

# ANNALES DE L'I. H. P.

PAUL-LOUIS HENNEQUIN

## **Processus de Markoff en cascade**

*Annales de l'I. H. P.*, tome 18, n° 2 (1963), p. 109-195

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1963\\_\\_18\\_2\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1963__18_2_109_0)

© Gauthier-Villars, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Processus de Markoff en cascade

par

**Paul-Louis HENNEQUIN.**

---

## INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été, durant ces dernières années, consacrés à l'étude de processus très particuliers rencontrés, soit en biologie, soit en physique nucléaire, soit dans la théorie des réactions chimiques ou des communications. Nous nous contentons de renvoyer à quelques livres où de nombreux exemples sont développés [1], [2], [10]. Par ailleurs, une étude théorique très générale des processus dénombrables de Markoff a été faite par plusieurs auteurs [4], [5], [6], [7], [12], [15], [16], [17], [18]. Nous nous proposons dans ce travail de définir une classe de processus assez généraux pour recouvrir la plupart des cas rencontrés dans la pratique, mais assez particuliers cependant pour justifier une étude spéciale. Dans un grand nombre de problèmes pratiques, on étudie une population dont les individus peuvent, d'après leurs caractères, être classés en  $n$  espèces distinctes. S'il est possible d'inclure dans ces caractères tout ce qui, dans le passé de la population peut influencer sur son avenir, l'évolution se fait suivant un processus de Markoff que nous supposons homogène dans le temps.

Par ailleurs, cette évolution étant due à la disparition ou à l'apparition d'individus des différentes espèces, on peut supposer qu'apparitions et disparitions simultanées sont en nombre fini. Soit  $K_n$  le module des suites de  $n$  entiers  $i_1, i_2, \dots, i_n$ ; nous noterons une telle suite par une lettre majuscule  $I$ . Un processus de Markoff homogène dont l'espace des états est  $K_n$ , est définie par les probabilités de passage  $P\{t\}$  de passer de l'état

initial I à l'instant  $\tau$ , à l'état final J à l'instant  $\tau + t$ . Elles satisfont les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} P_I^J \geq 0 \\ \sum_J P_I^J(t) \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq 0,$$

$$\sum_J P_I^J(t) P_J^K(\tau) = P_I^K(t + \tau); \quad \forall t, \tau \geq 0,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} P_I^J(t) = \delta_I^J = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J, \\ 0 & \text{si } I \neq J. \end{cases}$$

J. L. Doob [5] a montré que, sous ces hypothèses,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - P_I^I(t)}{t} = Q_I \leq \infty,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{P_I^K(t)}{t} = Q_I^K < \infty = K \neq I$$

existent et que

$$\sum_J Q_I^J \leq Q_I.$$

Si  $Q_I$  est fini, nous dirons, avec P. Lévy [14] que I est un état stable, s'il est infini, que I est instantané.

Nous supposons que tous les  $Q_I$  sont finis, ce qui est une hypothèse peu restrictive ici.

Si  $Q_I \neq 0$ , nous poserons

$$\begin{aligned} Q_I^J &= \bar{Q}_I \Pi_I^J \quad \text{pour } I \neq J, \\ \Pi_I^I &= 0. \end{aligned}$$

Si  $Q_I = 0$ , nous poserons

$$\begin{aligned} \Pi_I^I &= 1, \\ \Pi_I^J &= 0 \quad \text{pour } I \neq J. \end{aligned}$$

La matrice des  $\Pi_I^J$  est la matrice de la chaîne de Markoff associée aux changements d'états du processus. Elle permet d'étudier la suite de ceux-ci sans préciser quand ils se produisent. Au contraire, les  $Q_I$  sont liés au temps passé dans l'état I, puisque celui-ci a pour fonction de répartition

$$1 - e^{-Q_I t}.$$

Nous appelons « transition élémentaire » un couple (I, J) tel que  $\Pi_I^J > 0$ . Dans une population réelle, le nombre d'individus qui peuvent appa-

raître ou disparaître dans une telle transition élémentaire est borné indépendamment de  $I$ . De plus, on peut admettre que, bien que les  $\Pi_i^j$  dépendent de  $I$ , l'ensemble des transitions élémentaires de premier terme  $I$  est caractérisé par  $J - I$ , ce qui nous conduit à appeler processus en cascade un processus dont les transitions élémentaires sont caractérisées par  $J - I \in \mathcal{J}$  où  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble fini de  $K_n$  indépendant de  $I$ .

Dans le chapitre I, nous avons précisé les définitions et notations au paragraphe 1, puis donné des exemples au paragraphe 2. La plupart de ceux-ci conduisent à étudier des chaînes en cascade où l'espace des états est non pas  $K_n$ , mais l'ensemble  $E^n$  des points à coordonnées entières positives de  $R^n$ . Il est donc nécessaire de préciser la définition des transitions élémentaires sur les faces de  $E^n$  qui jouent le rôle de frontière, suivant les cas absorbantes ou partiellement réfléchissantes. Les paragraphes 3 à 6 sont consacrés à l'étude des vecteurs propres de l'opérateur  $\Pi$  lié à la chaîne. Il est possible de construire un tel vecteur propre dès qu'on le connaît sur un sous-ensemble de  $E^n$  par des relations de récurrence. Toutefois, la caractérisation des vecteurs positifs présente des difficultés. Au paragraphe 7, nous énonçons quelques critères, qu'on peut obtenir directement, pour qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E^n$  soit de séjour. Dans les paragraphes 8 et 9 nous étudions l'ensemble des trajectoires, c'est-à-dire des réalisations de probabilité strictement positive du processus. Il est possible de définir une application de cet ensemble sur un sous-ensemble  $A$  de la demi-droite positive. L'intersection de cet ensemble et d'un intervalle  $[r, r + 1]$  a une mesure égale à ou inférieure à 1. Pour le préciser, on est conduit à étudier le problème d'une barrière absorbante pour un processus homogène sur la droite que nous avons résolu à l'aide des fonctions génératrices et d'une méthode analogue à celle des images en électrostatique.

Dans le chapitre II, nous nous sommes intéressés au cas où la chaîne est homogène dans l'espace des états, c'est-à-dire où  $\Pi_i^{i+j} = A_j$  ne dépend pas de  $i$ . Pour définir cette notion, il est nécessaire que l'espace des états soit muni d'une structure de groupe. Nous nous limitons au cas où le groupe  $G$  est commutatif et nous caractérisons les chaînes dénombrables de ce type dans le paragraphe 2. L'état du processus à l'instant  $n$  est alors somme de  $n$  variables indépendantes de même loi, ce qui simplifie beaucoup l'étude.

Après avoir rappelé au paragraphe 3 la définition de la frontière de Feller, nous étudions au paragraphe 4 le cas où l'on peut atteindre tous les points de  $G$  à partir de l'un d'eux. Dans le cas où  $G = K^n$ , on peut

établir un isomorphisme entre la partie discrète de la frontière et la surface de  $R^n$  d'équation

$$\sum A_J e^{J \cdot U} = 1.$$

En particulier, la frontière de Feller est réduite à un seul point si et seulement si

$$\sum J A_J = 0.$$

Au paragraphe 5, nous étudions le cas où à partir d'un élément de  $G$  on atteint les éléments d'un semi-groupe de  $G$ . Les résultats sont analogues à ceux du paragraphe 4. Au paragraphe 6, nous étudions les ensembles de séjour qui apparaissent comme voisinages du point particulier de la frontière qui correspond à la solution  $Z = 1$  de l'équation  $\Pi Z = Z$ . L'étude des ensembles de séjour est faite successivement dans le cas où  $\sum J A_J = 0$  pour lequel nous avons généralisé des résultats obtenus par Ito et Mc Kean dans le cas d'une marche au hasard symétrique, et dans le cas où  $\sum J A_J \neq 0$  où nous utilisons une généralisation de la loi du logarithme itéré à des variables vectorielles.

Le paragraphe 7 est relatif au calcul du temps d'atteinte et du temps de séjour pour un sous-ensemble de  $G$ . Ceux-ci sont solutions d'équations linéaires dont la structure est analogue à celle des équations aux différences rencontrées dans la résolution approchée du problème de Dirichlet.

Dans le chapitre III, nous avons cherché à étendre les résultats du chapitre II à des chaînes non homogènes sur un groupe  $G$ . Dans les paragraphes 1 et 2, nous avons utilisé la remarque suivante : si  $\Pi = \sum T_l$ , où les  $T_l$  commutent deux à deux et sont positifs, tout élément extrémal du cône des  $Z \geq 0$  tels que  $\Pi Z = Z$  est vecteur propre commun des  $T_l$ . Si les  $T_l$  sont plus simples que  $\Pi$ , cela simplifie la recherche de ces éléments. C'est d'ailleurs cette même remarque qui est à la base de la méthode des « directions alternées » pour la résolution approchée de problèmes elliptiques. On peut ainsi ramener l'étude d'une marche au hasard particulière, mais non homogène dans le plan, à l'étude d'une marche au hasard sur la droite. C'est l'objet des paragraphes 3 et 4.

Dans le paragraphe 5, nous avons établi que la condition

$$\sum_j j \Pi_i^{i+j} = 0; \quad \forall i,$$

nécessaire et suffisante pour que la frontière de Feller d'une chaîne homogène soit réduite à un seul point était encore suffisante pour un processus sur la droite. Le fait que l'espace des états soit totalement ordonné joue un rôle dans cette démonstration qui ne se généralise pas à une dimension supérieure à 1.

Dans le paragraphe 6, nous avons cherché à définir des classes de matrices de probabilité qui définissaient la même frontière de Feller.

La transformation définie par

$$P_I^j = \sum_n a_n(I) \Pi^n I, \quad \text{où} \quad \sum_n a_n(I) = 1, \quad a_n(I) \geq 0$$

transforme une matrice de probabilité en une matrice de probabilité. Cette transformation conserve la frontière si les  $a_n(I)$  sont indépendants de  $I$ .

Dans le paragraphe 7, nous avons étudié en détail la transformation d'un processus de naissance et de mort.

Nous donnons ci-dessous une bibliographie générale d'ouvrages en relation avec notre travail. Les articles utilisés ont été indiqués à la fin de chaque chapitre.

C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer ma gratitude à M. R. Fortet pour les observations, les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer durant l'élaboration de ce travail.

J'ai aussi une grande reconnaissance à l'égard de M. L. Schwartz pour m'avoir invité à collaborer à son enseignement de Méthodes mathématiques de la Physique et pour avoir accepté de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie enfin M. J. Neveu qui m'a donné de nombreuses indications dans la poursuite de ce travail et M. J.-L. Lions dont certains des travaux font l'objet de ma seconde thèse.

#### BIBLIOGRAPHIE POUR L'INTRODUCTION.

- [1] ARLEY (N.), *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of the cosmic radiation*, John Wiley and Sons, New-York, 1948.
- [2] BHARUCHA-REID (A. T.), *Elements of the theory of Markov processes and their applications*, Mc Graw Hill, New-York, 1960.
- [3] BLANC-LAPIERRE (A.), et FORTET (R.), *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.
- [4] CHUNG (K. L.), *Markov chains with stationary transition probabilities*, Springer Verlag, Berlin, 1961.
- [5] DOOB (J. L.), *Stochastic processes*, John Wiley and Sons, New-York, 1953.
- [6] DYNKIN (E. B.), *Theory of Markov processes*, Pergamon, New-York, 1960.

- [7] FELLER (W.), *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, John Wiley and Sons, New-York, 2<sup>e</sup> édit., 1957.
- [8] FORTET (R.), *Calcul des probabilités*, C. N. R. S., Paris, 1950.
- [9] FRÉCHET (M.), *Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités. II. Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Gauthier-Villars, Paris, 2<sup>e</sup> édit., 1952.
- [10] HARRIS (T. E.), *Branching processes*, Springer Verlag, Berlin (sous presse).
- [11] KEMENY (J. E.) et SNELL J. L., *Finite Markov chains*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J., 1960.
- [12] KEMPERMAN (J. H. B.), *The passage problem for a stationary Markoff chain*, The University of Chicago Press, 1961.
- [13] LÉVY (P.), *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [14] LÉVY (P.), *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [15] LÉVY (P.), *Systèmes markoviens et stationnaires; cas dénombrable (Ann. Éc. Norm. sup., t. 68, 1951, p. 327)*.
- [16] LOEVE (M.), *Probability theory*, D. Van Nostrand Company, Princeton, N. J., 1955.
- [17] NEVEU (J.), *Étude des semi-groupes de Markov (Thèse, Paris, 1955)*.
- [18] SARYMSAKOFF (T. A.), *Éléments de la théorie des processus de Markov (Gosudarstv. Izdat. Tech. Teor. Lit., Moscou, 1954)*.

## CHAPITRE I.

### PROCESSUS EN CASCADE SUR $E_n$ .

**1. Notations et définitions.** — *a. L'espace des états.* — L'état d'une population comportant des individus de  $n$  espèces distinctes peut être, si l'on ne cherche pas à discerner deux individus de même espèce, caractérisé par  $n$  nombres entiers positifs ( $\geq 0$ )  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . Nous supposons le nombre  $n$  des espèces fixé une fois pour toutes, certains des  $i_k$  pouvant être nuls.

