i)\,x_i\rangle = 1$ par hypothèse, on a bien

$$\langle y_i, E(\lambda_{i,n,u})\,x_i\rangle \neq 0 \quad \text{si} \quad \|u\| < \eta(\varepsilon),\ n > N(\varepsilon).$$

Donc $\lambda_{i,n,u}$ est analytique dans le domaine $\|u\| < \eta(\varepsilon)$, si $n > N(\varepsilon)$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Soit S un système à nombre fini d'états r, de matrice de transition P; $\xi_i(n)$ le nombre de passage de S par i en n épreuves.

L'utilisation de la méthode des temps de retour, due à Doeblin et Feller, permet de démontrer aisément les théorèmes suivants, donnant les lois marginales limites possibles de $\xi_i(n)$, i_0 étant l'état initial.

1° i_0 ergodique :

a. i transitoire ou

$i \notin$ classe ergodique de $i_0 \Rightarrow \xi_i(n) \equiv 0$;

b. i ergodique, i et i_0 appartiennent à la même classe

$$\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, D_i^3\,\Pi_i^{*2}),$$

où $N(0, a)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{a}$;
$\Pi_i^* = i^{\text{ième}}$ coordonnée de la probabilité invariante relative à P;
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence en loi;
D_i, variance du temps du temps de retour à l'état i.

2° i_0 transitoire :

a. i transitoire,

$$\xi_i(n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \qquad P[X = k] = f^*(i_0, i)\,(f^*(i, i))^{k-1}(1 - f^*(i, i)),$$

$f^*(i, j)$ désigne la probabilité, partant de i, d'atteindre j en un temps fini;

b. i ergodique,

$$\frac{\xi_i(n)}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \qquad X = 0 \quad \text{avec probabilité } 1 - f^*(i_0, i);$$
$$= \Pi_i^* \quad \text{avec probabilité } f^*(i_0, i);$$

c. Si, de plus, P n'a qu'une seule classe ergodique, alors

$$f^*(i_0, i) = 1$$

et

$$\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, D_i^2 \Pi_i^{*2}).$$

Nous étudierons ici les lois limites de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_i(n)$, avec les mêmes normalisations que ci-dessus. Nous utiliserons les résultats du chapitre I, notamment la définition intégrale de $f(T)$ et ses conséquences.

Soit P une matrice sous-markovienne (r, r), S est un système lié à P; $K =)1, 2, \ldots, r($, X_k l'état de S à l'instant k;

A_n l'événement : S reste dans K au moins jusqu'à n;

$\xi_j(n)$ le nombre de passages de S par j en n épreuves.

Avec les notations de l'introduction, on a le

THÉORÈME 2.1 :

$$E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{r} iu_k \xi_k(n)\right) I_{A_n} I_{\{X_n = j\}} / \{X_0 = i_0\}\right] = (P.D_u)^n(i_0, j),$$

où i_0, $j \in K$.

Démonstration. — Désignons par $\overset{(n)}{\Phi}(i_0, j)$ le membre de gauche de l'égalité à démontrer.

On a

$$\overset{(1)}{\Phi}(i_0, j) = p(i_0, j)\exp(iu_j),$$

$$\overset{(n+1)}{\Phi}(i_0, j) = \sum_{k \in K} E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n} iu_j \xi_j(n+1)\right) I_{A_{n+1}} I_{\{X_1 = k\}} I_{\{X_{n+1} = j\}} / \{X_0 = i_0\}\right]$$
$$= \sum_{k \in K} p(i_0, k)\exp(iu_k)\overset{(n)}{\Phi}(k, j)$$

en vertu de la propriété de Markov et de l'homogénéité.

Donc

$$\overset{(n+1)}{\Phi}(i_0, j) = \sum_{k \in K} \overset{(1)}{\Phi}(i_0, k)\overset{(n)}{\Phi}(k, j).$$

Si $\overset{(k)}{\Phi}$ désigne la matrice d'éléments $\overset{(k)}{\Phi}(i, j)$, $i, j \in K$, alors

$$\overset{(n+1)}{\Phi} = \overset{1}{\Phi} . \overset{(n)}{\Phi} \Rightarrow \overset{(n)}{\Phi} = \left(\overset{1}{\Phi}\right)^n = (P . D_u)^n.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 2.1. — *Si* P *est strictement markovienne, alors*

$$E\left[\exp\left(\sum_{k=1}^{r} iu_j \xi_j(n)\right) / \{X_0 = i_0\}\right] = (P . D_u)^n V_0.$$

Démonstration. — Résulte immédiatement du théorème 2.1.

Corollaire 2.2. — *Soit* S *ayant une matrice de transition strictement markovienne.*

Soit $S_1, \ldots, S_k$ *une partition de l'espace des états de* S.

Soit $\alpha, k_1, \ldots, k_{l+1}, \beta$, *une suite de nombres entiers* $\geqq 0$, $\leqq k$, *chacun d'eux étant différent du suivant et du précédent.*

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l+1}$ *une suite d'entiers* $\geqq 1$, *tels que*

$$\sum \lambda_i = n - l.$$

Soit $A_{\alpha, k_i, \beta, \lambda_i}$ *l'événement :* S *passe un temps* λ_1 *dans* S_α, *puis va dans* S_{k_1} *où il reste un temps* $\lambda_2, \ldots,$ *va dans* S_{k_i} *où il reste* $\lambda_{i+1}, \ldots$ *aboutit dans* S_β *où il reste un temps* λ_{l+1}. i_0 *l'état initial,* j *l'état final :* $i_0 \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$. *Alors*

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \xi_j(n)\right) I_{A_{\alpha, k_i, \beta, \lambda_i}} I_{\{X_n = j\}} / \{X_0 = i_0\}\right]$$
$$= (P_{\alpha, \alpha} . D_{u^\alpha})^{\lambda_1 - 1} P_{\alpha, k_1} . D_{u^{k_1}} (P_{k_1, k_1} . D_{u^{k_1}})^{\lambda_2 - 1} (P_{k_1, k_2} . D_{u^{k_2}}) \ldots$$
$$\times (P_{k_i, k_i} . D_{u^{k_i}})^{\lambda_{i+1} - 1} P_{k_i, k_{i+1}} . D_{u^{k_{i+1}}} \ldots (P_{\beta, \beta})^{\lambda_{l+1} - 1} (i_0, j),$$

P_{k_i, k_j} *désignant la restriction de* P *à* $S_{k_i} \times S_{k_j}$, $D_{u^{k_i}}$ *la restriction de* D_u *à* $S_{k_i} \times S_{k_i}$.

Démonstration. — Cette identité se démontre aisément par récurrence : il suffit de vérifier qu'on a

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \xi_j(n)\right) I_{A_{\alpha, k_i, \beta, \lambda_i}} I_{\{X_n = j\}} / \{X_0 = i_0\}\right]$$
$$= \sum_{\substack{k \in S_\alpha \\ h \in S_{k_1}}} E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \xi_j(\lambda_1 - 1)\right) I_{A_{\alpha, \lambda_1}} I_{\{X_{\lambda_1 - 1} = k\}} / \{X_0 = i_0\}\right]$$
$$\times P_{\alpha, k_1}(k, h) \exp(iu_h) E\left[\exp\left(\sum iu_j \xi_j(n - \lambda_1 + 1)\right) I_{A_{k_1, \ldots, \beta, \lambda_2, \ldots, \lambda_l}} / \{X_0 = h\}\right],$$

formule qui résulte de la propriété de Markov et de l'homogénéité du processus.

Comme

$$E\left[\exp\left(\sum iu_j\, \xi_j(\lambda_1 - 1)\right) \mathrm{I}_{A_\alpha,\, \lambda_1} \mathrm{I}_{\{X_{\lambda_1 - 1} = k\}} / \{X_0 = i_0\}\right] = (P_{\alpha,\alpha} . D_{u^\alpha})^{\lambda_1}(i_0, k)$$

en vertu du théorème 2.1, la récurrence conduit bien à la formule indiquée.

C. Q. F. D.

CAS I : P *n'a qu'une seule classe ergodique et pas d'états transitoires.*

On sait qu'alors l'équation $\Delta(s\,\mathrm{I} - \mathrm{P}) = 0$ a d racines de module 1, qui sont des racines simples de cette équation et qui sont racines de l'équation $\lambda^d - 1 = 0$. Il y a alors d classes cycliques. Les autres racines de l'équation aux valeurs propres ont un module $\leqq r < 1$.

THÉORÈME 2.2. — *Dans les conditions de* (I), *il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\| u \| < \eta, \qquad u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathrm{C}^r \quad \Rightarrow$$

1° $$(\mathrm{P}.\mathrm{D}_u)^n = \sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_i(u))^n \,\mathrm{E}(\lambda_i(u)) + \mathrm{A}(n, u);$$

$(\lambda_i(u))_{i=0}^{i=d-1}$ *sont les valeurs propres de* $\mathrm{P}.\mathrm{D}_u$ *qui tendent vers les racines de module* 1 *de l'équation aux valeurs propres de* P.

$(\mathrm{E}(\lambda_i(u)))_{i=0}^{i=d-1}$ *sont les projecteurs correspondants.*

2° $\| \mathrm{A}(n, u) \| \leqq \mathrm{M}\rho^n$, où $0 \leqq \rho < 1$, *uniformément en u, sur* $)\, u : \| u \| < \eta\, ($.

3° *Les applications* $u \to \lambda_i(u)$ et $u \to \mathrm{E}(\lambda_i(u))$ *sont analytiques en u,*

$$\lambda_i(0) = \lambda_i, \qquad \lambda_0(0) = 1.$$

4° *Si* $u_n \to 0$, *alors*

$$(\mathrm{P}.\mathrm{D}_{u_n})^n \mathrm{V}_0 - (\lambda_0(u_n))^n \mathrm{V}_0 \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Démonstration. — $\mathrm{T}(u) = \mathrm{P}.\mathrm{D}_u$ est un opérateur analytique sur C^r. En prenant $\mathrm{T}_n(u) \equiv \mathrm{T}(u)$, le corollaire 1.1 s'applique aux valeurs propres $1, \ldots, \lambda_{d-1}$ de $\mathrm{T}(0) = \mathrm{P}$, ce qui nous donne le 3°, avec le η du corollaire 1.1.

Le théorème 1.2 conduit à la formule du 1°, en prenant

$$\mathrm{A}(n, u) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(\mathrm{P}.\mathrm{D}_u) \\ \lambda \notin \lambda_1(u), \ldots, \lambda_{d-1}(u), \lambda_0(u)}} (\lambda\,\mathrm{I} + \mathrm{N}_\lambda)^n \,\mathrm{E}(\lambda)$$

et en utilisant le fait que pour $\| u \| < \eta$, $\mathrm{E}(\lambda_i(u))$ et $\mathrm{E}(\lambda_i)$ ont même dimension, ce qui entraîne

$$\nu(\lambda_i(u)) = 1, \qquad \text{donc} \quad \mathrm{N}_{\lambda_i(u)} = 0.$$

Soient $1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, r_1, \ldots, r_j$ les valeurs propres de P. Soit ε assez petit pour que les boules centrées sur ces valeurs propres et de rayon ε soient disjointes, et que celles de centres r_i soient contenues dans le cercle unité. On sait que pour $\| u \| < \eta$, chaque boule contient un ensemble spectral de $P.D_u$, les projecteurs correspondants étant de même dimension.

Soient C'_1 (resp. C''_1) la réunion des circonférences de centre λ_i (resp. r_i) et de rayon ε.

$C_1 = C'_1 \cup C''_1$ est une courbe de Jordan entourant $\sigma(P.D_u)$, pour $\| u \| < \eta$, donc

$$\begin{aligned}(P.D_u)^n &= \frac{1}{2i\Pi}\int_{C_1} \lambda^n \mathcal{R}(\lambda, P.D_u)\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\Pi}\int_{C'_1} \lambda^n \mathcal{R}(\lambda, P.D_u)\, d\lambda + \frac{1}{2i\Pi}\int_{C''_1} \lambda^n \mathcal{R}(\lambda, P.D_u)\, d\lambda;\end{aligned}$$

un calcul simple, fondé sur l'expression de $\mathcal{R}(\lambda, P.D_u)$ fournie par le théorème 1.1, entraîne

$$\sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_i(u))^n\, E(\lambda_i(u)) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C'_1} \lambda^n \mathcal{R}(\lambda, P.D_u)\, d\lambda$$

et, par conséquent,

$$A(n, u) = \frac{1}{2i\Pi}\int_{C''_1} \mathcal{R}(\lambda, P.D_u)\, \lambda^n\, d\lambda.$$

Le théorème 1.4 entraîne

$$\| \mathcal{R}(\lambda, P.D_u) - \mathcal{R}(\lambda, P) \| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \| u \| < \eta_1, \qquad \forall \lambda \in C''_1.$$

Donc

$$\| \mathcal{R}(\lambda, P.D_u) \| \leq \sup_{\lambda \in C''_1} \| \mathcal{R}(\lambda, P) \| + \varepsilon = K.$$

Donc

$$\begin{aligned}\| A(n, u) \| &\leq \frac{1}{2\Pi} K\, l(C''_1)\, \rho^n, \qquad \text{où} \quad \rho = \sup_{\lambda \in C''_1} |\lambda| \\ &= M \rho^n.\end{aligned}$$

Le 2° est donc démontré. Abordons la dernière partie du théorème.

Pour n assez grand, $\| u_n \| < \eta$ et les formules précédentes sont applicables.

D'autre part,

$$E(\lambda_i(u_n)) \to E(\lambda_i(0)) \qquad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Comme

$$\begin{aligned} E(\lambda_i(o))V_0 &= o \qquad \text{pour} \quad i \neq o, \\ &= V_0 \qquad \text{pour} \quad i = o, \end{aligned}$$

et que $A(n, u_n) \to o$ si $n \to \infty$, on a bien le résultat indiqué au 4°.

Le théorème est complètement démontré.

Dans les conditions de (I), on sait que $\frac{\xi_i(n)}{n}$ converge vers Π_i^*.

Donc

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \frac{\xi_j(n)}{n}\right) / \{X_0 = i_0\}\right] \to \exp\left(\sum_{k=1}^{r} iu_k \Pi_k^*\right) = \exp(i\langle u, \Pi^*\rangle),$$

où $\langle \ \rangle$ = produit scalaire sur C^r.

THÉORÈME 2.3 :

$$\Pi_i^* = \frac{1}{i} \frac{\partial \lambda_0(u)}{\partial u_i}.$$

Démonstration. — Le vecteur caractéristique des variables aléatoires $\frac{\xi_i(n)}{n}$ n'est autre que $\left(P.D_{\frac{u}{n}}\right)^n V_0$. Le théorème 2.2 implique que

$$\left(P.D_{\frac{u}{n}}\right)^n V_0 - \left(\lambda_0\left(\frac{u}{n}\right)\right)^n V_0 \to o.$$

L'analyticité de $\lambda_0(u)$ au voisinage de $u = o$ et un développement limité au premier ordre donnent le résultat.

THÉORÈME 2.4 (Kolmogoroff-Mihoc). — *Soit* P *vérifiant les conditions* (I).

$$\Pi^* = (\Pi_1^*, \ldots, \Pi_j^*, \ldots, \Pi_r^*),$$

la probabilité invariante relative à P.

Alors l'ensemble des variables aléatoires $\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}}$ *converge en loi vers une loi de Laplace multidimensionnelle, d'ordre* $\leq r - d$, *où* d *est le nombre de classes cycliques de* P, *de fonction caractéristique* $\Phi(u_1, \ldots, u_r)$,

$$\Phi(u_1, \ldots, u_r) = \exp\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} \Pi_j^* \xi_j^2 + 2\sum_{j,l=1}^{m} P_{j,l}\xi_j\xi_l\right),$$

où, si Q_i *et* $Q_{i,j}$ *désignent respectivement le mineur de* $p_{j,j} - 1$ *dans le déterminant de* $P - I$ *et le mineur extrait du déterminant de* $I - P$ *en* *supprimant lignes et colonnes nos i et j*

$$\xi_k = \sum_{h=1}^{r} (\delta_h^k - \Pi_h^\star)\, u_h, \qquad P_{h,k} = -\frac{Q_{h,k}}{\sum_{j=1}^{r} Q_j}.$$

Démonstration. — On sait que

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} i u_j \left(\frac{\xi_j(n) - n\Pi_j^\star}{\sqrt{n}}\right)\right) / \{X_0 = i_0\}\right)$$

$$= \left(P.D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^n V_0(i_0) \exp(-i\langle u, \Pi^\star\rangle \sqrt{n}).$$

L'application du théorème 2.2 entraîne, puisque

$$|\exp(-i\langle u, \Pi^\star\rangle\sqrt{n}| = 1,$$

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} i u_j \left(\frac{\xi_j(n) - n\Pi_j^\star}{\sqrt{n}}\right)\right) / \{X_0 = i_0\}\right]$$

$$- \left(\lambda_0\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \exp(-i\langle u, \Pi^\star\rangle\sqrt{n}) \to 0.$$

On peut écrire, pour $\| u \| < \eta$,

$$\lambda_0(u) = 1 + i\sum_{k=1}^{r} u_k \Pi_k^\star + \frac{1}{2}\sum_{i,j} u_i . u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_0(u)}{\partial u_i\, \partial u_j}\right)_{u=0} + O(\| u \|^3).$$

Donc, pour n assez grand,

$$\left\|\frac{u}{\sqrt{n}}\right\| < \eta$$

et

$$\lambda_0\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = 1 + i\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^\star \frac{u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_0(u)}{\partial u_i \partial u_j}\right)_{u=0} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\left(\lambda_0\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 + i\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^\star \frac{u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_0(u)}{\partial u_i\, \partial u_j}\right)_{u=0} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\Big(n \log(1 + Z)\Big)$$

$$= \exp\left(n\left(Z - \frac{Z^2}{2} + O(Z^3)\right)\right)$$

$$= \exp\left(ni\sum_{k=1}^{r} \frac{\Pi_k^\star u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_0(u)}{\partial u_i\, \partial u_j}\right)_{u=0} + \left(\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^\star u_k\right)^2\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Donc

$$\left(\lambda_0\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \exp\left[-\sum_{k=1}^{r} i u_k \Pi_k^\star \sqrt{n}\right]$$
$$\to \exp\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_0(u)}{\partial u_i \partial u_j}\right)_{u=0} + \left(\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^\star u_k\right)^2\right)\right].$$

Pour calculer les dérivées secondes, il suffit de dériver deux fois par rapport à u_i et u_j l'équation caractéristique de

$$\Delta[\lambda I - P.D_u] = 0.$$

Par cette méthode, Mihoc trouve le vecteur caractéristique limite indiqué dans l'énoncé du théorème. On trouve bien une loi normale multidimensionnelle, car on démontre que $\log \Phi(u_1, \ldots, u_j)$ est < 0 D'autre part, chaque classe cyclique introduit une relation entre les variables $\xi_i(n)$.

Soient, en effet, $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ les classes cycliques successives. Si $i_0 \in C_0$ et si $n = r \pmod d$, alors, si $k \leqq r$,

$$\sum_{i \in C_k} \xi_i(n) = \left[\frac{n}{d}\right] + 1;$$

si $k > r$,

$$\sum_{i \in C_k} \xi_i(n) = \left[\frac{n}{d}\right] \qquad ([\ ] = \text{partie entière}).$$

Il en résulte que la loi limite est au plus de dimension $r - d$.

Cas II : P *a des états transitoires.*

A. P *a plusieurs classes ergodiques :* Soient τ les états transitoires, $E_1, \ldots, E_s$ les classes ergodiques; T (resp $\underset{i}{R}$, B_i) la restriction de P à $\tau \times \tau$ (resp. $E_i \times E_i$, $\tau \times E_i$)

$$P = \begin{pmatrix} T & B_1 & \ldots & B_s \\ 0 & \underset{1}{R} & \ddots & 0 \\ & 0 & & \underset{s}{R} \end{pmatrix}, \qquad D_u = \begin{pmatrix} D_{u^t} & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ & D_{u^1} & \ddots & 0 \\ & & \ddots & D_{u^s} \end{pmatrix}.$$

Le problème est déjà résolu si $i_0 \notin \tau$, car alors $\xi_i(n) = 0$ si $i \notin C(i_0)$, classe ergodique de i_0 et la loi limite est alors celle de (I) pour la restriction de P à $E_i \times E_i$, si $i_0 \in E_i$. Supposons donc $i_0 \in \tau$. Il nous faut calculer $(P.D_u)^n$.

LEMME 2.1. — *Soit* M *une matrice carrée du type*

$$M=\begin{pmatrix} A & A_1 & . & A_l \\ o & B_1 & o & o \\ o & o & B_2 & o \\ . & . & . & . \\ o & o & o & B_l \end{pmatrix},$$

où A *et* B_i *sont des sous-matrices carrées de* M.

Alors

$$\text{(I)} \qquad M^k=\begin{pmatrix} A^k & \mathcal{A}_{1,k} & \mathcal{A}_{2,k} & \ldots & \mathcal{A}_{l,k} \\ o & (B_1)^k & o & \ldots & o \\ . & . & . & \ldots & . \\ o & o & o & \ldots & (B_l)^k \end{pmatrix}.$$

où

$$\mathcal{A}_{i,k}=\sum_{j=0}^{k-1} A^j A_i B_i^{k-j-1}.$$

Démonstration. — Elle se fait aisément par récurrence :

a. M a bien la forme indiquée;

b. Si M^k a la forme (1), $M^{k+1} = MM^k$ sera égal à

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} & A\mathcal{A}_{1,k}+A_1B_1^k & A\mathcal{A}_{2,k}+A_2B_2^k & \ldots & A\mathcal{A}_{l,k}+A_lB_l^k \\ o & B_1^{k+1} & o & \ldots & o \\ . & . & . & \ldots & . \\ o & o & . & \ldots & B_l^{k+1} \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme indiquée, avec

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{i,k+1} &= A\,\mathcal{A}_{i,k}+A_iB_i^k \\ &=\sum_{j=0}^{k-1} A^{j+1}A_iB_i^{k-j-1}+A_iB_i^k, \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &=\sum_{j=1}^{k} A^jA_iB_i^{k-j}+A_iB_i^k=\sum_{j=0}^{k} A^jA_iB_i^{k-j}.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.3. — *Si* P *vérifie les conditions* (II), *la restriction à* τ *du vecteur*

$$\begin{aligned}((P.D_u)^nV_0) &= (T.D_{u^t})^nV_0^t \\ &\quad+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-1}(T.D_{u^t})^j(B_i.D_{u^i})(\underset{i}{R}.D_{u^i})^{n-j-1}V_0^i,\end{aligned}$$

où

$$V_0=\begin{pmatrix} V_0^t \\ V_0^1 \\ . \\ V_0^s \end{pmatrix}.$$

LEMME 2.2. — *Soit* A_n *une matrice* (r, s) *telle que* $\| A_n \| = 1$. *Si* B_n *est une matrice* (r, s) *et si* $nB_n \to 0$, *pour tout vecteur* x *tel que*

$$A_n^n x \to L_x, \qquad (A_n + B_n)^n x \to L_x.$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que

$$\| (A_n + B_n)^n - A_n^n \| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Or cette quantité est

$$\leq |(1 + \| B_n \|)^n - 1| = \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n - 1 \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2.4. — *Soit* R *une matrice strictement markovienne à une classe ergodique et sans états transitoires*

$$\left(R . D_{\frac{u}{n}}\right)^{n-\rho} V_0 \to \exp\left[\sum_{j=1}^{r} iu_j \Pi_j^\star\right] V_0,$$

pour tout ρ *entier fixé, lorsque* $n \to \infty$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 2.2, avec $A_n = R . D_{\frac{u}{n-\rho}}$, $x = V_0$,

$$B_n = R\left(D_{\frac{u}{n}} - D_{\frac{u}{n-\rho}}\right) \qquad nB_n = R . n\left(D_{\frac{u}{n}} - D_{\frac{u}{n-\rho}}\right)$$

et

$$n\left(\exp\frac{iu_i}{n} - \exp\frac{iu_i}{n-\rho}\right) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

COROLLAIRE 2.5 :

$$(T . D_{u^t})^j \left(B_i . D_{\frac{u^i}{n}}\right)\left(\underset{i}{R} . D_{\frac{u^i}{n}}\right)^{n-j-1} V_0^i \to (T . D_{u^t})^j B_i \exp\left(\sum_{e \in E_i} iu_e \underset{i}{\Pi}_e^\star\right) V_0^i.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 2.5. — *La fonction caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires* $\xi_i(n)$, $\frac{\xi_e(n)}{n}$, *où* $i \in \tau$, $e \in E$ *converge, si l'état initial* $i_0 \in \tau$, *vers*

$$(I^t - T . D_{u^t})^{-1}\left(\sum_{j=1}^{s} B_j \exp\left(\sum_{e \in E_j} iu_e \Pi_e^\star\right) V_0^j\right)(i_0).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que dans la série

$$\sum_{j=0}^{n-1} (T . D_{u^t})^j \left(B_i . D_{\frac{u^i}{n}}\right)\left(\underset{i}{R} . D_{\frac{u^i}{n}}\right)^{n-j-1} V_0^i,$$

on peut passer à la limite terme à terme.

Or

$$\|(T.D_{u^t})^j\| \leq \|(T)^j\| < r^j \quad \text{pour } j \text{ assez grand,}$$

où $0 < r < 1$.

Comme

$$\left\| \left(B_i.D_{\frac{u^i}{n}}\right)\left(\underset{i}{R}.D_{\frac{u^i}{n}}\right)^{n-j-1} V_0^i \right\| \leq 1,$$

on a bien le droit de passer à la limite terme à terme.

B. P *n'a qu'une seule classe ergodique :* P est alors de la forme

$$P = \begin{pmatrix} T & \underset{1}{B} \\ 0 & \underset{1}{R} \end{pmatrix}.$$

On sait alors que

$$(P.D_u)^n V_0(i_0) = (T.D_{u^t})^n V'_0(i_0) + \sum_{j=0}^{n-1} (T.D_{u^t})^j B_1.D_{u^1}(\underset{1}{R}.D_{u^1})^{n-j-1} V_0^1(i_0).$$

La première partie nous a montré que

$$\left(\underset{1}{R}.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^n \exp\left(-i(\langle u_1, \underset{1}{\Pi}^\star\rangle)\sqrt{n}\right) V_0^1 \to \Phi_1(u^1) V_0^1.$$

Lemme 2.3 :

$$\left(\underset{1}{R}.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{n-\rho} \exp\left(-i(\langle u_1, \underset{1}{\Pi}^\star\rangle)\sqrt{n}\right) V_0^1 \to \Phi_1(u^1) V_0^1.$$

où ρ *est entier* > 0 *fixé.*

Démonstration. — L'expression ci-dessus est identique à

$$\left[\underset{1}{R} \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^\star\rangle)\frac{\sqrt{n}}{n-\rho}\right) D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right]^{(n-\rho)} V_0^1.$$

Posons $n_1 = n - \rho$

$$A_{n_1} = \underset{1}{R} \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^\star\rangle)\frac{\sqrt{n}}{n-\rho}\right) D_{\frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}}},$$

$$B_{n_1} = \underset{1}{R} \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^\star\rangle)\frac{\sqrt{n}}{n-\rho}\right)\left(D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} - D_{\frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}}}\right),$$

$$n_1 B_{n_1} \to 0 \quad \text{si} \quad n\left(\exp i\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) - \exp i\left(\frac{u}{\sqrt{n-\rho}}\right)\right) \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad niu\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-\rho}}\right) \to 0, \qquad \Longleftrightarrow \quad \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0,$$

ce qui est vérifié. Le lemme 2.2 s'applique avec $x = V_0^1$.

D'autre part,

$$(A_{n_1})^{n_1}V_0^1 = \left(\underset{1}{R}.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}}}\right)^{n-\rho} \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^*\rangle)\sqrt{n}\right)$$

$$= \left(\underset{1}{R}.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}}}\right)^{n-\rho} \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^*\rangle)\sqrt{n-\rho}\right)$$

$$\times \exp\left(-i(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^*\rangle)(\sqrt{n}-\sqrt{n-\rho})\right)V_0^1.$$

Mais $\sqrt{n}-\sqrt{n-\rho}\to 0$, donc

$$\exp\left(-\sum_e iu_e \Pi^*_e(\sqrt{n}-\sqrt{n-\rho})\right)\to 1$$

et

$$(A_{n_1})^{n_1}V_0^1 \to \Phi_1(u^1)V_0^1,$$

le lemme 2.2 donne le résultat.

THÉORÈME 2.6. — *Si i_0 est un état transitoire, le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires* $\xi_i(n)$, $\frac{\xi_e(n)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,\underset{1}{\Pi}^*_e$, *où* $i\in\tau$, $e\in E_1$, *converge vers le vecteur* $(I^t - T.D_{u^t})^{-1}.B.\Phi_1(u^1)V_0^1$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que la série

$$\sum_{j=0}^{n-1}(T.D_{u^t})^j\left(B.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)\left(\underset{1}{R}.D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{n-j-1}V_0^1 \exp\left[-\sum_{e\in E_1} iu_e \underset{1}{\Pi}^*_e\sqrt{n}\right]$$

a une limite obtenue en passant à la limite terme à terme. Le même argument que celui utilisé au théorème 2.5 donne le résultat.

CHAPITRE III.

Posons donc maintenant le problème suivant :

Soit P_n une suite de matrices markoviennes (r, r), $P_n\to P$; ${}^{(n)}\xi_i(n)$ le nombre de passages par l'état i aux temps $1, \ldots, n$, la loi d'évolution étant P_n.

Trouver les lois limites de l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_i(n)$, convenablement normées, lorsque $n\to\infty$.

CAS I : P *est sans états transitoires, et n'a qu'une classe ergodique.*

THÉORÈME 3.1 :

$$\exists\, \varepsilon_1, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

$\exists\ \eta(\varepsilon)$ *et* $N(\varepsilon)$ *tels que*

$$\| u \| < \eta(\varepsilon), \; n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow$$

1° *Les boules ouvertes centrées sur* $\sigma(P)$ *et de rayon* ε *contiennent un ensemble spectral de* $P_n . D_u$; *elles sont disjointes et leur réunion contient* $\sigma(P_n . D_u)$.

2° *Soient* 1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}$ *les valeurs propres de module* 1 *de* P.

Alors chaque boule de centre λ_g *et de rayon* ε *ne contient qu'un point du spectre de* $(P_n . D_u)$, $\lambda_{g,n,u}$, *et* $u \to \lambda_{g,n,u}$ *est analytique.*

3° *Soient* $E(\lambda_{g,n,u})$ *les projecteurs correspondants. Ils projettent sur un espace à une dimension et sont analytiques.*

4° *On peut alors écrire, si* $\mu_n \to \infty$,

$$(P_n . D_u)^{\mu_n} = \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_{g,n,u})^{\mu_n} E(\lambda_{g,n,u}) + A(n, u),$$

où

$$\| A(n, u) \| \leq M \rho^{\mu_n}, \qquad 0 \leq \rho < 1.$$

Démonstration. — Les trois premiers points sont une conséquence immédiate du corollaire 1.1. Il suffit de vérifier que les applications $u \to P_n . D_u$ sont équicontinues à l'origine, ce qui est immédiat, car

$$\| P_n . D_u - P_n \| \leq \| P_n \| . \| D_u - 1 \| \leq \| D_u - 1 \|.$$

Le quatrième point se démontre de façon analogue au théorème 2.2. On a, en effet, avec les mêmes notations,

$$A(n, u) = \frac{1}{2 i \Pi} \int_{C_1''} \mathcal{R}(\lambda, P_n . D_u) \lambda^{\mu_n} d\lambda,$$

et puisque

$$\| \mathcal{R}(\lambda, P_n . D_u) \| \leq \| \mathcal{R}(\lambda, P) \| + \frac{\varepsilon}{4},$$

en vertu du corollaire 1.1, lorsque $\| u \| < \eta$ et $n \geq N$, on a le résultat désiré.

Remarque 3.1. — Nous aurions obtenu les mêmes résultats en supposant seulement P_n sous-markovienne.

THÉORÈME 3.2. — *Si P_n est une suite de matrices sous-markoviennes, tendant vers P vérifiant les conditions* (I);

Si μ_n entier $> 0 \to \infty$, alors

1°

$$a.\quad \left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n d + r_1} - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_g)^{r_1} \left(\lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{n}}\right)^{\mu_n d} E(\lambda_g) \to 0\,;$$

$$b.\quad \left(P_n . D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n d + r_2} - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_g)^{r_2} \left(\lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n d} E(\lambda_g) \to 0.$$

2° *Soit $\lambda_{0,n}$ la valeur propre > 0 maximale de P_n.*

Si $\frac{\mu_n}{n} \to w$ et $n(1 - \lambda_{0,n}) \to s$, alors

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0 \to \exp((-s + i(\langle u, \Pi^\star \rangle))w) V_0.$$

Si, en outre, $\mu_n - nw = O(1)$, alors

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} \exp\left[-i\left(\langle u, \frac{\Pi^\star_n}{\lambda_{0,n}} \rangle\right)\sqrt{n}\, w\right] V_0 \to \exp(-sw)\, \Phi(uw)\, V_0,$$

avec

$$\Pi^\star_{n,k} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_k}\right)_{v=0}.$$

Démonstration. — 1° Montrons que lorsque $n \to \infty$

$$\lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{n}} \to \lambda_g \quad \text{et} \quad E\left(\lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{n}}\right) \to E(\lambda_g)$$

$$\left(\text{resp. } \lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{\sqrt{n}}} \to \lambda_g,\ E\left(\lambda_{g,\, n,\, \frac{u}{\sqrt{n}}}\right) \to E(\lambda_g)\right).$$

Le corollaire 1.1 nous indique que $\forall\, \varepsilon > 0$ assez petit, $\exists\, N(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ tels que

$$|\lambda_{g,n,v} - \lambda_g| < \varepsilon, \qquad \| E(\lambda_{g,n,v}) - E(\lambda_g) \| < \varepsilon, \qquad \forall\, v, n$$
$$\| v \| < \eta(\varepsilon),\ n > N(\varepsilon).$$

En posant

$$N'_u(\varepsilon) = \sup\left(N(\varepsilon), \frac{\| u \|}{\eta(\varepsilon)}\right)$$

$$\left(\text{resp. } N''_u(\varepsilon) = \sup\left(N(\varepsilon), \frac{\| u \|^2}{(\eta(\varepsilon))^2}\right)\right),$$

$\forall\, n > N'_u(\varepsilon)$ (resp. $n > N''_u(\varepsilon)$), on a

$$\left|\lambda_{g,n,\frac{u}{n}} - \lambda_g\right| < \varepsilon$$

et

$$\left\| E\left(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}\right) - E(\lambda_g) \right\| < \varepsilon,$$

$$\left(\text{resp.} \left|\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}} - \lambda_g\right| < \varepsilon, \qquad \left\| E\left(\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}\right) - E(\lambda_g) \right\| < \varepsilon\right),$$

ce qui montre bien la convergence désirée.

Les formules du 1° découlent alors immédiatement de cette convergence et du théorème 3.1.

2° Nous pouvons écrire, en vertu de ce même théorème,

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0 - \sum_{g=0}^{d-1} \left(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} E\left(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}\right) V_0 \to 0,$$

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} V_0 - \sum_{g=0}^{d-1} \left(\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} E\left(\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}\right) V_0 \to 0.$$

Puisque

$$|\lambda_{g,n,u}| \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad E\left(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}\right) V_0 \to E(\lambda_g) V_0 = 0 \quad \text{si } g \neq 0,$$
$$= V_0 \quad \text{si } g = 0,$$

nous avons

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0 - \left(\lambda_{0,n,\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0 \to 0;$$

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} V_0 - \left(\lambda_{0,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} V_0 \to 0.$$

Nous sommes donc amenés à étudier le développement, au voisinage de $v = 0$, de la fonction analytique $v \to (\lambda_{0,n,v})^{\mu_n}$.

L'analyticité de $\lambda_{0,n,v}$ en v, pour $\|v\| < \eta$, et le fait que $|\lambda_{0,n,v}| \leqq 1$, entraînent la convergence uniforme locale des dérivées partielles de $\lambda_{0,n,v}$ vers les dérivées correspondantes de $\lambda_{0,v}$. η_1 et N_1 existent donc tels que les dérivées partielles d'ordre 1, 2, 3 de $\lambda_{0,n,v}$ soient bornées uniformément sur $)\|v\| < \eta_1,\ n > N_1($ et $\lambda_{0,n} > 0$ pour $n > N$.

Introduisons la notation suivante : soit x_n une suite de fonctions numériques d'un paramètre v, parcourant un domaine D de R^k. Nous dirons que

$$x_n(v) = O'(\|v\|)$$

si $\frac{1}{\| v \|} x_n(v)$ est borné uniformément en n et v, lorsque $v \in D$. Si une suite $v_n \in D$, alors

$$x_n(v_n) = O(\| v_n \|) \qquad \text{si} \quad x_n(v) = O'(\| v \|).$$

Écrivons alors le développement limité de $\lambda_{0,n,v}$ jusqu'au troisième ordre

$$\lambda_{0,n,v} = \lambda_{0,n} + \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0}$$
$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} v_i v_j v_k \frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}(\theta v_1, \theta v_2, \ldots, \theta v_r),$$

où $0 \leqq \theta \leqq 1$;

$$\sum_{i,j,k} \frac{1}{3!} v_i v_j v_k \frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}(\theta v_1, \theta v_2, \ldots, \theta v_r) = O'(\| v \|^3)$$

pour

$$\| v \| < \eta_1, \; n > N;$$
$$\log \lambda_{0,n,v} = \log \lambda_{0,n} + \log[1 + Z_{n,v}],$$

où

$$Z_{n,v} = \frac{1}{\lambda_{0,n}} \left[\sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} + O'(\| v \|^3) \right].$$

On voit que

$$Z_{n,v} = O'(\| v \|) = \frac{1}{\lambda_{0,n}} \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} + O'(\| v \|^2).$$

D'où

$$\log[1 + Z_{n,v}] = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2}\right)^2 + O'(Z_{n,v})^3 = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2}\right)^2 + O'(\| v \|^3).$$

Nous avons donc, pour $\| v \| < \eta_1$ et $n > N_1$,

$$(\lambda_{0,n,v})^{\mu_n} = \exp\left[\mu_n \log \lambda_{0,n} + \mu_n \left[Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2}\right)^2 + O'(\| v \|^3)\right]\right].$$

Si $\| v_n \| < \eta_1$, on a

$$(\lambda_{0,n,v_n})^{\mu_n} = \exp\left[\mu_n \log \lambda_{0,n} + \mu_n \left[Z_{n,v_n} - \left(\frac{Z_{n,v_n}}{2}\right)^2 + O(\| v_n \|^3)\right]\right].$$

Sous l'hypothèse du 2°, $\mu_n \log \lambda_{0,n} \to -sw$.

a. Si $v_n = \frac{u}{n}$ et si $n > \sup\left(N_1, \frac{\|u\|}{\eta_1}\right)$, alors $\|v_n\| < \eta_1$,

$$Z_{n, v_n} = O(\|v_n\|) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\mu_n (Z_{n, v_n})^2 \to 0, \qquad \mu_n\, O(\|v_n\|^3) = \mu_n\, O\left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0;$$

$$\mu_n Z_{n, v_n} = \frac{\mu_n}{n\lambda_{0,n}} \sum_{i=1}^{r} u_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\mu_n \to i w \langle u, \Pi^\star \rangle \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

car

$$\frac{\mu_n}{n} \to w, \qquad \lambda_{0,n} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} \to \left(\frac{\partial \lambda_{0,v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} = i\Pi_j^\star.$$

Donc $\left(\lambda_{0, n, \frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}$ converge vers

$$\exp[(-s + i\langle u, \Pi^\star \rangle) w]$$

et $\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n} V_0$ converge vers

$$\exp[(-s + i\langle u, \Pi^\star \rangle) w] V_0.$$

b. Si $v_n = \frac{u}{\sqrt{n}}$ et $n > \sup\left(N, \frac{\|u\|^2}{\eta_1^2}\right)$, nous pouvons écrire, puisque $\|v_n\| < \eta_1$,

$$\begin{aligned} Z_{n, \frac{u}{\sqrt{n}}} &- \frac{1}{2}\left(Z_{n, \frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^2 + O\left(\left\|\frac{u}{\sqrt{n}}\right\|^3\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_{0,n}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{r} u_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \\ &\quad - \frac{1}{2n}\left[\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\lambda_{0,n}}\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0}\right)^2 - \sum_{i,j} \frac{u_i u_j}{\lambda_{0,n}}\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i\, \partial v_j}\right)_{v=0}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (1) \qquad \left(\lambda_{0, n, \frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} &\exp\left[-\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\lambda_{0,n}}\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \sqrt{n}\, w\right] \\ &= \exp\left[\left(\frac{\mu_n - nw}{\lambda_{0,n}}\right)\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0}\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\mu_n}{n}\left(\sum_{i,j} S_{i,j}(n)\, u_i u_j\right) + \mu_n \log \lambda_{0,n}\right] \\ &\quad \times \exp\left[\mu_n\, O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right], \end{aligned}$$

où $S_{i,j}(n)$ converge vers le coefficient (i, j) de la forme quadratique $-\frac{1}{2}\log \Phi_P$ associée à P.

La limite de l'expression (1) est donc bien $\exp[-sw](\Phi(u))^{w}$, puisque $\mu_n - nw$ reste borné par hypothèse et $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\mu_n \to 0$.

On a donc bien

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^{\mu_n} \exp\left[-\sum_{i=1}^{r} i < u, \frac{\Pi_n^{\star}}{\lambda_{0,n}} > \sqrt{n}\, w\right] V_0 \to \exp(-sw)(\Phi(u))^{w}.$$

C. Q. F. D.

L'interprétation probabiliste de ce théorème donnée dans l'introduction résulte immédiatement du corollaire 2.1.

THÉORÈME 3.3. — *Si* P_n *est strictement markovienne et converge vers* P, *qui a une seule classe ergodique et pas d'états transitoires, l'ensemble des variables aléatoires*

$$Y_{i,n} = \frac{{}^{(n)}\xi_i(n) - n\Pi_i^{\star}}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers l'élément aléatoire multidimensionnel de fonction caractéristique Φ, *loi limite relative à* P.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 avec $\mu_n = n$; $\lambda_{0,n} = 1$, puisque P_n est strictement markovienne, et les hypothèses du théorème sont vérifiées.

CAS II : *Cas où* P *a plusieurs classes ergodiques et pas d'états transitoires.* — Soient :

$E_1, \ldots, E_s$ les s classes ergodiques relatives à P;
$\underset{i}{R}_n$ la restriction de P à $E_i \times E_i$;
D_{u^i} la restriction de D_u à $E_i \times E_i$;
$\underset{i,j}{S}_n$ la restriction de P_n à $E_i \times E_j$,

$$P_n \to P \iff \begin{cases} \underset{i}{R}_n \to \underset{i}{R}, \\ \underset{i,j}{S}_n \to 0, \end{cases}$$

$$P_n . D_u = \begin{bmatrix} \underset{1}{R}_n . D_{u^1} & \ldots & \underset{1,i}{S}_n . D_{u^i} & \ldots & \underset{1,s}{S}_n . D_{u^s} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \underset{i,1}{S}_n . D_{u^1} & \ldots & \underset{i}{R}_n . D_{u^i} & \ldots & \underset{i,s}{S}_n . D_{u^s} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \underset{s,1}{S}_n . D_{u^1} & \ldots & \underset{s,i}{S}_n . D_{u^i} & \ldots & \underset{s}{R}_n . D_{u^s} \end{bmatrix}.$$

Nous adopterons pour la matrice limite P les notations de l'introduction.

Nous noterons $\lambda_{\underset{i}{g},n,u}$ les valeurs propres de $\underset{i}{\mathrm{R}}_n.\mathrm{D}_{ui}$ qui tendent, si $n \to \infty$ et $u \to 0$, vers $\lambda_{\underset{i}{g}}$.

Nous allons écrire, si $i \in \mathrm{E}_\alpha$ et $j \in \mathrm{E}_\beta$, le développement de $(\mathrm{P}_n.\mathrm{D}_u)^n(i, j)$.

Auparavant, montrons deux lemmes :

LEMME 3.1. — *Soit* M *une matrice* (r, r) $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_s$ *une partition de* $(1, 2, \ldots, r)$ *en* s *sous-classes, telles que si* $i \in \mathrm{E}_\alpha$, $j \in \mathrm{E}_\beta$, $\alpha < \beta \Rightarrow i < j$.

Soient k *et* d *deux entiers* > 0

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{1,1} & \mathrm{M}_{1,2} & \mathrm{M}_{1,s} \\ \mathrm{M}_{2,1} & \mathrm{M}_{2,2} & \mathrm{M}_{2,s} \\ \mathrm{M}_{s,1} & \mathrm{M}_{s,2} & \mathrm{M}_{s,s} \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{M}_{i,j}$ *étant la restriction de* M *à* $\mathrm{E}_i \times \mathrm{E}_j$.

Alors, si $i \in \mathrm{E}_\alpha$, $j \in \mathrm{E}_\beta$, *on a*

$$\mathrm{M}^k(i, j) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{(k_i)_{i=1}^{l-1}} \sum_{(r_i)_{i=1}^{i=l}} \sum_{\lambda_i} (\mathrm{M}_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d + r_1} \mathrm{M}_{\alpha,k_1} (\mathrm{M}_{k_1,k_1})^{\lambda_2 d + r_2}$$
$$\times \mathrm{M}_{k_1,k_2} \ldots \mathrm{M}_{k_{l-1},\beta} (\mathrm{M}_{\beta,\beta})^{\lambda_{l+1} d + r_{l+1}} (i, j),$$

où

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l + \lambda_{l+1})\, d + r_1 + \ldots + r_l + r_{l+1} + l = k,$$
$$\lambda_i \text{ entier} \geqq 0, \qquad r_i \text{ entier} \geqq 0, \qquad 0 \leqq r_i < d,$$
$$k_i \neq k_{i+1}, \qquad k_i = 1, 2, \ldots, s.$$

Démonstration. — Si M a $m_{i,j}$ pour élément i, j, nous avons

$$\mathrm{M}^k(i, j) = \sum_{j_1, \ldots, j_{k-1}} m_i^{j_1} m_{j_1}^{j_2} m_{j_{k-1}}^{j}.$$

A une succession d'indices $i, j_1, \ldots, j_{k-1}, j$, correspond, en groupant les indices successifs qui sont dans la même classe, une succession de $l + 1$ sous-classes $\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{E}_{k_1}, \ldots, \mathrm{E}_{k_{l-1}}, \mathrm{E}_\beta$, le nombre d'indices successifs dans la classe E_α (resp. E_{k_i}, E_β) étant μ_1 (resp. μ_{i+1}, μ_{l+1}).

Posons

$$\mu_i = \lambda_i d + r_i + 1.$$

La sommation sur toutes les suites d'indices j_i qui donnent lieu aux mêmes $(l, k_1, \ldots, k_l, \lambda_i, r_i)$ donne bien l'élément

$$(\mathrm{M}_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d + r_1} \mathrm{M}_{\alpha,k_1} (\mathrm{M}_{k_1,k_1})^{\lambda_2 d + r_2} \ldots \mathrm{M}_{k_{l-1},\beta} (\mathrm{M}_{\beta,\beta})^{\lambda_{l+1}(k) d + r_{l+1}(k)} (i, j).$$

En sommant sur l, k_i, r_i, λ_i, on obtient le résultat voulu.

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$[x]$ désigne la partie entière de x, $P(x)$ l'entier le plus proche de x (lorsqu'il y a ambiguïté, on prendra l'entier inférieur).

LEMME 3.2. — *Conservons les hypothèses du lemme* 3.1; *soit d entier* > 0, *soit* Q_{k,l,r_i} *l'ensemble des points* $t = (t_1, \ldots, t_l)$ *de* R^l, *tels que*

a. $t_i \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{l} t_i \leqq 1$;

b. $\left[\dfrac{k-l-(r_1+r_2+\ldots+r_l)}{d}\right] \cdot t_i$ entier $\geqq 0$.

Posons

$$N_{l,r_i}^k = \left[\frac{k-l-(r_1+\ldots+r_l)}{d}\right].$$

Considérons dans R^l *les pavés, ouverts à gauche, fermés à droite centrés sur* Q_{k,l,r_i} *et de côtés* $\dfrac{1}{N_{l,r_i}^k}$,

$$w \in \text{Pavé centré en } t \iff \forall\, i = 1, \ldots, l, \quad P(N_{l,r_i}^k w_i) = N_{l,r_i}^k t_i.$$

1° *Les pavés sont disjoints, leur réunion* K_{k,l,r_i} *recouvre* K_l

$$\left(w \in K_l \iff w_i \geqq 0, \qquad \sum_{i=1}^{l} w_i \leqq 1\right).$$

La mesure de Lebesgue de K_{k,l,r_i} *vaut*

$$C^l_{N_{l,r_i}^k + l} \frac{1}{(N_{l,r_i}^k)^l};$$

$$2° \sum_{\lambda_i} (M_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d + r_1} M_{\alpha,k_1} (M_{k_1,k_1})^{\lambda_2 d + r_2} M_{k_1,k_2} \ldots (M_{\beta,\beta})^{\lambda_{l+1} d + r_{l+1}} (i, j)$$

$$= \int_{K_{k,l,r_i}} (M_{\alpha,\alpha})^{P(N_{l,r_i}^k w_1) d + r_1} N_{l,r_i}^k M_{\alpha,k_1} (M_{k_1,k_1})^{P(N_{l,r_i}^k w_2) d + r_2} N_{l,r_i}^k$$

$$\times M_{k_1,k_2} \ldots (M_{\beta,\beta})^{P(N_{l,r_i}^k w_{l+1}) d + r_{l+1}} (i, j)\, dw_1 \ldots dw_l,$$

où

$$w_{l+1} = 1 - \sum_{i=1}^{l} w_i.$$

Démonstration. — 1° Les pavés sont disjoints, la définition de $P(x)$ étant sans ambiguïté. Ils recouvrent K_l, car à chaque $w \in K_l$ correspond un t de Q_{k,l,r_i}, donné par la formule

$$t_i = \frac{P(N_{l,r_i}^k w_i)}{N_{l,r_i}^k}.$$

D'autre part, il y a correspondance biunivoque entre les points de Q_{k,l,r_i} et les ensembles de nombres $(\lambda_i)_{i=1}^{i=l+1}$, tels que

$$\sum_{i=1}^{l+1} \lambda_i = N_{l,r_i}^k,$$

par les formules

$$\lambda_i = N_{l,r_i}^k t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l),$$
$$\lambda_{l+1} = N_{l,r_i}^k \left(1 - \sum_{i=1}^{l} t_i \right).$$

Il y a donc autant de pavés que d'ensembles de nombres $\{ \lambda_i \}$, soit $C_{N_{l,r_i}^k+l}^{l}$. Comme chaque pavé a une aire égale à $\frac{1}{N_{l,r_i}^k}$, la formule de la première partie est donc démontrée.

2° Cette correspondance biunivoque entraîne la formule du 2°, la fonction sous le signe d'intégration étant constante sur chaque pavé de centre $\{ t_i \}$, où elle vaut l'élément de la somme $\sum_{\lambda_i}$ correspondant à $\lambda_i = N_{l,r_i}^k t_i$, multiplié par l'inverse de la mesure du pavé, $(N_{l,r_i}^k)^l$.

Corollaire 3.1. — *Avec les notations relatives à* P_n, *on a, si* $i_0 \in E_\alpha$,

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}} \right)^{\mu_n} V_0 = \sum_{l=0}^{\mu_n} \sum_{k_1, \ldots, k_l} \sum_{r_i} u_{k_1, \ldots, k_l, r_i}^{\mu_n}(n) \, V_0^{k_l},$$

où

$$u_{k_1, \ldots, k_l, r_i}^{\mu_n}(n) = \int_{K_{\mu_n, l, r_i}} \left(\underset{\alpha}{R_n} . D_{\frac{u\alpha}{n}} \right)^{P\left(N_{l,r_i}^{\mu_n} w_1\right) d + r_1} N_{l,r_i}^{\mu_n} . \underset{\alpha, k_1}{S_n} . D_{\frac{uk_1}{n}} \ldots$$
$$\times \left(\underset{k_i}{R_n} . D_{\frac{uk_i}{n}} \right)^{P\left(N_{l,r_i}^{\mu_n} w_{i+1}\right) d + r_{i+1}} N_{l,r_i}^{\mu_n} . \underset{k_i, k_{i+}}{S_n} . D_{\frac{uk_{i+1}}{n}} \ldots$$
$$\times \left(\underset{k_l}{R_n} . D_{\frac{uk_l}{n}} \right)^{P\left(N_{l,r_i}^{\mu_n} w_{l+1}\right) d + r_{l+1}} d_{w_1} \ldots d_{w_l} \qquad (w_1 + w_2 + \ldots w_{l+1} = 1)$$
$$= \int_{K_{\mu_n, l, r_i}} f_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n) \, (w_1, \ldots, w_{l+1}) \, dw_1 \ldots dw_l$$
$$= E \left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j \, {}^{(n)}\xi_j(\mu_n) \frac{1}{n} \right) \mathbf{1}_{A\alpha, k_i, r_i, \mu_n} \mathbf{1}_{\{ {}^{(n)}X_{\mu_n} = j \}} / \{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \} \right]$$

avec les notations de l'introduction.

Démonstration. — Le lemme 3.2, avec $M = P_n . D_{\frac{u}{n}}$, $E_i =$ classes P-ergodiques, $k = \mu_n$; $d = \text{p.p.c.m.} d_i$, donne l'expression de $\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}(i, j)$ indiquée, dont l'interprétation probabiliste résulte du corollaire 2.2.

LEMME 3.3. — *Soit f_n (resp. g_n) une fonction numérique, définie sur un ensemble A_n (resp. A) de R, intégrable au sens de Lebesgue, mesurable et bornée sur cet ensemble.*

Si $A_n \supset A$ et sur A $f_n - g_n \to 0$; si $L(A_n) \to L(A)$, où L désigne la mesure de Lebesgue

$$\int_{A_n} f_n \, dw_1 \ldots dw_l - \int_A g_n \, dw_1 \ldots dw_l \to 0.$$

Démonstration :

$$\int_{A_n} f_n(w_1, \ldots, w_l \, dw_1) \ldots dw_l - \int_A g_n(w_1, \ldots, w_l) \, dw_1 \ldots dw_l$$
$$= \int_A (f_n - g_n) \, dw_1 \ldots dw_l + \int_{A_n - A} f_n \, dw_1 \ldots dw_l,$$

le premier terme $\to 0$, en vertu du théorème de convergence bornée de Lebesgue, le second est $\leqq ML(A_n - A)$, et tend donc vers zéro.

LEMME 3.4. — *Si P_n est une suite de matrices sous-markoviennes, qui tend vers P, matrice markovienne à s classes ergodiques sans états transitoires, et si, avec les notations exposées plus haut :*

a. $n\left(1 - \underset{i}{\lambda}_{0, n}\right) \to q_i$;

b. $n \underset{i, j}{S_n}$ *reste borné;*

c. $\mu_n \to \infty$, $\frac{\mu_n}{n} \to t$, $\mu_n - [nt]$ *restant bornée.*

Alors

$$u^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n) - \int_{K_l} g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1}) \, dw_1 \ldots dw_l \to 0,$$

où

$$g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1}) = \left(\sum_{g=0}^{d_\alpha - 1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}{}^g\right)^{r_1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}_{g, n, \frac{u^\alpha}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_1\right) d} E\left(\underset{\alpha}{\lambda}{}^g\right)\right) \left[\frac{nt}{d}\right] \underset{\alpha, k_1}{S_n} . D_{\frac{u^{k_1}}{n}} \cdots$$
$$\times \left(\sum_{g=0}^{d_{k_l} - 1} \left(\underset{k_l}{\lambda}{}^g\right)^{r_{l+1}} \left(\underset{k_l}{\lambda}_{g, n, \frac{u^{k_l}}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{l+1}\right) d} E\left(\underset{k_l}{\lambda}{}^g\right)\right),$$
$$w_1 + \ldots + w_{l+1} = 1,$$
$$r_1 + r_2 + r_{l+1} + l = \mu_n \pmod{d}.$$

Démonstration :

$$u^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n) = \int_{K_{\mu_n, l, r_i}} f^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l$$

en vertu du corollaire 3.1

$$K_{\mu_n, l, r_i} \supset K_l,$$

$$L(K_{\mu_n, l, r_i}) = \frac{1}{N^{\mu_n}_{l, r_i}} C^l_{N^{\mu_n}_{l, r_i}+l} \to \frac{1}{l!} = L(K_l) \qquad \text{si} \quad n \to \infty,$$

$f^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)$ est mesurable et bornée, car $\left\| \underset{i}{R_n} \right\|$ et $\| D_{u^i} \| \leqq 1$,

$$\left\| N^{\mu_n}_{l, r_i} \cdot \underset{\alpha, k_1}{S_n} \right\| \leqq K,$$

en vertu de l'hypothèse *b* et de la forme de $N^{\mu_n}_{l, r_i}$.

$g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)$ est également mesurable et bornée sur K_l, pour les mêmes raisons.

D'après le lemme 3.3, il suffit de montrer que

$$f^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n) - g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n) \to 0 \quad \text{sur } K_l;$$

$f^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)$ et $g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)$ sont des produits de matrices uniformément bornées. Il suffit de montrer que chaque terme du produit f_n, diminué du terme de g_n correspondant, tend vers zéro si $n \to \infty$, c'est-à-dire que

1° $$\left(\underset{i}{R_n} D_{\frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(N^{\mu_n}_{l, r_i} w\right) d + r} - \sum_{g=0}^{d_i - 1} (\underset{i}{\lambda_g})^r \left(\underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(\left[\frac{nl}{d}\right] w\right) d} E(\underset{i}{\lambda_g}) \to 0;$$

2° $$\left(N^{\mu_n}_{l, r_i} - \left[\frac{nt}{d} \right] \right) \underset{i, j}{S_n} \to 0.$$

Or le théorème 3.2 entraîne

$$\left(\underset{i}{R_n} . D_{\frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(N^{\mu_n}_{l, r_i} w\right) d + r} - \sum_{g=0}^{d_i - 1} (\underset{i}{\lambda_g})^r \left(\underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(N^{\mu_n}_{l, r_i} w\right) d} E(\underset{i}{\lambda_g}) \to 0.$$

Il suffit de vérifier que

$$\left(\underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(N^{\mu_n}_{l, r_i} w\right) d} - \left(\underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \right)^{P\left(\left[\frac{nl}{d}\right] w\right) d} \to 0.$$

Or ceci a bien lieu, car

$$\left| \underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \right| \leqq 1, \qquad \underset{i}{\lambda}_{g, n, \frac{u^i}{n}} \to \underset{i}{\lambda_g} \qquad \text{si} \quad n \to \infty,$$

la différence ci-dessus, en module, est

$$\leq \left| 1 - \left(\underset{i}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^i}{n}}\right)^{\left[P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w\right) - P\left(N^{\mu_n}_{l,\, r_i}\, w\right)\right] d} \right| = \left| 1 - \left(\underset{i}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^i}{n}}\right)^{K_n d} \right|,$$

où K_n reste borné en module, en vertu de l'hypothèse *c*. Donc

$$\left(\underset{i}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^i}{n}}\right)^{K_n d} - \left(\underset{i}{\lambda}_g\right)^{K_n d} \to 0, \qquad \text{mais} \quad \left(\underset{i}{\lambda}_g\right)^{d} = 1,$$

donc on a bien 1°.