Introduisons les deux ensembles suivants :

$K_n$  est le module des suites de  $n$  entiers  $i_1, i_2, \dots, i_n$  ou encore  $\{i_k\}$ ; nous appelons point I un élément de  $K_n$  et coordonnées du point I les nombres  $i_k$ ;

$E_n$  est le cône de  $K_n$  formé des suites de  $n$  entiers positifs.

*b. Transitions élémentaires pour un processus sur  $K_n$ .* — Nous appelons transition élémentaire une transition de I à J de probabilité  $\Pi_{I,J}^1 > 0$ .

**DÉFINITION 1.** — Nous appelons processus en cascade sur  $K_n$  un processus de Markoff sur l'espace  $K_n$  dont les transitions élémentaires sont

caractérisées par  $J - I \in \mathcal{J}$ , où  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble fini de  $K_n$  indépendant de  $I$ .

De tels processus sont étudiés sous le nom de « marche au hasard », en particulier dans le cas où  $\Pi_1^I$  ne dépend que de  $J - I$  (processus homogène dans l'espace, cf. chap II).

c. *Transitions élémentaires pour un processus sur  $E_n$ .* — L'introduction de  $K_n$  simplifie la définition, mais nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étudier les processus sur  $E_n$ . Il est clair qu'il faut alors préciser ce qui se passe au voisinage des points  $I$  dont une ou plusieurs coordonnées sont nulles.

Nous définissons une partition de  $E_n$  de la façon suivante : écrivons les  $2^n$  premiers entiers  $k : 0 \leq k \leq 2^n - 1$  dans le système binaire et appelons  $F_n^k$  le sous-ensemble de  $E_n$  défini par :

$I_i = 0$  si le  $i^{\text{ième}}$  chiffre de  $k$  est 0;  
 $I_i > 0$  si le  $i^{\text{ième}}$  chiffre de  $k$  est 1  
 ( $I_i$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée de  $I$ ).

Par exemple :

$$F_n^0 = \{0\}, \quad F_n^{2^n-1} = \{I; I_i > 0\}.$$

Nous appelons fermeture  $\bar{F}_n^k$  de  $F_n^k$  le sous-ensemble de  $E_n$  défini par  $I_i = 0$  si le  $i^{\text{ième}}$  chiffre de  $k$  est 0.

Nous noterons  $F_n^k, \bar{F}_n^k$  les plus petits sous-modules de  $K_n$  contenant respectivement  $F_n^k$  et  $\bar{F}_n^k$ .

DÉFINITION 2. — Nous appelons processus en cascade sur  $E_n$  un processus homogène de Markoff dont les transitions élémentaires  $(I, J)$  sont caractérisées par

$$I \in F_n^k \Rightarrow \begin{cases} J \in E_n, \\ J - I \in \mathcal{J}_k, \end{cases}$$

où  $\mathcal{J}_k$  est un sous-ensemble fini de  $K_n$  dépendant seulement de  $k$ .

On pourra pratiquement se limiter aux deux cas suivants :

a.  $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{2^n-1}$  et nous dirons que  $F_n^k$  est partiellement réfléchissant;

b.  $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{2^n-1} \cap \bar{F}_n^k$  et nous dirons que  $\bar{F}_n^k$  est absorbant. Une fois  $\bar{F}_n^k$  atteint, l'évolution s'y poursuit suivant un processus en cascade de dimension strictement inférieure à  $n$ .



2. **Exemples.** — *a.*  $n = 1$ ,  $\mathcal{J}_1 = \{-1, +1\}$ . De tels processus sont appelés « de naissance et de mort ». On peut en considérer deux types suivant que  $\mathcal{J}_0 = \{0\}$  ou  $\mathcal{J}_0 = \{1\}$ .

*b.* Si  $n > 1$ , on a une grande diversité de situations. Nous supposons que  $\mathcal{J}_k$  a un élément dont la somme des coordonnées est strictement positive, c'est-à-dire que la population totale peut augmenter au cours d'une transition élémentaire. En effet, s'il n'en est pas ainsi, une fois la population initiale donnée, l'évolution se fait suivant un processus dont l'espace des états est *fini* et la plupart des problèmes posés par ces processus sont résolus (*cf.*, par exemple, [11] de l'Introduction).

Les cascades électrophotoniques peuvent, quand on néglige les variations d'énergie des particules, être ainsi schématisées : un électron peut émettre un photon et subsister, ou bien être absorbé par le milieu; un photon peut se transformer en deux électrons.

$\mathcal{J}_3$  est donc composé de trois points de  $E_2$ . Aucun des demi-axes  $F_2^1, F_2^2$  n'est absorbant, mais l'origine l'est.

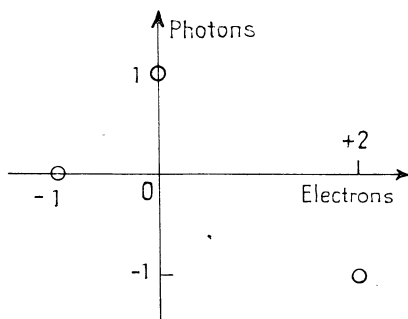


Fig. 1.

*c.* Dans cet exemple, les espaces sont les stades, supposés en nombre fini de la vie d'un individu (œufs, larves, adultes).

Un œuf peut disparaître ou éclore en donnant une larve. Une larve peut disparaître ou se transformer en adulte. Un adulte peut disparaître ou pondre des œufs.

Si  $p$  est le nombre maximal d'œufs pondus par un adulte,  $\mathcal{J}_7$  se compose de  $p + 5$  points.  $F_3^0 = 0$  seule est absorbante.

*d.* Dans un même milieu vivent  $n$  espèces en compétition. Un individu de chaque espèce peut disparaître ou engendrer  $p$  individus;  $k \leq n$  individus d'espèces différentes peuvent disparaître simultanément.

Quand une des espèces a été éliminée par les autres, celles-ci poursuivent leur évolution suivant un processus analogue de dimension  $n - 1$ . Chaque  $\bar{F}_n^k$  est absorbante.

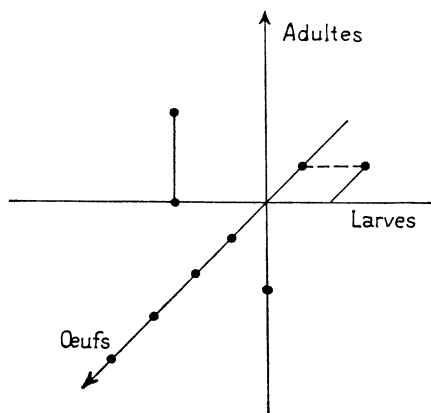


Fig. 2.

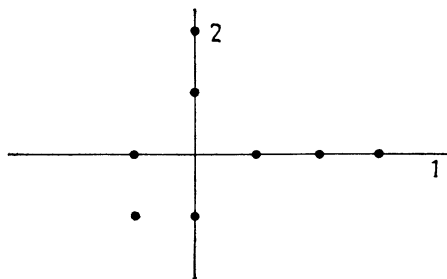


Fig. 3.

e. On peut combiner les exemples c et d.

3. **Les opérateurs  $\Pi$  et  $\Pi^*$ .** — Aux  $\Pi_i^j$ , nous associons deux opérateurs sur l'espace S des suites  $x$  de réels dont nous numérotons les éléments par un indice  $i \in E_n$ , le premier opérateur  $\Pi$  est défini par

$$(\Pi x)_i = \sum_j \Pi_i^j x_j;$$

la somme figurant au second membre est finie. De plus,  $\Pi$  est un opérateur positif, borné sur le sous-espace  $L_\infty$  des suites bornées, et de norme

inférieure ou égale à 1, et sur le sous-espace  $L_1$  des suites sommables où sa norme est  $\leq p$  ( $p$  est le nombre de points de  $\mathcal{J}_{2^n-1}$ ).

Le second opérateur  $\Pi^*$  (adjoint de  $\Pi$ ) est défini par

$$(\Pi^* x)^I = \sum_J \Pi_J^I x^J$$

l'ensemble  $\mathcal{J}_k^*$  qui joue le rôle de  $\mathcal{J}_k$  pour  $\Pi^*$  est le symétrique de  $\mathcal{J}_k$  par rapport à 0.

$\Pi^*$  est positif, borné, sur  $L_\infty$  et sur  $L_1$  de norme respectivement inférieure à  $p$  et 1.

**4. Étude des vecteurs propres de  $\Pi$  et  $\Pi^*$  — a. Vecteurs propres de  $\Pi$ .** — Les vecteurs propres de  $\Pi$  sont déterminés par l'équation

$$\Pi x = \lambda x.$$

PROPOSITION 4.1. — Pour  $\lambda > 0$ , l'équation  $\Pi x = \lambda x$  est équivalente à

$$x = T_\lambda x_0,$$

où  $x_0$  désigne la restriction de  $x$  à un sous-ensemble  $\mathcal{J}_0$  de  $E_n$  dépendant uniquement des  $\mathcal{J}_k$  et  $T_\lambda$  un opérateur dépendant de  $\lambda$ . On notera  $\mathcal{X}_0$  l'espace des  $x_0$ .

Munissons  $K_n$  d'un ordre total strict noté  $<$  tel que 0 soit le plus petit élément de  $E_n$ . On peut prendre, par exemple,  $I < J$  si et seulement s'il existe  $p$  ( $1 \leq p \leq n$ ) tel que

$$\sum_k^n I_i = \sum_k^n J_i \quad \text{pour } k < p \quad \text{et} \quad \sum_p^n I_i < \sum_p^n J_i.$$

Bien entendu, une permutation des axes fournit un autre ordre et il y a donc  $n!$  ordres possibles analogues à celui-là.

Soit  $U$  le plus grand élément de  $\mathcal{J}_{2^n-1}$ ; d'après nos hypothèses,  $U > 0$ .

Supposons d'abord qu'il n'y a pas d'ensembles absorbants, c'est-à-dire que  $\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_{2^n-1}$  et que  $U \in E_n$  [c'est-à-dire que  $I \in E_n \Rightarrow (I + U) \in E_n$ ]. L'équation  $\Pi x = \lambda x$  est équivalente au système d'équations

$$(E_I) : \quad \lambda x_I = \sum_J \Pi_J^I x_J$$

qu'on peut supposer ordonnées par valeurs croissantes de  $I$ . La variable  $x_{I+U}$  apparaît pour la première fois au second membre de l'équation  $(E_I)$ ,

qui la détermine si l'on connaît les  $x_j$  pour  $J < I + U$ . On peut donc choisir arbitrairement les  $x_j$  pour  $J \in E_n \cap \bigcup (E_n + U) = \mathcal{J}_0$  et en déduire les  $x_j$  pour  $J \in E_n + U$ .

Si  $U \notin E_n$ , l'ensemble  $E_n \cap (E_n + U)$  a pour plus petit élément  $U'$  défini par  $U'_i = \sup (0, U_i)$ . Posons

$$u = \sum_1^n U_i, \quad u' = \sum_1^n U'_i.$$

Soit  $A_k$  le sous-ensemble de  $E_n$  défini par

$$ku < \sum_1^n I_i < (k+1)u \quad (k \geq 0).$$

Posons

$$B_k = \bigcup_{p=0}^k A_p, \quad C_k = A_k \cap (E_n + U).$$

Le système des équations  $(E_J)$  pour  $J \in B_k$  contient les  $x_i$  pour lesquels

$$I \in B_k \cup C_{k+1} \cup D_{k+1},$$

où  $D_k$  est un sous-ensemble de  $A_k$  disjoint de  $C_k$ .

$A_k$  contient

$$a_k = \sum_{r=ku}^{(k+1)u-1} C_{n+r-1}^r \quad \text{éléments,}$$

$C_k$  en contient

$$c_k = \sum_{r=ku-u'}^{(k+1)u-1-u'} C_{n+r-1}^r.$$

Le nombre d'éléments  $d_k$  de  $D_k$  est une fonction croissante de  $k$  telle que  $c_k + d_k \leq a_k$ .

Supposons déterminés les  $x_i$  pour

$$I \in B_{k-1} \cup C_k \cup D_k,$$

et satisfaisant aux équations  $(E_J)$  pour  $J \in B_{k-1}$ . Écrivons les équations  $(E_J)$  pour  $J \in A_k$ , soit  $a_k$  équations contenant comme variables nouvelles les  $x_i$  pour

$$I \in A_k \cap \bigcup (D_k \cup C_k) \cup C_{k+1} \cup D_{k+1} = F_k,$$

soit  $a_k - d_k - c_k + c_{k+1} + d_{k+1}$  variables nouvelles. On peut donc choisir arbitrairement  $c_{k+1} - c_k + d_{k+1} - d_k$  variables, ce qui détermine  $\mathcal{J}_0 \cap F_k$ , donc  $\mathcal{J}_0$ , puisque  $\cup F_k = \cup A_k = E_n$ .

Examinons maintenant le cas des ensembles absorbants. Si le point  $o$  est absorbant, l'équation  $E_0$  se réduit à  $x_0 = x_0$ , on peut donc choisir arbitrairement  $x_0$ . On détermine alors  $x_1$  pour tous les  $\bar{F}_n^k$  absorbants de dimension 1 en déterminant l'ensemble  $\mathcal{J}_0^k$  comme si  $o$  n'était pas absorbant, et, s'il l'est, en lui rajoutant le plus grand élément de  $\mathcal{J}_k$ ,  $U^k$ , puisque  $E_{U^k}$  ne détermine plus  $x_{U^k}$ .