De même, $N^{\mu_n}_{l,\, r_i} - \left[\frac{nt}{d}\right]$ reste borné lorsque $n \to \infty$, ce qui montre le 2°; puisque $\underset{i,\, j}{S_n} \to 0$.

On a donc bien le résultat annoncé.

Corollaire 3.2. — *Avec les hypothèses du lemme* 3.4,

$$u^{\mu_n}_{k_i,\, r_i}(n)\, V_0^{k_l} - \int_{K_l} \left(\sum_{g=0}^{d_\alpha - 1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}_g\right)^{r_1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^\alpha}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_1\right)^d} E\left(\underset{\alpha}{\lambda}_g\right) \right) \left[\frac{nt}{d}\right] \underset{\alpha,\, k_1}{S_n} . D_{\frac{u^{k_1}}{n}} \cdots$$

$$\times \left(\sum_{g=0}^{d_{k_i} - 1} \left(\underset{k_i}{\lambda}_g\right)^{r_{i+1}} \left(\underset{k_i}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^{k_i}}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{i+1}\right)} E\left(\underset{k_i}{\lambda}_g\right) \right) \cdots$$

$$\times \underset{k_{l-1},\, k_l}{S_n} . D_{\frac{u^{k_l}}{n}} \exp\left[\left(-q_{k_l} + i\langle u^{k_l}, \underset{k_l}{\Pi}^\star \rangle\right) w_{l+1}\, t\right] V_0^{k_l}\, dw_1 \ldots dw_l.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que

$$\sum_{g=0}^{d_{k_l} - 1} \left(\underset{k_l}{\lambda}_g\right)^{r_{l+1}} \left(\underset{k_l}{\lambda}_{g,\, n,\, \frac{u^{k_l}}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{l+1}\right)^d} E\left(\underset{k_l}{\lambda}_g\right) V_0^{k_l}$$

converge vers

$$\exp\left[\left(-q_{k_l} + i\langle u^{k_l}, \underset{k_l}{\Pi}^\star \rangle\right) w_{l+1}\, t\right].$$

Mais ceci est une conséquence immédiate du théorème 3.2 appliqué à la suite de matrices $\underset{k_l}{R_n}$, et du fait que

$$E\left(\underset{k_l}{\lambda}_g\right) V_0^{k_l} = 0 \quad \text{si } g \neq 0, \qquad = V_0^{k_l} \quad \text{si } g = 0.$$

Lemme 3.5. — *Avec les hypothèses du lemme* 3.4, *si* $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, *en posant* $k_l = \beta$, *on a*

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^{\mu_n}(i, j) - \sum_{l=0}^{\mu_n} \sum_{k_1, \ldots, k_{l-1}} \int_{K_l} \sum_{r_i} g^{\mu_n}_{k_i,\, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l(i, j) \to 0.$$

La dernière expression étant une série en l absolument convergente.

Démonstration. — Posons

$$u_l^{\mu_n}(n) = \sum_{r_i, k_i} u_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n),$$

avec $k_l = \beta$ fixé, et de même,

$$v_l^{\mu_n}(n) = \sum_{k_i, r_i} \int_{\mathrm{K}_l} g_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l.$$

On sait que $u_l^{\mu_n}(n) - v_l^{\mu_n}(n) \to 0$, d'après le lemme 3.4. Il suffit de montrer que les matrices $u_l^{\mu_n}(n)$ et $v_l^{\mu_n}(n)$ ont des normes majorées, pour n assez grand, par le terme général d'une série absolument convergente en l.

Or, si

$$\varepsilon_n = \sup_{i, j} \left\| \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} \right\|,$$

nous avons, par hypothèse, $n\varepsilon_n \leqq \mathrm{K}$, pour n assez grand.

Puisque $\left\| \underset{i}{\mathrm{R}_n} \right\| \leqq 1$, $\| \mathrm{D}_{uj} \| = 1$,

$$\left\| u_l^{\mu_n}(n) \right\| = \left\| \sum_{k_i} \sum_{\lambda_i} \left(\underset{\alpha}{\mathrm{R}_n} \cdot \mathrm{D}_{\frac{u^\alpha}{n}} \right)^{\lambda_1} \left(\underset{\alpha, k_1}{\mathrm{S}_n} \cdot \mathrm{D}_{\frac{u^{k_1}}{n}} \right) \left(\underset{k_1}{\mathrm{R}_n} \cdot \mathrm{D}_{\frac{u^{k_1}}{n}} \right)^{\lambda_2} \cdots \left(\underset{\beta}{\mathrm{R}_n} \cdot \mathrm{D}_{u^\beta} \right)^{\lambda_{l+1}} \right\|,$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{l+1} = \mu_n - l;$$

$$\leqq \sum_{k_i} (\varepsilon_n)^l \mathrm{C}_{\mu_n}^l = (s-1)^{l-1} (n\varepsilon_n)^l \, \mathrm{C}_{\mu_n}^l \frac{1}{n^l},$$

où s est le nombre de classes ergodiques de P

$$\leqq \mathrm{K}^l (s-1)^{l-1} \, \mathrm{C}_{\mu_n}^l \frac{1}{(\mu_n)^l} \left(\frac{\mu_n}{n} \right)^l \leqq \mathrm{K}^l (s-1)^{l-1} (t+\varepsilon)^l \, \mathrm{C}_{\mu_n}^l \frac{1}{(\mu_n)^l} \leqq \frac{s}{s-1} \, \frac{\mathrm{K}_1^l}{l!},$$

avec $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}(s-1)(t+\varepsilon)$, pour n assez grand. Or le dernier terme de l'inégalité est le terme général d'une série absolument convergente en l.

De même,

$$\left\| v_l^{\mu_n}(n) \right\| \leqq \sum_{k_i, r_i} \int_{\mathrm{K}_l} \left\| g_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1}) \right\| dw_1 \ldots dw_l$$

$$\leqq \sum_{k_i, r_i} \frac{\mathrm{K}^l t^l}{l!\, d^l} \left(\sup_{\iota, g} \left(\left\| \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda_g} \right) \right\| \right) \right)^{l+1}.$$

où

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{l+1} + l = \mu_n \qquad (\mathrm{mod}\, d).$$

Il y a au plus d^l valeurs de $r_1, \ldots, r_{l+1}$ et $(s-1)^{l-1}$ valeurs de $k_1, \ldots, k_{l-1}$.

Donc

$$\left\| v_l^{\mu_n}(n) \right\| \leqq (s-1)^{l-1} \frac{K^l t^l}{l!} \left(\sup_{i,g} \left\| E\left(\lambda_i^g \right) \right\| \right)^{l+1},$$

terme général d'une série en l absolument convergente.

Corollaire 3.3. — *Si les conditions* a *et* c *du lemme* 3.4 *sont vérifiées, et si, de plus,*

$$b'. \quad n \underset{i}{\Pi} . \underset{i,j}{S_n} . V_0^j \to q_i^j,$$

alors

$$\sum_{i \in E_\beta} \left(P_n . D_{\frac{u}{n}} \right)^{\mu_n}(i_0, j) \to \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k_i} t^l \int_{K_l} \exp\left[\left(-q_\alpha + i \langle u^\alpha, \underset{\alpha}{\Pi^\star} \rangle \right) w_1 t \right] q_\alpha^{k_1} \dots$$
$$\times \exp\left[\left(-q_{k_i} + i \langle u^{k_i}, \underset{k_i}{\Pi^\star} \rangle \right) w_{i+1} t \right] q_{k_i}^{k_{i+1}} \dots$$
$$\times \exp\left[\left(-q_\beta + i \langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star} \rangle \right) w_{l+1} t \right] dw_1 \dots dw_l \, V_0^\alpha(i_0).$$

Démonstration. — La condition $(b') \Rightarrow (b)$, car $\underset{i}{\Pi}$ a tous ses éléments > 0. Il suffit de montrer, d'après le lemme 3.5, que

$$\int_{K_l} \sum_{r_i} g_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n)(w_1 \dots w_{l+1}) V_0^\beta \, dw_1 \dots dw_l$$
$$\to \int_{K_l} \exp\left[\left(-q_\alpha + i \langle u^\alpha, \underset{\alpha}{\Pi^\star} \rangle \right) w_1 t \right] q_\alpha^{k_1} \dots$$
$$\times \exp\left[\left(-q_\beta + i \langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star} \rangle \right) w_{l+1} t \right] V_0^\alpha \, dw_1 \dots dw_l.$$

Or nous avons vu, d'après le corollaire 3.2, avec $k_l = \beta$, que

$$g_{k_i, r_i}^{\mu_n}(n)(w_1, \dots, w_{l+1}) V_0^\beta - \left(\sum_{g=0}^{d_\alpha - 1} \left(\lambda_\alpha^g \right)^{r_1} \left(\lambda_{\alpha\, g,\, n,\, \frac{u^\alpha}{n}} \right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d} \right] w_1 \right)^d} E\left(\lambda_\alpha^g \right) \right) \left[\frac{nt}{d} \right] \underset{\alpha, k_1}{S_n} . D_{\frac{u^{k_1}}{n}} \dots$$
$$\times \left[\frac{nt}{d} \right] \underset{k_{i-1}, k_i}{S_n} . D_{\frac{u^{k_i}}{n}} \left(\sum_{g=0}^{d_{k_i} - 1} \left(\lambda_{k_i}^g \right)^{r_{i+1}} \left(\lambda_{k_i\, g,\, n,\, \frac{u^{k_i}}{n}} \right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d} \right] w_{i+1} \right)^d} E\left(\lambda_{k_i}^g \right) \right) \dots$$
$$\times \exp\left(\left[q_\beta + i \langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star} \rangle \right] w_{l+1} t \right) V_0^\beta \to 0,$$

avec

$$(1) \qquad r_1 + r_2 + \dots + r_{l+1} + l = \mu_n \pmod{d},$$

$r_1, \dots, r_l$ peuvent prendre de manière indépendante toutes les valeurs comprises entre 0 et $d-1$, ces valeurs extrêmes étant comprises, r_{l+1} est déterminée pour un choix de $r_1, \dots, r_l$, par la relation (1).

Donc

$$\sum_{r_i} g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})V_0^\beta - \left(\sum_{r_1=0}^{d-1} \left(\sum_{g=0}^{d_\alpha - 1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}{}_g\right)^{r_1} \left(\underset{\alpha}{\lambda}{}_{g,\, n,\, \frac{u^\alpha}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_1\right)^d} E\left(\underset{\alpha}{\lambda}{}_g\right)\right)\right)$$

$$\times \left[\frac{nt}{d}\right] \underset{\alpha,\, k_1}{S_n} . D_{\frac{u^{k_1}}{n}} \cdots \left[\frac{nt}{d}\right] \underset{k_{i-1},\, k_i}{S_n} . D_{\frac{u^{k_i}}{n}}$$

$$\times \left(\sum_{r_{i+1}=0}^{d-1} \left(\sum_{g=0}^{d_{k_i} - 1} \left(\underset{k_i}{\lambda}{}_g\right)^{r_{i+1}} \left(\underset{k_i}{\lambda}{}_{g,\, n,\, \frac{u^{k_i}}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{i+1}\right)^d} E\left(\underset{k_i}{\lambda}{}_g\right)\right)\right) \cdots$$

$$\times \exp\left(\left[-q_\beta + i\langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star}\rangle\right] w_{l+1}\right) V_0^\beta \to 0,$$

puisque r_{l+1} ne figure plus dans l'expression approchée de $g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)$ donnée précédemment.

Or, si $g \neq 0$,

$$\sum_{r=0}^{d-1} \left(\underset{i}{\lambda}{}_g\right)^r = \frac{1 - \left(\underset{i}{\lambda}{}_g\right)^d}{1 - \underset{i}{\lambda}{}_g} = 0,$$

puisque $d =$ p. p. c. m. d_i,

$$\text{si} \quad g = 0, \qquad \sum_{r=0}^{d-1} \left(\underset{i}{\lambda}{}_g\right)^r = d, \qquad \text{car} \quad \underset{i}{\lambda}{}_0 = 1.$$

Donc, en fait,

$$\sum_{r_i} g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})V_0^\beta - \left(\underset{\alpha}{\lambda}{}_{0,\, n,\, \frac{u^\alpha}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_1\right)^d} E\left(\underset{\alpha}{\lambda}{}_0\right) d\left[\frac{nt}{d}\right] \underset{\alpha,\, k_1}{S_n} . D_{\frac{u^{k_1}}{n}} \cdots$$

$$\times d\left[\frac{nt}{d}\right] \underset{k_{i-1},\, k_i}{S_n} . D_{\frac{u^{k_i}}{n}} \left(\underset{k_i}{\lambda}{}_{g,\, n,\, \frac{u^{k_i}}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{i+1}\right)^d} E\left(\underset{k_i}{\lambda}{}_0\right) \cdots$$

$$\times \exp\left[\left(-q_\beta + i\langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star}\rangle\right) w_{l+1} t\right] V_0^\beta \to 0.$$

Or, d'après le théorème 3.2, pour tout i,

$$\left(\underset{i}{\lambda}{}_{0,\, n,\, \frac{u^i}{n}}\right)^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w\right)^d} \to \exp\left[\left(-q_i + i\langle u^i, \underset{i}{\Pi^\star}\rangle\right) wt\right] \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

$$E\left(\underset{i}{\lambda}{}_0\right) \left[\frac{nt}{d}\right] d . \underset{i,j}{S_n} . D_{\frac{u^{k_i}}{n}} . E\left(\underset{j}{\lambda}{}_0\right) - t\, E\left(\underset{i}{\lambda}{}_0\right) n . \underset{i,j}{S_n} . E\left(\underset{j}{\lambda}{}_0\right) \to 0,$$

car $n . \underset{i,j}{S_n}$ reste borné en norme, et

$$E\left(\underset{i}{\lambda}{}_0\right) n . \underset{i,j}{S_n} . E\left(\underset{j}{\lambda}{}_0\right) \to q_i^j \underset{i,j}{\Pi},$$

où $\underset{i,j}{\Pi}$ est la matrice définie sur $E_i \times E_j$, dont toutes les lignes sont égales à $\underset{j}{\Pi}{}^*$.

On a donc

$$\sum_{r_i} g^{u_n}_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\,V^\beta_0 \to t^l \exp\left[\left(-q_\alpha + i\langle u^\alpha, \underset{\alpha}{\Pi^\star}\rangle\right)w_1 t\right] q^{k_1}_\alpha$$
$$\times \exp\left[\left(-q_{k_1} + i\langle u^{k_1}, \underset{k_1}{\Pi^\star}\rangle\right)w_2 t\right] q^{k_2}_{k_1} \ldots q^\beta_{k_{l-1}}$$
$$\times \exp\left[\left(-q_\beta + i\langle u^\beta, \underset{\beta}{\Pi^\star}\rangle\right)w_{l+1} t\right] \underset{\alpha,\,k_1}{\Pi}\;\underset{k_1,\,k_2}{\Pi} \ldots \underset{k_{l-1},\,\beta}{\Pi} V^\beta_0,$$

mais

$$\underset{i,\,h}{\Pi}\;\underset{h,\,k}{\Pi} = \underset{i,\,k}{\Pi} \quad\Rightarrow\quad \underset{\alpha,\,k_1}{\Pi}\;\underset{k_1,\,k_2}{\Pi} \ldots \underset{k_{l-1},\,\beta}{\Pi} V^\beta_0 = V^\alpha_0.$$

D'autre part, $\sum_{r_i} g^{u_n}_{k_i, r_i}(n)\,V^\beta_0$ est un vecteur uniformément borné sur K_l, en norme, d'après la démonstration du lemme 3.5.

Le théorème de Lebesgue nous donne alors le résultat, la fonction limite étant bien mesurable en $(w_1, \ldots, w_l)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 3.4. — *Soit* P_n *une suite de matrices strictement markoviennes convergeant vers* P, *qui a plusieurs classes ergodiques et pas d'états transitoires; si*

1° $n\left(1 - \underset{i}{\lambda_{0,n}}\right) \to q_i$;

2° $n\,E\left(\underset{i}{\lambda_0}\right) \underset{i,\,j}{S_n} . V^j_0 \to q^j_i$, *le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires* $\dfrac{{}^{(n)}\xi_l(n)}{n}$ *est le vecteur qui sur* E_α, *vaut*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k_i} \int_{K_l} \exp\left[\left(-q_\alpha + i\langle u^\alpha, \underset{\alpha}{\Pi^\star}\rangle\right)w_1\right] q^{k_1}_\alpha$$
$$\times \exp\left[\left(-q_{k_1} + i\langle u^{k_1}, \underset{k_1}{\Pi^\star}\rangle\right)w_2\right] q^{k_2}_{k_1} \ldots$$
$$\times \exp\left[\left(-q_{k_l} + i\langle u^{k_l}, \underset{k_l}{\Pi^\star}\rangle\right)w_{l+1}\right] dw_1 \ldots dw_l.$$

Démonstration. — Elle résulte de la formule

$$\left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right) V_0(i_0) = \sum_{\beta=1}^{s} \sum_{j \in E_\beta} \left(P_n . D_{\frac{u}{n}}\right)^n (i_0, j)$$

et de l'application du corollaire 3.3.

Étude de la loi limite.

LEMME 3.6. — *Sous les hypothèses du corollaire* 3.3, $\sum_{j \neq i} q_{i,j} \leq q_i$, *l'égalité ayant lieu si* P_n *est strictement markovienne.*

Démonstration. — Nous avons

$$\underset{i}{\mathrm{R}}_n \mathrm{V}_0^i + \sum_{j \neq i} \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} . \mathrm{V}_0^j \leqq \mathrm{V}_0^i.$$

En multipliant à gauche par $\mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,n}\right)$, nous avons, puisque $\mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,n}\right) > 0$ pour n assez grand,

$$\mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \underset{i}{\mathrm{R}}_n \mathrm{V}_0^i + \sum_{j \neq i} \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} . \mathrm{V}_0^j \leqq \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \mathrm{V}_0^i.$$

Or

$$\mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \underset{i}{\mathrm{R}}_n = \underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\, \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right).$$

Donc

$$n\left(1 - \underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \mathrm{V}_0^i \geqq n \sum_{j \neq i} \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,\,n}\right) \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} . \mathrm{V}_0^j.$$

Le membre de gauche converge vers $q_i \mathrm{V}_0^i$, celui de droite vers

$$\lim \sum_{j \neq i} n\, \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_0\right) \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} . \mathrm{V}_0^j = \sum_{j \neq i} q_{i,\,j} \mathrm{V}_0^i,$$

car $n \underset{i,\,j}{\mathrm{S}_n}$ est borné et $\mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_{0,n}\right) \to \mathrm{E}\left(\underset{i}{\lambda}_0\right)$. Donc

$$\sum_{j \neq i} q_{i,\,j} \leqq q_i.$$

Dans le cas strictement markovien, l'inégalité initiale devient une égalité qui se reproduit partout.

Soit Q la matrice (s, s) d'éléments diagonaux $-q_i$ et d'élément (i, j) q_i^j.

Soit S′ le système à nombre fini d'états, ayant la loi d'évolution sous-markovienne homogène permanente, caractérisée par l'opérateur infinitésimal Q.

Soit $\mathrm{Z}(u)$ l'état de S′ à l'instant u; $\mathrm{T}_i(t)$ la durée de séjour de S′ dans l'état i pendant l'intervalle de temps $(0, t)$; $\mathrm{A}(t)$ l'événement : S′ reste dans K′ avant t, où $\mathrm{K}' =)1, 2, \ldots, s($.

Théorème 3.5 :

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} i v_j \mathrm{T}_j(t)\right) \mathbf{I}_{\mathrm{A}(t)} / \{\mathrm{Z}(0) = \alpha\}\right]$$

est la fonction caractéristique limite trouvée au corollaire 3.3, *avec*

$$v_i = \langle u^i, \underset{i}{\mathrm{II}}^* \rangle.$$

Démonstration. — Soit $A_{\alpha, k_1, \ldots, k_l}(t) \cap A(t)$ l'événement : S′ est successivement dans les états α, k_1, …, k_l pendant (o, t)

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iv_j\, T_j(t)\right) I_{A(t)} / \{Z(o) = \alpha\}\right]$$
$$= \sum_{l, k_i} E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iv_j\, T_j(t)\right) I_{A_{\alpha, k_1, \ldots, k_l}(t)} I_{A(t)} / \{Z(o) = \alpha\}\right].$$

Soient alors T'_α, T'_{k_1}, …, T'_{k_l} les durées des séjours successifs de S′ dans α, k_1, …, k_l

$$T'_\alpha + T'_{k_1} + \ldots + T'_{k_l} = t.$$

A ces variables aléatoires correspond une densité sur $K_{l,t}$ telle que

$$\Pr[\{(T'_\alpha, T'_{k_1}, \ldots, T'_{k_l}) \in A\} \cap A_{\alpha, k_1, \ldots, k_l}(t) \cap A(t) / \{Z(o) = \alpha\}]$$
$$= \int_A f_{k_1, \ldots, k_l, t}(w_1, \ldots, w_l)\, dw_1 \ldots dw_l$$

$$f_{k_1, \ldots, k_l, t}(w_1, \ldots, w_l) = \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \exp(q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \ldots \exp(-q_{k_l} w_{l+1}).$$

$$w_{l+1} = t - \sum_{i=1}^{l} w_i$$

$$(w_i)_{i=1}^{i=l} \in K_{l,t} \iff w_i \geqq o, \qquad \sum_{i=1}^{l} w_i \leqq t.$$

D'autre part, sur $A_{\alpha, k_1, \ldots, k_l}(t)$, on a bien

$$v_1 T_1(t) + v_2 T_2(t) + v_s T_s(t) = v_\alpha T'_\alpha + V_{k_1} T'_{k_1} + v_{k_l} T'_{k_l},$$

donc

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iv_j\, T_j(t)\right) I_{A_{\alpha, k_1, \ldots, k_l}(t)}\, I_{A(t)} / \{Z(o) = \alpha\}\right]$$
$$= \int_{K_{l,t}} \exp i(v_\alpha w_1 + v_{k_1} w_2 + \ldots + v_{k_l} w_{l+1})\, f_{k_1, \ldots, k_l, t}(w_1, \ldots, w_l)\, dw_1 \ldots dw_l$$

qui est bien l'expression trouvée au corollaire 3.3.

THÉORÈME 3.6 :

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iv_j\, T_j(t)\right) I_{A(t)} / \{Z(o) = \alpha\}\right] = \exp((Q + iV)t) . V'_0(\alpha),$$

où V *est la matrice diagonale d'éléments* v_i *et* V'_0 *le vecteur de* R^s *de coordonnées égales à* 1.

Démonstration. — On la fait en remarquant que l'expression

$$E\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{s} v_j \, T_j(t)\right) I_{A(t)} \, I_{\{Z_t=\beta\}} / \{Z_0=\alpha\}\right]$$

est l'élément (α, β) d'un semi-groupe de matrices (s, s) dont on montre aisément que l'opérateur infinitésimal est $Q + iV$.

Corollaire 3.4. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.4, *le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires* $\frac{{}^{(n)}\xi_i(n)}{n}$ *est égal, pour* $i_0 \in E_\alpha$, *à* $(\exp(Q + iV)).V_0'(\alpha)$.

Processus adjoint. — Soit ${}^{(n)}Y_m$ la variable aléatoire valant i si ${}^{n}X_m \in E_i$.

Considérons le processus stochastique $Z_n(t) = {}^{n}Y_{[nt]}$; il est dit processus adjoint à (P_n, E_i).

Ce n'est pas en général un processus de Markov. Il n'a que des discontinuités de première espèce, aux temps $\frac{m}{n}$.

Soit $T_i(n)$ la longueur des intervalles où $Z_n(t) = i$, pendant l'intervalle de temps $(0, 1)$

$$T_i(n) = \frac{1}{n}\sum_{j\in E_i} {}^{(n)}\xi_j(n),$$

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iu_j \, T_j(n)\right) / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{s} iu_j\left(\sum_{k\in E_j}\frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\right)\right) / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right]$$

dont la limite est $(\exp(Q + iV))\,V_0'(\alpha)$, si $i_0 \in E_\alpha$, où V est la matrice diagonale d'éléments

$$v_i = \langle U_1^i, \underset{i}{\Pi^\star}\rangle, \qquad \text{où} \quad U_1^i = u_i V_0^i,$$

donc

$$\langle U_1^i, \underset{i}{\Pi^\star}\rangle = u_i \langle V_0^i, \underset{i}{\Pi^\star}\rangle = u_i.$$

Donc, si U est la matrice diagonale d'éléments u_i, $i = 1, \ldots, s$, on a le

Corollaire 3.5. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.4, *l'ensemble de variables aléatoires* $T_i(n)$ *converge en loi vers l'ensemble des variables* $T_i(1)$ *introduit au théorème* 3.5.

THÉORÈME 3.7. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.4 *les variables aléatoires* $Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_r)$ *convergent en loi,* i_0 *étant l'état initial, vers* $Z(t_1)$, $Z(t_2)$, $Z(t_r)$, α *étant l'état initial.*

Démonstration :

$$\Pr[\{Z_n(t_1)=j_1, \ldots, Z_n(t_l)=j_l\}/\{{}^{(n)}X_0=i_0\}]$$
$$=\sum_{i_k\in E_{j_k}} (P_n)^{[nt_1]}(i_0, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2)\ldots(P_n)^{[nt_l]-[nt_{l-1}]}(i_{l-1}, i_l),$$

Lorsque $n\to\infty$,

$$\sum_{i_l}(P_n)^{[nt_l]-[nt_{l-1}]}(i_{l-1}, i_l)\to\exp(Q(t_l-t_{l-1}))(j_{l-1}, j_l)$$

et

$$\sum_{\substack{i_k\in E_{j_k}\\ k=1,\ldots,l-1}}(P_n)^{[nt_1]}(i_0, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2)\ldots(P_n)^{[nt_l]-[nt_{l-1}]}(i_{l-1}, i_l)$$
$$-\sum_{\substack{i_k\in E_{j_k}\\ k=1,\ldots,l-1}}(P_n)^{[nt_1]}(i_0, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2)\ldots(P_n)^{[nt_{l-1}]-[nt_{l-2}]}(i_{l-2}, i_{l-1})$$
$$\times\exp(Q(t_l-t_{l-1}))(j_{l-1}, j_l)\to 0.$$

Dans la seconde expression, nous pouvons sommer sur i_{l-1} et passer à la limite; en itérant le procédé, on obtient finalement

$$\Pr[\{Z_n(t_i)=j_i,\ i=1,\ldots,l\}/\{{}^{(n)}X_0=i_0\}]\to\exp(Qt_1)(\alpha, j_1)$$
$$\times\exp(Q(t_2-t_1))(j_1, j_2)\ldots\exp(Q(t_l-t_{l-1}))(j_{l-1}, j_l)$$
$$=\Pr[\{Z(t_i)=j_i,\ i=1,\ldots,l\}/\{Z(0)=\alpha\}].$$

C. Q. F. D.

Soit D (0, 1) l'espace des fonctions numériques définies sur [0, 1] et n'ayant que des discontinuités de première espèce. Prohorof a montré que c'est un espace métrisable complet, ainsi que l'espace des mesures bornées sur le σ-corps topologique de D (0, 1), muni de la topologie faible.

Le processus $Z_n(t)$ est presque sûrement à valeurs dans D (0, 1), il lui correspond une mesure discrète sur D (0, 1), μ_{n, i_0}, i_0 étant l'état initial.

Le processus $Z(t)$ est aussi, p. s., à valeurs dans D (0, 1)

$$\Pr[|Z(t_2)-Z(t_1)|>0/\{Z(t_1)=j_1\}]=1-e^{-q_{j_1}(t_2-t_1)}$$
$$\leqq 1-e^{-(\sup_j q_j)(t_2-t_1)}$$
$$\leqq\varepsilon\quad\text{si } |t_2-t_1|<\delta(\varepsilon),$$

uniformément en j.

Alors, selon Prohorof (exemple 2 du paragraphe 2.1), il existe une mesure de probabilité sur D (o, 1), notée μ_α si Z (o) = α, telle que :

a. μ_α) φ : $\varphi \in$ D (o, 1), φ continue en t_0 fixé (= 1;

b. Soient $t_1, \ldots, t_l$ des points sur [o, 1] l'application $\Pi_{t_1, \ldots, t_l}$

$$\varphi \to (\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_l))$$

est continue μ_α presque sûrement en vertu de *a* et la répartition induite par μ_α et $\Pi_{t_1, \ldots, t_l}$ sur R^s est celle induite par les variables aléatoires Z (t_1), Z (t_2), ..., Z (t_l).

THÉORÈME 3.8. — *μ_{n, i_0} converge faiblement vers μ_α, si $i_0 \in E_\alpha$.*

Démonstration. — Nous démontrerons d'abord que μ_{n, i_0} est un ensemble faiblement relativement compact, puis que toute mesure $\mu_\alpha^\star$ limite d'une sous-suite μ_{n_k, i_0} a la propriété *a*. Cela entraîne que pour toute mesure limite $\mu_\alpha^\star$,

$$\mu_\alpha^\star \circ (\Pi_{t_1, \ldots, t_l})^{-1} = \lim_{n_k \to \infty} \mu_{i_0, n_k} \circ (\Pi_{t_1, \ldots, t_l})^{-1} = \mu_\alpha \circ (\Pi_{t_1, \ldots, t_l})^{-1}$$

en vertu du théorème 3.7 et des propriétés de μ_α. Donc

$$\mu_\alpha^\star = \mu_\alpha.$$

Montrons donc que :

1° L'ensemble $\{ \mu_{n, i_0} \}$ est faiblement relativement compact; les conditions de compacité nécessaires et suffisantes sont données par le lemme 2.4 de Prohorof.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M_ε, δ_ε et une fonction $\omega(\delta, \varepsilon) \downarrow 0$ si $\delta \downarrow 0$ tels que $\forall n$:

a. μ_{n, i_0}) φ : $\sup_{t \in [0, 1]} |\varphi| \leq M_\varepsilon \left(> 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right.$;

b. μ_{n, i_0}) φ : $\tilde{\omega}_\varphi(\delta) \leq \omega(\delta, \varepsilon)$ pour tout $\delta < \delta(\varepsilon) \left(> 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right.$.

$\tilde{\omega}_\varphi(\delta)$ désigne $\sup_{\Delta, |\Delta| \leq \delta} \sup_{\tau \in \Delta} \inf \{ \omega_\varphi[\tau_1, \tau), \omega_\varphi(\tau, \tau_2] \}$, où ω_φ désigne l'oscillation de φ sur (*a*, *b*) et Δ désigne un intervalle (τ_1, τ_2), de longueur $|\Delta|$.

Soit D_s (o, 1) l'ensemble des éléments de D (o, 1) prenant les valeurs 1, 2, ..., *s*.

Les mesures μ_{n, i_0} sont concentrées en des points de D_s (o, 1).

La première condition est donc toujours remplie.

Pour les éléments de $D_s(0, 1)$, $\tilde{\omega}_\varphi(\delta)$ ne peut prendre que des valeurs entières. Par conséquent, $\omega(\delta, \varepsilon)$ peut être pris égal à o, pour $\delta < \delta(\varepsilon)$. La condition b s'écrit alors

$$\mu_{i_0, n}\{\varphi \in D_s(0, 1),\ \tilde{\omega}_\varphi(\delta) = 0\} \to 0 \qquad \text{si} \quad \delta \to 0,$$

uniformément en n.

Dire que $\tilde{\omega}_\varphi(\delta) = 0$, c'est dire que sur tout intervalle de longueur δ, φ a au plus une discontinuité. La condition de compacité s'interprète donc ainsi :

Probabilité $\{$ pour le processus $Z_n(t)$, les temps de séjour successifs dans chaque classe ergodique sont $> \delta \} \to 1$ si $\delta \to 0$, uniformément en n.

Cette probabilité s'écrit

$$\sum_l \sum_{k_i} \sum_{r_i} \sum_{\lambda_i} \left(\underset{\alpha}{R_n}\right)^{\lambda_1 d + r_1} \underset{\alpha, k_1}{S_n} \left(\underset{k_1}{R_n}\right)^{\lambda_2 d + r_2} \underset{k_1, k_2}{S_n} \cdots \left(\underset{k_l}{R_n}\right)^{\lambda_{l+1} d + r_{l+1}} V_0^{k_l},$$

avec

$$\frac{\lambda_i d + r_i + 1}{n} > \delta.$$

Cette somme peut s'écrire, avec les notations des théorèmes précédents,

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{k_i} \sum_{r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\, V_0^{k_l}\, dw_1 \ldots dw_l, \qquad \text{avec} \quad u = 0.$$

où $R_{n,\delta}$ est une certaine région de R^l, déterminée par

$$P(N^n_{l, r_i} w_i) d + r_i + 1 > n\delta \iff \left\{ \begin{array}{l} w_i \geq \left[\dfrac{n\delta - 1 - r_i}{dN^n_{l, r_i}} \right] + \dfrac{1}{2 N^n_{l, r_i}}, \qquad \forall\, i, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} w_i = 1, \end{array} \right.$$

soit

$$v_{i, n}(\delta) = \left[\frac{n\delta - 1 - r_i}{dN^n_{l, r_i}} \right] + \frac{1}{2 N^n_{l, r_1}},$$

$$v_{i, n}(\delta) \to \delta \qquad \text{si} \quad n \to \infty,$$

soit R_δ la région limite de $R_{n,\delta}$

$$w \in R_\delta \iff \left\{ \begin{array}{l} w_i \geq \delta, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} w_i = 1; \end{array} \right.$$

$$a_{l, n, \delta} = \sum_{k_i, r_1} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{k_i, r_i}(n)(w_1, \ldots, w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l V_0^{k_l}$$

est le terme général d'une série en l, il est majoré par le terme d'une série uniformément convergente en l, ce terme étant indépendant de n.

Pour montrer la propriété, il suffira de montrer que $a_{l,n,\delta}$ converge vers $a_{l,\delta}$ uniformément en δ lorsque $n \to \infty$; $\sum_{l=0}^{n} a_{l,n,\delta}$ convergera alors uniformément en δ vers $\sum_{l=0}^{\infty} a_{l,\delta}$. Il suffira ensuite de montrer que

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{l,\delta} \to 1 \qquad \text{si} \quad \delta \to 0.$$

a. Montrons que

$$a_{l,n,\delta} \to a_{l,\delta} = \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \times \exp(-q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \ldots \exp(-q_{k_l} w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l.$$

Nous avons, en effet, avec les notations des théorèmes précédents, où l'on fait $u = 0$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k_i, r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} - \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1) q_\alpha^{k_1} \ldots \exp(-q_{k_l} w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l \\ &= \sum_{k_i, r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} - \sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} + \sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} \\ &\quad - \sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} g^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} + \sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} g^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} \\ &\quad - \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \ldots \\ &\qquad \times \exp(-q_{k_l} w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l. \end{aligned}$$

On sait que

$$R_\delta \subset K_l \qquad \left(w \in K_l \Leftrightarrow w_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{l+1} w_i = 1 \right);$$

sur K_l,

$$f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} - g^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} \to 0$$

et est mesurable bornée, donc

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k_i, r_i} \left(\int_{R_\delta} f^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} - \int_{R_\delta} g^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k_i, r_i} \left(\int_{K_l} f^n_{k_i, r_i}(n) - g^n_{k_i, r_i}(n) V_0^{k_l} \right) \right| \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

en vertu du théorème de Lebesgue, et ce uniformément en δ.

De même, en vertu des résultats précédents,

$$\sum_{k_i, r_i} g^n_{k_i, r_i}(n)\, V_0^{k_l} - \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \ldots \exp(-q_{k_l} w_{l+1}) \to 0 \quad \text{sur } K_l$$

et y est bornée uniformément. Le théorème de Lebesgue entraîne à nouveau que

$$\sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} g^n_{k_i, r_i}(n)\, V_0^{k_l} - a_l(\delta) \to 0$$

uniformément en δ.

Reste à démontrer que

$$\sum_{k_i, r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{k_i, r_i}(n)\, V_0^{k_l} - \sum_{k_i, r_i} \int_{R_\delta} f^n_{k_i, r_i}(n)\, V_0^{k_l} \to 0$$

uniformément en δ. Puisque f est majorée sur $R_{n,\delta}$ et R_δ tous deux contenus dans K_l, il suffit de montrer que $L(R_{n,\delta} \triangle R_\delta) \to 0$ si $n \to \infty \left(A \triangle B = A \cap \complement B + B \cap \complement A\right)$, uniformément en δ. L désigne la mesure de Lebesgue sur R^l.

Nous savons que

$$w \in R_{n,\delta} \iff w_i > \left[\frac{n\delta - 1 - r_i}{d N^n_{l, r_i}}\right] + \frac{1}{2 N^n_{l, r_i}} = v_{i,n,\delta},$$

$$|v_{i,n,\delta} - \delta| = \left| \frac{[n\delta - 1 - r_i]}{d\left[\dfrac{n-\rho}{d}\right]} + \frac{1}{2\left[\dfrac{n-\rho}{d}\right]} - \delta \right| \leq \frac{K_1}{N^n_{l, r_i}} \qquad \text{pour } \delta < \delta_1$$

$$= \varepsilon_n \to 0$$

uniformément en δ pour $\delta < \delta_1$ lorsque $n \to \infty$,

$$R_{n,\delta} \triangle R_\delta \subset \left\{ \begin{matrix} w : \quad w \in K_l, \quad \exists\, i, \quad \delta - \varepsilon_n < w_i < \delta + \varepsilon_n \\ (i = 1, \ldots, l+1) \end{matrix} \right\}.$$

On a, par conséquent,

$$L(R_{n,\delta} \triangle R_\delta) \leq \sum_{j=1}^{l} \int_{\left(w : \; \begin{smallmatrix} \sum_{i=1}^{l} w_i \leq 1 \\ w_i \geq 0 \\ \delta - \varepsilon_n < w_j < \delta + \varepsilon_n \end{smallmatrix} \right)} dw_1 \ldots dw_l$$

$$+ \left| \int_{\left(w : \; \begin{smallmatrix} \sum_{i=1}^{l} w_i \leq 1 \\ w_i \geq 0 \\ \delta - \varepsilon_n < w_{l+1} < \delta + \varepsilon_n \end{smallmatrix} \right)} dw_1 \ldots dw_l \right|.$$

La dernière intégrale est égale aux précédentes, par le changement de variables

$$w_i = W_i \qquad (i = 1, \ldots, l-1),$$
$$w_l = 1 - (W_1 + W_2 + \ldots + W_l)$$

au signe près, et chaque intégrale, on le voit aisément $\leqq 2 \dfrac{\varepsilon_n}{(l-1)!}$, donc

$$L(R_{n,\delta} \triangle R_\delta) \leqq \frac{2\varepsilon_n (l-1)}{(l-1)!} \to 0$$

uniformément en $\delta < \delta_1$, si $n \to \infty$.

b. Examinons maintenant $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{\delta,l}$, qui s'interprète évidemment comme la probabilité, pour le processus Z (t), d'avoir des durées de séjour successives dans les classes ergodiques $E_1, \ldots, E_s, > \delta$.

C'est une série uniformément convergente en l, et par conséquent, si $\delta \to 0$,

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{\delta,l} \to \sum_{l=0}^{\infty} a_{0,l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k_i} \int_{\left\{ w : \begin{array}{c} w_i \geqq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{l} w_i \leqq 1 \end{array} \right\}} \Big(\exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1}$$
$$\times \exp - (q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \ldots \exp(-q_{k_l} w_{l+1})\, dw_1 \ldots dw_l.$$

Mais ceci n'est autre que

$$\sum_{k_l} \Pr[\{Z(t) = k_l\} / \{Z(0) = \alpha\}] \equiv 1.$$

Les mesures $\mu_{i_0,n}$ sont donc bien relativement compactes.

2° Soit μ^* une mesure limite d'une sous-suite μ_{i_0,n_k}. Montrons que μ^* a la propriété *a*.

Soit B l'événement $\{\omega_\varphi(\tau - \delta, \tau + \delta) > \lambda,\}$ ou, puisqu'il s'agit de fonctions de $D_s(0, 1)$, $\{$sur l'intervalle $(\tau - \delta, \tau + \delta)$, φ a au moins un saut.$\}$ Nous avons

$$\mu^*(B) < \varliminf_{k \to \infty} \mu_{n_k, i_0}(B).$$

Mais

$$\mu_{n_k, i_0}(B) = 1 - \Pr$$

$\{$sur $\tau - \delta, \tau + \delta$, le processus $Z_{n_k, i_0}(t)$ reste dans la même classe ergodique$\}$

$$= 1 - \sum_i \sum_{j \in F_i} (P_{n_k})^{[n_k(\tau-\delta)]}(i_0, j) \left(\underset{i}{R}_{n_k}\right)^{[n_k(\tau+\delta)] - [n_k(\tau-\delta)]} V_0^i(j),$$

mais, si $k \to \infty$,

$$(\underset{i}{\mathrm{R}}_{n_k})^{[n_k(\tau+\delta)]-[n_k(\tau-\delta)]}\mathrm{V}_0^i \to \exp(-2\delta q_i)\mathrm{V}_0^i,$$
$$(\mathrm{P}_{n_k})^{[n_k(\tau-\delta)]}\mathrm{V}_0^i \to \exp \mathrm{Q}(\tau-\delta)(\alpha, i).$$

Il vient alors

$$\mu^*(\mathrm{B}) \leqq 1 - \sum_{i=1}^{s} \exp \mathrm{Q}(\tau-\delta)(\alpha, i)\exp(-2q_i\delta),$$

expression qui tend vers zéro si $\delta \to 0$. Donc $\mu^*(\mathrm{B}) \to 0$ si $\delta \to 0$, ce qui équivaut à la propriété a.

CHAPITRE IV.

Dans ce chapitre, nous envisagerons l'existence d'états transitoires pour la matrice limite P.

Avec les notations de l'introduction, P s'écrit

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{T} & \mathrm{B}_1 & \dots & \mathrm{B}_s \\ 0 & \underset{1}{\mathrm{R}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \underset{s}{\mathrm{R}} \end{pmatrix}, \qquad \text{soit } \mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{E}_i.$$

Soient $\underset{i}{\mathrm{R}}_n$ la restriction de P_n à $\mathrm{E}_i \times \mathrm{E}_i$;

$\underset{i,j}{\mathrm{S}}_n$	»	P_n à $\mathrm{E}_i \times \mathrm{E}_j$;
$\underset{in}{\mathrm{Q}}$	»	P_n à $\mathrm{E}_i \times \tau$;
$\mathrm{B}_{i,n}$	»	P_n à $\tau \times \mathrm{E}_i$;
T_n	»	P_n à $\tau \times \tau$;
Q_n	»	P_n à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$;
R_n	»	P_n à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$;
D_{u_e}	»	D_u à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$;
B_n	»	P_n à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

Le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$$^{(n)}\xi_t(n), \quad \frac{^{(n)}\xi_e(n)}{n}, \quad t \in \tau, \quad e \in \mathrm{E},$$

est le vecteur

$$\begin{pmatrix} \mathrm{T}_n . \mathrm{D}_{u^t} & \mathrm{B}_n . \mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}} \\ \mathrm{Q}_n . \mathrm{D}_{u^t} & \mathrm{R}_n . \mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}} \end{pmatrix}^{(n)} \mathrm{V}_0.$$

Le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$$ {}^{(n)}\xi_{l}(n), \quad \left({}^{(n)}\xi_{e}(n) - n\, \underset{1}{\Pi}{}^{\star}_{n,e} \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} $$

est, dans le cas où P n'a qu'une seule classe ergodique E_1,

$$ \begin{pmatrix} T_n . D_{u^l} & B_{1,n} . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \\ \underset{1}{Q}_n . D_{u^l} & \underset{1}{R}_n \;. D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \end{pmatrix}^{(n)} V_0 \exp\left(- i \langle u^1, \underset{1}{\Pi}{}^{\star}_{n} \rangle \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n} \right) $$

$\underset{1}{\lambda}_{0,n}$ est la valeur propre de $\underset{1}{R}_n$ maximale qui $\to 1$ si $n \to \infty$, $\underset{1}{\Pi}{}^{\star}_{n}$ le vecteur propre correspondant.

Introduisons les quantités suivantes :

$$ \begin{aligned} {}_1u^{k}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = \sum_{\nu_i} & (T_n . D_{u^l})^{j_1} \left(B_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right) \\ & \times \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_1} Q_n . D_{u^l} (T_n . D_{u^l})^{j_2} B_n . D_{\frac{u_e}{n}} \\ & \times \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_2} \ldots (T_n . D_{u^l})^{j_l} \left(B_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right) \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_l}. \end{aligned} $$

et, de même,

$$ \begin{aligned} {}_1u'^{k}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = \sum_{\nu_i} & (T_n . D_{u^l})^{j_1} \left(B_{1,n} . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right) \\ & \times \left(\underset{1}{R}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right)^{\nu_1} \underset{1}{Q}_n . D_{u^l} \ldots (T_n . D_{u^l})^{j_l} \\ & \times \left(B_{1,n} . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right) \left(\underset{1}{R}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right)^{\nu_l} \exp\left(- \sum_{e \in E_1} i u_e \underset{1}{\Pi}{}^{\star}_{e,n} \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n} \right), \end{aligned} $$

avec

$$ j_1 + j_2 + \ldots + j_l + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_l + 2l - 1 = k; $$

$$ \begin{aligned} {}_2u^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n) = \sum_{\nu_i} & \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_1} (Q_n . D_{u^l}) (T_n . D_{u^l})^{j_1} \\ & \times \left(B_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right) \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_2} \ldots (T_n . D_{u^l})^{j_{l-1}} \left(B_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right) \left(R_n . D_{\frac{u_e}{n}} \right)^{\nu_l} \end{aligned} $$

et, de même,

$$ \begin{aligned} {}_2u'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n) = \sum_{\nu_i} & \left(\underset{1}{R}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right)^{\nu_1} \left(\underset{1}{Q}_n . D_{u^l} \right) (T_n . D_{u^l})^{j_1}) \\ & \times \left(B_{1,n} . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right) \left(\underset{1}{R}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right)^{\nu_2} \ldots (T_n . D_{u^l})^{j_{l-1}} \\ & \times \left(B_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right) \left(\underset{1}{R}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}} \right)^{\nu_l} \exp\left(- \sum_{e \in E_1} i u_e \underset{1}{\Pi}{}^{\star}_{e,n} \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n} \right), \end{aligned} $$

avec

$$j_1+j_2+\ldots+j_{l-1}+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_l+2(l-1)=k;$$

$$\begin{aligned}{}_1v^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)=\sum_{\nu_i}&(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\left(\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\nu_1}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\ldots\\&\times\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\nu_{l-1}}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_l}\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}{}_1v'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)=\sum_{\nu_i}&(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)\left({}_1\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\nu_1}(\mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t})\ldots\\&\times\left({}_1\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\nu_{l-1}}(\mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_l}\\&\times\exp\left(-\sum_{e\in\mathrm{E}_1}iu_e\,{}_1\Pi^\star_{e,n}\frac{1}{{}_1\lambda_{0,n}}\sqrt{n}\right),\end{aligned}$$

avec

$$j_1+j_2+\ldots+j_l+\nu_1+\ldots+\nu_{l-1}+2(l-1)=k;$$

$$\begin{aligned}{}_2v^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)=\sum_{\nu_i}&\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\nu_1}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\left(\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)\ldots\\&\times(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-2}}\left(\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\nu_{l-1}}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}{}_2v'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)=\sum_{\nu_i}&\left({}_1\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\nu_1}(\mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\ldots\\&\times\left({}_1\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\nu_{l-1}}(\mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\\&\times\exp\left(-\sum_{e\in\mathrm{F}_1}iu_e\,{}_1\Pi^\star_{e,n}\frac{1}{{}_1\lambda_{0,n}}\sqrt{n}\right),\end{aligned}$$

avec

$$j_1+j_2+\ldots+j_{l-1}+\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{l-1}+2l-3=k.$$

LEMME 4.1 :

1° $\left(\mathrm{P}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^n\mathrm{V}_0$ *est le vecteur qui vaut :*

sur τ,

$$\sum_l\sum_{j_i}{}_1u^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^e+\sum_l\sum_{j_i}{}_1v^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^t;$$

sur E,

$$\sum_l\sum_{j_i}{}_2u^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^e+\sum_l\sum_{j_i}{}_2v^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^t.$$

2° $\left(P_n . D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)^n V_0 \exp\left(-\sum_{e \in E_1} i u_e \underset{1}{\Pi}^{\star}_{e,n} \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n}\right)$

est le vecteur qui vaut :

sur τ,

$$\sum_l \sum_{j_i} {}_1u'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) V_0^e + \sum_l \sum_{j_i} {}_1v'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) V_0^l ;$$

sur E,

$$\sum_l \sum_{j_i} {}_2u'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) V_0^e + \sum_l \sum_{j_i} {}_2v'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) V_0^l .$$

D'autre part, les relations suivantes ont lieu :

$$(1.1) \qquad {}_1u^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = (T_n . D_{u^t})^{j_1} \left(B_n . D_{\frac{u_e}{n}}\right) {}_2u^{(k-j_1-1)}_{j_2,\ldots,j_l}(n),$$

$$(1.1') \qquad {}_1u'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = (T_n . D_{u^t})^{j_1} \left(\underset{1}{B}_n . D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right) {}_2u'^{(k-j_1-1)}_{j_2,\ldots,j_l}(n),$$

$$(1.2) \qquad {}_1v^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = {}_1u^{(k-j_l-1)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)(Q_n . D_{u^t})(T_n . D_{u^t})^{j_l},$$

$$(1.2') \qquad {}_1v'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_l}(n) = {}_1u'^{k-j_l-1}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)(Q_{1,n} . D_{u^t})(T_n . D_{u^t})^{j_l},$$

$$(1.3) \qquad {}_2v^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n) = {}_2u^{(k-j_{l-1}-1)}_{j_1,\ldots,j_{l-2}}(n)(Q_n . D_{u^t})(T_n . D_{u^t})^{j_{l-1}},$$

$$(1.3') \qquad {}_2v'^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n) = {}_2u'^{(k-j_{l-1}-1)}_{j_1,\ldots,j_{l-2}}(n)(Q_{1,n} . D_{u^t})(T_n . D_{u^t})^{j_{l-1}}.$$

Démonstration. — Elle résulte de l'application du lemme 3.1 aux matrices $P_n . D_{\frac{u_e}{n}}$ $\left(\text{resp. } P_n . D_{\frac{u_e}{\sqrt{n}}}\right)$, avec $k = n$ et la partition en τ et E de l'espace des états.

Les autres relations sont une conséquence immédiate de la définition des u et des v.

LEMME 4.2. — *Si* P *n'a qu'une seule classe ergodique* E_1 *et des états transitoires* τ, *si* $n \underset{1}{\Pi} Q_{1,n} \to S_1$, *alors :*

$\underset{1}{\lambda}_{0,n}$ *étant la valeur propre maximale de* $\underset{1}{R}_n$, *restriction de* P_n *à* $E_1 \times E_1$,

1° $n(1 - \underset{1}{\lambda}_{0,n}) \to q_1$, avec $q_1 = \langle \underset{1}{\Pi}^{\star}, S_1 V'_0 \rangle$;

2° ${}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n) V_0^1 \to {}_2u'_{j_1,\ldots,j_{l-1}} V_0^1$,

où

$${}_2u'_{j_1,\ldots,j_{l-1}} = \frac{1}{(l-1)!} \Phi_1(u^1)$$
$$\times \exp(-q_1) \underset{1}{\Pi} S_1 D_{u^t} (T . D_{u^t})^{j_1} B_1 \underset{1}{\Pi} (S_1 . D_{u^t})(T . D_{u^t})^{j_2} B_1 \ldots (T . D_{u^t})^{j_{l-1}} B_1,$$

où Φ_1 *est la fonction caractéristique multidimensionnelle du chapitre* II *relative à* $\underset{1}{R}$, $\underset{1}{\Pi}$ *le projecteur correspondant à la valeur propre* $\lambda_0 = 1$ *de* $\underset{1}{R}$.

Démonstration. — 1° Nous avons la relation

$$\underset{1,n}{\mathrm{Q}}\,\mathrm{V}_0^l + \underset{1}{\mathrm{R}}_n \mathrm{V}_0^1 = \mathrm{V}_0^1$$
$$\Rightarrow \quad n\,\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\underset{1,n}{\mathrm{Q}}\,\mathrm{V}_0^l = n(1-\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{V}_0^1.$$

Le membre de gauche tend vers $\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_0)\,\mathrm{S}_1\mathrm{V}_0^l$. Puisque

$$\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{V}_0^1 \to \underset{1}{\Pi}\,\mathrm{V}_0^1 = \mathrm{V}_0^1,$$

cela entraîne $n(1-\underset{1}{\lambda}_{0,n})$ reste borné, donc

$$n(1-\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{V}_0^1 - \mathrm{V}_0^1 \to 0,$$

donc

$$n(1-\underset{1}{\lambda}_{0,n})\,\mathrm{V}_0^1 \to \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_0)\,\mathrm{S}_1\mathrm{V}_0^l \equiv \underset{1}{\Pi}\,\mathrm{S}_1\mathrm{V}_0^l$$
$$\Rightarrow \quad n(1-\underset{1}{\lambda}_{0,n}) \to q_1.$$

2° Soit d_1 le nombre de classes cycliques de la matrice limite $\underset{1}{\mathrm{R}}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}_0^1\\
&\quad=\sum_{r_i}\sum_{\lambda_i}\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\lambda_1 d_1+r_1}\mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\\
&\qquad\times\left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\lambda_2 d_1+r_2}\ldots(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)\ldots\\
&\qquad\times\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\lambda_l d_1+r_l}\mathrm{V}_0^1\exp\left(-i\left(\langle u^1,\underset{1}{\Pi}{}_n^{\star}\rangle\frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}}\right)\sqrt{n}\right),
\end{aligned}$$

où

$$j_1+j_2+\ldots+j_{l-1}+r_1+\ldots+r_l+(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_l)\,d_1+2(l-1)=n-k.$$

L'interprétation probabiliste de cette expression donnée dans l'introduction résulte du corollaire 2.2.

On a donc, en posant $\rho=j_1+j_2+\ldots+j_l+l-1$,

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_l)\,d_1+r_1+r_2+\ldots+r_l+l-1=n-\rho.$$

Posons

$$\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,r_i}=\left[\frac{n-\rho-(l-1)-(r_1+\ldots+r_{l-1})}{d_1}\right],$$

avec les notations du lemme 3.2.

Nous avons également, d'après un raisonnement analogue à celui fait dans ce dernier lemme,

$$\sum_{\lambda_i}=\int_{\mathrm{K}_{n-\rho,l-1,r_i}} f_{n\atop j_i,r_i}(w_1,\ldots,w_{l-1})\,dw_1,\ldots,dw_{l-1}\mathrm{V}_0^1,$$

où

$$
\begin{aligned}
&\underset{j_i, r_i}{f_n}(w_1, \ldots, w_{l-1}) \\
&\quad = \left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_1\right) d_1 + r_1} \mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} \mathrm{Q}_{1, n} . \mathrm{D}_{u^l}(\mathrm{T}_n . \mathrm{D}_{u^l})^{j_1} \\
&\qquad \times \left(\mathrm{B}_{1, n} . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right) \cdots \left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i\right) d_1 + r_i} \mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} \mathrm{Q}_{1, n} . \mathrm{D}_{u^l}(\mathrm{T}_n . \mathrm{D}_{u^l})^{j_i} \ldots \\
&\qquad \times \left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_l\right) d_1 + r_l} \exp\left(-\sum_{e \in \mathrm{E}_1} i u_e \underset{1}{\Pi}^{\star}_{e, n} \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0, n}} \sqrt{n}(w_1 + \ldots + w_l)\right),
\end{aligned}
$$

avec

$$w_1 + \ldots + w_2 + \ldots + w_l = 1.$$

L'hypothèse faite entraîne, puisque $\underset{1}{\Pi} > 0$, $n\mathrm{Q}_{1,n}$ borné, donc $\underset{j_i, r_i}{f_n}$ également.