De proche en proche, on détermine  $\mathcal{J}_0^k$  pour des  $\bar{F}_n^k$  de dimension croissante en prenant l'union de l'ensemble correspondant au cas où  $\bar{F}_n^k$  n'a pas de sous-ensemble absorbant et des ensembles  $\bar{F}_n^p$  et  $U_p$  pour tous les ensembles absorbants  $\bar{F}_n^p$  de  $\bar{F}_n^k$ .

*b. Vecteurs propres de  $\Pi^*$ .* — Ils se construisent de façon tout à fait analogue en remplaçant  $\mathcal{J}$  par son symétrique  $\mathcal{J}^*$  par rapport à  $o$ . Deux cas sont possibles : ou bien il existe un ordre sur  $E_n$  tel que le plus

grand élément  $U^*$  de  $\mathcal{J}^*$  satisfasse  $\sum_{i=1}^n U_i > o$ , alors on détermine un ensemble  $\mathcal{J}_0^*$  analogue à  $\mathcal{J}_0$ , ou bien  $\sum_{i=1}^n U_i \leq o$  et alors le système

homogène des équations  $E_I$  écrites pour  $\sum_{i=1}^n I_i \leq k$  comporte autant d'équations que d'inconnues. Dans ce cas, le spectre de  $\Pi^*$  est dénombrable.

##### 5. Propriétés des opérateurs $\Pi$ et $T_{\lambda}$ . — a. Soit

$$x_I = \sum_{J \in \mathcal{J}_0} T_{\lambda_I^J} x_J;$$

pour tout  $I$  fixé, seul un nombre fini de  $T_{\lambda_I^J}$  sont différents de zéro : tous les  $T_{\lambda_I^J}$  sont nuls pour

$$\sum_{i=1}^n J_i > \sum_{i=1}^n (I_i + J_i).$$

*b.*  $T_{\lambda_I^J} = \delta_I^J$  si  $I \in \mathcal{J}_0$ .

c.  $x = T_\lambda x_0 \Rightarrow \Pi x = \lambda x$ , donc  $(\Pi - \lambda) T_\lambda$  est nul sur l'espace  $\mathcal{X}_0$  des  $x_i$  pour  $I \in \mathcal{J}_0$  et

$$\sum_{K \in \mathcal{J}_0} \Pi^K T_{\lambda K} + \Pi^J - \lambda T_{\lambda J} = 0; \quad \forall J \in \mathcal{J}_0.$$

d.  $\Pi x = \lambda x \Rightarrow x = T_\lambda x_0$  et, par conséquent,

$$\left. \begin{array}{l} \Pi x = \lambda x \\ x_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0,$$

autrement dit, l'opérateur  $B_\lambda$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$  défini par

$$B^K = \begin{cases} \Pi^K - \lambda \delta^K, & K \in \mathcal{J}_0, \\ -\lambda \delta^K, & K \notin \mathcal{J}_0 \end{cases}$$

a un noyau réduit à zéro.

e. L'opérateur  $\Pi$  est positif; il en résulte que

$$B^K + \lambda \delta^K = \begin{cases} \Pi^K & \text{si } K \in \mathcal{J}_0 \\ 0 & \text{si } K \notin \mathcal{J}_0 \end{cases} \text{ est } \geq 0.$$

D'autre part, en vertu de c, pour  $J \in \mathcal{J}_0$ ,

$$\Pi^J = - \sum_{K \in \mathcal{J}_0} \Pi^K T_{\lambda K} + \lambda T_{\lambda J} = - \sum_K B^K T_{\lambda K} \leq 0,$$

donc

$$B_\lambda T_\lambda \leq 0.$$

$B_\lambda$  possède donc les quatre propriétés suivantes qui définissent un ensemble convexe :

$$B_\lambda T_\lambda \leq 0;$$

$$B_\lambda + \lambda I \geq 0;$$

La restriction de  $B_\lambda$  à  $\mathcal{X}_0$  est  $-\lambda I$ ;

$$\text{Ker } B_\lambda = 0.$$

**6. Détermination de  $\Pi$  à partir des  $T_\lambda$ .** — Nous allons montrer qu'on peut déterminer  $\Pi$  à partir de  $T_\lambda$  et de ses dérivées par rapport à  $\lambda$  dans le cas où  $U \in E_n$ .

PROPOSITION 6.1. — Si  $U \in E_n$ , quels que soient  $I$  et  $J$  fixés,  $T_{\lambda I}^J$  est un polynome en  $\lambda$ . Si, en outre,  $K \in \mathcal{J}$ ,  $K < U$ ,  $U_i \neq 0$ , entraîne  $K_i \leq 0$ . Si l'on appelle  $k$  l'entier tel que  $J = I - kU \in \mathcal{J}_0$ , alors le degré de  $T_{\lambda I}^J$  est  $k$  et son terme de plus haut degré est

$$\frac{\lambda^k}{\Pi_{J+U} \Pi_{J+2U} \dots \Pi_{I-U}}$$

et si  $K \neq I - kU$ ,

$$d^0(T_{\lambda}^k) < k.$$

Remarquons tout d'abord que

$$I - kU \in \mathcal{J}_0 \Leftrightarrow \inf_{U_i \neq 0} (I_i - kU_i) = 0,$$

il résulte de  $U \in E_n$  que, quel que soit  $I \in E_n$  il existe  $k$  tel que  $I - kU \in \mathcal{J}_0$ . Par construction,  $T_{\lambda}^I$  est un polynôme dont le degré est au plus égal au nombre d'équations qu'il a fallu écrire pour le déterminer. Si la seconde hypothèse est satisfaite, soit  $\Lambda \in I - U + \mathcal{J}$ ,  $\Lambda < I$  : on a

$$\Lambda = I - U + K, \quad \text{avec } K \in \mathcal{J}, \quad K < U,$$

donc

$$\inf_{U_i \neq 0} [\Lambda_i - (k-1)U_i] = \inf_{U_i \neq 0} (I_i - kU_i + K_i) \leq 0$$

et

$$\Lambda - k'U \in \mathcal{J}_0 \Rightarrow k' \leq k-1.$$

Démontrons la conclusion par récurrence sur  $I$  : elle est vraie si  $I \in \mathcal{J}_0$ ,  $k = 0$  puisqu'alors  $T_{\lambda}^I = \delta_I^I$ .

Si  $k > 0$ , l'équation  $E_{I-U}$  s'écrit

$$\Pi_{I-U}^I T_{\lambda}^I = \lambda T_{\lambda}^{I-U} - \sum_{K < I} \Pi_{I-U}^K T_{\lambda}^K.$$

Puisque  $K < I$ ,

$$\begin{aligned} d^0(T_{\lambda}^K) &\leq k' \leq k-1, \\ I - kU \neq J &\Rightarrow d^0 T_{\lambda}^{I-U} < k-1 \Rightarrow d^0 T_{\lambda}^I < k, \\ I - kU = J &\Rightarrow d^0 T_{\lambda}^{I-U} = k-1 \Rightarrow d^0 T_{\lambda}^I = k \end{aligned}$$

et le terme de plus haut degré est

$$\frac{\lambda^k}{\Pi_{\mathcal{J}+U}^I \dots \Pi_{I-U}^I}$$

PROPOSITION 6.2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que  $(\Pi - \lambda I)^n x = 0$  est qu'il existe  $x^0, x^1, \dots, x^{n-1} \in \mathcal{X}_0$  tels que*

$$x = T_{\lambda}^{(n-1)} x^{n-1} + \dots + T_{\lambda} x^0$$

où  $T_{\lambda}^{(n)}$  désigne la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $T_{\lambda}$  par rapport à  $\lambda$ .

a. La condition est suffisante : en effet, de

$$(\Pi - \lambda I) T_{\lambda} = 0,$$

on déduit par dérivation

$$(\Pi - \lambda I) T'_\lambda - T_\lambda = 0,$$

puis

$$(\Pi - \lambda I) T_\lambda^{(n)} - n T_\lambda^{(n-1)} = 0.$$

Donc

$$(\Pi - \lambda I)^{n+1} T_\lambda^{(n)} = n! (\Pi - \lambda I) T_\lambda = 0.$$

b. La condition est nécessaire : en effet, par récurrence sur  $n$ ,

$$\begin{aligned} (\Pi - \lambda I)^n x &= 0, & (\Pi - \lambda I)^{n-1} (\Pi - \lambda I) x &= 0, \\ (\Pi - \lambda I) x &= T_\lambda^{(n-2)} x'^{n-2} + \dots + T_\lambda x'^0 \\ &= (\Pi - \lambda I) \left[ T_\lambda^{(n-1)} \frac{x'^{n-2}}{n-1} + \dots + T'_\lambda x'^0 \right], \\ &= T_\lambda^{(n-1)} \frac{x'^{n-2}}{n-1} + \dots + T'_\lambda x'^0 + T_\lambda x'^0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.3. — Les  $T_\lambda^{(k)}$  sont linéairement indépendants pour  $1 \leq k \leq n$  quel que soit  $n$ .

On le démontre par récurrence sur  $n$  :

$$\begin{aligned} \text{Si } T_\lambda^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i T_\lambda^{(i)} \\ n T_\lambda^{(n-1)} &= (\Pi - \lambda I) T_\lambda^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\Pi - \lambda I) T_\lambda^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i a_i T_\lambda^{(i-1)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.4. — Si  $U \in E_n$ , quels que soient  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\lambda > 0$ , et le sous-ensemble fini  $\mathcal{J}$  de  $E_n$ , il existe  $y \in \mathcal{X}$  et  $k$  tels que  $y_i = x_i$  pour  $I \in \mathcal{J}$  et  $(\Pi - \lambda I)^k y = 0$ .

En effet, l'équation  $(\Pi - \lambda I)^k y = 0$  est du même type que l'équation  $(\Pi - \lambda I) y = 0$ , l'ensemble  $\mathcal{J}^k$  étant constitué de tous les éléments de  $K_n$  somme de  $k$  éléments de  $\mathcal{J}$ , son plus grand élément est donc  $kU$  et l'on peut choisir arbitrairement  $y_i$  pour

$$I \in \mathcal{J}_0^k = E_n \cap \bigcup (E_n + kU).$$

Il existe donc  $k$  tel que  $\mathcal{J}_0^k \supset \mathcal{J}$ .



Ces propositions peuvent être fausses si un des  $U_i$  est  $< 0$ . En effet, ce n'est plus nécessairement l'équation  $(E_i)$  qui détermine  $x_{i+0}$  et elle peut, au contraire, déterminer  $x_i$  en fonction de  $x_{i+U}$ . Il en résulte que  $T_{\lambda_1^1}$  est une fraction rationnelle en  $\lambda$ .

L'exemple ci-dessous montre que la proposition 6.4 n'est plus valable (pour un opérateur  $\Pi$  non  $\geq 0$ ).

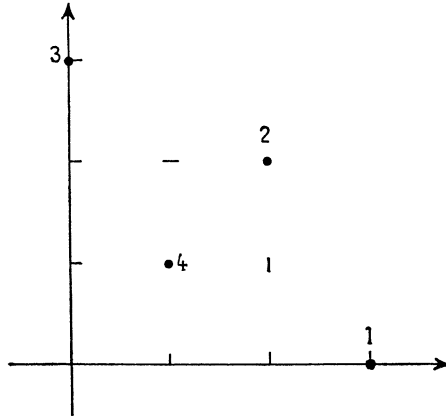


Fig. 4.

$n = 2$  :  $\mathcal{J}$  se compose des deux points  $(-1, 2)$  et  $(2, -1)$ . Nous notons par les indices 1, 2, 3, 4 les quatre points 1(0, 3), 2(2, 2), 3(3, 0), 4(1, 1)

$$\begin{aligned} (E_1) \quad & \lambda x_1 = \alpha_1^2 x_2, \\ (E_3) \quad & \lambda x_3 = \alpha_3^2 x_2, \\ (E_4) \quad & \lambda x_4 = \alpha_4^2 x_3 + \alpha_4^1 x_1. \end{aligned}$$

D'où

$$\lambda^2 x_4 = (\alpha_4^2 \alpha_3^2 + \alpha_4^1 \alpha_1^2) x_1$$

et si

$$\alpha_4^2 \alpha_3^2 + \alpha_4^1 \alpha_1^2 = 0, \quad x_4 = 0 \quad \text{quel que soit } \lambda \neq 0,$$

il en résulte

$$(\Pi - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \quad \text{quel que soit } \lambda \neq 0,$$

d'où, par dérivation,

$$(\Pi - \lambda I)^k x = 0 \Rightarrow x = \sum_0^k \alpha_i x^{(i)} \Rightarrow x_4 = 0.$$

**THÉORÈME 6.1.** — Si  $U \in E_n$ , quel que soit  $\lambda > 0$  et fini,  $\Pi$  est entièrement défini par les  $T_{\lambda}^{(n)}$ .