D'autre part, sur K_{l-1}, le théorème 3.2 entraîne

$$\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i\right) d_1 + r_i} - \sum_{g=0}^{d_1 - 1} (\underset{1}{\lambda}_g)^{r_i} \left(\underset{1}{\lambda}_{g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i\right) d_1} \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_g) \to 0.$$

En vertu d'un raisonnement précédent (*voir* lemme 3.4),

$$\left(\underset{1}{\lambda}_{g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i\right) d_1} - \left(\underset{1}{\lambda}_{g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_i\right) d_1} \to 0,$$

car $\mathrm{P}(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i) - \mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_i\right)$ reste borné quand $n \to \infty$,

donc

a. $$\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_i\right) d_1 + r_i} - \sum_{g=0}^{d_1 - 1} (\underset{1}{\lambda}_g)^{r_i} \left(\underset{1}{\lambda}_{g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_i\right) d_1} \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_g) \to 0;$$

b. $$\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} \mathrm{Q}_{1, n} . \mathrm{D}_{u^l} - \frac{n}{d_1} \mathrm{Q}_{1, n} . \mathrm{D}_{u^l} \to 0;$$

c. $$\begin{aligned}\left(\underset{1}{\mathrm{R}}_n . \mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1, r_i} w_l\right) d_1 + r_l} \mathrm{V}^1_0 \exp\left(-i\left(\langle u^1, \underset{1}{\Pi}^{\star}_n \rangle \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0, n}}\right) w_l \sqrt{n}\right) \\ \to \exp(-q_1 w_l) (\Phi_1(u^1))^{w_l} \mathrm{V}^1_0.\end{aligned}$$

Donc, sur K_{l-1}, nous avons

$$\underset{j_i, r_i}{f_n}(w_1, \ldots, w_{l-1}) - \underset{j_i, r_i}{g_n}(w_1, \ldots, w_{l-1}) \to 0.$$

Avec

$$g_{\substack{n\\ j_i, r_i}}(w_1 \dots w_{l-1}) = \left(\sum_{g=0}^{d_1-1} (\underset{1}{\lambda}_g)^{r_1} \left(\underset{1}{\lambda}_{g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_1\right) d_1} \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_g)\right)$$

$$\times \exp\left(-i\langle u^1, \underset{1}{\Pi}{}_n^\star\rangle \frac{\sqrt{n}\, w_1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}}\right) \frac{n}{d_1} \mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1} \left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$\times \left[\sum_{g=0}^{d_1-1} (\underset{1}{\lambda}_g)^{r_2} \left(\underset{1}{\lambda}_{g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_2\right) d_1} \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_g)\right]$$

$$\times \exp\left(-i\langle u^1, \underset{1}{\Pi}{}_n^\star\rangle \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n}\, w_2\right) \dots \exp(-q_1 w_l)\,(\Phi_1(u^1))^{w_l} \mathrm{V}_0^1,$$

avec

$$w_l = 1 - \sum_{i=1}^{l-1} w_i ;$$

$g_{\substack{n\\ j_i, r_i}}$ est également bornée sur K_{l-1}. On peut appliquer le lemme 3.3, qui entraîne

$$_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots,j_{l-1}}(n)\mathrm{V}_0^1 - \int_{\mathrm{K}_{l-1}} \sum_{r_i} g_{\substack{n\\ j_i, r_i}}(w_1, \dots, w_{l-1})\, dw_1 \dots dw_{l-1}.$$

Or en sommant sur r_i, les $\underset{1}{\lambda}_g$, pour $g \neq 0$, disparaissent. Il nous reste

$$\left(\underset{1}{\lambda}_{0,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{\left(\mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_1\right) + \mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_2\right) + \dots + \mathrm{P}\left(\left[\frac{n}{d_1}\right] w_{l-1}\right)\right) d_1}$$

$$\times \exp\left(-i\langle u^1, \underset{1}{\Pi}{}_n^\star\rangle \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}} \sqrt{n}(1 - w_l)\right) \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_0)\, n\, \mathrm{Q}_{1,n}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}$$

$$\times \left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right) \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_0) \dots \left(\mathrm{B}_{1,n}.\mathrm{D}_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right) \exp(-q_1 w_l)\,(\Phi_1(u^1))^{w_l}.$$

Lorsque $n \to \infty$, le théorème 3.2 entraîne que $\sum_{r_i} g_{\substack{n\\ j_i, r_i}}$ converge vers

$$\Phi_1(u^1)\exp(-q_1)\underset{1}{\Pi}\mathrm{S}_1.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}_1\underset{1}{\Pi}\mathrm{S}_1.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B}_1 \dots (\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\mathrm{B}_1\mathrm{V}_0^1.$$

Puisque la mesure de Lebesgue de $\mathrm{K}_{l-1} = \frac{1}{(l-1)!}$, et que $\sum_{r_i} g_{\substack{n\\ j_i, r_i}}$ est uniformément borné sur K_{l-1}, on a

$$_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots,j_{l-1}}(n)\mathrm{V}_0^1 \to \frac{1}{(l-1)!}\Phi_1(u^1)\exp(-q_1)\underset{1}{\Pi}\mathrm{S}_1.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}$$

$$\times \mathrm{B}_1\underset{1}{\Pi}(\mathrm{S}_1.\mathrm{D}_{u^t})(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B}_1 \dots (\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\mathrm{B}_1\mathrm{V}_0^1.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 4.1. — *Dans les conditions du lemme* 4.1,

$$ {}_1u'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^1 \to (\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\,\mathrm{B}_1\,{}_2u'_{j_2,\ldots,j_l}\mathrm{V}_0^1, $$
$$ {}_1v'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^1 \quad \text{et} \quad {}_2v'^{(n)}_{j_1,\ldots,j_l}(n)\,\mathrm{V}_0^1 \to 0. $$

Démonstration. — La première partie est évidente et résulte de la formule (1.1′) et du lemme 4.1.

La seconde partie résulte des formules (1.2′) et (1.3′) et du fait que la convergence de ${}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}_0^1$, pour tout $u \in \mathrm{R}^r$, entraîne $\|\,{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\|$ bornée.

En effet,

$$ \begin{aligned} \|\,{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}_0^1\,\| &\leq \sup_i \sum_{j\in \mathrm{E}_1} \left|\,{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,(i,j)\,\right| \\ &= \sup_i \sum_j \left|\,{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,(i,j)\,\right|_{\substack{u^t=0\\ u^1=0}} \\ &= \|\,{}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}_0^1\,\|_{\substack{u^t=0\\ u^1=0}} \end{aligned} $$

qui converge vers $\|\,{}_2u'_{j_1,\ldots,j_{l-1}}\,\mathrm{V}_0^1\,\|$, donc reste borné.

$\mathrm{Q}_{1,n}$ tendant vers zéro, les termes envisagés tendent bien vers zéro.

Lemme 4.3. — *Si* P *a plusieurs classes ergodiques et des états transitoires et si :*

a. $n \underset{i}{\Pi}\, \underset{i,n}{\mathrm{Q}} \to \mathrm{S}_i$;

b. $n \langle \underset{i}{\Pi^*}, \underset{i,j}{\mathrm{S}_n} \rangle \to q_i^j$;

c. $n\left(1 - \underset{i}{\lambda}_{0,n}\right) \to q_i$.

Alors

$$ {}_2u^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}_0^e \to {}_2u_{j_1,\ldots,j_{l-1}}\mathrm{V}_0^e, $$

où

$$ \begin{aligned} {}_2u_{j_1,\ldots,j_{l-1}} = \int_{\mathrm{K}_{l-1}} &\mathrm{H}(t_1)\,\mathrm{S}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\,\mathrm{BH}(t_2) \\ &\times \mathrm{S}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B}\ldots\,\mathrm{H}(t_l)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_l, \end{aligned} $$

où H (*t*) *est la matrice qui, sur* $\mathrm{E}_\alpha \times \mathrm{E}_\beta$, *vaut*

$$ \exp([\mathrm{Q} + i\mathrm{V}]t)\,(\alpha,\beta)\,\underset{\alpha,\beta}{\Pi}, $$

avec les notations du chapitre III.

S *est la matrice valant* S_i *sur* $\mathrm{E}_i \times \tau$.

Démonstration. — De même qu'au lemme 4.2, nous avons, si $d = \text{p. p. c. m. } d_i$,

$$ {}_2u^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\,\mathrm{V}^e_0 = \sum_{\rho_i} \int_{\mathrm{K}_{n-\rho,\,l-1,\,\rho_i}} f_{n,\rho_i,j_i}(t_1,\,\ldots,\,t_{l-1})\,dt_1\ldots dt_{l-1}, $$

où

$$ f_{n,\rho_i,j_i}(t_1,\,\ldots,\,t_{l-1}) = \left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i}t_1\right)d+\rho_1} \mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i}\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1} $$
$$ \times\left(\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)\ldots\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i}t_l\right)d+\rho_l}\mathrm{V}^e_0, $$

où

$$ t_l = 1 - \sum_{i=1}^{l-1} t_i, $$

avec

$$ \rho = j_1 + \ldots + j_{l-1} + l - 1, $$
$$ \mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i} = \left[\frac{n-\rho-(l-1)-(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_{l-1})}{d}\right]. $$

L'hypothèse a entraîne : $f_{n,\rho_i,j_i}(t_1,\,\ldots,\,t_{l-1})$ bornée en norme,

$$ \mathrm{K}_{n-\rho,\,l-1,\,\rho_i} \supset \mathrm{K}_{l-1} $$

et

$$ \mathrm{L}(\mathrm{K}_{l-1}) = \frac{1}{(l-1)!} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(\mathrm{K}_{n-\rho,\,l-1,\,\rho_i}). $$

L'interprétation probabiliste de f_{n,ρ_i,j_i} donnée dans l'introduction résulte immédiatement du corollaire 2.2.

Pour avoir une expression asymptotique de f_{n,ρ_i,j_i}, produit de matrices bornées en normes en vertu de a, il suffit de trouver une expression asymptotique pour chacun des termes du produit, qui sont des types suivants :

1. $\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i}t_i\right)d+\rho_i}$;

2. $\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,\rho_i}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_i}\,\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}$;

3. $\left(\mathrm{R}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}^{n-\rho}_{l-1,r_i}t_l\right)d+\rho_l}.\mathrm{V}^e_0$.

Le vecteur 3 converge, en vertu du corollaire 3.3, vers le vecteur valant

$$\exp((\mathrm{Q}+i\mathrm{V})t_l).\mathrm{V}'_0(\alpha) \quad \text{sur } \mathrm{E}_\alpha, \qquad \text{et noté } (\exp((\mathrm{Q}+i\mathrm{V})t_l).\mathrm{V}'_0)^{\star}.$$

Les matrices du type 1 ont, en vertu des lemmes 3.4 et 3.5, l'expression asymptotique suivante :

$$\sum_{s=0}^{[nt_i]} \sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}} \int_{\mathrm{K}_s} \sum_{r_i} g_{k_i,r_i}^{\mu_{n,i}}(n)(w_1\ldots w_{s+1})\,dw_1\ldots dw_s \text{ sur } \mathrm{E}_\alpha\times\mathrm{E}_\beta = \mathrm{H}_\alpha^\beta(\rho_i,\,t_i,\,n),$$

où $k_0=\alpha$, $k_s=\beta$ et

$$\mu_{n,i} = \mathrm{P}\left(\mathrm{N}_{l-1,\rho_i}^{n-\rho}t_i\right)d+\rho_i = nt_i+\mathrm{O}(1),$$

$$\begin{aligned} g_{k_i,r_i}^{\mu_n,i}(n) = {} & \left(\sum_{g=0}^{d_\alpha-1} \left(\lambda_\alpha g\right)^{r_1}\left(\lambda_{\alpha\,g,\,n,\,\frac{u^\alpha}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_1\right)d}\mathrm{E}\left(\lambda_\alpha g\right)\right)\left[\frac{nt_i}{d}\right]\mathrm{S}_{\alpha,k_1}^{n}.\mathrm{D}_{\frac{u^{k_1}}{n}}\cdots \\ & \times\left(\sum_{g=0}^{d_\beta-1} \left(\lambda_\beta g\right)^{r_{s+1}}\left(\lambda_{\beta\,g,\,n,\,\frac{u^\beta}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_{s+1}\right)d}\mathrm{E}\left(\lambda_\beta g\right)\right), \end{aligned}$$

avec

$$w_{s+1} = 1-\sum_{i=1}^{s} w_i,$$

$$\mu_{n,i} = \rho_i \bmod (d) \quad\Rightarrow\quad r_1+\ldots+r_i+\ldots+r_{s+1} = \rho_i \,(\bmod d).$$

Soit $\mathrm{H}(\rho_i,\,t_i,\,n)$ la matrice qui coïncide sur $\mathrm{E}_\alpha\times\mathrm{E}_\beta$ avec $\mathrm{H}_\alpha^\beta(\rho_i,\,t_i,\,n)$.

Les matrices du type 2 restant bornées, en vertu de l'hypothèse *a*, une expression asymptotique de f_{n,ρ_i,j_i} est

$$\begin{aligned} & \mathrm{H}(\rho_1,\,t_1,\,n)\,\mathrm{N}_{l-1,\rho_i}^{n-\rho}\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}. \\ & \mathrm{H}(\rho_2,\,t_2,\,n)\,\mathrm{N}_{l-1,\rho_i}^{n-\rho}\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\cdots \\ & \qquad \times\mathrm{N}_{l-1,\rho_i}^{n-\rho}\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}(\exp((\mathrm{Q}+i\mathrm{V})t_l)\mathrm{V}'_0)^{\star} \end{aligned}$$

et même, puisque $\mathrm{N}_{l-1,r_i}^{n-\rho} = \dfrac{n}{d}+\mathrm{O}(1)$,

$$\begin{aligned} & \mathrm{H}(\rho_1,\,t_1,\,n)\,\frac{n}{d}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}\cdots \\ & \qquad \times\frac{n}{d}(\mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_e}{n}}(\exp((\mathrm{Q}+i\mathrm{V})t_l)\mathrm{V}'_0). \end{aligned}$$

Donc, ρ_l ayant disparu de l'expression ci-dessus, $\sum_{\rho_i} f_{n,\rho_i,t_i}$ a pour expression asymptotique

$$\left(\sum_{\rho=0}^{d-1} \mathrm{H}(\rho, t_1, n)\right) \frac{n}{d} \mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_c}{n}}\left(\sum_{\rho=0}^{d-1} \mathrm{H}(\rho, t_2, n)\right)\cdots$$
$$\times\left(\sum_{\rho=0}^{d-1} \mathrm{H}(\rho, t_i, n)\right) \frac{n}{d} \mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_i}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_c}{n}}\cdots$$
$$\times\left(\sum_{\rho=0}^{d-1} \mathrm{H}(\rho, t_{l-1}, n)\right) \frac{n}{d} \mathrm{Q}_n.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}_n.\mathrm{D}_{u^t})^{j_{l-1}}\mathrm{B}_n.\mathrm{D}_{\frac{u_c}{n}}(\exp((\mathrm{Q}+i\mathrm{V})t_l)\mathrm{V}'_0)^*,$$

$g^{\mu_{n,i}}_{k_i,r_i}(n)$ ne dépend plus de $\mu_{n,i}$ que par r_i, n, t_i et la condition

$$r_1+\ldots+r_{s+1}=\rho_l \qquad (\mathrm{mod}\, d).$$

De même, $\mathrm{H}^\beta_\alpha(\rho_i, t_i, n)$ ne dépend de $\mu_{n,i}$ que par t_i et cette condition, sommer sur r_i vérifiant cette condition, puis sommer sur ρ_i équivaut donc à sommer sur r_i sans conditions.

Donc

$$\sum_{\rho=0}^{d-1}\mathrm{H}^\beta_\alpha(\rho, t_i, n) = \sum_{s=0}^{[nt_i]}\sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}}\int_{\mathrm{K}_s}\sum_{g=0}^{d_\alpha-1}\left(\sum_{r_1=0}^{d-1}(\lambda_\alpha g)^{r_1}\right)$$
$$\times\left(\lambda_{\alpha\, g,n,\frac{u^\alpha}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_1\right)d}\mathrm{E}(\lambda_\alpha g)\left[\frac{nt_i}{d}\right]\mathrm{S}^n_{\alpha,k_1}.\mathrm{D}_{\frac{u^{k_1}}{n}}\cdots$$
$$\times\sum_{g=0}^{d_\beta-1}\left(\sum_{r_{s+1}=0}^{d-1}(\lambda_\beta g)^{r_{s+1}}\right)\left(\lambda_{\beta\, g,n,\frac{u^\beta}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_{s+1}\right)d}$$
$$\times\mathrm{E}(\lambda_\beta g)\,dw_1\ldots dw_s.$$

Mais

$$\sum_{r=0}^{d-1}(\lambda_i g)^r = 0 \qquad \text{si} \quad g\neq 0,$$
$$= d \qquad \text{si} \quad g=0.$$

Il reste

$$\sum_{s=0}^{[nt_i]}\sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}}\int_{\mathrm{K}_s}\left(\lambda_{\alpha\, 0,n,\frac{u^\alpha}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_1\right)d}\mathrm{E}(\lambda_\alpha 0)\,d\left[\frac{nt_i}{d}\right]\mathrm{S}^n_{\alpha,k_1}.\mathrm{D}_{\frac{u^{k_1}}{n}}\cdots$$
$$\times\left(\lambda_{\beta\, 0,n,\frac{u^\beta}{n}}\right)^{\mathrm{P}\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_{s+1}\right)d}\mathrm{E}(\lambda_\beta 0)\,d.$$

En passant à la limite, on voit que

$$\sum_{\rho=0}^{d-1} \mathrm{H}_\alpha^\beta(\rho,\, t_i,\, n) \to d\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}} t_i^{s-1} \int_{\mathrm{K}_s} \exp\Big(\big(-q_\alpha + i\langle u^\alpha,\, \underset{\alpha}{\Pi^\star}\rangle\big) w_1 t_i\Big) q_\alpha^{k_1}$$
$$\times \exp\Big(\big(-q_{k_1} + i\langle u_{k_1},\, \underset{k_1}{\Pi^\star}\rangle\big) w_2 t_i\Big)\ldots$$
$$\times \exp\Big(\big(-q_\beta + i\langle u_\beta,\, \underset{\beta}{\Pi^\star}\rangle\big) w_s t_i\Big)\, dw_1 \ldots dw_{s-1} \underset{\alpha,\beta}{\Pi},$$

quantité qui n'est autre que

$$d \exp((\mathrm{Q} + i\mathrm{V})t_i)\,(\alpha,\, \beta)\, \underset{\alpha,\beta}{\Pi}.$$

Une expression asymptotique de $\sum_{\rho_i} f_{n,\rho_i,t_i}$ est alors, si $\mathrm{H}(t)$ désigne la matrice valant $\exp((\mathrm{Q} + i\mathrm{V})\, t_i)\,(\alpha,\, \beta)\, \underset{\alpha,\beta}{\Pi}$ sur $\mathrm{E}_\alpha \times \mathrm{E}_\beta$,

$$\mathrm{H}(t_1)\, n\, \mathrm{Q}_n . \mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}\; \mathrm{H}(t_2)\, n\, \mathrm{Q}_n . \mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B} \ldots \mathrm{H}(t_l)\mathrm{V}_0^c.$$

Examinons la structure du produit $\mathrm{H}(t)\, n\mathrm{Q}_n$:

$\mathrm{H}(t)$ coïncide, sur $\mathrm{E}_\alpha \times \mathrm{E}_\beta$, avec $a_{\alpha,\beta}\, \underset{\alpha,\beta}{\Pi}$, où $a_{\alpha,\beta}$ désigne

$$\exp((\mathrm{Q} + i\mathrm{V})t)\,(\alpha,\, \beta).$$

$n\, \mathrm{Q}_n$ coïncide, sur $\mathrm{E}_\beta \times \tau$, avec $n\, \underset{\beta,n}{\mathrm{Q}}$.

Donc $\mathrm{H}(t)\, n\, \mathrm{Q}_n$ coïncide, sur $\mathrm{E}_\alpha \times \tau$, avec

$$\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha,\beta}\, \underset{\alpha,\beta}{\Pi}\, n\, \mathrm{Q}_{\beta,n}.$$

Mais $\underset{\alpha,\beta}{\Pi}\, \underset{\beta}{\Pi} = \underset{\alpha,\beta}{\Pi}$, et $\underset{\beta}{\Pi}\, n\, \mathrm{Q}_{\beta,n} \to \mathrm{S}_\beta$, d'après l'hypothèse. Donc $\mathrm{H}(t)\, n\, \mathrm{Q}_n$ converge vers la matrice valant, sur $\mathrm{E}_\alpha \times \tau$,

$$\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha,\beta}\, \underset{\alpha,\beta}{\Pi}\, \mathrm{S}_\beta,$$

qui peut être considéré comme produit de $\mathrm{H}(t)$ et d'une matrice S valant S_β sur $\mathrm{E}_\beta \times \tau$.

Les expressions approchées successives de f_{n,ρ_i,t_i} étant uniformément bornées sur K_{l-1}, le théorème de Lebesgue permet de conclure que

$$_2u^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n)\mathrm{V}_0^c \to \int_{\mathrm{K}_{l-1}} \mathrm{H}(t_1)\, \mathrm{S}.\mathrm{D}_{u^t}(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_1}\mathrm{B}$$
$$\times \mathrm{H}(t_2)\,(\mathrm{S}.\mathrm{D}_{u^t})\,(\mathrm{T}.\mathrm{D}_{u^t})^{j_2}\mathrm{B} \ldots \mathrm{H}(t_l)\mathrm{V}_0^c\, dt_1 \ldots dt_{l-1}.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4.2. — *Dans les conditions du lemme* 4.3,

$$ {}_1u^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\,V^e_0 \to (T.D_{u^t})^{j_1}B_2\,u_{j_1,\dots,j_l}V^e_0, $$
$$ {}_1v^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\,V^e_0 \quad\text{et}\quad {}_2v^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\,V^e_0 \to 0. $$

Démonstration. — Elle est identique à celle du corollaire 4.1.

Les inégalités suivantes ont lieu : si $\|n\,Q_n\| < A$, $\|Q_n\| < \varepsilon$ pour n assez grand.

$$ \|{}_2u^{(n-k)}_{j_1,j_2,\dots,j_{l-1}}(n)\| \leq A^{l-1}\frac{C^{l-1}_{n-k-(l-1)-h}}{n^{l-1}}\,\|(T_n)^{j_1}\|.\|(T_n)^{j_2}\|.\|(T_n)^{j_{l-1}}\| $$
$$ (h = j_1 + \dots + j_{l-1}), $$

mais $\exists\,\rho$, $0 < \rho < 1$, tel que $\sigma(T_n) \subset B(0, \rho)$, pour n assez grand, en vertu des résultats du chapitre I et du fait que T, limite de T_n, a son spectre $\subset B(0, r)$, $0 < r < 1$.

Donc

$$ T^j_n = \frac{1}{2i\Pi}\int_{B^*(0,\rho)} \lambda^j(\lambda I - T_n)^{-1}\,d\lambda. $$

En vertu des résultats du chapitre I, $\|(\lambda I - T_n)^{-1}\| \leq K$ pour n assez grand, et

$$ \|(T_n)^j\| \leq \rho^{j+1}K. $$

Donc, en posant $A_1 = \dfrac{K}{1-\rho}$,

$$ a.\quad \sum_{j_i}\|{}_2u^{(n-k)}_{j_1,\dots,j_{l-1}}(n)\| \leq \frac{A^{l-1}}{(l-1)!}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\|(T_n)^j\|\right)^{l-1} \leq \frac{(AA_1)^{l-1}}{(l-1)!}. $$

De même,

$$ \|{}_1u^n_{j_1,\dots,j_l}(n)\| \leq \|T^{j_1}_n\|\frac{A^{l-1}}{(l-1)!}\|T^{j_2}_n\|\dots\|T^{j_l}_n\|. $$

Donc

$$ b.\quad \sum_{j_i}\|{}_1u^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\| \leq A_1\frac{(AA_1)^{l-1}}{(l-1)!}. $$

De même,

$$ c.\quad \|{}_1v^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\| \leq \|T^{j_1}_n\|\frac{A^{l-2}}{(l-2)!}\|T^{j_2}_n\|\dots\|T^{j_{l-1}}_n\|\varepsilon_n\|T^{j_l}_n\| $$
$$ \Rightarrow \sum_{j_i}\|{}_1v^{(n)}_{j_1,\dots,j_l}(n)\| \leq A_1^2\frac{(AA_1)^{l-2}}{(l-2)!}\varepsilon_n, $$

$$ d.\quad \|{}_2v^{(n)}_{j_1,\dots,j_{l-1}}(n)\| \leq \frac{(A_1)^{l-2}}{(l-2)!}\varepsilon_n\|T^{j_1}_n\|\dots\|T^{j_{l-1}}_n\|, $$

$$ \sum_{j_i}\|{}_2v^{(n)}_{j_1,\dots,j_{l-1}}(n)\| \leq \frac{(AA_1)^{l-2}}{(l-2)!}A_1\varepsilon_n. $$

Les mêmes inégalités sont valables avec les u' et les v'.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes.

Théorème 4.1. — *Si* P *a une seule classe ergodique* E_1 *et des états transitoires* τ; *Si* $n\underset{1}{\Pi}Q_{1,n}$ *converge vers* S_1, *le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires*

$$ {}^{(n)}\xi_t(n), \quad {}^{(n)}\xi_e(n) - \sqrt{n}\,\frac{\underset{1}{\Pi}{}^\star_e(n)}{\underset{1}{\lambda}_{0,n}}, \quad t\in\tau, \quad e\in E_1 $$

converge vers le vecteur valant

$$ \begin{aligned} (\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1V_0^1\exp(\lambda(u^t)-q_1)\,\Phi_1(u^1) &\quad \text{sur } \tau,\\ V_0^1\exp(\lambda(u^t)-q_1)\,\Phi_1(u^1) &\quad \text{sur } E_1, \end{aligned} $$

où

$$ \begin{aligned} q_1 &= \langle \underset{1}{\Pi}^\star,\ S_1V_0^t\rangle,\\ \lambda(u^t) &= \langle \underset{1}{\Pi}^\star,\ S_1.D_{u^t}(\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1V_0^1\rangle; \end{aligned} $$

Φ_1 *est la loi limite relative à* $\underset{1}{R}$.

Démonstration. — Puisque

$$ (\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(T.D_{u^t})^j, $$

on a

$$ \begin{aligned} \sum_{j_i} {}_2u'_{j_1,\ldots,j_{l-1}} &= \frac{1}{(l-1)!}\Phi_1(u^1)\\ &\quad\times\exp(-q_1)\left(\underset{1}{\Pi}(S_1.D_{u^t})\,(\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1\right)^{l-1}V_0^1, \end{aligned} $$

mais

$$ (\underset{1}{\Pi}S_1.D_{u^t}(\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1\underset{1}{\Pi})^{l-1}V_0^1 = (\underset{1}{\Pi}S_1.D_{u^t}(\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1)^{l-1}V_0^1, $$

puisque

$$ \underset{1}{\Pi}^2 = \underset{1}{\Pi} \qquad \text{et} \qquad \underset{1}{\Pi}V_0^1 = V_0^1. $$

Si M est une matrice (l_1, l_1),

$$ (\underset{1}{\Pi}M\underset{1}{\Pi})(i,j) = \sum_{h,k}\underset{1}{\Pi}^{\star h}M_h^k\underset{1}{\Pi}^{\star j} = \langle\underset{1}{\Pi}^\star,\ MV_0^1\rangle\underset{1}{\Pi}^{\star j}, $$

donc

$$ \underset{1}{\Pi}M\underset{1}{\Pi} = \langle\underset{1}{\Pi}^\star,\ MV_0^1\rangle\underset{1}{\Pi} $$

et l'on en tire, puisque $(\underset{1}{\Pi})^{l-1}V_0^1 = V_0^1$,

$$ \begin{aligned} \sum_{j_i} {}_2u'_{j_1,\ldots,j_{l-1}} &= \frac{1}{(l-1)!}\Phi_1(u^1)\\ &\quad\times\exp(-q)\left(\langle\underset{1}{\Pi}^\star,\ S_1.D_{u^t}(\mathsf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}B_1\rangle\right)^{l-1}V_0^1. \end{aligned} $$

La série

$$\sum_{l} \sum_{j_i} \| {}_2u'^{(n)}_{j_1, \ldots, j_{l-1}}(n) \|$$

étant majorée par une série convergente en l, d'après les inégalités précédant le théorème, on peut passer à la limite terme à terme dans la série

$$\sum_{l} \sum_{j_i} {}_2u'^{(n)}_{j_1, \ldots, j_{l-1}}(n),$$

ce qui conduit bien à la loi limite indiquée; les inégalités a, b, c, d et l'application du corollaire 4.1 permettent de conclure.

LEMME 4.4. — *Si* L *et* M *sont deux matrices* (r, r), *nous avons la formule suivante :*

$$\begin{aligned} \exp(t(\mathrm{L}+\mathrm{M})) = \exp(t\mathrm{L}) &+ \int_0^t \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp((t-t_1)\mathrm{L})\,dt_1 \\ &+ \iint_{t_1+t_2 \leq t} \begin{matrix}\exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(t_2\mathrm{L})\,\mathrm{M} \\ \exp((t-t_1-t_2)\mathrm{L})\,dt_1\,dt_2\end{matrix} + \ldots \\ &+ \int_{\sum_{i=1}^{l-1} t_i \leq t} \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(t_2\mathrm{L})\,\mathrm{M} \ldots \\ &\quad \times \exp(t_{l-1}\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(t_l\mathrm{L})\,dt_1 \ldots dt_{l-1} + \ldots \end{aligned}$$

où

$$t_l = t - \sum_{i=1}^{l-1} t_i.$$

Démonstration. — Considérons le développement du membre de droite : chaque intégrale est une fonction continue de t, et la série en l a son terme général majoré par $\exp(t\,\|\mathrm{L}\|)\dfrac{\mathrm{M}^{l-1}t^{l-1}}{l!}$, terme général d'une série en l convergente. La somme est donc une fonction continue de t.

D'autre part, posons

$$\mathrm{P}_l(t) = \int_{\sum_{i=1}^{l-1} t_i \leq t} \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(t_2\mathrm{L})\,\mathrm{M} \ldots \exp(t_{l-1}\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(t_l\mathrm{L})\,dt_1 \ldots dt_{l-1}.$$

Pour montrer que la somme de la série des P_l vérifie une équation de semi-groupe en t, il suffit de vérifier que

$$(1) \qquad \mathrm{P}_l(t+t') = \sum_{j=0}^{l} \mathrm{P}_{l-j}(t)\,\mathrm{P}_j(t').$$

La relation se démontre aisément par récurrence :

a. Si $l = 0$,

$$\mathrm{P}_0(t+t') = \exp((t+t')\mathrm{L}) = \exp(t\mathrm{L})\exp(t'\mathrm{L});$$

b. $\mathrm{P}_{j+1}(t) = \int_0^t \exp(u\mathrm{L})\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}_j(t-u)\,du.$

Supposons la formule (1) vraie pour $j = l$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{l+1}(t+t') &= \int_0^{t+t'} \exp(u\mathrm{L})\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}_l(t+t'-u)\,du \\
&= \int_0^t \exp(u\mathrm{L})\,\mathrm{M}\left(\sum_{j=0}^{l} \mathrm{P}_{l-j}(t-u)\,\mathrm{P}_j(t')\right)du \\
&\quad + \int_t^{t+t'} \exp(u\mathrm{L})\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}_l(t+t'-u)\,du.
\end{aligned}$$

Or la première intégrale vaut

$$\sum_{j=0}^{l} \mathrm{P}_{l+1-j}(t)\,\mathrm{P}_j(t'),$$

quant à la seconde nous avons, en posant $u - t = v$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t'} \exp(v\mathrm{L})\exp(t\mathrm{L})\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}_l(t'-v)\,dv \\
&\qquad = \exp(t\mathrm{L})\int_0^{t'} \exp(v\mathrm{L})\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}_l(t'-v)\,dv = \mathrm{P}_0(t)\,\mathrm{P}_{l+1}(t').
\end{aligned}$$

On a donc bien la formule (1) au rang $l + 1$.

La somme de la série est donc un semi-groupe continu en t, qui s'écrit $\mathrm{A}_0 \exp(\mathrm{Q}t)$.

a. $t = 0 \Rightarrow \mathrm{A}_0 = \mathrm{I}$, en vertu de l'expression de la série;

b.
$$\begin{aligned}
\mathrm{Q} &= \lim_{t\to 0} \frac{\exp(\mathrm{Q}t) - \mathrm{I}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left[(\exp(t\mathrm{L}) - \mathrm{I})\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp((t-t_1)\mathrm{L})\,dt + \mathrm{A}(l, t)\right],
\end{aligned}$$

où

$$\|\mathrm{A}(l, t)\| \leq \frac{1}{t}\sum_{l=2}^{\infty} \exp(t\,\|\mathrm{L}\|)\frac{\mathrm{M}^{l-1}t^l}{l!} \to 0 \qquad \text{si} \quad t \to 0,$$

$$\frac{\exp(t\mathrm{L}) - \mathrm{I}}{t} \to \mathrm{L},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp((t-t_1)\mathrm{L})\,dt &= \int_0^t \exp((t-\beta)\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(\beta\mathrm{L})\,d\beta \\
&= \exp(t\mathrm{L})\int_0^t \exp(-\beta\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(\beta\mathrm{L})\,d\beta,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \exp(t_1\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp((t-t_1)\mathrm{L})\,dt_1 = \frac{1}{t}\int_0^t \exp(-\beta\mathrm{L})\,\mathrm{M}\exp(\beta\mathrm{L})\,d\beta\,\exp(t\mathrm{L}).$$

Le premier terme du produit $\to$ M, le second tend vers I.

Donc on a bien $Q = L + M$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 4.2. — *Si* P *a plusieurs classes ergodiques* $E_1, \ldots, E_s$ *et des états transitoires* τ; *Si :*

1° $n \underset{i}{\Pi} Q_{i,n} \to S_i$;

2° $n\left(1 - \underset{i}{\lambda_{0,n}}\right) \to q_i$;

3° $n \langle \underset{i}{\Pi^\star}, \underset{i,j}{S_n} V_0^j \rangle \to q_i^j$.

Le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\zeta_t(n)$, $\dfrac{{}^{(n)}\xi_e(n)}{n}$ *est le vecteur valant*

$$(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} B_\alpha V_0^\alpha \exp(\Lambda(u^t) + Q + iV)\, V'_0(\alpha)\right) \quad sur\ \tau,$$

$$(\exp(\Lambda(u^t) + Q + iV)\, V'_0(\alpha)) \quad sur\ E_\alpha;$$

B_α *est la restriction de* P *à* $\tau \times E_\alpha$;
V_0^α *est la restriction de* V_0 *à* E_α;
V *est la matrice diagonale d'éléments* $v_i = \langle u^t, \underset{i}{\Pi^*} \rangle$;
V'_0 *est le vecteur à s lignes égales à* 1;
Q *est la matrice (s, s) d'éléments* q_i^j, $i \neq j$, $-q_i$ *sur la diagonale;*
$\Lambda(u^t)$ *est la matrice (s, s) d'éléments*

$$\Lambda(u^t)(\alpha, \beta) = \langle \underset{\alpha}{\Pi^\star}, S_\alpha . D_{u^t}(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} B_\beta V_0^\beta \rangle.$$

Démonstration. — Nous avons

$$\sum_{j_1, \ldots, j_{l-1}} {}_2 u_{j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}} = \int_{K_{l-1}} \Pi(t_1)\, S . D_{u^t}(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} B$$
$$\times \Pi(t_2)\, S.D_{u^t}(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} B \ldots \Pi(t_l)\, dt_1 \ldots dt_{l-1}$$

Cette matrice peut s'écrire, en posant $Q_1 = Q + iV$, sur $E_\alpha \times E_\beta$,

$$\int_{K_{l-1}} \sum_{k_i} \exp(Q_1 t_1)(\alpha, k_1) \underset{\alpha, k_1}{\Pi} S_{k_1} . D_{u^t}(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} B_{k_2}$$
$$\times \exp(Q_1 t_2)(k_2, k_3) \underset{k_2, k_3}{\Pi} \ldots S_{k_i} . D_{u^t}(\mathbf{I}^t - T.D_{u^t})^{-1} B_{k_{i+1}} \ldots$$
$$\times \exp(Q_1 t_l)(k_{2(l-1)}, \beta)\, dt_1 \ldots dt_{l-1},$$

mais

$$\mathrm{II}_{u,v}\ S_v . D_{u^l}(\mathrm{I}' - T . D_{u^l})^{-1} B_w\ \mathrm{II}_{w,z} = (\Lambda(u^l))(v, w)\ \mathrm{II}_{u,z}.$$

Donc l'intégrale vaut

$$\sum_{k_i} \int_{K_{l-1}} \exp(Q_1 t_1)(\alpha, k_1)\,\Lambda(u^l)(k_1, k_2)\exp(Q_1 t_2)(k_2, k_3)\,\Lambda(u^l)(k_3, k_4)\ldots$$
$$\times \exp(Q_1 t_l)(k_{2(l-1)}, \beta)\ \mathrm{II}_{\alpha,\beta}\, dt_1 \ldots dt_{l-1}.$$

Nous avons donc

$$\sum_{j_1,\ldots,j_{l-1}} {}_2u_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(i, j) = \int_{K_{l-1}} \exp(Q_1 t_1)\,\Lambda(u^l)\exp(Q_1 t_2)\,\Lambda(u^l)\ldots$$
$$\times \exp(Q_1 t_l)\, dt_1 \ldots dt_{l-1}(\alpha, \beta)\ \mathrm{II}_{\alpha,\beta}$$
$$\text{si}\quad i \in E_\alpha, \qquad j \in E_\beta.$$

Le lemme 4.4 entraîne le résultat, puisqu'on peut passer à la limite terme à terme dans la série

$$\sum_l \sum_{j_i} {}_2u^{(n-k)}_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(n).$$

CHAPITRE V.

Nous étudierons dans ce chapitre d'autres lois limites, obtenues en supprimant l'une des conditions de convergence des théorèmes précédents et en ajoutant des conditions supplémentaires.

Cas I : P *a une seule classe ergodique et des états transitoires.* — Alors $P.D_u$ a une valeur propre et une seule $\lambda_0(u)$ qui $\to 1$ si $u \to 0$. Posons $\Delta(u, \lambda(u))$: déterminant $[P.D_u - \lambda(u)\,I]$, où $u \to \lambda(u)$ est une fonction analytique de u. Δ est alors une fonction analytique de u. Nous avons $\Delta(u, \lambda_0(u)) \equiv 0$.

Soit $Q_{j_1,\ldots,j_k}(u)$ le mineur extrait de $\Delta(u, \lambda(u))$ en enlevant les lignes et les colonnes nos $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Nous enlèverons l'argument u quand il n'y a pas d'ambiguïté.

LEMME 5.1 :

$$\frac{\partial}{\partial u_j} Q_{j_1, j_2, \ldots j_k} = i[Q_{j_1, \ldots, j_k} + \lambda Q_{j_1, \ldots, j_k, j}](1 - \delta^j_{j_1, \ldots, j_k}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\left[\sum_h Q_{j_1, j_2, \ldots, j_k, h}\right],$$

où

$$\delta^j_{j_1, \ldots, j_k} = 1 \quad \text{si } j \in)j_1, \ldots, j_k(, \qquad = 0 \quad \textit{autrement.}$$

Démonstration. — *a.* Supposons d'abord $j \notin)j_1, \ldots, j_k($. La dérivée d'un déterminant s'obtient, on le sait, en additionnant les déterminants obtenus en dérivant une colonne du déterminant initial, laissant les autres inchangées.

Si $i \neq j$, la colonne n° i de Q a pour dérivée $-\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}$ à la $i^{\text{ième}}$ ligne et o ailleurs. Le déterminant obtenu est donc $-\frac{\partial \lambda}{\partial u_j} Q_{j_1, \ldots, j_k, i}$.

La colonne n° j a pour dérivée $ip_{l,j} \exp(iu_j)$ à la ligne n° l, et

$$ip_{j,j} \exp(iu_j) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}$$

à la ligne n° j, qui s'écrit encore

$$i(p_{jj} \exp(iu_j) - \lambda) + i\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}.$$

En développant le déterminant correspondant par rapport aux éléments de la colonne n° j, on voit qu'il vaut

$$iQ_{j_1, \ldots, j_k} + \left(i\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\right) Q_{j_1, j_k, \ldots, j}.$$

En additionnant les déterminants ainsi obtenus, on aboutit bien à la formule désirée.

b. Si $j \in \{j_1, \ldots, j_l\}$, la colonne n° j ne figure pas dans $Q_{j_1, \ldots, j_k}$ et l'on a bien encore la formule voulue.

COROLLAIRE 5.1 :

a.
$$\frac{\partial \Delta}{\partial u_j} \equiv i(\Delta + \lambda Q_j) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\left(\sum_h Q_h\right)$$

b.
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_j \partial u_k} \equiv &-[\Delta + \lambda Q_k + \lambda(Q_j + \lambda Q_{j,k})(1 - \delta^k_j)] \\ &- i\frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left[\sum_{h \neq j}(Q_h + \lambda Q_{h,j})\right] - i\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\left[\sum_{h \neq k}(Q_h + \lambda Q_{h,k})\right] \\ &- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k}\left[\sum_h Q_h\right] + \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left(\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\right);\end{aligned}$$

$$c.\quad \frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j\,\partial u_k\,\partial u_l} \equiv - i[\Delta + \lambda(Q_j + Q_k + Q_l) + \lambda^2(Q_{j,l} + Q_{k,l} + Q_{j,k}) + \lambda^3 Q_{j,k,l}]$$

$$+ \frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left[\sum_{h \neq j,k} (Q_h + \lambda(Q_{h,k} + Q_{h,j}) + \lambda^2 Q_{h,j,k})\right]$$

$$+ \text{ termes symétriques}$$

$$+ \frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda}{\partial u_k}\left[\sum_{h,h' \neq l} i(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',l})\right]$$

$$+ \text{ termes symétriques}$$

$$- \frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda}{\partial u_k}\frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left(\sum_{h,h',h''} Q_{h,h',h''}\right)$$

$$- \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\,\partial u_k}\sum_{h \neq l} i(Q_h + \lambda Q_{h,l}) + \text{ termes symétriques}$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\,\partial u_k}\frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left[\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\right] + \text{ termes symétriques}$$

$$- \frac{\partial^3\lambda}{\partial u_j\,\partial u_k\,\partial u_l}\left[\sum_h Q_h\right],$$

si $j \neq k \neq l$;

$$\equiv - i(\Delta + \lambda(Q_j + Q_l) + \lambda^2 Q_{j,l}) + \frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left[\sum_{h \neq j}(Q_h + \lambda Q_{h,j})\right]$$

$$+ 2\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\left[\sum_{h \neq j \neq l}(Q_h + \lambda(Q_{h,j} + Q_{h,l}) + \lambda^2 Q_{h,j,l})\right]$$

$$- \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\left[\sum_{h \neq j} i(Q_h + \lambda Q_{h,j})\right] - 2i\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\,\partial u_l}\left[\sum_{h \neq j}(Q_h + \lambda Q_{h,j})\right]$$

$$+ 2i\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left[\sum_{h,h' \neq j}(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',j})\right]$$

$$+ i\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\right)^2\left[\sum_{h,h' \neq l} i(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',l})\right]$$

$$- \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\right)^2\frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left(\sum_{h,h',h''} Q_{h,h',h''}\right) + 2\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\,\partial u_l}\left[\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\right]$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u_l}\left(\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\right) - \frac{\partial^3\lambda}{\partial^2 u_j\,\partial u_l}\left(\sum_h Q_h\right),$$

si $j = k \neq l$;

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j \partial u_k \partial u_l} \\
\equiv & - i(\Delta + \lambda Q_j) + 3 \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \sum_{h \neq j} (Q_h + \lambda Q_{h,j}) - 3i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2} \left(\sum_{h \neq j} Q_h + \lambda Q_{h,j} \right) \\
& + 3i \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \right)^2 \sum_{h, h' \neq j} (Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h'j}) \\
& - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \right)^3 \sum_{h, h', h''} (Q_{h,h',h''}) \\
& + 3 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2} \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \left(\sum_{h, h'} Q_{h,h'} \right) - \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j^3} \left(\sum_h Q_h \right),
\end{aligned}$$

si $j = k = l$.

En faisant $\lambda(u) = \lambda_0(u)$, on obtient par ces formules la forme des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre de $\lambda_0(u)$.

Démonstration. — Elle consiste en l'application successive du lemme 5.1 à chaque formule.

Le calcul de $\frac{\partial \Delta}{\partial u_j}$ n'est autre que le lemme 5.1, appliqué à $)j_i(= \varnothing$; en dérivant par rapport à k, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_j \partial u_k} &= i \left[\frac{\partial \Delta}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial Q_j}{\partial u_k} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} Q_j \right] - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k} \left(\sum_h Q_h \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \left(\sum_h \frac{\partial}{\partial u_k} Q_h \right) \\
&= i \left\{ i(\Delta + \lambda Q_k) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \left(\sum_{h \neq j} Q_h \right) \right. \\
&\qquad \left. + \lambda \left[i(Q_j + \lambda Q_{j,k})(1 - \delta_j^k) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \left(\sum_h Q_{h,j} \right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k} \left[\sum_h Q_h \right] - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \left[\sum_h i(Q_h + \lambda Q_{h,k})(1 - \delta_k^h) - \sum_{h,h'} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} Q_{h,h'} \right]
\end{aligned}$$

qui est bien la formule désirée.

Si $j \neq k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j\, \partial u_k\, \partial u_l} = &- \left[\frac{\partial \Delta}{\partial u_l} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}(\mathrm{Q}_k + \mathrm{Q}_j + 2\lambda \mathrm{Q}_{j,k}) + \lambda \left(\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial u_l} + \frac{\partial \mathrm{Q}_j}{\partial u_l} + \lambda \frac{\partial \mathrm{Q}_{j,k}}{\partial u_l} \right) \right] \\
&- i \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \left[\sum_{h \neq j} \left(\frac{\partial}{\partial u_l}(\mathrm{Q}_h) + \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \mathrm{Q}_{h,j} + \lambda \frac{\partial}{\partial u_l} \mathrm{Q}_{h,j} \right) \right] \\
&\qquad + \text{terme symétrique en } j \\
&- i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_k\, \partial u_l} \left[\sum_{h \neq j} (\mathrm{Q}_h + \lambda \mathrm{Q}_{h,j}) \right] + \text{terme symétrique en } j \\
&- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_k} \left[\sum_h \frac{\partial \mathrm{Q}_h}{\partial u_l} \right] - \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_k\, \partial u_l} \left[\sum_h \mathrm{Q}_h \right] \\
&+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \left[\sum_{h,h'} \frac{\partial}{\partial u_l} \mathrm{Q}_{h,h'} \right] \\
= &- \Bigg\{ i(\Delta + \lambda \mathrm{Q}_l) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \left(\sum_{h \neq j,k} \mathrm{Q}_h - 2\lambda \mathrm{Q}_{j,k} \right) \\
&\qquad + \lambda \Bigg[i(\mathrm{Q}_k + \mathrm{Q}_j + \lambda(\mathrm{Q}_{k,l} + \mathrm{Q}_{j,l} + \mathrm{Q}_{j,k}) + \lambda^2 \mathrm{Q}_{j,k,l}) \\
&\qquad\qquad - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \left(\sum_h \mathrm{Q}_{k,h} + \sum_h \mathrm{Q}_{j,h} - \lambda \sum_h \mathrm{Q}_{j,k,h} \right) \Bigg] \Bigg\} \\
&- i \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \Bigg[\sum_{h \neq j,l} i(\mathrm{Q}_h + \lambda \mathrm{Q}_{h,l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \sum_{h,h' \neq j} \mathrm{Q}_{h,h'} \\
&\qquad + \sum_{h \neq j,l} \lambda i(\mathrm{Q}_{h,j} + \lambda \mathrm{Q}_{h,j,l}) - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \sum_{h,h'} \mathrm{Q}_{h,j,h'} \Bigg] \\
&\qquad + \text{terme symétrique en } j \\
&- i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_k\, \partial u_l} \left[\sum_{h \neq j} (\mathrm{Q}_h + \lambda \mathrm{Q}_{h,j}) \right] + \text{terme symétrique en } j \\
&- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_k} \left[\sum_{h \neq l} i(\mathrm{Q}_h + \lambda \mathrm{Q}_{h,l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \left(\sum_{h,h'} \mathrm{Q}_{h,h'} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \left[\sum_{h,h' \neq l} i(\mathrm{Q}_{h,h'} + \lambda \mathrm{Q}_{h,h',l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l} \sum_{h,n',h''} \mathrm{Q}_{h,h',h''} \right] \\
&- \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_k\, \partial u_l} \left[\sum_h \mathrm{Q}_h \right].
\end{aligned}$$

En réordonnant les termes, on tombe sur la formule voulue.

Si $j = k \neq l$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_j^2} = &- (\Delta + \lambda \mathrm{Q}_j) - 2i \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \left[\sum_{n \neq j} (\mathrm{Q}_h + \lambda \mathrm{Q}_{h,j}) \right] \\
&- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2} \left[\sum_h \mathrm{Q}_h \right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \right)^2 \left[\sum_{h,h'} \mathrm{Q}_{h,h'} \right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j^2\, \partial u_l} = & -\Big\{ i(\Delta + \lambda Q_l) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\Big(\sum_{h \neq j} Q_h\Big) \\
& \qquad + \lambda\Big[i(Q_j + \lambda Q_{j,l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\Big(\sum_h Q_{j,h}\Big)\Big]\Big\} \\
& - 2i\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h \neq j, l} i(Q_h + \lambda Q_{h,j}) + \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\sum_{h \neq j} Q_{h,j} \\
& \qquad - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\sum_{h \neq j}(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',j})\Big] \\
& - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2}\Big[\sum_{h \neq l} i(Q_h + \lambda Q_{h,l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\Big(\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\Big)\Big] \\
& - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_l}\, 2i\Big[\sum_{h \neq j}(Q_h + \lambda Q_{h,j})\Big] \\
& + 2\Big(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j\, \partial u_l}\Big[\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\Big] - \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j^2\, \partial u_l}\Big[\sum_h Q_h\Big] \\
& + \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big)^2\Big[\sum_{h,h' \neq l} i(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h'l}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_l}\sum Q_{h,h',h''}\Big].
\end{aligned}
$$

En arrangeant les termes, on a bien la formule voulue;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j^3} = & -\Big[i(\Delta + \lambda Q_j) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big(\sum_{h \neq j} Q_j\Big) - \lambda \sum_{h \neq j} Q_{j,h}\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big] \\
& - 2i\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h \neq j} i(Q_h + \lambda Q_{h,j}) + \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big(\sum_{h \neq j} Q_{h,j}\Big) \\
& \qquad - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\sum_{h,h' \neq j}(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',j})\Big] \\
& - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2}\Big[\sum_{h \neq j} i(Q_h + \lambda Q_{h,j}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big(\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\Big)\Big] \\
& - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2}\, 2i\Big[\sum_{h \neq j}(Q_h + \lambda Q_{h,j})\Big] \\
& + 2\Big(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2}\Big(\sum_{h,h'} Q_{h,h'}\Big) - \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j^3}\Big(\sum_h Q_h\Big) \\
& + \Big(\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big)^2\Big[\sum_{h,h' \neq l} i(Q_{h,h'} + \lambda Q_{h,h',j}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\sum_{h,h',h''}(Q_{h,h',h''})\Big],
\end{aligned}
$$

qui est la formule cherchée, à l'ordre des termes près.

LEMME 5.2. — *Si $j_1, j_2, \ldots, j_i$ sont transitoires pour la matrice* P, *alors*

$$
Q_{j_1,\ldots,j_i}(u) = 0 \qquad \textit{pour} \quad \lambda(u) = \lambda_0(u).
$$

Démonstration :

$$Q_{j_1,\dots,j_i}(u) = \text{déterminant de} \begin{pmatrix} T_1.D_{u'} - \lambda_0(u)I & B_1.D_{u_e} \\ o & R.D_{u_e} - \lambda_0(u)I \end{pmatrix}$$

si $P = \begin{pmatrix} T & B \\ o & R \end{pmatrix}$, T_1 est obtenu en supprimant dans T les lignes et colonnes n^{os} $j_1, \dots, j_i$, B_1 en ôtant dans B les lignes n° j_1, j_i.

Il est équivalent de dire $Q_{j_1,\dots,j_l}(u) = o$ et de dire qu'il existe une solution non identiquement nulle à l'équation

$$\begin{pmatrix} T_1.D_{u'} - \lambda_0(u)I & B_1.D_{u_e} \\ o & R.D_{u_e} - \lambda_0(u)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = o$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} (T_1.D_{u'} - \lambda_0(u)I)V_1 + (B_1.D_{u_e})V_2 &= o, \\ (R.D_{u_e} - \lambda_0(u)I)V_2 &= o. \end{aligned}$$

La valeur propre $\lambda_0(u)$ qui $\to 1$ si $u \to o$ est la même pour P et pour R, on le voit en faisant $\{j_i\} = \emptyset$ dans l'équation ci-dessus. Il existe donc $V_2(u) \neq o$, tel que $(R.D_{u_e} - \lambda_0(u)\, I)\, V_2(u) = o$. D'autre part,

$$\sigma(T_1.D_{u'}) \subset B(o, r), \qquad \text{où} \quad o < r < 1$$

et

$$|\lambda_0(u)| > 1 - \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \|u\| < \eta,$$

donc $T_1.D_{u'} - \lambda_0(u)\, I$ est inversible et l'on a

$$V_1(u) = (\lambda_0(u)I - T_1.D_{u'})^{-1} B_1.D_{u_e}(V_2(u)).$$

Donc, pour $\|u\| < \eta$, $Q_{j_1,\dots,j_i}(u) = o$.

Lemme 5.3. — *Si* $n^\alpha(P_n - P) \to S$, *où* P *vérifie les conditions* (I), *alors*

$$n^\alpha(Q_{n,j_1,\dots,j_l}(u) - Q_{j_1,\dots,j_l}(u)) \to B_{j_1,\dots,j_l}(u).$$

Démonstration. — La différence $Q_{n,j_1,\dots j_l}(u) - Q_{j_1,\dots,j_l}(u)$ peut s'écrire comme somme finie de différences des termes correspondants de ces déterminants développés, soit

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_i} \left({}_nq_{\alpha_1}^{\alpha_2}\, {}_nq_{\alpha_2}^{\alpha_3} \cdots {}_nq_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}} - q_{\alpha_1}^{\alpha_2} q_{\alpha_2}^{\alpha_3} \cdots q_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}} \right) \\ = &\sum_{\alpha_i} \Big[\left({}_nq_{\alpha_1}^{\alpha_2} - q_{\alpha_1}^{\alpha_2}\right) {}_nq_{\alpha_2}^{\alpha_3} \cdots {}_nq_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}} + q_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left({}_nq_{\alpha_2}^{\alpha_3} - q_{\alpha_2}^{\alpha_3}\right) \cdots {}_nq_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}} + \cdots \\ &\qquad + q_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{r-l-2}}^{\alpha_{r-l-1}}\left({}_nq_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}} - q_{\alpha_{r-l-1}}^{\alpha_{r-l}}\right)\Big]. \end{aligned}$$

La proposition sera donc démontrée si $n^\alpha[{}_nq_i^j - q_i^j] \to r_i^j$, où ${}_nq_i^j$ est l'élément (i, j) de $(P_n.D_u) - \lambda_{0,n,u}\, I)$ et q_i^j l'élément (i, j) de $(P.D_u - \lambda_0(u)\, I)$.

Or

$$\begin{aligned} & n^\alpha(P_n . D_u - \lambda_{0,n,u} I - (P . D_u - \lambda_{0,u} I)) \\ & \quad = n^\alpha(P_n - P) . D_u - n^\alpha(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) I. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $S . D_u$, uniformément en u.

Nous montrerons dans le lemme suivant que, uniformément sur $\| u \| < \eta$, $n^\alpha(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u})$ tend vers une limite $l(u)$, et $\lambda_{0,n,u} \to \lambda_{0,u}$.

Dans ces conditions, on voit que

$$n^\alpha(Q_{n j_1, \ldots, j_l}(u) - Q_{j_1, \ldots, j_l}(u)) \to B_{j_1, \ldots, j_l}(u),$$

uniformément sur $\| u \| < \eta$.

Lemme 5.4. — *$n^\alpha[\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}] \to l(u)$ uniformément sur $\| u \| < \eta$.*

Démonstration. — Posons

$$\begin{aligned} \Delta_n(u, z) &= z^r + a_{1,n}(u) z^{r-1} + \ldots + a_{r,n}(u) \\ &= (z - \lambda_{0,n,u}) \Pi_n(z) = \det [zI - P_n . D_u], \\ \Delta(u, z) &= z^r + a_1(u) z^{r-1} + \ldots + a_r(u) \\ &= (z - \lambda_{0,u}) \Pi(z) = \det [zI - P . D_u]; \end{aligned}$$

$a_{i,n}(u)$ et $a_i(u)$ sont la somme des mineurs centraux d'ordre $r - i$ des déterminants de $-P_n . D_u$ et $-P . D_u$. La différence $n^\alpha(a_{i,n}(u) - a_i(u))$ s'exprime donc de manière analogue à celle du lemme précédent, les termes ${}_n q_i^j$ (resp. q_i^j) étant les éléments de $-(P_n . D_u)$ (resp. $-P . D_u$)

$$n^\alpha[{}_n q_i^j - q_i^j] \to - s_i^j e^{iu_j}$$

uniformément en u, où s_i^j est l'élément (i, j) de la matrice S;

$${}_n q_i^j(u) \to q_i^j(u)$$

uniformément en u; il vient donc

$$n^\alpha[a_{i,n}(u) - a_i(u)] \to b_i(u)$$

uniformément en u et

$$n^\alpha[\Delta_n(u, z) - \Delta(u, z)] \to G(z, u) = \sum_{k=1}^{r} z^{r-k} b_k(u)$$

uniformément en u, et z, pour $\| z \| \leq 1$, et $b_i(u)$ est une fonction analytique de u. Donc, pour $n > N_1(\varepsilon)$, uniformément en u,

$$| n^\alpha \Delta(u, \lambda_{0,n,u}) + G(\lambda_{0,n,u}, u) | < \varepsilon.$$

D'autre part, $\lambda_{0,n,u}$ converge vers $\lambda_{0,u}$ uniformément pour $\| u \| < \eta$, car ce sont des fonctions analytiques de u, uniformément bornées pour $\| u \| < \eta$, par 1, et $\lambda_{0,n,u}$ converge simplement vers $\lambda_{0,u}$.

Donc

$$|G(\lambda_{0,n,u}, u) - G(\lambda_{0,u}, u)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_2(\varepsilon), \quad \| u \| < \eta$$

et

$$\begin{aligned} &| n^\alpha \Delta(u, \lambda_{0,n,u}) + G(\lambda_{0,u}, u) | \\ &\qquad = | n^\alpha (\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \Pi(\lambda_{0,n,u}) + G(\lambda_{0,u}, u) | < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda_{0,n,u}) &= \frac{\Delta(u, \lambda_{0,n,u}) - \Delta(u, \lambda_{0,u})}{\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}} \\ &= \Pi(\lambda_{0,u}) + \frac{1}{2}(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta(u, z)) \end{aligned}$$

$$(z = \lambda_{0,u} + \theta(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u})) \quad (0 \leqq \theta \leqq 1),$$

$$| \Pi(\lambda_{0,n,u}) - \Pi(\lambda_{0,u}) | \leqq \frac{1}{2}(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta(u, z))$$

$$(z = \lambda_{0,u} + \theta(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}));$$

$\Delta(u, z)$ est un polynome, il est uniformément borné en u et z, pour z borné, ainsi que ses dérivées secondes.

On a donc

$$|(\Pi \lambda_{0,n,u}) - \Pi(\lambda_{0,u})| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad n > N_3(\varepsilon), \quad \forall u,$$

et

$$\Pi(\lambda_{0,u}) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad \| u \| < \eta,$$

$$\begin{aligned} &\left| n^\alpha [\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}] + \frac{G(u, \lambda_{0,u})}{\Pi(\lambda_{0,u})} \right| \\ &\qquad < \frac{2\varepsilon}{\Pi(\lambda_{0,n,u})} + | G(u, \lambda_{0,u}) | \cdot \left| \frac{1}{\Pi(\lambda_{0,n,u})} - \frac{1}{\Pi(\lambda_{0,u})} \right|. \end{aligned}$$

$G(u, \lambda_{0,u})$ restant borné uniformément pour $\| u \| < \eta$, on a donc, pour $n > N_4(\varepsilon)$ et $\| u \| < \eta$,

$$\left| n^\alpha (\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) + \frac{G(u, \lambda_{0,u})}{\Pi(\lambda_{0,u})} \right| < \varepsilon.$$

Donc

$$n^\alpha (\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \to l(u) = \frac{G(u, \lambda_0(u))}{\Pi(\lambda_{0,u})}$$

uniformément en u, pour u assez petit.