En effet, d'après les propositions 6.2 et 6.4, quel que soit  $x \in \mathcal{X}$  et quel que soit l'ensemble fini  $\mathcal{J}$ , il existe  $n$  et  $x^0, \dots, x^{n-1} \in \mathcal{X}_0$  tels que

$$x_1 = (T_\lambda^{(n-1)} x^{n-1} + \dots + T_\lambda x^0)_I \quad \text{pour } I \in \mathcal{J};$$

si  $\mathcal{J} \supset K + \mathcal{J}$ ,

$$(\Pi x)_K = \lambda (T_\lambda^{(n-1)} x^{n-1} + \dots + T_\lambda x^0)_K - [(n-1) T_\lambda^{(n-2)} x^{n-1} + \dots + T_\lambda x^1]_K.$$

**7. Étude des ensembles de séjour.** — Nous adopterons la terminologie de Feller et nous appellerons avec lui « ensembles de séjour » les sous-ensembles  $A$  de  $E_n$  tels qu'il existe  $I \in A$  et  $\eta > 0$  satisfaisant  $\Pi_A^{(k)\lambda} \geq \eta$  pour tout  $k$ ; où  $\Pi_A$  est la restriction de  $\Pi$  à  $A$ ,  $\Pi_A^{(k)}$  sa puissance  $k^{\text{ième}}$  et  $\Pi_I^\lambda = \sum_{J \in A} \Pi_I^J$ .

**PROPOSITION 7.1.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  fini soit un ensemble de séjour est qu'il contienne un point  $o$  absorbant, c'est-à-dire tel que  $\Pi_o^0 = 1$ .*

La condition est manifestement suffisante (prendre  $I = o$ ); pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de montrer que s'il n'y a pas de point absorbant  $\Pi_A^k 1 \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Soit pour  $I \in A$ ,

$$\sigma_I^\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_{\lambda 1}^{k\lambda}$$

(cette suite décroissante positive converge et sa limite est positive),

$$(1 - \Pi_I^\lambda) \sigma_I^\lambda = \sum_{\substack{J \neq I \\ J \in A}} \Pi_I^J \sigma_J^\lambda.$$

S'il n'y a pas de point absorbant,  $\Pi_I^\lambda = 0$ . Il reste

$$\sigma_I^\lambda = \sum_{\substack{J \neq I \\ J \in A}} \Pi_I^J \sigma_J^\lambda.$$

Soit  $\eta = \sup_I \sigma_I^\lambda$ . De  $\sum_J \Pi_I^J \leq 1$ , il résulte que

$$\sigma_I^\lambda = \eta \Rightarrow \sigma_J^\lambda = \eta \quad \text{pour tout } J \text{ tel que } \Pi_I^J \neq 0.$$

Quel que soit  $I$  appartenant à  $A$ , il existe  $I_0 = I, I_1, I_2, \dots, I_p$  tels que  $\Pi_{I_i}^{I_{i+1}} > 0$  et  $I_p \in A$ , d'où, si  $\eta > 0$ ,  $\sigma_{I_{p-1}}^\lambda < \eta$  contrairement à l'hypothèse; donc  $\eta = 0$ .

PROPOSITION 7.2. —  $\sigma_I^\lambda = 1$  entraîne  $\sigma_J^\lambda = 1$  pour

$$J \in (I + k\mathcal{J}) \cap E_n \quad \text{et} \quad (I + k\mathcal{J}) \cap E_n \subset A \quad \text{quel que soit } k.$$

Il suffit d'écrire

$$\sigma_I^\lambda = \sum_{J \in (I + \mathcal{J}) \cap A} \Pi_1^J \sigma_J^\lambda, \quad \sigma_J^\lambda \leq 1, \quad \sum_J \Pi_1^J \leq 1,$$

l'égalité n'est possible que si

$$\sigma_I^\lambda = 1 \quad \text{et} \quad J \in (I + \mathcal{J}) \cap E_n$$

ce qui entraîne  $J \in A$ , d'où la proposition en itérant.

COROLLAIRE 1. — Si  $\bigcup_k (I + k\mathcal{J}) \supset E_n$  quel que soit  $I \in E_n$ ,  $\sigma_I^\lambda = 1$  entraîne  $A = E_n$ .

COROLLAIRE 2. — Si quel que soit  $I$  appartenant à  $A$ ,  $\sigma_I^\lambda < 1$ , on obtient un nouvel ensemble de séjour en enlevant de  $A$  un ensemble fini quelconque  $B$ .

En effet,  $\sup_{I \in B} \sigma_I^\lambda = 1 - \eta < 1$  et l'ensemble des  $I$  pour lesquels  $\sigma_I^\lambda > 1 - \eta$  est un ensemble de séjour contenu dans  $A - B$  (Feller). Comme tout ensemble qui contient un ensemble de séjour est un ensemble de séjour, on a le corollaire.

PROPOSITION 7.3. — Si  $A$  est un ensemble de séjour, il contient une suite  $I_k$  telle que

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - \Pi_{I_k}^{E-A}) \quad \text{converge.}$$

De

$$\sigma_I^\lambda = \sum_{J \in A} \Pi_1^J \sigma_J^\lambda$$

on déduit qu'il existe

$$J \in (I + \mathcal{J}) \cap A$$

tel que

$$\sigma_I^\lambda \leq \sigma_J^\lambda (1 - \Pi_1^{E-A})$$

et, en itérant,  $I_0 = I, I_1, \dots, I_n$ , tels que

$$\sigma_{I_0}^\lambda \leq \sigma_{I_n}^\lambda \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \Pi_{I_k}^{E-A}),$$

d'où le résultat en choisissant  $I_0$  tel que  $\sigma_{I_0}^\lambda > 0$  et en utilisant  $\sigma_{I_n}^\lambda \leq 1$ .

PROPOSITION 7.4. — Si  $I_0, \dots, I_n$  est telle que

$$\prod_{k=0}^{\infty} \Pi_{I_k}^{I_{k+1}} \text{ converge,}$$

tout ensemble contenant les  $I_k$  pour  $k \geq n$  est de séjour.

En effet,

$$\begin{aligned} \Pi_{I_0}^\lambda &\geq \Pi_{I_0}^{I_1}, \\ \Pi_{I_0}^{\lambda I_0} &\geq \Pi_{I_0}^{I_1} \dots \Pi_{I_{n-1}}^{I_n} \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_{I_0}^\lambda \geq \prod_{k=0}^{\infty} \Pi_{I_k}^{I_{k+1}} > 0.$$

Et la proposition en découle en utilisant la proposition 7.2.

### 8. Trajectoires et ensembles de séjour.

DÉFINITION. — Nous appelons trajectoire associée à la chaîne une de ses réalisations, c'est-à-dire une suite d'états  $I(0), I(1), \dots, I(r), \dots$  tels que

$$\Pi_{I(i)}^{I(i+1)} > 0 \quad (\text{cf. [2]}).$$

Si  $p = 1$ , il n'y a qu'une trajectoire possible; si  $p > 1$ , numérotons de 0 à  $p - 1$  les éléments de  $\mathcal{J}_{2^{p-1}}$ , soit  $I^0, I^1, \dots, I^{p-1}$  et par un indice  $\nu(I)$  entier positif les éléments de  $E_n$ .

A toute trajectoire  $I(0), I(1), \dots, I(r), \dots$  nous pouvons associer la suite  $k_i$  définie par

$$I^{k_i} = I(i) - I(i-1) \quad (0 \leq k_i \leq p-1)$$

et le réel positif

$$(8.1) \quad x = \nu(I(0)) + \sum_1^{\infty} \frac{k_i}{p^i},$$

où la suite des  $p^i$  sera précisée plus loin.

Cherchons l'image  $A$  de cette application dans  $\mathbb{R}^+$  : les  $k_i$  doivent satisfaire

$$(8.2) \quad I(0) + \sum_1^r I^{k_i} \in E_n \quad \text{quel que soit } r \geq 0.$$

*Étude de l'ensemble A.* — Deux cas sont possibles :

a. Tous les éléments de  $\mathcal{J}_{2^{n-1}}$ , donc de  $\mathcal{J}_k$  appartiennent à  $E_n$ . Si aucun des  $F_k$  n'est absorbant (8.2) est satisfaite pour toute suite d'entiers  $k_i \leq p - 1$ . Si un  $F_k$  est absorbant, ou bien  $I(o) \notin F_k$  et  $F_k$  n'est jamais atteinte, ou bien  $I(o) \in F_k$  et l'on est ramené à étudier les trajectoires dans  $F_k$ .

Si l'on veut qu'à un  $x$  compris entre  $\nu(I(o))$  et  $\nu(I(o)) + 1$  l'équation (8.1) associe au plus une trajectoire issue de  $I_o$ , on doit satisfaire

$$(8.3) \quad \sum_{i+1}^{\infty} \frac{p-1}{p'_k} < \frac{1}{p'_i} \quad \forall i \geq 0 \quad (p'_0 = 1).$$

Cette condition est satisfaite si l'on choisit la suite  $\frac{p'_i}{p^i}$  strictement décroissante, car

$$\sum_{i+1}^{\infty} \frac{p-1}{p'_k} < \sum_{i+1}^{\infty} \frac{(p-1)p^{i-k}}{p'_i} = \frac{1}{p'_i}.$$

De plus, les ensembles

$$C_r = \left\{ x : x = \nu(I(o)) + \sum_1^{r-1} \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\lambda}{p'_{r-1}}, \quad 0 \leq \lambda < 1 \right\}$$

forment une suite décroissante, car

$$\sum_1^r \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\lambda}{p'_r} = \sum_1^{r-1} \frac{k_i}{p'_i} + \frac{\mu}{p'_{r-1}}, \quad \text{avec } \mu = \frac{(k_r + \lambda)}{p'_r} p'_{r-1},$$

d'où

$$0 < \mu < p \frac{p'_{r-1}}{p'_r} < 1,$$

$C_{r+1}$  est la réunion de  $p^r$  ensembles disjoints de mesure  $\frac{1}{p^r}$  et la limite des  $C_r$ ,  $A \cap [\nu(I(o)), \nu(I(o)) + 1[$  a pour mesure  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p'_i}{p^i}$  qui peut être nulle ( $p'_i = p^i$ ,  $p' > p$ ) ou strictement positive ( $p'_i = a_i p^i$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_i$  strictement croissante bornée) et arbitrairement voisine de 1. Cependant,  $A$  ne contient aucun intervalle.

b. Il existe un élément de  $\mathcal{J}_{2^{n-1}}$  qui n'appartient pas à  $E_n$ . Dans ce cas, on peut le numérotier  $I^{p-1}$  et prendre  $p'_i = p^i$ , car à un  $x$  ayant deux développements correspond au plus une trajectoire dans  $E_n$ .

Quel que soit  $I(o)$ , il existe  $k$  tel que  $I(o) + k I^{p-1} \notin E_n$ , donc quel que soit  $I(o)$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , il existe

$$x = \nu(I(o)) + \sum_1^r \frac{k_i}{p^i}$$

tel que l'équation (8.2) ne soit pas satisfaite;  $A$  ne contient aucun intervalle.

Supposons qu'aucun des  $F_k$  ne soit absorbant. (Si  $F_k$  est absorbant on étudie séparément et par une méthode analogue les trajectoires qui y aboutissent.) Considérons la suite d'ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_{2^{n-1}}, \\ \Lambda_1 &= (I(o) + \mathcal{J}) \cap E_n, & B_1 &= (I(o) + \mathcal{J}) \cap \bigcup E_n, \\ \Lambda_r &= (\Lambda_{r-1} + \mathcal{J}) \cap E_n, & B_r &= (\Lambda_{r-1} + \mathcal{J}) \cap \bigcup E_n. \end{aligned}$$

L'ensemble  $A \cap [\nu(I(o)), \nu(I(o)) + 1]$  a pour mesure

$$1 - \sum_1^\infty \frac{n(B_r)}{p^r},$$

où  $n(B_r)$  désigne le nombre de trajectoires de longueur  $r$  qui aboutissent dans  $B_r$ .

De

$$n(\Lambda_r) + n(B_r) = n(\Lambda_{r-1} + \mathcal{J}) = pn(\Lambda_{r-1}),$$

on déduit

$$\sum_1^\infty \frac{n(B_r)}{p^r} = 1 - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\Lambda_r)}{p^r}.$$

L'étude de  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\Lambda_r)}{p^r}$  se ramène à l'étude d'une barrière absorbante pour une chaîne homogène dans l'espace à l'aide des deux propositions suivantes :

**PROPOSITION 8.1.** —  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\Lambda_r)}{p^r}$  est nulle ou positive indépendamment de  $I(o)$ .

En effet,

$$J(o) - I(o) \in E_n \Rightarrow n_{J_0}(\Lambda_r) \geq n_{I_0}(\Lambda_r) \quad \text{quel que soit } r,$$

donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{I_0}(\Lambda_r)}{p^r} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{I_0}(\Lambda_r)}{p^r};$$

d'autre part,

$$\frac{n_{I_0}(\Lambda_r)}{p^r} = \sum_{I \in \Lambda_q} \frac{n_I(\Lambda_{r-q})}{p^{r-q}} \frac{n_{I_0}(\{I\})}{p^q}$$

et en faisant tendre  $r \rightarrow \infty$ ,  $q$  restant fixé,

$$\frac{n_{I_0}(\Lambda_r)}{p^r} \rightarrow 0 \quad \text{entraîne} \quad \frac{n_I(\Lambda_{r-q})}{p^{r-q}} \rightarrow 0$$

pour tout  $I$  tel que

$$n_{I_0}(\{I\}) > 0,$$

donc en vertu de ce qui précède pour tout  $I \in E_n$ , si  $\mathcal{J} \cap E_n$  n'est pas vide.