C. Q. F. D.

Corollaire 5.2. — *a. Si j est* P-*transitoire*, $n^{\alpha}\dfrac{\partial\lambda_{0,n,u}}{\partial u_j}\to l_j(u)$ *uniformément en* u,

$$sur\ )\ u : \| u \| < \eta\ (\qquad et\ l_j(u) = \frac{\partial l}{\partial u_j}(u).$$

b. Si j et k sont P-*transitoires*,

$$n^{\alpha}\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,u}}{\partial u_j\,\partial u_k}\to l_{j,k}(u) = \frac{\partial^2 l}{\partial u_j\,\partial u_k}(u),$$

uniformément en u, $\| u \| < \eta$.

c. Si j, ρ, k sont P-*transitoires*,

$$n^{\alpha}\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,u}}{\partial u_j\,\partial u_k\,\partial u_\rho}\to l_{j,\rho,k}(u) = \frac{\partial^3 l(u)}{\partial u_j\,\partial u_k\,\partial u_\rho},$$

uniformément en u, $\| u \| < \eta$.

De plus, nous avons

$$l_j(u) = \frac{\lambda_0(u)\,B_j(u)}{\sum_h Q_h(u)},$$

$$\begin{aligned}
l_{j,k}(u) = \frac{1}{\sum_h Q_h(u)}\Bigg([&-(\lambda_0(u)\,(B_j(u)+B_k(u)) + \lambda_{0u}^2 B_{j,k}(u))]\\
&- i\,l_j(u)\Bigg[\sum_{h\neq k}(Q_h(u)+\lambda_0(u)\,Q_{h,j}(u))\Bigg]\\
&- i\,l_k(u)\Bigg[\sum_{h\neq j}(Q_h(u)+\lambda_0(u)\,Q_{h,k}(u))\Bigg]\Bigg),
\end{aligned}$$

$$l_{j,j}(u) = \frac{1}{\sum_h Q_h(u)}\Bigg[-(\lambda_0(u)\,B_j(u)) - 2\,i\,l_j(u)\sum_{h\neq j}(Q_h(u)+\lambda_0(u)\,Q_{h,j}(u))\Bigg],$$

$$\begin{aligned}
l_{j,\rho,k} = \frac{1}{\sum_h Q_h(u)}\big([&-i\lambda_0(u)\,(B_j(u)+B_k(u)+B_\rho(u))\\
&+\lambda_0^2(u)\,(B_{j,k}(u)+B_{j,\rho}(u)+B_{\rho,k}(u)) + \lambda_0^3(u)\,(B_{j,k,\rho}(u))]\\
&+ l_\rho(u)\Bigg[\sum_{h\neq j\neq k}(Q_h(u)+\lambda_0(u)(Q_{h,k}(u)+Q_{h,j}(u))) + \lambda_0^2(u)\,Q_{h,j,k}(u)\Bigg]\\
&\qquad + \text{termes symétriques}\\
&- l_{j,k}(u)\Bigg[\sum_{h\neq\rho} i(Q_h(u)+\lambda_0(u)Q_{h,\rho}(u))\Bigg]\\
&\qquad + \text{termes symétriques}\big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_{j,j,k} = \frac{1}{\sum_h Q_h(u)} \Bigg(& [- i(\lambda_0(u)(B_j(u) + B_k(u)) + \lambda_0^2(u) B_{j,k}(u))] \\
& + l_k(u) \left[\sum_{h \neq j} (Q_h(u) + \lambda_0(u) Q_{h,j}(u)) \right] \\
& + 2 l_j(u) \left[\sum_{h \neq j,\, h \neq k} (Q_h(u) + \lambda_0(u)(Q_{h,j} + Q_{h,k}) + \lambda_0^2(u) Q_{h,k,j}) \right] \\
& \qquad - l_{jj}(u) i \left[\sum_{h \neq k} (Q_h(u) + \lambda_0(u) Q_{h,j}(u)) \right] \\
& \qquad - 2 l_{j,k} i \left[\sum_{h \neq j} (Q_h(u) + \lambda_0(u) Q_{h,j}(u)) \right] \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{j,j,j} = \frac{1}{\sum_h Q_h(u)} \Bigg[& - i\lambda_0(u) B_j(u) + 3 l_j(u) \\
& \times \sum_{h \neq j} (Q_h(u) + \lambda_0(u) Q_{h,j}(u)) - 3i\, l_{j,j}(u) \sum_h (Q_h + \lambda\, Q_{h,j}) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Démonstration. — Si j est transitoire-P, j et k transitoires-P, j, ρ et k transitoires-P, les dérivées partielles correspondantes de $\lambda_{0,u}$ sont nulles, en vertu des formules du corollaire 5.1 et du lemme 5.2. $n^\alpha(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u})$ est une fonction analytique, qui converge uniformément vers $l(u)$, analytique également, sur $(\| u \| < \eta)$. Par conséquent, en vertu d'un théorème de Weierstrass, les dérivées partielles convergent uniformément, vers les dérivées correspondantes, ce qui est bien la propriété voulue.

Les formules suivantes sont des conséquences immédiates du corollaire 5.1 et des lemmes 5.3 et 5.4.

Soit $s_{i,i}(n)$ le $i^{\text{ième}}$ coefficient de la forme quadratique $-\frac{1}{2}\log \Phi_n$, Φ_n étant la loi limite relative à P_n. Nous supposerons $s_{i,i}(n) \neq 0$, $\forall\, n$, cela veut dire que P_n n'a pas d'états transitoires ni d'états singuliers (c'est-à-dire d'états qui soient eux mêmes leur propre classe cyclique) Nous supposerons de même que P n'a pas d'états singuliers. Alors $s_{i,i}(n) \to s_{i,i} \neq 0$, sauf si i est P-transitoire.

Considérons les variables aléatoires

$$
Y_{i,n} = \frac{{}^{(n)}\xi_{i,n} - n\Pi^*_{i,n}}{\sqrt{n\, s_{i,i}(n)}};
$$

elles sont bien définies et si P n'a pas d'états transitoires, elles convergent en loi vers une loi laplacienne multidimensionnelle.

Si P a des états transitoires, si $n^\alpha(P_n - P) \to S$, où $0 < \alpha < 1$, et si $B_i(u) \neq 0$ pour i-P-transitoire, la loi limite est encore une loi laplacienne multidimensionnelle.

On sait que

$$s_{i,i}(n) = \left(\left(\frac{\partial\lambda_{0,n,u}}{\partial u_i}\right)_{u=0}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\lambda_{0,n,u}}{\partial u_i^2}\right)_{u=0}$$
$$\Rightarrow \quad n^\alpha s_{i,i}(n) \to -l_{i,i}(0),$$

pour i transitoire-P, en vertu des lemmes précédents.

Puisque $\alpha < 1$, on a bien $n s_{i,i}(n) \to \infty$ dans tous les cas.

Nous savons que

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} iu_j Y_{j,n}\right)/\{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right]$$
$$= \left(P_n . D_{\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} V_0 \exp\left(-\frac{\sum iu_j \Pi^\star{}_{j,n}}{\sqrt{n\,s_{j,j}(n)}}\,n\right)$$

$$\text{or}\quad \left\|\left(P_n . D_{\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} V_0 - \left(\lambda_{0,n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} \Pi_{n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}} V_0\right\|$$
$$\leq \sum_{g=1}^{d-1} \left\|\Pi_{n,g,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}} V_0\right\| + M\rho^n,$$

en vertu du corollaire 1.1, où d est le nombre de classes cycliques de P.

Or

$$\Pi_{n,g,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}} V_0 \to \Pi_g V_0 = 0 \qquad \text{si} \quad g = 1, \ldots, d-1,$$
$$= V_0 \qquad \text{si} \quad g = 0.$$

Nous avons donc

$$\left\|\left(P_n . D_{\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} V_0 - \left(\lambda_{0,n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} V_0\right\| \to 0.$$

Nous sommes ramenés à l'étude de la quantité

$$\left(\lambda_{0,n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^{(n)} \times \exp\left(-\frac{\sum iu_i \Pi^\star{}_{i,n}}{\sqrt{n\,s_{i,i}(n)}}\,n\right)$$
$$= \exp\left[n \log\left(\lambda_{0,n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right) - \frac{\sum iu_i\sqrt{n}\,\Pi^\star{}_{i,n}}{\sqrt{s_{i,i}(n)}}\right],$$

$$\log(\lambda_{0,n,v}) = \log(1 + Z_{n,v}) = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2}\right)^2 + O(Z_{n,v})^3,$$

où

$$Z_{n,v} = \sum_i v_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} v_i v_j$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}(\theta v_1, \ldots, \theta v_r)}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} v_i v_j v_k \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1);$$

nous sommes donc amenés à étudier la limite, lorsque $n \to \infty$, de l'expression

$$n Z_{n, \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}} = n \sum_j \frac{i u_j \Pi^\star_{j,n}}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}} - n\left(Z_{n, \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}}\right)^2 + n\, O\left(Z_{n, \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}}\right)^3,$$

$$Z_{n, \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}} = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n,$$

$$\alpha_n = \sum_i \left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}},$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} \frac{u_i u_j}{\sqrt{n^2 s_{i,i}(n) s_{j,j}(n)}},$$

$$\gamma_n = \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right)\left(\frac{\theta u_1}{\sqrt{n s_{1,1}(n)}}, \ldots, \frac{\theta u_l}{\sqrt{n s_{l,l}(n)}}\right)$$
$$\times \frac{u_i u_j u_k}{\sqrt{n^3 s_{i,i}(n) s_{j,j}(n) s_{k,k}(n)}}.$$

Lemme 5.5 :

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \gamma_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration. — 1° On sait que

$$s_{i,i}(n) \to s_{i,i} > 0 \quad \text{si } i \text{ est ergodique-P},$$
$$n^\alpha s_{i,i}(n) \to -l_{i,i}(0) \quad \text{si } i \text{ est transitoire-P}$$

et

$$\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} \to i\Pi^\star_j \neq 0 \quad \text{si } j \text{ est ergodique-P},$$
$$= 0 \quad \text{si } j \text{ est transitoire-P},$$

mais

$$n^\alpha \frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_j} \to l_j(v) \neq 0.$$

La contribution des termes ergodiques à $\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, celle des termes transitoires est

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}(n)}}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Donc

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

2° Si i et j sont ergodiques-P, $s_{i,i}(n)$ et $s_{j,j}(n)$ ont des limites non nulles.

Les dérivées partielles tendant vers les dérivées correspondantes de $\lambda_{0,u}$ on a bien la contribution des termes P-ergodiques à $\beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si i est transitoire-P et j ergodique-P, alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} \frac{1}{\sqrt{n\, s_{i,i}(n)\, n\, s_{j,j}(n)}} &= \frac{1}{n\sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial v_i}\lambda_{0,n,v}}{\sqrt{s_{i,i}(n)}}\right)_{v=0} = \frac{1}{n\sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{n^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i}\lambda_{0,n,v}}{n^\alpha\sqrt{s_{i,i}(n)}}\right)_{v=0} \\ &= \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{n^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i}\lambda_{0,n,v}}{\sqrt{n^\alpha s_{i,i}(n)}}\right)_{v=0};\end{aligned}$$

$n^\alpha \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\lambda_{0,n,v}}{\sqrt{n^\alpha s_{i,i}(n)}}$ est une fonction analytique qui converge vers $\frac{l_i(v)}{\sqrt{-l_{i,i}(0)}}$ uniformément sur $)\, v : \| v \| < \eta$. (Il y a donc convergence uniforme locale des dérivées partielles et l'on a bien

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si i et j sont P-transitoires, on sait que

$$n^\alpha \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} \to l_{i,j}(0),$$

$$n^\alpha s_{i,i}(n) \to - l_{i,i}(0), \qquad n^\alpha s_{j,j}(n) \to - l_{j,j}(0).$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n^\alpha s_{i,i}(n)\, n^\alpha s_{j,j}(n)}}\, n^\alpha \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j}\right)_{v=0} \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$\beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

3° Si i, j et k sont tous ergodiques-P, la contribution des termes correspondants dans

$$\gamma_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si i est transitoire-P, j et k ergodiques-P, alors

$$\left(\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right)\left(\theta \frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}}\right) \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v_i}\lambda_{0,n,v}}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}\right]\left(\theta \frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}}\right)$$

pour n assez grand,

$$\left\|\frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}}\right\| \leq \eta.$$

La quantité précédente peut s'écrire, en vertu du lemme précédent,

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}}(s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}(n^\alpha s_{i,i}(n))^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}\left(n^\alpha \frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)\left(\theta \frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}}\right);$$

$n^\alpha \frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}$ converge vers $l_i(v)$, uniformément sur $)v : \| v \| < \eta($, donc $\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}\left(n^\alpha \frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)$ converge vers $\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}(l_i(v))$, uniformément sur $)v : \|v\| < \eta($.

Donc, si $v_n = \left(\theta \frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}}\right) \to 0$ si $n \to \infty$,

$$\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}\left(n^\alpha \frac{\partial \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i}\right)_{v=v_n} \to \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k}(l_i(v))_{v=0}.$$

Le terme correspondant est donc

$$O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si i et j sont P-transitoires, k ergodique, on a

$$\left(\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right)_{v=v_n} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\left(n^\alpha \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(\lambda_{0,n,v})\right)_{v=v_n}}{(n^\alpha s_{j,j}(n)\, n^\alpha s_{i,i}(n))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$n^\alpha s_{j,j}(n) \to -l_{j,j}(0), \qquad n^\alpha s_{i,i}(n) \to -l_{i,i}(0)$$

$$n^\alpha \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}\lambda_{0,n,v} \to +l_{i,j}(v)$$

uniformément en v, $\| v \| < \eta$,

donc

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\left(\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}(\lambda_{0,n,v})\right)_{v=v_n} \to \frac{\partial}{\partial v_k}(l_{i,j}(v))_{v=0}.$$

Si i, j, k sont P-transitoires, alors

$$n^\alpha \frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} \to l_{i,j,k}(0),$$

en vertu du corollaire 5.2.

On a donc

$$\frac{\left(\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right)_{v=v_n}}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}} = \frac{n^\alpha\left(\frac{\partial^3 \lambda_{0,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k}\right)_{v=v_n}}{(n^\alpha s_{i,i}(n)\, n^\alpha s_{j,j}(n)\, n^\alpha s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}}},$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{car} \quad 0 < \alpha < 1.$$

On a donc bien finalement

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \gamma_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 5.1. — *Si* P *a une seule classe ergodique et n'a pas d'états singuliers, mais par contre a des états transitoires;*

Si $P_n \to P$, P_n *n'ayant, pour n assez grand, pas d'états transitoires ni d'états singuliers;*

Si $n^\alpha(P_n - P) \to S$, $0 < \alpha < 1$, *et si* $B_i = \lim n^\alpha Q_i(n) > 0$ *pour i transitoire-*P, *alors la loi de l'ensemble des variables aléatoires*

$$Y_{i,n} = \frac{{}^{(n)}\xi_{i,n} - n\Pi^{\star}_{i,n}}{\sqrt{n\, s_{i,i}(n)}}$$

tend vers une loi laplacienne multidimensionnelle $L[Y_1, \ldots, Y_r]$.

Les lois marginales sont $N(0, 1)$

$$\begin{aligned} E[Y_i . Y_j] &= \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i}\, s_{j,j}}} && \text{si } i \text{ et } j \text{ sont ergodiques-P;} \\ &= 0 && \text{si } i \text{ ergodique-P, } j \text{ transitoire-P;} \\ &= \frac{-l_{i,j}(0)}{\sqrt{l_{i,i}(0)\, l_{j,j}(0)}} && \text{si } i \text{ et } j \text{ transitoires-P.} \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous avons

$$n Z_{n, v_n} - n \sum_j i u_j \frac{\Pi^*_{j, n}}{\sqrt{n\, s_{j, j}(n)}} - n \frac{(Z_{n, v_n})^2}{2} + n\, O\,(Z_{n, v_n})^3$$

$$= n(\beta_n + \gamma_n) - \frac{n}{2}[\alpha_n + \beta_n + \gamma_n]^2 + n\, O\,(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)^3$$

$$= n\left(\beta_n - \frac{\alpha_n^2}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= n \sum_{\substack{i, j \\ i<j}} \left[\left(\frac{\partial^2 \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i \, \partial v_j}\right)_{v=0} \frac{1}{n \sqrt{s_{i, i}(n)\, s_{j, j}(n)}} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} \frac{1}{n \sqrt{s_{i, i}(n)\, s_{j, j}(n)}} \right] u_i \, u_j$$

$$- \frac{1}{2} \sum_i u_i^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_i u_i^2 + 2 \sum_{i, j} \left[\left(\left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i \, \partial v_j}\right)_{v=0} \right) \frac{1}{\sqrt{s_{i, i}(n)\, s_{j, j}(n)}} \right] u_i \, u_j \right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Si i et j sont P-ergodiques,

$$\left(\left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i}\right)_{v=0} \left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} - \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i \, \partial v_j}\right)_{v=0} \right) \frac{1}{\sqrt{s_{i, i}(n)\, s_{j, j}(n)}} \to \frac{s_{i, j}}{\sqrt{s_{i, i}\, s_{j, j}}},$$

avec les notations du chapitre II relatives à P.

Si i est P-ergodique et j P-transitoire, cette expression $\to 0$, car

$$n^\alpha \left(\frac{\partial \lambda_{0, n, v}}{\partial v_j}\right)_{v=0} \to l_j(0) \qquad \text{et} \qquad n^\alpha \left(\frac{\partial^2 \lambda_{0, n, v}}{\partial v_i \, \partial v_j}\right)_{v=0} \to \left(\frac{\partial}{\partial v_i}(l_j(v))\right)_{v=0},$$

alors que

$$n^\alpha s_{j, j}(n) \to \text{une limite} \neq 0$$

par hypothèse (car $B_j \neq 0 \Rightarrow -l_{j, j}(0) \neq 0$) et i n'est pas P-singulier).

Si i et j sont P-transitoires, alors cette expression tend vers

$$\frac{-l_{i, j}(0)}{\sqrt{l_{i, i}(0)\, l_{j, j}(0)}}.$$

Donc, en vertu de l'expression du vecteur caractéristique des $Y_{i, n}$,

$$E\left[\exp \sum_j i u_j Y_{j, n} / \{X_0 = i_0\}\right]$$

$$\to \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_i u_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j \in E \\ i<j}} \frac{s_{i, j}}{\sqrt{s_{i, i}\, s_{j, j}}} u_i \, u_j - 2 \sum_{\substack{i, j \in \tau \\ i<j}} \frac{l_{i, j}(0)}{\sqrt{l_{i, i}(0)\, l_{j, j}(0)}} \right) \right].$$

Remarquons que les variables aléatoires limites sur les états ergodiques-P et celles sur les états transitoires-P sont indépendantes.

CAS II : P *a plusieurs classes ergodiques.* — Supposons que P ait deux classes ergodiques, acycliques, et pas d'états transitoires (1).

Soient E_1 et E_2 ces deux classes. P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} \underset{1}{R} & 0 \\ 0 & \underset{2}{R} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_n = \begin{pmatrix} \underset{1}{R}_n & S_n \\ T_n & \underset{2}{R}_n \end{pmatrix}.$$

Soient $\underset{1}{\lambda}_n$ et $\underset{2}{\lambda}_n$ les valeurs propres maximales de $\underset{1}{R}_n$ et $\underset{2}{R}_n$, $\underset{1}{\Pi}_n$ et $\underset{2}{\Pi}_n$ les projecteurs correspondants.

Nous supposerons :

$$n(1 - \underset{1}{\lambda}_n) \to \infty, \tag{2}$$

$$n(1 - \underset{2}{\lambda}_n) \to q \tag{3}$$

qui contredit l'une des hypothèses du chapitre III.

Introduisons maintenant les variables aléatoires suivantes :

a. σ_{1,n,i_0}, temps de séjour de ${}^{(n)}S$ dans E_1 jusqu'au premier passage dans E_2, $i_0 \in E_1$ étant l'état initial;

b. ν_{1,n,i_0}, nombre d'entrées dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2 de ${}^{(n)}S$, $i_0 \in E_1$ étant l'état initial;

c. ${}^{(n)}\xi_1(n) = \sum_{j \in E_1} {}^{(n)}\xi_j(n)$;

d. η_{n,i_0}, nombre de passages dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2 de ${}^{(n)}S$, $i_0 \in E_1$ étant l'état initial.

LEMME 5.6. — *Dans les conditions* (1),

$$(1 - \underset{1}{\lambda}_n)\, \sigma_{1,n,i_0} \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

loi exponentielle de fonction caractéristique $\dfrac{1}{1 - iu}$.

Démonstration :

$$\Pr[\{\sigma_{1,n,i_0} = j\}] = (\underset{1}{R}_n)^{j-1} S_n V_0^2(i_0),$$

$$\begin{aligned} &E\left[\exp\left(iu(1 - \underset{1}{\lambda}_n)\sigma_{1,n,i_0}\right)\right] \\ &\quad = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(iuj(1 - \lambda_{1,n}))\,(\underset{1}{R}_n)^{j-1} S_n V_0^2(i_0) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(iju(1 - \underset{1}{\lambda}_n))\left[(\underset{1}{\lambda}_n)^{j-1} \underset{1}{\Pi}_n S_n V_0^2 + \mathcal{R}_n^{(j-1)} S_n V_0^2\right](i_0), \end{aligned}$$

où

$$\| \mathcal{R}_n^{(j)} \| \leq M \rho^j.$$

Or

$$S_n V_0^2 + \underset{1}{R}_n V_0^1 = V_0^1 \Rightarrow \underset{1}{\Pi}_n S_n V_0^2 + \underset{1}{\Pi}_n \underset{1}{R}_n V_0^1 = \underset{1}{\Pi}_n V_0^1$$
$$\Rightarrow \underset{1}{\Pi}_n S_n V_0^2 = (1 - \underset{1}{\lambda}_n) \underset{1}{\Pi}_n V_0^1,$$

d'où

$$E[\exp(iu\sigma_{1,n,i_0}(1 - \underset{1}{\lambda}_n))]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \exp(iju(1 - \underset{1}{\lambda}_n)) ((\underset{1}{\lambda}_n)^{j-1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n) \underset{1}{\Pi}_n V_0^1(i_0)) + \varepsilon_n,$$
$$\varepsilon_n \leq \frac{M}{1-\rho} \| S_n \| \to 0.$$

Or

$$\underset{1}{\Pi}_n V_0^1 \to V_0^1$$

et, en posant $f(x) = x \exp(iu(1 - x))$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp(iju(1 - \underset{1}{\lambda}_n)) (\underset{1}{\lambda}_n)^{j-1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n)$$
$$= \frac{1}{\underset{1}{\lambda}_n} f(\underset{1}{\lambda}_n) \frac{1 - \underset{1}{\lambda}_n}{f(1) - f(\underset{1}{\lambda}_n)} \to \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 - iu},$$

fonction caractéristique d'une loi exponentielle de densité e^{-x}.

C. Q. F. D.

Posons

$$P_{j_1, \ldots, j_k} = (I - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_1 - 1} T_n (I - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_2 - 1} T_n \ldots$$
$$\times (I - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_k - 1} T_n,$$
$$d(\xi, \eta) = \sum_k | \Pr\{\xi = k\} - \Pr\{\eta = k\} |,$$

où ξ et η sont deux variables aléatoires à valeurs entières.

Lemme 5.7. — *Si* (1) *et* (3) *ont lieu :*

(a) $$\Pr[\{\nu_{1,n,i_0} = l\}] = \sum_{j_i} P_{j_1, \ldots, j_l} (I - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_{l+1} - 1} V_0^2(i_0),$$

avec

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{l+1} = n + 1;$$

(b) $$d[\nu_{1,n,i_0}, \nu'_{1,n}] \to 0,$$

où $\nu'_{1,n}$, *est la somme de n variables aléatoires indépendantes, pouvant prendre les valeurs* 1 *et* 0 *avec les probabilités respectives* $(1 - \underset{2}{\lambda}_n)$ *et* $\underset{2}{\lambda}_n$.

Cette loi est la loi des entrées dans E_1 *jusqu'au* $(n+1)^{\text{ième}}$ *passage dans* E_2 *pour la chaîne de Markov à deux états,* E_1 *et* E_2 *de matrice de transition*

$$p_n = \begin{pmatrix} \underset{1}{\lambda}_n & 1-\underset{1}{\lambda}_n \\ 1-\underset{2}{\lambda}_n & \underset{2}{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

Nous désignons par ${}^{(n)}s$ *le système associé à* p_n.

Démonstration. — *a.* La formule indiquée dans (*a*) s'obtient immédiatement en décomposant l'événement $[\nu_{1,n,i_0} = l]$ selon les temps de séjour successifs dans les classes ergodiques E_1 et E_2, puis en additionnant les probabilités correspondantes.

La sommation sur les temps de séjour dans E_1 donne le résultat.

b. $\Pr[\{\nu'_{1,n} = l\}]$ peut s'écrire

$$\sum_{j_i} (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_1-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_2-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_l-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1},$$

où

$$j_1+j_2+\ldots+j_{l+1} = n+1,$$

$$\begin{aligned}
&\Pr[\{\nu_{1,n,i_0} = l\}] - \Pr[\{\nu'_{1,n} = l\}] \\
&\quad= \sum_{j_i} P_{j_1,\ldots,j_l}\,(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n[(\underset{2}{R}_n)^{j_{l+1}-1}V_0^2 - (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}V_0^2] \\
&\qquad+\sum_{j_i} P_{j_1,\ldots,j_{l-1}}(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n \\
&\qquad\quad\times[(\underset{2}{R}_n)^{j_l-1}T_n V_0^1 - (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_l-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)V_0^2](\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}+\ldots \\
&\qquad+\sum_{j_i} P_{j_1,\ldots,j_k}(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n[(\underset{2}{R}_n)^{j_{k+1}-1}T_n V_0^1 - (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)V_0^2] \\
&\qquad\quad\times(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+2}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+i}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}+\ldots \\
&\qquad+(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n[(\underset{2}{R}_n)^{j_1-1}T_n V_0^1 - (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_1-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)V_0^2] \\
&\qquad\quad\times[(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_2-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}].
\end{aligned}$$

Les réductions successives apparaissant dans cette formule sont dues à la relation

$$(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n V_0^2 = V_0^1.$$

La différence $\Pr[\{\nu_{1,n,i_0} = l\}] - \Pr[\{\nu'_{1,n} = l\}]$ est donc formée de $l+1$ sommes, chacune étant du type

$$\sum_{j_i} P_{j_1,\ldots,j_k}(I^1-\underset{1}{R}_n)^{-1} S_n\, \varepsilon_{2,j_{k+1}} \Pi_{j_{k+2},\ldots,j_{l+1}}.$$

On a

$$\varepsilon_{2, j_{k+1}} = (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi})V_0^2 + O(\rho^{j_{k+1}-1})T_n V_0^1,$$

puisque

$$\underset{2}{\Pi}_n T_n V_0^1 = (1-\underset{2}{\lambda}_n)\underset{2}{\Pi}_n V_0^2 \qquad \text{et} \qquad (\underset{2}{R}_n)^j = (\underset{2}{\lambda}_n)^j \underset{2}{\Pi}_n + O(\rho^j).$$

D'où

$$(4) \qquad \|\varepsilon_{2, j_{k+1}}\| \leq (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\| + K_2\rho^{j_{k+1}-1}\|T_n V_0^1\|.$$

Donc

$$a. \qquad \left\| \sum_{j_i} P_{j_1,\dots,j_k}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi})V_0^2 \Pi_{j_{k+2},\dots,j_{l+l}} \right\|$$

$$\leq \sum_{j_i} \| P_{j_1,\dots,j_k}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n \| (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\|\Pi_{j_{k+2},\dots,j_{l+l}}\| \|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\|$$

$$\leq \|T_n\|^k (1-\underset{2}{\lambda}_n)^{l-k} C_n^l \|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\|,$$

car

$$\|(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n\| = \|(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n V_0^2\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \|\underset{i}{\lambda}_n\| \leq 1.$$

L'hypothèse $n(1-\underset{2}{\lambda}_n) \to q$ entraîne

$$\|nT_n\| \quad \text{et} \quad |n(1-\underset{2}{\lambda}_n)| < K,$$

en vertu des relations

$$T_n V_0^1 + \underset{2}{R}_n V_0^2 = V_0^2 \quad \Rightarrow \quad n\underset{2}{\Pi}_n T_n V_0^1 = n(1-\underset{2}{\lambda}_n)\underset{2}{\Pi}_n V_0^2 \quad \text{et} \quad \underset{2}{\Pi}_n \to \underset{2}{\Pi} > 0.$$

D'où

$$\sum_{j_i} \| P_{j_1,\dots,j_k}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n \| (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{k+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\Pi_{j_{k+2},\dots,j_{l+1}}\| \|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\|$$

$$\leq \frac{K^l}{n^l} C_n^l \|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\| \leq \frac{K^l}{l!}\|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\|.$$

$$b. \qquad \sum_{j_i} \| P_{j_1,\dots,j_k}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n \| K_2 \rho^{j_{k+1}-1} \|T_n V_0^1\| \|\Pi_{j_{k+2},\dots,j_{l+1}}$$

$$\leq \frac{K^l}{n^l} K_2 \sum_{j=0}^{n-l} C_{n-j-1}^{l-1} \rho^j \leq \frac{K^l}{n^l} C_n^{l-1} \frac{K_2}{1-\rho} \leq \frac{K^l}{(l-1)!} \frac{K_2}{n(1-\rho)}.$$

$$c. \qquad \sum_{j_i} P_{j_1,\dots,j_l}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n [(\underset{2}{R}_n)^{j_{l+1}} V_0^2 - (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}} V_0^2]$$

$$= \sum_{j_i} P_{j_1,\dots,j_l}(\mathbf{I}^1 - \underset{1}{R}_n)^{-1} S_n [(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}}(\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi})V_0^2 + O(\rho^{j_{l+1}})V_0^2]$$

est en norme

$$\leq \frac{K^l}{l!}\|\underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi}\| + \frac{K^l}{(l-1)!}\frac{K_2}{n(1-\rho)},$$

en vertu de raisonnements analogues aux précédents.