On est donc ramené à étudier une chaîne dont les probabilités de passage  $\Pi_I^J$  sont données par

$$\Pi_I^J = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{si } J - I \in \mathcal{J} \text{ et } J \in E_n, \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

une telle chaîne est donc homogène dans l'espace. De plus, si toutes les coordonnées de  $I$  sont assez grandes,  $J - I \in \mathcal{J} \Rightarrow J \in E_n$  et la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée  $I_i$  de  $I$  évolue ainsi suivant une chaîne homogène dans l'espace, ce qui démontre la proposition 8.2 :

PROPOSITION 8.2. —  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(\Lambda_r)}{p^r} > 0$  si et seulement s'il existe une probabilité strictement positive de survie pour les  $n$  chaînes attachées aux projections de  $I$ .

Nous sommes donc amenés à étudier une chaîne homogène de dimension 1 et, d'après la proposition 1, on peut prendre 0 comme état initial. Une telle chaîne est définie par la donnée des deux polynômes

$$\Phi_1(u) = \sum_{j \geq 0} \Pi_j u^j \quad \text{et} \quad \Psi_1(u) = \sum_{j \leq -1} \Pi_j u^j,$$

avec

$$\sum_j \Pi_j = 1 \quad \text{et} \quad \Pi_j > 0 \quad \text{pour un } j \neq 0$$

(sinon la chaîne est triviale).

Les probabilités de passage  $\Pi_i^j$  sont données par ( $i \geq 0$ ) :

$$\Pi_i^j = \begin{cases} \Pi_{j-i} & \text{si } j \geq 0, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Utilisant une idée analogue à celle des images en électrostatique, (cf. [5]), nous considérons simultanément le processus adjoint dont les probabilités de passage  $\Pi_i^{*j}$  sont données par ( $i \leq 0$ ) :

$$\Pi_i^{*j} = \begin{cases} \Pi_{j-i} & \text{si } j < 0, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Si l'état initial est 0, les fonctions génératrices de l'état à l'instant  $n$  des deux processus sont définies respectivement par les relations de récurrence

$$\begin{aligned} \Phi_n(u) &= [\Phi_1(u) + \psi_1(u)] \Phi_{n-1}(u) ]^+, \\ \psi_n(u) &= [(\Phi_1(u) + \psi_1(u)) \psi_{n+1}(u)]^-, \end{aligned}$$

où nous notons  $[ ]^+$ ,  $[ ]^-$  les opérations

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{-k}^n a_i x^i \right]^+ &= \sum_0^n a_i x^i, \\ \left[ \sum_{-k}^n a_i x^i \right]^- &= \sum_{-k}^{-1} a_i x^i \end{aligned}$$

qui associent à un polynôme généralisé, la somme des monômes de degré positif (respectivement strictement négatif).

PROPOSITION 8.3 :

$$(FG^-)^+ = (F+G^-)^+, \quad (FG^+)^- = (F-G^+)^-$$

quels que soient les polynômes généralisés  $F$  et  $G$ .

En effet,

$$\begin{aligned} (FG^-)^+ &= (F+G^-)^+ + (F-G^-)^+ = (F+G^-)^+, \\ (FG^+)^- &= (F-G^+)^- + (F+G^+)^- = (F-G^+)^-, \end{aligned}$$

car

$$(F-G^-)^+ = (F+G^+)^- = 0.$$

PROPOSITION 8.4 :

$$(\Phi_1(u) + \psi_1(u))^n = \Phi_n(u) + \psi_n(u) + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u) \psi_{n-i}(u).$$

Montrons cette proposition par récurrence sur  $n$  :



Soit

$$F(u) = \Phi_1(u) + \psi_1(u), \quad \Phi_0 = 1, \quad \psi_0 = 1$$

et

$$\begin{aligned} F^n &= \sum_0^n \Phi_i \psi_{n-i}, \\ F^{n+1} &= \sum_0^n [F \Phi_i \psi_{n-i}]^- + [F \Phi_i \psi_{n-i}]^+ \\ &= (F \psi_n)^- + \sum_1^n (F \Phi_i \psi_{n-i})^- + F(\Phi_{i-1} \psi_{n-i+1})^+ + (F \Phi_n)^+ \end{aligned}$$

et, d'après la proposition 8.3, et la définition de  $\Phi_i$  et de  $\psi_i$

$$\begin{aligned} (F \Phi_i \psi_{n-i})^- &= ((F \psi_{n-i})^- \Phi_i)^- = (\psi_{n-i+1} \Phi_i)^-, \\ (F \Phi_{i-1} \psi_{n-i+1})^+ &= ((F \Phi_{i-1})^+ \psi_{n-i+1})^+ = (\Phi_i \psi_{n-i+1})^+, \end{aligned}$$

d'où

$$F^{n+1} = \psi_{n+1} + \sum_1^n \Phi_i \psi_{n-i+1} + \Phi_{n+1}.$$

**PROPOSITION 8.5.** — *Les trois seuls cas possibles sont :*

a.  $\Phi_n(1) \rightarrow L > 0, \quad \sum_1^\infty \psi_n(1) = \frac{1-L}{L};$

b.  $\psi_n(1) \rightarrow L > 0, \quad \sum_1^\infty \Phi_n(1) = \frac{1-L}{L};$

c.  $\Phi_n(1)$  et  $\psi_n(1)$  tendent vers zéro, mais  $\sum \Phi_n(1)$  et  $\sum \psi_n(1)$  divergent.

En effet, de

$$\begin{aligned} \Phi_n(u) &\leq F(u) \Phi_{n-1}(u), \\ \psi_n(u) &\leq F(u) \psi_{n-1}(u) \end{aligned}$$

et

$$F(1) = 1;$$

il résulte que  $\{\psi_n(1)\}$  et  $\{\Phi_n(1)\}$  sont deux suites décroissantes positives. Soient  $L$  et  $M$  leurs limites  $\geq 0$ ; on a, d'après la proposition 8.4,

$$1 \geq L + M + (n-1)LM, \quad \text{donc } LM = 0.$$

Soit  $M = 0$  et  $L \neq 0$

$$1 \geq L + L \sum_1^{n-1} \psi_i(1),$$

donc  $\sum_1^{\infty} \psi_i(1)$  existe et

$$\sum_1^{\infty} \psi_i(1) = \frac{1-L}{L};$$

de même, si  $L = 0$ ,  $M \neq 0$ .

Si  $L = M = 0$  et si  $\sum \Phi_i(1)$  ou  $\sum \psi_i(1)$  convergeaient, alors

$$\Phi_n(1) + \psi_n(1) + \sum_1^{n-1} \Phi_i(1) \psi_{n-i}(1) \rightarrow 0,$$

ce qui est en contradiction avec la proposition 8.2.

THÉORÈME 8.1. — *On est dans le cas a si*

$$F'(1) = E(j - i) > 0,$$

*dans le cas b si*

$$F'(1) < 0,$$

*et dans le cas c si*

$$F'(1) = 0.$$

En effet, si  $F'(1) > 0$ , il existe  $u < 1$  tel que  $F(u) < 1$ , donc  $\psi_n(u) \leq (F(u))^n$  est le terme général d'une série convergente et *a fortiori*

$$\psi_n(1) < \psi_n(u).$$

Si  $F'(1) < 0$ , il existe  $u > 1$  tel que  $F(u) < 1$  et

$$\Phi_n(1) < \Phi_n(u) \leq F(u)^n$$

est le terme général d'une série convergente.

Si  $F'(1) = 0$ , nous avons supposé qu'il existe toujours  $\Pi_j > 0$ , avec  $j \neq 0$ , donc  $F''(u) > 0$  et  $F$  passe par un minimum strict  $A$  pour  $u = 1$ .

Posons

$$G_n(u) = \frac{\Phi_n(u)}{(F(u))^n}, \quad H_n(u) = \frac{\psi_n(u)}{(F(u))^n}.$$

On déduit de la proposition 8.4

$$G_n(u) + H_n(u) + \sum_1^{n-1} H_i(u) G_{n-i}(u) = 1.$$

Par ailleurs,

$$G_n(u) = \frac{[\Phi_{n-1}(u) F(u)]^+}{(F(u))^n} \leq \frac{\Phi_{n-1}(u) F(u)}{(F(u))^n} = G_{n-1}(u)$$

quel que soit  $u > 0$ .

De même,

$$H_n(u) \leq H_{n-1}(u).$$

Pour  $u < 1$ ,

$$G_n(u) < \frac{\Phi_n(1)}{(F(u))^n} < \frac{1}{(F(u))^n}$$

est le terme général d'une série convergente et  $H_n(u)$  tend vers une limite  $L(u) > 0$ ; pour  $u > 1$ ,  $\sum H_n(u)$  converge et  $G_n(u)$  tend vers  $l(u) > 0$

$$G'_n(u) = \frac{\Phi'_n(u)}{(F(u))^n} - \frac{n F'(u) \Phi_n(u)}{(F(u))^{n+1}} \geq 0 \quad \text{pour } u \leq 1.$$

Or

$$\Phi'_n(u) = (F \Phi_{n-1})' - ((F \Phi_{n-1})^-)'$$

et si

$$\begin{aligned} (F \Phi_{n-1})^- &= \sum_1^k a_i u^{-i}, \\ -((F \Phi_{n-1})^-)' &= \sum_1^k i a_i u^{-i+1} \leq \frac{k}{u} (F \Phi_{n-1})^-, \end{aligned}$$

où  $k$  est le degré de  $\psi_1$ . D'où

$$\Phi'_n(u) \leq F'(u) \Phi_{n-1}(u) + F(u) \Phi'_{n-1}(u) + \frac{k}{u} (F \Phi_{n-1} - \Phi_n)$$

et

$$G'_n(u) \leq G'_{n-1}(u) + \left( \frac{k}{u} + \frac{n F'}{F} \right) (G_{n-1} - G_n)$$

et pour  $u \leq 1$ ,

$$F'(u) \leq 0, \quad G_{n-1} - G_n > 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} G'_n(u) &\leq G'_1(u) + \frac{k}{u} (G_1(u) - G_n(u)) \\ &\leq G'_1(u) + \frac{k}{u} G_1(u). \end{aligned}$$

Le second membre est borné sur un intervalle  $[u_0, 1]$  et

$$G_n(1) \leq G_n(u_0) + K(1 - u_0)$$

peut être rendu arbitrairement petit; donc

$$G_n(1) = \Phi_n(1) \rightarrow 0$$

quand  $n$  augmente indéfiniment.

On obtient le même résultat pour  $H_n$ . Toutefois, le calcul est légèrement différent, car  $(F\psi_{n-1})^+$  contient un terme de degré 0 et l'on utilise la majoration

$$(u(F\psi_{n-1})^+)' \leq k_1(F\psi_{n-1})^+.$$

Le théorème résulte alors de la proposition 8.5.

**9. Ensembles de séjour et mesure définie sur  $R^+$  par la chaîne.** —  
Considérons la mesure définie sur  $R^+$  par

$$(9.1) \quad P\left\{v(I_0) \leq y < v(I_0) + 1\right\} = \Pi(I_0),$$

probabilité que l'état initial soit  $I_0$ , que nous supposons positive ( $> 0$ ) quel que soit  $I_0 \in E_n$ ,

$$(9.2) \quad P\left\{v(I_0) + \frac{k_1}{p_1} \leq y < v(I_0) + \frac{k_1 + 1}{p_1}\right\} = \Pi(I_0) \Pi_{I_0}^1,$$

où

$$(9.3) \quad \left. \begin{aligned} I_1 - I_0 &= I^{k_1}, \\ v(I_0) + \sum_1^r \frac{k_i}{p_i} \leq y < v(I_0) + \sum_1^r \frac{k_i}{p_i} + \frac{1}{p_r} \end{aligned} \right\} = \Pi(I_0) \Pi_{I_0}^1 \dots \Pi_{I_0}^r.$$

Les  $\Pi(I_0)$  et  $\Pi_{I_0}^i$  sont entièrement déterminés par (9.1) et (9.2) si  $\Pi(I_0) > 0$ ,  $\forall I_0$  et (9.3) peut s'interpréter comme une condition de compatibilité pour  $P$ .

La mesure  $P$  a pour support la fermeture  $\bar{A}$  de  $A$ , car quel que soit  $x \in A$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe un intervalle de longueur  $\varepsilon$  contenant  $x$  et de mesure strictement positive.

Associons à un sous-ensemble  $S$  de  $E_n$  le sous-ensemble  $\Sigma_r$  de  $R^+$  composé des trajectoires dont les  $r$  premiers éléments appartiennent à  $S$  et soit  $\Sigma = \bigcap \Sigma_r$ , et inversement associons à  $\Sigma \subset A$  l'ensemble  $S$  de tous les  $I \in E_n$  qui figurent dans les trajectoires de  $\Sigma$ .

PROPOSITION 9.1. —  $S$  est de séjour si et seulement si  $P(\Sigma) > 0$ .

En effet,

$$P(\Sigma_r) = \sum_{I \in S} \Pi(I) \Pi_{SI}^r$$

si  $S$  est de séjour, il existe  $I \in S$  tel que

$$\Pi_{S|I}^r \geq \eta > 0 \quad \text{quel que soit } r,$$

donc

$$P(\Sigma_r) \geq \Pi(I) \eta \quad \text{quel que soit } r;$$

or les  $\Sigma_r$  forment une suite décroissante, donc

$$P(\Sigma) > 0.$$

Réciproquement, soit  $K$  un sous-ensemble fini de  $E_n$  tel que

$$\sum_{I \in K} \Pi(I) < \frac{P(\Sigma)}{2};$$

on en déduit

$$(9.4) \quad \sum_{I \in K \cap S} \Pi_{S|I}^r \Pi(I) > \frac{P(\Sigma)}{2},$$

donc il existe  $I \in K \cap S$  tel que

$$\Pi_{S|I}^r > \frac{P(\Sigma)}{2} \quad \text{quel que soit } r,$$

sinon, quel que soit  $I \in K \cap S$ , il existerait  $r(I)$  tel que

$$\Pi_{S|I}^{r(I)} \leq \frac{P(\Sigma)}{2},$$

donc tel que

$$\Pi_{S|I}^r \leq \frac{P(\Sigma)}{2} \quad \text{pour } r \geq r(I)$$

et comme  $K \cap S$  est fini, pour  $r \geq \sup_{I \in K \cap S} r(I)$ , on aurait

$$\Pi_{S|I}^r \leq \frac{P(\Sigma)}{2}$$

qui contredit (9.4).  $S$  est donc de séjour.

#### BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I.

- [1] FORTET (R.), *Les processus stochastiques en cascade* (Trabajos de Estadísticas, t. 4, 1953, p. 11-34).  
 [2] HENNEQUIN (P. -L.), *Trajectoires définies par un semi-groupe d'applications d'un ensemble dans lui-même* (C. R. Acad. Sc., t. 248, 1959, p. 3108-3110).

- [3] KENDALL (D. J.), *Les processus de croissance en biologie* (Ann. Inst. H. Poincaré, t. 13, n° 1, 1952, p. 43-108).
- [4] NEYMAN (J.), PARK (T.) et SCOTT (E. L.), *Struggle for existence, the tribolium model : biological and statistical aspects* (Third Berkeley symposium, University of California, vol. IV, 1956, p. 41-79).
- [5] TORTRAT (A.), *Étude d'une méthode d'itération propre à certaines matrices. Application aux processus de Markoff correspondants, cas des processus continus homogènes par rapport à l'espace, cas non homogène* (Publ. Scient. Univ. d'Alger, t. 2, décembre 1957, p. 145-189).

## CHAPITRE II.

### CHAÎNES DE MARKOFF EN CASCADE HOMOGENES SUR UN GROUPE COMMUTATIF.

1. **Définition.** — Nous dirons qu'une chaîne de Markoff est en cascade et homogène sur un semi-groupe  $F$  si l'espace des états est muni d'une structure de semi-groupe commutatif dont l'opération sera notée additivement et si la probabilité de passage  $\Pi_1^{I+K}$  de l'état  $I$  à l'état  $I + K$  est :

a. indépendante de  $I$  :  $\Pi_1^{I+K} = A_K$  quel que soit  $K \in F$ ;

b. nulle, sauf pour un nombre fini  $k$  si  $A_0 = 0$ ,  $k + 1$  si  $A_0 \neq 0$ , de valeurs de  $K$ .

$G$  étant le plus petit groupe contenant  $F$ , il est toujours possible d'associer à une chaîne en cascade homogène définie sur  $F$  la chaîne en cascade homogène définie sur  $G$  par

$$\Pi_1^{I+K} = A_K \quad \text{quel que soit } I \in G.$$

2. **Caractérisation et construction.** — Considérons une chaîne de Markoff dont les états sont repérés par un entier positif. Elle pourra être considérée comme chaîne en cascade homogène sur un semi-groupe  $F$  s'il est possible de définir un semi-groupe  $F$  et une bijection  $\Phi$  de l'ensemble des entiers positifs  $E$  sur  $F$  tel que les conditions de la définition 1 soient satisfaites.

On en déduit les conditions nécessaires suivantes :

*Condition 1.* — Quel que soit  $i \in E$ ,  $\Pi_i^j = 0$ , sauf pour un nombre fini  $k$  (resp.  $k + 1$ ) de valeurs de  $j$

$$[\text{resp. } j_0 = f_0(i) = i], \quad j_1 = f_1(i), \quad \dots, \quad j_k = f_k(i)$$

distincts tels que  $\Pi_i^{f_r(i)} = p_r$  indépendant de  $i$  ( $p_r > 0$ ,  $\sum p_r = 1$ ).

Soit  $\Phi$  la bijection de  $E$  sur  $F$ ,  $a$  et la condition 1 impliquent :

$$(2.1) \quad \Phi(f_r(i)) - \Phi(i) = \Phi(f_r(j)) - \Phi(j); \quad \forall i, j \in E \text{ et } r$$

ou

$$(2.2) \quad \Phi(f_r(i)) - \Phi(f_r(j)) = \Phi(i) - \Phi(j),$$

donc  $f_r(i) = f_r(j)$  entraîne  $i = j$  ou encore :

*Condition 2.* — Les  $f_r$  sont injectifs.

D'autre part, en faisant  $i = f_q(j)$  dans (2.1),

$$(2.3) \quad \Phi(f_p \circ f_q(j)) = \Phi(f_q(j)) + \Phi(f_p(j)) - \Phi(j),$$

donc, puisque  $F$  est commutatif :

*Condition 3 :*

$$(2.4) \quad f_p \circ f_q = f_q \circ f_p \quad \text{quels que soient } p \text{ et } q.$$

S'il existe  $i \in E$  et  $n_1, n_2, \dots, n_k; n'_1, n'_2, \dots, n'_k$  entiers  $\geq 0$  tels que

$$(2.5) \quad f_1^{n_1} \circ f_2^{n_2} \circ \dots \circ f_k^{n_k}(i) = f_1^{n'_1} \circ f_2^{n'_2} \circ \dots \circ f_k^{n'_k}(i),$$

on a, en vertu de (2.3) et (2.1),

$$\begin{aligned} & \Phi(f_1^{n_1} \circ \dots \circ f_k^{n_k}(i)) - \Phi(i) \\ &= \sum_1^k n_j (\Phi(f_j(i)) - \Phi(i)) = \sum_1^k n_j (\Phi(f_j(i')) - \Phi(i')) \\ &= \sum_1^k n'_j (\Phi(f_j(i)) - \Phi(i)) = \sum_1^k n'_j (\Phi(f_j(i')) - \Phi(i')) \end{aligned}$$

quel que soit  $i' \in E$ . Par conséquent :

*Condition 4.* — S'il existe  $i \in E$  tel que

$$f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k}(i) = f_1^{n'_1} \dots f_k^{n'_k}(i),$$

cette relation est vraie quel que soit  $i \in E$ .





Soient  $\nu_p^q$  les éléments de  $\nu^{-1}$  et

$$(2.10) \quad I_p - I_0 = \sum_{q=1}^k \nu_p^q (I_q - I_0);$$

(2.9) est équivalent au système

$$(2.11) \quad d_r (I_r - I_0) = 0 \quad (1 \leq r \leq l).$$

Soit  $t$  le nombre des  $i$  tels que  $d_i = 1$

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 = \dots = d_t = 1, \\ I_r = I_0 \quad \text{si } r \leq t. \end{aligned}$$

$G_0$  est engendré par les éléments  $(I_r - I_0)$  pour  $t + 1 \leq r \leq m$  et est isomorphe au produit de  $l - t$  groupes cycliques d'ordre  $d_{t+1}, \dots, d_l$  et de  $m - l$  groupes cycliques infinis.

Soit  $E_0, E_1, E_2, \dots$  la partition de  $E$  définie par la relation d'équivalence  $i \sim j$  si  $i$  est lié à  $j$ . On peut plonger chaque  $E_j$  dans un groupe  $G_j$  qui a la même structure que  $G_0$  en vertu de la condition 4.

On peut donc plonger  $E$  dans le produit de  $G_0$  par un groupe cyclique fini ou infini. En fait, quand on connaît l'état initial, l'évolution de la chaîne se fait à l'intérieur du groupe  $G_i$  qui le contient et l'on peut se limiter à l'étude d'une chaîne sur un tel groupe.

$G$  désignera donc dans les paragraphes suivants la somme directe de  $l$  groupes dont les  $r$  premiers sont isomorphes au groupe des entiers et le  $(r + i)$ ème au groupe des entiers modulo  $d_i$  où  $d_i$  divise  $d_{i+1}$ . L'élément neutre de  $G$  sera noté  $o$ .

**3. La frontière de Feller.** — Nous allons rappeler brièvement la construction de la frontière introduite par Feller [5].

Une chaîne sur un ensemble dénombrable  $E$  étant définie par sa matrice des probabilités de passage  $\Pi$  nous dirons qu'un sous-ensemble  $A$  de  $E$  est de séjour s'il existe une probabilité positive d'y rester indéfiniment. Soit  $s_A(I)$  cette probabilité quand l'état initial est  $I$ ;  $A$  est équivalent à  $E$  si  $s_A(I) = 1$  quel que soit  $I \in E$ .

Soit  $M$  l'ensemble des solutions positives, bornées ou non, de  $\Pi Z = Z$ .  $M$  est muni de la relation d'ordre :  $Z \leq Z'$  si et seulement si  $Z_i \leq Z'_i$  quel que soit  $I \in E$ . Nous appellerons avec Neveu [11] bande positive de  $M$  un sous-ensemble  $B$  de  $M$  tel que :

- a.  $Z \in B \Rightarrow tZ \in B$  quel que soit  $t \geq 0$ ;
- b.  $Z \in B, Z' \in M, Z' \leq Z \Rightarrow Z' \in B$ ;

c. tout sous-ensemble de B majoré dans M admet une borne supérieure dans B.

Nous dirons qu'une telle bande B est maximale par rapport à  $Z \in M$  si Z n'appartient pas à B, mais appartient à toute bande B' contenant strictement B. Soit  $\mathcal{B}^*$  l'ensemble de toutes les bandes maximales par rapport à un  $Z \in M$  quand Z parcourt M.

Étant donné  $Z \in M$ ,  $Z_1 > 0$ , pour tout  $I \in E$ , on peut lui associer une nouvelle matrice de probabilité  $\Pi'$  définie par

$$\Pi'_1 = \Pi_1 \frac{Z_1}{Z_1};$$

un sous-ensemble A sera appelé *support* de Z si A est équivalent à E pour la chaîne définie par  $\Pi'$ . Nous pouvons alors adjoindre aux éléments de E les éléments de  $\mathcal{B}^*$  et munir l'ensemble  $E + \mathcal{B}^*$  ainsi obtenu d'une topologie.

DÉFINITION 3.1. —  $\Omega \subset E + \mathcal{B}^*$  est ouvert si à tout point  $\omega \in \Omega \cap \mathcal{B}^*$  on peut associer  $Z \in M$  tel que :

- a.  $\omega$  est une bande maximale par rapport à Z;
- b.  $\Omega \cap E$  est un support de Z;
- c.  $\Omega \cap \mathcal{B}^*$  contient toute  $B \in \mathcal{B}^*$  maximale par rapport à  $Y \leq Z$ .

On montre que l'espace topologique ainsi défini est séparé.

Nous allons déterminer la frontière de Feller pour un processus en cascade homogène sur un groupe G. L'équation  $\Pi Z = Z$  prend la forme

$$\sum_{K \in \mathcal{J}} A_K Z_{I+K} = Z_I \quad (I \in G),$$

où  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble fini de G. Soit  $n\mathcal{J}$  l'ensemble des éléments

de la forme  $\sum_1^n I_k$ , où  $I_k \in \mathcal{J}$ ,  $0\mathcal{J} = \{0\}$  et soit

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} n\mathcal{J}.$$

F est l'ensemble des états qu'on peut atteindre à partir de 0. Nous sommes amenés à distinguer deux cas :  $F = G$  et  $F \neq G$ .

4. **Étude de M quand  $F = G$ .** —  $Z_I = 0$  entraîne  $Z_{I+K} = 0$  pour  $K \in \mathcal{J}$ , donc pour  $K \in G$  et tout élément de M est de la forme  $\lambda Z$ , où  $\lambda > 0$  et Z

appartient au sous-ensemble  $C_0$  de  $M$  défini par  $Z_0 = 1$ .  $C_0$  est compact pour la topologie faible; en effet, si  $J \in n\mathcal{J}$ ,

$$(4.1) \quad 0 < Z_J \leq \frac{1}{(\inf_{\mathcal{J}} A_J)^n}$$

et  $C_0$  est fermé puisque  $\mathcal{J}$  est fini.  $C_0$  est convexe; soit  $Z^*$  un de ses éléments extrémaux, c'est dire que

$$Z^* = \lambda Z^1 + \mu Z^2,$$

avec

$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1, \quad Z^1 \in C_0, \quad Z^2 \in C_0$$

entraîne

$$Z^1 = Z^2 = Z^*.$$

Soit pour  $J_0 \in \mathcal{J}$ ,  $X^{J_0}$  l'élément de  $(\mathbb{R}^+)^G$  défini par

$$(4.2) \quad X^{J_0} = \frac{Z_{J_0}^*}{Z_{J_0}^*},$$

$X^{J_0}$  appartient à  $C_0$ ; en effet,

$$(4.3) \quad \sum_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}} X_{\mathcal{I}+\mathcal{K}}^{J_0} = \frac{\sum_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}} Z_{\mathcal{I}+\mathcal{K}+J_0}^*}{Z_{J_0}^*} = \frac{Z_{\mathcal{I}+J_0}^*}{Z_{J_0}^*} = X_{\mathcal{I}}^{J_0}$$

et

$$X_0^{J_0} = 1.$$

Par ailleurs,

$$Z^* = \sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{J}} A_{\mathcal{J}} Z_{\mathcal{J}}^* X^{\mathcal{J}}, \quad \text{où } A_{\mathcal{J}} Z_{\mathcal{J}}^* \geq 0$$

et

$$\sum_{\mathcal{J} \in \mathcal{J}} A_{\mathcal{J}} Z_{\mathcal{J}}^* = 1,$$

donc puisque  $Z^*$  est extrémal,  $X^{\mathcal{J}} = Z^*$  quel que soit  $\mathcal{J} \in \mathcal{J}$ . D'où

$$(4.4) \quad Z_{\mathcal{I}+\mathcal{J}}^* = Z_{\mathcal{I}}^* Z_{\mathcal{J}}^* \quad \text{pour } \mathcal{J} \in \mathcal{J}, \mathcal{I} \in G$$

et, par récurrence sur  $n$  pour  $\mathcal{J} \in n\mathcal{J}$ , donc pour  $\mathcal{J} \in G$ ,  $\mathcal{I} \in G$ . Soit  $C_0^*$  le sous-ensemble de  $C_0$  défini par (4.4), c'est-à-dire que

$$(4.4 \text{ bis}) \quad Z_{\mathcal{I}+\mathcal{J}}^* = Z_{\mathcal{I}}^* Z_{\mathcal{J}}^*, \quad Z_{\mathcal{I}}^* \geq 0,$$

$$(4.5) \quad Z_0^* = 1,$$

$$(4.6) \quad \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{J}} A_{\mathcal{K}} Z_{\mathcal{I}+\mathcal{K}}^* = Z_{\mathcal{I}}^*$$

ou, compte tenu de (4.3),

$$(4.7) \quad \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{J}} \Lambda_{\mathbf{K}} Z_{\mathbf{K}}^* = 1;$$

$C_0^*$  est fermé.