On a donc finalement

$$|\Pr[\{\nu_{1,n,i_0}=l\}]-\Pr[\{\nu'_{1,n}=l\}]|\leq\frac{(l+1)K^{l-1}}{(l-1)!}\left[\frac{\|\underset{2}{\Pi}_n-\underset{2}{\Pi}\|}{l}+\frac{B}{n}\right].$$

Donc

$$\leq\frac{K^{l-1}}{l!}(l+1)\|\underset{2}{\Pi}_n-\underset{2}{\Pi}\|+\frac{(l+1)K^{l+1}}{(l-1)!}\frac{B}{n},\qquad \text{avec}\quad B=\frac{K_2}{1-\rho};$$

$\sum_{l=1}^{\infty}K^{l-1}\frac{(l+1)}{l!}$ et $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(l+1)K^{l+1}}{(l-1)!}$ sont les termes généraux de séries convergentes en l. Puisque $\underset{2}{\Pi}_n-\underset{2}{\Pi}\to 0$ si $n\to\infty$ et $\frac{B}{n}$ également, on a bien $d(\nu_{1,n,i_0},\nu'_{1,n})\to 0$.

LEMME 5.8. — *Si* (1) *est vérifié :*

Soient τ_{1,n,i_0}, τ_{2,n,i_0}, $\dots$, τ_{k,n,i_0} *les temps de séjour successifs dans* E_1; $\tau'_{1,n}$, $\tau'_{2,n}$, ..., $\tau'_{k,n}$ *les temps de séjour successifs dans l'état* E_1 *pour la chaîne à deux états de loi d'évolution* p_n, E_1 *étant l'état initial, alors*

$$\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_j}|\Pr[\{\tau_{1,n,i_0}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau_{j,n,i_0}=\sigma_j\}]-\Pr[\{\tau'_{1,n}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau'_{j,n}=\sigma_j\}]|$$
$$\leq j\left(\|\underset{1}{\Pi}_n-\underset{1}{\Pi}\|+\frac{K_1}{1-\rho}\|S_n\|\right)$$

(*où* K_1 *est une certaine constante*), *donc* $\to 0$ *si* $n\to\infty$.

Démonstration :

$$\Pr[\{\tau_{1,n,i_0}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau_{j,n,i_0}=\sigma_j\}]$$
$$=(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1-1}S_n(I^2-\underset{2}{R}_n)^{-1}T_n\dots(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_j-1}S_nV_0^2,$$

$$\Pr[\{\tau'_{1,n}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau'_{j,n}=\sigma_j\}]$$
$$=(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_1-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_2-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\dots(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_j-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n),$$

$$\Pr[\{\tau_{1,n,i_0}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau_{j,n,i_0}=\sigma_j\}]-\Pr[\{\tau'_{1,n}=\sigma_1,\ \dots,\ \tau'_{j,n}=\sigma_j\}]$$
$$\begin{aligned}
={}&(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1-1}S_n(I^2-\underset{2}{R}_n)^{-1}T_n\dots(I^2-\underset{2}{R}_n)^{-1}T_n\\
&\times[(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_j-1}S_nV_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_j-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)V_0^1]\\
&+(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1-1}S_n(I^2-\underset{2}{R}_n)^{-1}T_n\dots[I^2-\underset{2}{R}_n]^{-1}T_n\\
&\times[(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_{j-1}-1}S_nV_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_{j-1}-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)V_0^1]\\
&\times(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_{j-1}}(1-\underset{1}{\lambda}_n)+\dots+(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1-1}S_n[I^2-\underset{2}{R}_n]^{-1}T_n\dots\\
&\times[(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_k-1}S_nV_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_k-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)V_0^1]\\
&\times(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_{k+1}-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\dots(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_j-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)+\dots\\
&+[(\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1-1}S_nV_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_1-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)V_0^1]\\
&\times(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_2-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\dots(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_j-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n).
\end{aligned}$$

Posons

$$\varepsilon_{1,\sigma} = (\underset{1}{R}_n)^{\sigma-1} S_n V_0^2 - (\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma-1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n) V_0^1,$$

de même que pour $\varepsilon_{2,j}$, on a

$$\varepsilon_{1,\sigma} = (\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma-1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n)(\underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi}) V_0^1 + O(\rho^{\sigma-1}) S_n V_0^2, \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq \rho < 1.$$

Puisque $\|\underset{1}{R}_n\|$, $\|S_n\|$ et $\|(I^2 - \underset{2}{R}_n)^{-1} T_n\| \leqq 1$, on a immédiatement

$$\begin{aligned}&|\Pr[\{\tau_{1,n,i_0} = \sigma_1, \ldots, \tau_{j,n,i_0} = \sigma_j\}] \\ &\qquad - \Pr[\{\tau'_{1,n} = \sigma_1, \ldots, \tau'_{j,n} = \sigma_j\}]| \leqq \sum_{k=1}^{j} \|\varepsilon_{1,\sigma_k}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_j} \sum_{k=1}^{j} \|\varepsilon_{1,\sigma_k}\| &\leqq j\left(\sum_{\sigma}\left((\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma-1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n)\|\underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi}\| + K_1 \rho^{\sigma-1}\|S_n\|\right)\right) \\ &\leqq j\left(\|\underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi}\| + \frac{K_1}{1-\rho}\|S_n\|\right) \\ &\to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

On a bien montré le lemme.

Lemme 5.9. — *Si* (1) *et* (3) *ont lieu :*

Soit Z_n *le nombre de passages de* ${}^{(n)}$*s dans* E_1 *jusqu'au* $(n+1)^{\text{ième}}$ *passage dans* E_2, E_1 *étant l'état initial,* $d[\eta_{n,i_0}, Z_n] \to 0$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}&\sum_k |\Pr[\{\eta_{n,i_0} = k\}] - \Pr[\{Z_n = k\}]| \\ &\leqq \sum_k \sum_l |\Pr[\{\eta_{n,i_0} = k, \nu_{1,n,i_0} = l\}] - \Pr[\{Z_n = k, \nu'_{1,n} = l\}]|.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\Pr[\{\eta_{n,i_0} = k, \nu_{1,n,i_0} = l\}] &= \Pr[\{\tau_{0,n} + \tau_{1,n} + \ldots + \tau_{l,n} = k, \nu_{1,n,i_0} = l\}] \\ &= \sum_{j_i, \sigma_i} (\underset{1}{R}_n)^{\sigma_0 - 1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_1 - 1} T_n (\underset{1}{R}_n)^{\sigma_1 - 1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_2 - 1} T_n \ldots \\ &\qquad \times (\underset{1}{R}_n)^{\sigma_l - 1} S_n (\underset{2}{R}_n)^{j_{l+1} - 1} V_0^2(i_0),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} j_1 + j_2 + \ldots + j_{l+1} &= n + 1, \\ \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_l &= k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Pr[Z_n = k, \nu'_{1,n} = l] \\ &= \sum_{j_i, \sigma_i} (\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_0 - 1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_1 - 1}(1 - \underset{2}{\lambda}_n) \ldots (\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_l - 1}(1 - \underset{1}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1} - 1}.\end{aligned}$$

D'où par différences successives, on a

$$\Pr[\eta_{n,i_0}=k,\ \nu_{1,n,i_0}=l]-\Pr[\mathrm{Z}_n=k,\ \nu'_{1,n}=l],$$

lorsque i_0 varie, est le vecteur

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_i,\sigma_i}(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1}\mathrm{T}_n\ldots\left[(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1}\mathrm{V}_0^2-(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}\right]\\
&\quad+(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n\ldots\left[(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_l-1}\mathrm{S}_n\mathrm{V}_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_l-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\mathrm{V}_0^1\right](\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}+\ldots\\
&\quad+(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1}\mathrm{T}_n\ldots\left[(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_i-1}\mathrm{S}_n\mathrm{V}_0^2-(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_i-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\mathrm{V}_0^1\right]\\
&\qquad\times(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}+\ldots\\
&\quad+(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1}\mathrm{T}_n\ldots\left[(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_i-1}\mathrm{T}_n\mathrm{V}_0^1-(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_i-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\mathrm{V}_0^2\right]\\
&\qquad\times(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_i-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}+\ldots.
\end{aligned}$$

On voit qu'apparaissent des termes de deux types : le premier type comprendra en facteur $\varepsilon_{1,\sigma}$, le second $\varepsilon_{2,j}$, avec les notations des lemmes précédents.

Nous avons, on le sait,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_{1,\sigma}\|&\leqq(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\,\|\underset{1}{\Pi}_n-\underset{1}{\Pi}\|+\mathrm{K}_1\rho^{\sigma-1}\|\mathrm{S}_n\|,\\
\|\varepsilon_{2,j}\|&\leqq(\underset{2}{\lambda}_n)^{j-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\,\|\underset{2}{\Pi}_n-\underset{2}{\Pi}\|+\mathrm{K}_2\rho^{j-1}\|\mathrm{T}_n\|.
\end{aligned}$$

On sait que

$$d[\eta_{n,i_0},\mathrm{Z}_n]\leqq\sum_{l=0}^{n}\ \sum_{k=l+1}^{\infty}\left|\Pr[\{\eta_{n,i_0}=k,\ \nu_{1,n,i_0}=l\}]-\Pr[\{\mathrm{Z}_n=k,\ \nu'_{1,n}=l\}]\right|.$$

Évaluons

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\left|\Pr[\{\eta_{n,i_0}=k,\ \nu_{1,n,i_0}=l\}]-\Pr[\{\mathrm{Z}_n=k,\ \nu'_{1,n}=l\}]\right|;$$

cette dernière quantité est en plus égale à

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=l+1}^{\infty}\ \sum_{j_i}\sum_{\sigma_i}\left|(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n\ldots\varepsilon_{1,\sigma_i}(i_0)\right|\\
&\qquad\qquad\times(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_{i+1}-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}\\
&+\sum_{k=l+1}^{\infty}\ \sum_{j_i}\sum_{\sigma_i}\left|(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n\ldots\varepsilon_{2,j_i}(i_0)\right|\\
&\qquad\qquad\times(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_i-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1},
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
&\left|(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1}\mathrm{T}_n\ldots\varepsilon_{1,\sigma_i}(i_0)\right|(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}\\
&\quad\leqq(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1}\mathrm{S}_n(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1}\mathrm{T}_n\ldots(\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_i}\mathrm{T}_n\mathrm{V}_0^1(i_0)\,\|\varepsilon_{1,\sigma_i}\|\\
&\quad\times(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_i-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_{i+1}-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}=a_{1,n,\sigma_i,j_i}.
\end{aligned}$$

Sommer sur k et σ_i revenant à sommer sur σ sans condition, il vient

$$\sum_k \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} a_{1,n,\sigma_i,j_i}$$
$$= \sum_{j_i} (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_i} \mathrm{T}_n \mathrm{V}_0^1(i_0)$$
$$\times \left(\sum_\sigma \| \varepsilon_{1,\sigma} \|\right) (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+2}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}.$$

Puisque

$$\| n\mathrm{T}_n \| \leqq \mathrm{K}, \qquad n(1-\underset{2}{\lambda}_n) \leqq \mathrm{K}, \qquad \| (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n \| = 1,$$
$$\sum_\sigma \| \varepsilon_{1,\sigma} \| \leqq \| \underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi} \| + \frac{\mathrm{K}_1}{1-\rho} \| \mathrm{S}_n \|, \qquad \| \underset{2}{\mathrm{R}}_n \| \leqq 1, \qquad |\underset{2}{\lambda}_n| < 1.$$

Il vient

$$\sum_k \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} a_{1,n,\sigma_i,j_i} \leqq \frac{\mathrm{C}_n^l}{n^l} \mathrm{K}^l \left[\| \underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi} \| + \frac{\mathrm{K}_1}{1-\rho} \| \mathrm{S}_n \| \right]$$
$$\leqq \frac{\mathrm{K}^l}{l!} \left[\| \underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi} \| + \frac{\mathrm{K}_1}{1-\rho} \| \mathrm{S}_n \| \right].$$

Les termes du type (2) ont un module $\leqq a_{2,n,\sigma_i,j_i}$, où

$$a_{2,n,\sigma_i,j_i} = (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_{i-1}-1} \mathrm{S}_n \mathrm{V}_0^2(i_0) \| \varepsilon_{2,j_i} \|$$
$$\times (\underset{1}{\lambda}_n)^{\sigma_i-1}(1-\underset{1}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}-1}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1}$$

dont la somme sur σ_i et k donne

$$((\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n \ldots (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n \mathrm{V}_0^2(i_0))$$
$$\times \| \varepsilon_{2,j_i} \| (\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{i+1}}(1-\underset{2}{\lambda}_n)\ldots(\underset{2}{\lambda}_n)^{j_{l+1}-1},$$

termes dont nous avons majoré la $\sum_{j_i}$ au lemme 5.7 par

$$\frac{\mathrm{K}^l}{(l-1)!}\left[\frac{1}{l}\| \underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi} \| + \frac{\mathrm{K}_2}{n(1-\rho)}\right].$$

Puisqu'il y a $l+1$ termes de chaque type, il vient donc

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} | \Pr[\{ \eta_{n,i_0} = k, \nu_{1,n,i_0} = l \}] - \Pr[\{ \mathrm{Z}_n = k, \nu'_{1,n} = l \}] |$$
$$\leqq \frac{\mathrm{K}^l}{(l-1)!}\left[\frac{l+1}{l}\| \underset{1}{\Pi}_n - \underset{1}{\Pi} \| + \frac{l+1}{l}\mathrm{K}_1 \frac{\| \mathrm{S}_n \|}{1-\rho}\right.$$
$$\left. + \frac{l+1}{l}\| \underset{2}{\Pi}_n - \underset{2}{\Pi} \| + \frac{\mathrm{K}_2(l+1)}{n(1-\rho)}\right],$$

somme de termes généraux de séries absolument convergentes en l, multipliées par un facteur qui tend vers zéro.

Donc

$$d[\eta_{n,i_0}, Z_n] \to 0.$$

LEMME 5.10. — *Si* (1), (2), (3) *ont lieu;*

Si ${}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}$ *désigne le nombre de passages dans* E_1 *au bout de n épreuves,* i_0 *étant l'état initial,*

$$d[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}, \eta_{n,i_0}] \to 0.$$

Démonstration. — On sait que

$$d(\xi, \eta) \leqq 2\,\mathrm{Pr}[\{\xi \neq \eta\}],$$

si ξ et η sont des variables aléatoires à valeurs entières.

Il nous suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Pr}[\{\eta_{n,i_0} \neq {}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}\}] \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to \infty.$$

L'événement $\{\eta_{n,i_0} \neq {}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}\}$ signifie que sur l'intervalle de temps $n+1$, $n+2, \ldots, n+\eta_{n,i_0}$, le système ${}^{(n)}S$ est allé au moins une fois dans E_1. Soit K_{n,i_0} le nombre d'entrées dans E_1 sur l'intervalle de temps précédent.

Nous avons évidemment l'implication

$$\{\eta_{n,i_0} \neq {}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}\} \Rightarrow \{K_{n,i_0} > 0,\ {}^{(n)}X_{n+1} \in E_2\} \text{ ou } \{{}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}[\{K_{n,i_0} > 0,\ {}^{(n)}X_{n+1} \in E_2\}] &= \sum_{j \in E_2} \mathrm{Pr}[\{K_{n,i_0} > 0,\ {}^{(n)}X_{n+1} = j\}] \\ &= \sum_{j \in E_2} P_n^{n+1}(i_0, j)\,\mathrm{Pr}[\{K_{n,i_0} > 0\}/\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\}],\end{aligned}$$

$$\mathrm{Pr}[\{{}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\}] = \sum_{j \in E_1} P_n^{n+1}(i_0, j),$$

Soit $n + \tau_{i,n}$ l'instant où E_2 est atteint pour la $i^{\text{ième}}$ fois sur l'intervalle de temps $n+1, \ldots, n+\eta_n$. Sur cet intervalle, E_2 est atteint ${}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}$ fois.

Considérons la variable aléatoire $Y_{i,n} = \mathbf{1}_{[\{X_{n+\tau_{i,n}+1} \in E_1\}]}$

$$K_{n,i_0} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}},$$

$$E[Y_i/\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\}] = \sum_{j \in E_2} \mathrm{Pr}[{}^{(n)}X_{n+\tau_{i,n}} = j/{}^{(n)}X_{n+1} = j]\,T_n V_0^1(j) \leqq \| T_n V_0^1 \|,$$

car $\tau_{i,n} + n$ est un temps défini sur les événements qui lui sont antérieurs,

$$E[K_{n,i_0}/\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\}] \leqq E[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}]\,\| T_n V_0^1 \|,$$

Y_i et ${}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}$ sont indépendantes, ${}^{(n)}X_{n+1}$ étant donné.

Puisque ${}^{(n)}\xi_{1,n,i_0} \leqq \eta_{n,i_0}$, nous avons

$$\Pr[\mathrm{K}_{n,i_0} > 0 / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} = j \}] < \mathrm{E}[\mathrm{K}_{n,i_0} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} = j \}] \leqq \mathrm{E}[\eta_{n,i_0}] \, \| \mathrm{T}_n \mathrm{V}_0^1 \|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\Pr[\{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} \in \mathrm{E}_1 \} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_0 = i_0 \}] \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-2} \Pr[\{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n-i} \in \mathrm{E}_2, \ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n-i+1} \in \mathrm{E}_1, \\
&\qquad\qquad {}^{(n)}\mathrm{X}_{n-i+2} \in \mathrm{E}_1, \ \ldots, \ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} \in \mathrm{E}_1 \} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_0 = i_0 \}] \\
&\qquad + \Pr[\{ {}^{(n)}\mathrm{X}_1 \in \mathrm{E}_1, \ \ldots, \ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} \in \mathrm{E}_1 \} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_0 = i_0 \}] \\
&\quad = \sum_{j \in \mathrm{E}_2} \sum_{i=0}^{n-2} \Pr[\{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n-i} = j \} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_0 = i_0 \}] \, \mathrm{T}_n (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^i \mathrm{V}_0^1(j) + (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{(n)} \mathrm{V}_0(i_0) \\
&\quad \leqq \sum_{j \in \mathrm{E}_2} \mathrm{T}_n [\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n]^{-1} \mathrm{V}_0^1(j) + \| (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^n \mathrm{V}_0 \|,
\end{aligned}$$

or

$$(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{V}_0^1 = \frac{\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_n)}{1 - \underset{1}{\lambda}_n} \mathrm{V}_0^1 + \int_{\mathrm{B}^\star(0,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} \mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}_n) \, d\lambda \, \mathrm{V}_0^1$$

en vertu des résultats du chapitre I, où

$$0 < \rho < 1, \qquad \mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}_n) = (\lambda \mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1},$$

$$\mathrm{T}_n \frac{\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_n) \mathrm{V}_0^1}{1 - \underset{1}{\lambda}_n} = \frac{n \mathrm{T}_n \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_n) \mathrm{V}_0^1}{n(1 - \underset{1}{\lambda}_n)} \to 0,$$

car $n\mathrm{T}_n$ reste borné,

$$\mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_n) \mathrm{V}_0^1 \to \mathrm{V}_0^1 \qquad \text{et} \qquad n(1 - \underset{1}{\lambda}_n) \to \infty.$$

D'autre part,

$$\int_{\mathrm{B}^\star(0,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} \mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}_n) \, d\lambda \, \mathrm{V}_0^1 \to \int_{\mathrm{B}^\star(0,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} \mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}) \, d\lambda \, \mathrm{V}_0^1 = 0.$$

Donc

$$\mathrm{T}_n \int_{\mathrm{B}^\star(0,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} \mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}_n) \, d\lambda \, \mathrm{V}_0^1 \to 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_n [\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n]^{-1} \mathrm{V}_0^1 \to 0,$$

$$(\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^n \mathrm{V}_0^1 = (\underset{1}{\lambda}_n)^n \mathrm{E}(\underset{1}{\lambda}_n) \mathrm{V}_0^1 + \mathrm{O}(\rho^n) \to 0,$$

car

$$n(1 - \underset{1}{\lambda}_n) \to \infty.$$

Donc

$$\Pr[\{ {}^{(n)}\mathrm{X}_{n+1} \in \mathrm{E}_1 \} / \{ {}^{(n)}\mathrm{X}_0 = i_0 \}] \to 0 \qquad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Évaluons maintenant $\mathrm{E}[\eta_{n,i_0}]$,

$$\mathrm{E}[\eta_{1n,i_0}] = \sum_{k,l} k \,\mathrm{Pr}[\eta_{1n,i_0} = k,\ \nu_{1,n,i_0} = l],$$

$$\mathrm{Pr}[\{\eta_{1n,i_0} = k,\ \nu_{1,n,i_0} = l\}]$$

$$= \sum_{\sigma_i, j_i} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_1-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_2-1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2(i_0),$$

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_{l+1} = n + 1, \qquad \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_l = k.$$

Donc on a

$$\mathrm{E}[\eta_{1n,i_0}] = \sum_l \sum_k \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_0-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma_1-1} \mathrm{S}_n \ldots$$
$$\times (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2(i_0)\,[\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_l]$$

$$= \sum_l \sum_{j_i} \Bigg[\left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma-1} \sigma \right] \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n$$
$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma-1} \right] \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_2-1} \mathrm{T}_n \ldots$$
$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma-1} \right] \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_l-1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2 + \ldots$$
$$+ \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma-1} \right] \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n \ldots$$
$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} (\underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{\sigma-1} \sigma \right] \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_l-1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2 + \ldots \Bigg]$$

$$= \sum_l \sum_{j_i} [(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-2} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2 + \ldots$$
$$+ (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_1-1} \mathrm{T}_n \ldots$$
$$\times (\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-2} \mathrm{S}_n (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_l-1} \mathrm{T}_n \ldots (\underset{2}{\mathrm{R}}_n)^{j_{l+1}-1} \mathrm{V}_0^2 + \ldots].$$

Puisque $\|(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{S}_n\| = 1$ et $\| n\mathrm{T}_n \| \leqq \mathrm{K}$, il vient

$$\mathrm{E}[\eta_{1n,i_0}] \leqq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathrm{K}^l}{l!}\, l\, \|(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1}\|.$$

Or

$$\|(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1}\| = \|(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{V}_0^1\|.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{\|(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1} \mathrm{V}_0^1\|}{n} \to 0 \qquad \text{si } n \to \infty,$$

puisque $n\mathrm{T}_n$ reste borné.

Puisque

$$(\mathrm{I}^1 - \underset{1}{\mathrm{R}}_n)^{-1}\mathrm{V}_0^1 = \underset{1}{\Pi}_n \mathrm{V}_0^1 \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n} + \int_{\mathrm{B}^\star(0,\rho)} \frac{\mathcal{R}(\lambda, \underset{1}{\mathrm{R}}_n)\,d\lambda}{\mathrm{I} - \lambda}$$

et que $n(\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n) \to \infty$, on a bien le résultat.

COROLLAIRE :

$$d[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}, \mathrm{Z}_n] \to 0.$$

Démonstration :

$$d[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}, \mathrm{Z}_n] \leqq d[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}, \eta_{n,i_0}] + d(\eta_{n,i_0}, \mathrm{Z}_n);$$

les lemmes 5.9 et 5.10 donnent alors le résultat.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THÉORÈME 5.2. — *Si* $\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}$, P *ayant deux classes ergodiques, acycliques et pas d'états transitoires;*

Si

$$n(\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n) \to \infty, \qquad n(\mathrm{I} - \underset{2}{\lambda}_n) \to q,$$

la variable aléatoire $(\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n)\,{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}$ *converge en loi vers la variable aléatoire* Z, *de fonction caractéristique* $\exp\left[i\left(\frac{uq}{\mathrm{I} - iu}\right)\right]$.

Cette loi limite est celle trouvée par Dobrouchine pour le nombre de passages par E_1 *en n épreuves du système* ${}^{(n)}s$.

Démonstration. — Puisque $d[{}^{(n)}\xi_{1,n,i_0}, \mathrm{Z}_n] \to 0$, toute loi limite pour ξ_n est loi limite pour Z_n avec les mêmes normalisations.

Or Dobrouchine a montré que sous les conditions du théorème $(\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n)\mathrm{Z}_n$ converge en loi vers Z. Reprenons la démonstration

$$\mathrm{Z}_n = \tau'_{0,n} + \tau'_{1,n} + \ldots + \tau'_{\nu'_{1,n},n},$$

avec les notations précédentes. Les variables aléatoires τ'_i sont indépendantes, τ'_i et $\nu'_{1,n}$ également, pour tout i.

$\nu'_{1,n}$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes, prenant les valeurs I et 0 avec les probabilités respectives $\mathrm{I} - \underset{2}{\lambda}_n$ et $\underset{2}{\lambda}_n$.

Soit $\mathrm{G}_n(z)$ la fonction génératrice de $\nu'_{1,n}$. En vertu de l'hypothèse

$$n(\mathrm{I} - \underset{2}{\lambda}_n) \to q, \qquad \mathrm{G}_n(z) \to \mathrm{G}(z) = \exp[q(z - \mathrm{I})],$$

fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre q.

D'autre part, $(\mathrm{I} - \underset{1}{\lambda}_n)\tau'_{i,n}$ converge en loi vers la loi exponentielle de fonction caractéristique $\varphi(u) = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - iu}$, en vertu des lemmes 5.6 et 5.8.

Donc

$$\mathrm{E}\left[\exp iu(1-\underset{1}{\lambda}_n)\left(\sum_{j=1}^{\nu'_{1,n}}\tau'_{j,n}\right)\right]=\sum_k \Pr[\nu'_{1,n}=k]\,(\varphi_n(u))^k=\mathrm{G}_n(\varphi_n(u))$$

$$\to \mathrm{G}(\varphi(u))=\exp\left(q\left[\frac{1}{1-iu}-1\right]\right)=\exp\left(\frac{iuq}{1-iu}\right),$$

$\varphi_n(u)$ désignant la fonction caractéristique de $(1-\underset{1}{\lambda}_n)\,\tau'_{i,n}$.

BIBLIOGRAPHIE.

BLANC-LAPIERRE (A.) et R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.

CHUNG (K. L.), *Markov chains with stationary probability transitions*, Springer, Berlin, 1961.

DOBROUSHIN (R. L.), *Lois limites pour des chaînes de Markov* (*Isv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, 1953, p. 291-329).

DOEBLIN (W.), *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples* (*Bull. Math. Soc. Roum. Sc.*, t. 39.1, 1937, p. 51-115; t. 39.2, 1937, p. 3-61).

DUNFORD (N.) et J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Interscience publishers, New York, 1958.

FELLER (W.), *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, New York, 1957.

FORTET (R.), Cours de 3e cycle à la Faculté des Sciences de Paris.

FRÉCHET (M.), *Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

GANTMACHER (F. R.), *Matrix theory*, Chelsea Publ. Cy, New York, 1959.

GNEDENKO (B. V.) et A. N. KOLMOGOROFF, *Limit distributions for sums of independant random variables*, Addison Wesley Publ., Cambridge 42, Mass, 1949; Traduction anglaise en 1954.

ILYACHENKO (A. A.), *Lois limites pour des chaînes de Markov* (*Ukr. Mat. J.*, t. 10, nº 1, 1958, p. 23-35).

KOLMOGOROFF (A. N.), *Chaînes de Markov avec un ensemble dénombrable d'états possibles* (*Bull. Univ. Moscou*, A, nºs 1-3, 1937); *Quelques travaux récents sur les théorèmes limites dans la théorie des probabilités* (*Ibid.*, nº 10, 1953, p. 29).

KOOPMANN (B. O.), *A generalisation of Poisson distribution for Markov chains* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 36, 1950, p. 202-207).

LOEVE (M.), *Probability Theory*, Van Nostrand, 1955.

MESHALKIN, *Théorèmes limites pour des chaînes de Markov à nombre fini d'états* (*Théorie des probabilités et ses applications*, t. 3, nº 4, 1958; Traduction américaine, p. 335-357).

MIHOC (G.), *Lois limites pour des vecteurs aléatoires en chaîne de Markov* [*Théorie des probabilités et ses applications*, t. 1, nº 1, 1956, p. 92-100 (édition russe)].

ONICESCU (O.) et G. MIHOC, *Calcul des probabilités*, Éditions d'État Roumaines, 1959.

PROHOROF (Yu V.), *Convergence des processus stochastiques et théorèmes limites en théorie des probabilités* (*Théorie des probabilités et ses applications*, t. 2, 1957; Traduction américaine, p. 138-171).