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_l$  la base de  $G$ . Posons

$$(4.8) \quad \text{Log } Z_{E_k}^* = u_k,$$

alors, en appelant  $I^k$  la  $k^{\text{ème}}$  composante de  $I$ ,

$$I = \sum_1^k I^k E_k$$

et, en posant

$$\sum_1^l I^k u_k = I \cdot U,$$

(4.4) et (4.5) sont équivalentes à

$$(4.9) \quad Z_{\mathbf{I}}^* = \prod_1^k (Z_{E_k}^*)^{I^k} = e^{I \cdot U}$$

et (4.6) est équivalente à

$$(4.10) \quad \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{J}} \Lambda_{\mathbf{K}} e^{\mathbf{K} \cdot U} = 1.$$

Remarquons que  $u_i = 0$  pour  $i > r$ ; en effet, (4.4) et (4.5) impliquent

$$1 = Z_0^* = Z_{d_i E_{r+i}}^* = (Z_{E_{r+i}}^*)^{d_i},$$

d'où, puisque

$$Z_{E_{r+i}}^* \geq 0, \quad d_i > 1, \quad Z_{E_{r+i}}^* = 1 \quad \text{et} \quad u_{r+i} = 0.$$

**PROPOSITION 4.1.** — (4.8) établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre  $C_0^*$  et la variété  $V$  de  $\mathbb{R}^k$  définie par

$$(4.11) \quad \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{J}} \Lambda_{\mathbf{K}} e^{\bar{\mathbf{K}} \cdot U} = 1,$$

où  $\bar{\mathbf{K}}$  désigne la projection de  $\mathbf{K}$  sur  $\mathbb{R}^r$

$$\bar{\mathbf{K}} = (K^1, K^2, \dots, K^r).$$

La continuité de l'application  $U \rightarrow Z$  résulte de la continuité de l'exponentielle. Celle de l'application  $Z \rightarrow U$  de la continuité du logarithme, car  $Z_j$  est borné par (4.1), donc

$$Z_{-j}^* = \frac{1}{Z_j^*}$$

est borné inférieurement par un nombre strictement positif, donc les  $Z_j^*$  appartiennent à un intervalle compact de continuité du logarithme.

PROPOSITION 4.2. — *Le sous-ensemble D de  $\mathbb{R}^r$  défini par*

$$(4.12) \quad \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}} \leq 1 \quad \text{est convexe.}$$

En effet, soit  $0 \leq \lambda \leq 1$ ; la convexité de la fonction exponentielle implique

$$e^{\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2} \leq \lambda e^{u_1} + (1-\lambda) e^{u_2}; \quad \forall u_1, u_2 \text{ réels.}$$

Soit alors

$$U_1, U_2 \in D, \quad \lambda U_1 + (1-\lambda) U_2 \in D$$

car

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot (\lambda U_1 + (1-\lambda) U_2)} \leq \lambda \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot U_1} + (1-\lambda) \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot U_2} \leq 1.$$

PROPOSITION 4.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que  $C_0^*$  soit réduit à un seul point est que*

$$(4.13) \quad \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} \bar{\mathbf{K}} A_{\mathbf{k}} = 0.$$

En effet, soit

$$(4.14) \quad \Phi(U) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}},$$

$$(4.15) \quad \text{grad } \Phi(U) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} \bar{\mathbf{K}} A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}},$$

$V$  contient le point  $U = 0$ ; si elle ne contient que ce point,  $\text{grad } \Phi(U) = 0$  et la condition est nécessaire.

Elle est suffisante, car

$$(4.16) \quad \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \lambda_i \lambda_j = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} \sum_{i,j} \bar{K}^i \bar{K}^j A_{\mathbf{k}} e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}} \lambda_i \lambda_j = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{J}} A_{\mathbf{k}} \left( \sum_i \bar{K}^i \lambda_i \right)^2 e^{\bar{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}}$$

est une forme quadratique positive non dégénérée, car  $\mathcal{J}$  engendre  $G$ , donc quand  $K$  parcourt  $\mathcal{J}$ , l'ensemble des  $\bar{K}$  engendre  $R^r$  et

$$\sum_i \bar{K}^i \lambda_i = 0 \quad \text{quel que soit } K \in \mathcal{J} \Rightarrow \lambda_i = 0.$$

Il en résulte que  $\text{grad } \Phi(U) = 0$  implique que  $U = 0$  est un minimum strict pour  $\Phi$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Phi(U) > 1$  pour  $|U| < \varepsilon$ ,  $U \neq 0$ , donc pour tout  $U \neq 0$ , puisque  $D$  est convexe.

La condition (4.13) admet une interprétation très simple; elle exprime que la restriction de la chaîne à  $\mathcal{H}^r$  est une martingale.

PROPOSITION 4.4. — Si  $\sum \bar{K} A_K \neq 0$ ,

$$(4.17) \quad U \rightarrow \frac{\text{grad } \Phi(U)}{|\text{grad } \Phi(U)|}$$

établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre  $V$  et la sphère  $S$  de centre  $O$  de rayon 1 de  $R^r$ .

La démonstration de la proposition 4.3 montre que si  $V$  contient plus d'un point,  $\text{grad } \Phi(U) \neq 0$  en tout point de  $V$ , donc à  $U \in V$  correspond un point bien déterminé de  $S$ . Réciproquement, soit  $M$  un point quelconque de  $S$ . Projetons orthogonalement  $D$  sur la droite  $OM$ . Puisque  $D$  est convexe et compact (prop. 4.1 et 4.2), sa projection est un segment fermé  $AB$ . Soit  $U_1 \in V$ ,  $U_2 \in V$  de projection  $A$  et  $B$ ; en  $U_1$  et  $U_2$ ,  $\text{grad } \Phi$  est parallèle à  $OM$ . Sur le segment  $U_1 U_2$ ,  $\Phi \leq 1$ , donc  $\text{grad } \Phi(U_1)$  et  $\text{grad } \Phi(U_2)$  ont des directions opposées; soit  $U$  un point de  $V$  où  $\text{grad } \Phi(U)$  a la direction et le sens de  $OM$ .  $U$  est unique, car sinon en  $U$  et  $U'$ ,  $V$  aurait même plan tangent, donc aussi tout le long de  $UU'$  contrairement au fait que (4.16) est non dégénérée. La bicontinuité résulte de la continuité de  $\text{grad } \Phi(U)$  et de la compacité de  $V$ .

Revenons à l'ensemble  $M$ .  $R^{*G}$  muni de la topologie faible est localement convexe séparé. Par ailleurs,  $C_0^*$  contient les éléments extrémaux de  $C_0$ ,  $C_0^*$  est fermé et  $C_0$  compact; on déduit donc du théorème de Krein et Milman [2] la

PROPOSITION 4.5. — Quel que soit  $Z \in C_0$ , il existe une mesure  $\mu$  positive de masse totale 1 sur  $C_0^*$  telle que

$$(4.18) \quad Z = \int_{C_0^*} Z^* d\mu.$$

Notons  $1$  l'élément de  $R^G$  dont toutes les coordonnées sont égales à 1;  $1$  appartient à  $C_0^*$ .

PROPOSITION 4.6. — 1 est le seul élément borné de  $C_0$ .

En effet, pour que  $e^{I \cdot U} \leq M$  quel que soit  $I \in G$ , il est nécessaire et suffisant que  $U = 0$ , 1 est donc le seul élément borné de  $C_0^*$ . Soit  $Z$  un élément borné de  $C_0$ , on a

$$Z = \int_{C_0^*} Z^* d\mu,$$

donc tous les éléments du support de  $\mu$  doivent être bornés; le support de  $\mu$  est réduit à  $\{1\}$  et  $Z = 1$ .

COROLLAIRE. — Les ensembles de séjour forment un filtre sur  $G$ .

En effet, soit  $s_A(I)$  la probabilité partant de l'état  $I$  d'atteindre  $A$  et d'y rester indéfiniment.  $A$  est de séjour si  $s_A(I) > 0$ ,  $s_A \in C_0$  et, par conséquent,  $s_A(I) = 1$  quel que soit  $I$ . Il résulte alors d'un théorème de Feller que si  $A$  et  $B$  sont de séjour

$$s_{A \cap B} = \inf(s_A, s_B), \quad \text{donc } s_{A \cap B}(I) = 1 \text{ quel que soit } I$$

et  $A \cap B$  est de séjour. Par ailleurs,

$$A' \supset A \Rightarrow s_{A'}(I) \geq s_A(I),$$

donc  $A'$  est de séjour si  $A$  est de séjour. De plus,  $E$  est de séjour, donc il existe un ensemble de séjour.

Nous reviendrons à la détermination des ensembles de séjour au paragraphe 6.

PROPOSITION 4.7. — Si

$$Y \leq Z^*, \quad Y \in M, \quad Z^* \in C_0^*,$$

alors  $Y = k Z^*$ .

Soit

$$Y_I = k \int_{C_0^*} e^{I \cdot U} d\mu \quad (k > 0)$$

et

$$Z_I^* = e^{I \cdot U_0}.$$

Par hypothèse,

$$(4.19) \quad \int_{C_0^*} e^{I \cdot (U - U_0)} d\mu \leq \frac{1}{k},$$

soit

$$I_0 = \sum_K K A_K e^{K \cdot U_0}.$$

De  $e^t \geq e^{t_0} (1 + (t - t_0))$ , on déduit

$$I = \sum_K A_K e^{K \cdot U} \geq \sum_K A_K e^{K \cdot U_0} + \sum_K (U - U_0) \cdot K A_K e^{K \cdot U_0} \geq 1 + (U - U_0) \cdot I_0.$$

D'où

$$I_0 \cdot (U - U_0) \leq 0 \quad \forall U \in V;$$

en choisissant dans (4.18)  $I = \lambda I_0$  et en faisant tendre  $\lambda$  vers  $-\infty$ , on voit que le support de  $\mu$  est réduit à  $\{U_0\}$ , donc que  $Y = k Z^*$ .

COROLLAIRE 1. — Deux éléments distincts de  $C_0^*$  sont disjoints.

En effet, s'il existe  $Y \leq Z_1^*$ ,  $Y \leq Z_2^*$ ,  $Y \in M$ ,  $Z_1^*$ ,  $Z_2^* \in C_0^*$ ,

$$Y = k_1 Z_1^* = k_2 Z_2^*, \quad \text{d'où} \quad Z_1^* = Z_2^*.$$

COROLLAIRE 2. —  $C_0^*$  est l'ensemble des éléments extrémaux de  $C_0$ .

Nous savons que tout élément extrémal de  $C_0$  appartient à  $C_0^*$ . Réciproquement, soit  $Z^* \in C_0^*$

$$Z_0^* = \lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1;$$

$Z_1, Z_2 \in C_0$  entraîne

$$Z^* \geq \lambda Z_1,$$

donc, d'après la proposition 4.7,

$$Z^* = Z_1 = Z_2$$

et  $Z^*$  est extrémal.

PROPOSITION 4.8 :

$$(4.20) \quad Z = \int_{C_0^*} Z^* d\mu$$

et

$$(4.21) \quad Z_K = \int_V e^{K \cdot U} d\nu$$

établissent deux isomorphismes entre  $M$  et l'ensemble réticulé des mesures positives sur  $C_0^*$  (resp. sur  $V$ ).

Cette proposition se déduit d'un théorème de Choquet [3], qu'on peut appliquer puisque  $M$  est complètement réticulé.

Il en résulte qu'on peut considérer la frontière de Feller comme l'ensemble des bandes positives maximales construites sur l'ensemble des mesures positives sur le compact  $C_0^*$  (ou  $V$ ).



COROLLAIRE. — *Quel que soit  $Z_0^* \in C_0^*$ ; il n'existe qu'une bande  $B_{Z_0^*}$  maximale par rapport à  $Z_0^* : Y = \int_{C_0^*} Z^* d\mu$  appartient à  $B_{Z_0^*}$  si et seulement si  $\mu$  n'a pas son support réduit à  $Z_0^*$ .*

On peut donc considérer les points  $B_{Z_0^*}$  de la frontière comme des points isolés de la frontière munie de la topologie induite et identifier ces points avec les points de  $C_0^*$  ou de  $V$ . La détermination de leurs voisinages se ramène à la détermination des ensembles de séjour pour un autre processus homogène; on déduit, en effet, de la définition (3.1) la

PROPOSITION 4.9. — *Les ensembles de séjour sont les voisinages du point  $1 \in C_0^*$  ou du point  $0 \in V$  considérés comme points de la frontière. Les voisinages du point  $Z^* \in C_0^*$  (ou  $U \in V$  tel que  $Z_k^* = e^{\bar{k} \cdot U}$ ) sont les ensembles de séjour pour la chaîne définie par la matrice*

$$(4.22) \quad \Pi_1^{j'} = \Pi_1^j \frac{Z_j^*}{Z_1^*} = A_{j-1} Z_{j-1}^* = A_{j-1} e^{(\bar{j}-\bar{1}) \cdot U}.$$

La matrice  $\Pi'$  est associée comme  $\Pi$  à une chaîne en cascade homogène. Si  $\sum_K \bar{K} A_K \neq 0$ , c'est-à-dire si  $C_0^*$  a plus d'un point et si l'on pose

$$A'_K = A_K e^{\bar{K} \cdot U},$$

on peut remarquer que

$$\sum_K \bar{K} A'_K = \sum_K \bar{K} A_K e^{\bar{K} \cdot U} = \text{grad } \Phi(U).$$

Donc l'espérance mathématique du pas pour la chaîne définie par  $\Pi'$  a pour direction la normale à  $V$  au point  $U$  qui définit  $\Pi'$  et pour sens le sens de la normale extérieure à  $V$ . Il résulte de la proposition 4.4 que, quand  $U$  varie, on obtient toutes les directions possibles.

**5. Étude de la frontière quand  $F \neq G$ .** — Nous pouvons sans restriction supposer que  $G$  est le plus petit groupe qui contient  $F$ . Soit  $M$  l'ensemble des éléments  $Z$  de  $(\mathbb{R}^+)^G$  invariants par  $\Pi$ ,  $Z^+$  la restriction de  $Z$  à  $F$ ,  $M^+$  l'ensemble des  $Z^+$ . On a

$$(5.1) \quad \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K Z_{I+K} = Z_I \quad \text{quel que soit } I \in G,$$

$$(5.2) \quad \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K Z_{I+K}^+ = Z_I^+ \quad \text{quel que soit } I \in F.$$

Nous noterons  $Y$  un élément de  $(\mathbb{R}^+)^F$  qui satisfait (5.2).

Comme au paragraphe précédent, on démontre :

a. que  $Y_0 = 0, Y_I \geq 0 \Rightarrow Y_I = 0$  quel que soit  $I \in F$ ;

b. que si l'on note  $C'_0$  l'ensemble des solutions positives de (5.2) telles que  $Y_0 = 1$ , l'ensemble de ses éléments extrémaux  $C_0^*$  est formé des éléments tels que

$$(5.3) \quad Y_I^* Y_J^* = Y_{I+J}^*; \quad \forall I, J \in F,$$

que  $C_0^*$  est compact et que, par conséquent, quel que soit  $Y \in C_0^*$ , il existe une mesure  $\mu \geq 0$  de masse + 1 sur  $C_0^*$  telle que

$$(5.4) \quad Y = \int_{C_0^*} Y^* d\mu.$$

Tout élément de  $C_0$  n'est pas la restriction à  $F$  d'un élément de  $C_0$  comme le montrent les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 5.1. — Une solution positive de (5.1) non identiquement nulle est telle que  $Z_I \neq 0$  quel que soit  $I \in G$ .

$F$  est l'ensemble des éléments  $I = \sum_i \alpha_i J_i, \alpha_i$  entier  $\geq 0, J_i \in \mathcal{J}$ ;

soit  $I \in F$  tel que  $\alpha_i > 0$ , quel que soit  $i$ , et soit  $K \in G$ , alors  $nI - K \in F$  pour  $n$  entier assez grand,  $n'I - K \in -F$  pour  $n'$  entier assez petit; en effet, puisque  $\mathcal{J}$  engendre  $G, K = \sum_i \beta_i J_i, \beta_i$  entier et puisque  $\mathcal{J}$  est fini,

$$\begin{aligned} n\alpha_i - \beta_i &\geq 0 \text{ pour } n \geq \sup \beta_i/\alpha_i, \\ n'\alpha_i - \beta_i &\leq 0, \text{ pour } n' \leq \inf \beta_i/\alpha_i. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$Z_I > 0 \Rightarrow Z_{I-K} \geq A_K Z_I > 0; \quad \forall K \in \mathcal{J},$$

donc  $Z_{I-K} > 0$  quel que soit  $K \in F$ .

Choisissons  $I = \sum_i \alpha_i J_i, \alpha_i > 0$  et montrons que s'il existe un entier  $n$

tel que  $Z_{nI} > 0$ , alors  $Z_{nI} > 0$  pour tout  $n$  entier. En effet, sinon il existerait  $n_0$  tel que  $Z_{nI} = 0$  si et seulement si  $n \geq n_0$ , donc en particulier tel que  $Z_{(n_0-2)I} > 0$ .

Posons

$$\begin{aligned} X_J &= \frac{Z_{(n_0-2)I+J}}{Z_{(n_0-2)I}}, \\ X_0 &= 1 \end{aligned}$$

et  $X^+ \in C'_0$ , donc pour  $J \in F$  :

$$X_J = \int_{C'_0} Z_J^* d\mu, \quad Z_{n_0,1} = 0$$

entraîne

$$X_{2,1} = 0 \Rightarrow \int_{C'_0} (Z_1^*)^2 d\mu = 0 \Rightarrow \int_{C'_0} Z_1^* d\mu = 0 \Rightarrow Z_{(n_0-1)1} = 0,$$

d'où contradiction.

Donc, ou bien  $Z_1 > 0$  et alors  $Z_{n,1} > 0$  quel que soit  $n$ ; or, quel que soit  $K \in G$ , il existe  $n$  tel que  $nI - K = J \in F$ , donc  $K = nI - J$ ,  $J \in F$ , et  $Z_K > 0$ ,

ou bien  $Z_1 = 0$ , alors  $Z_{n,1} = 0$  quel que soit  $n$ ; or, quel que soit  $K \in G$ , il existe  $n'$  tel que  $n'I - K = J \in -F$ , donc  $K = n'I - J$ ,  $-J \in F$  et  $Z_K = 0$ .

Il résulte de la proposition 5.1, que, pour que  $Y$  défini par (5.4) soit prolongeable à  $(\mathbb{R}^+)^6$ , il est nécessaire que  $Y_I \neq 0$  quel que soit  $I \in F$ .

Étant donné un élément  $Y^*$  de  $C'_0$  tel que  $Y_I^* > 0$  quel que soit  $I \in F$ , on peut le prolonger de façon unique par la relation  $Z_I^* Z_J^* = Z_{I+J}^*$  à un élément  $Z^*$  de  $M$ . Nous noterons  $C_0^*$  l'ensemble des  $Z^*$  ainsi obtenus;  $C_0^*$  est contenu dans  $C'_0$  et l'inclusion est stricte, car en général  $C'_0$  contient des éléments tels que  $Y_I^* = 0$  pour certains  $I$ , mais  $\overline{C_0^*} = C'_0$  comme le montre la

PROPOSITION 5.2. — *Tout élément  $Z$  de  $M$  tel que  $Z_0 = 1$  admet la représentation intégrale unique*

$$Z_I = \int_{C'_0} Z_I^* d\mu \quad (\mu \geq 0 \text{ de masse } +1).$$

En effet,

$$Z_I = Z_I^+ = \int_{C'_0} Z_I^* d\mu \quad \text{pour } I \in F$$

et cette représentation est unique en vertu du théorème de Choquet déjà cité [3].

Soit alors  $K \in -F$ . Posons  $X_J^K = \frac{Z_{J+K}}{Z_K}$ ; il existe une mesure  $\nu_K \geq 0$  de masse  $+1$  sur  $C'_0$  telle que quel que soit  $J \in F$  :

$$X_J^K = \int_{C'_0} Z_J^* d\nu_K.$$

D'où

$$Z_{J+K} = Z_K \int_{C_0'^*} Z_J^* d\nu_K \quad \text{quel que soit } J \in F;$$

en particulier,  $I \in F, K \in -F \Rightarrow J = I - K \in F$  et

$$Z_I = Z_K \int_{C_0'^*} Z_{I-K}^* d\nu_K \quad \text{quel que soit } I \in F.$$

On en déduit

$$Z_{I-K}^* Z_K \nu_K = \mu Z_I^*.$$

D'où

$$Z_{J+K} = \int_{C_0'^*} Z_{J+K}^* d\mu \quad \text{quels que soient } J \in F, K \in -F.$$

Or tout élément de  $G$  peut s'écrire sous la forme  $J + K$ , d'où la proposition.

La proposition 5.2 montre, en particulier, que  $\mu$  n'est pas une mesure quelconque de masse + 1 sur  $C_0'$  :  $Z^{J+K}$  doit être sommable sur  $C_0'^*$  quel que soit  $K$ . Il en résulte que la transformation (4.9) associe à  $C_0'$  une variété  $V$  et à  $\mu$  une mesure  $\nu$  sur  $V$  tel que

$$Z_I = \int_V e^{I \cdot U} d\nu.$$

La proposition 4.2 subsiste, mais  $V$  n'est plus compacte.

Si  $F \neq G$  et si l'on plonge  $G_1 + \dots + G_r$  dans  $R_r$  ainsi que la partie correspondante  $F_r$  de  $F$ , il existe  $V \in R_r$  différent de zéro et tel que  $V \cdot \bar{I} \geq 0$  pour tout  $I \in F$ . D'où

$$\left( \sum \bar{K} A_K \right) \cdot V \geq 0 \quad \text{et même } > 0,$$

sinon  $\mathcal{J}$  n'engendrerait pas  $G$ . On a donc

$$\sum \bar{K} A_K \neq 0.$$

L'analogie de la proposition 4.4 est donc :

PROPOSITION 5.3. —  $U \rightarrow \frac{\text{grad } \Phi(U)}{|\text{grad } \Phi(U)|}$  établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre  $V$  et l'intersection de la sphère  $S$  et du cône  $C$  des vecteurs  $\sum_{K \in \mathcal{J}} \lambda_K \bar{K}, \lambda_K > 0$ .

En effet,  $\text{grad } \Phi(U) = \sum_{K \in \mathcal{J}} \overline{K} A_K e^{K \cdot U} \in C$  et la réciproque s'établit comme

dans la proposition 4.4.

Si l'on considère la partie discrète de la frontière, un point  $U$  de  $V$  a pour voisinage les ensembles de séjour pour le processus dont le pas moyen a la direction de  $\text{grad } \Phi(U)$ ; une telle direction est définie par un vecteur de  $C$ .

**6. Détermination des ensembles de séjour.** — Il résulte des paragraphes précédents qu'on peut, sans restreindre la généralité, se limiter au cas où  $G$  est la somme directe de  $n$  groupes cycliques d'ordre infini.

Introduisons la fonction  $f$  définie sur  $R^n$  par

$$(6.1) \quad f(\theta) = \sum_{I \in \mathcal{J}} A_I e^{iI \cdot \theta}.$$

Si l'on pose  $A_K^{(r)} = \Pi^{rI+K}$ , on a

$$(6.2) \quad (f(\theta))^r = \sum_{I \in r\mathcal{J}} A_I^{(r)} e^{iI \cdot \theta}$$

et

$$(6.3) \quad A_I^{(r)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P e^{-iI \cdot \theta} (f(\theta))^r d\theta,$$

où  $P$  désigne le pavé  $(-\pi, +\pi)^n$ ; d'où

$$(6.4) \quad \sum_{r=0}^p A_I^{(r)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_P e^{-iI \cdot \theta} \frac{1 - f(\theta)^{p+1}}{1 - f(\theta)} d\theta.$$

**PROPOSITION 6.1.** — *Si  $n$  est inférieur ou égal à 2 et si  $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K = 0$ ,*

*tous les états sont récurrents nuls et  $G$  est le seul ensemble de séjour; dans les autres cas, tous les états sont transitoires.*

Remarquons tout d'abord que  $f(\theta) = 1$  entraîne  $I \cdot \theta = 2k\pi$  quel que soit  $I \in \mathcal{J}$ . Or  $\mathcal{J}$  engendre  $G$ , donc il existe des entiers  $\alpha_i$  tels que

$\sum_{I \in \mathcal{J}} \alpha_i I = E_i$  élément de la base de  $G$ ; d'où

$$\theta \cdot E_k = \theta_k = \sum_{I \in \mathcal{J}} 2\alpha_i k_I \pi = 2k' \pi$$

et si  $\theta \in P$ ,  $\theta_k = 0$  quel que soit  $k$ , donc  $\theta = 0$ ; on a donc  $|f(\theta)| < 1$  pour  $\theta \neq 0$  dans  $P$  et

$$(6.5) \quad A_I^{(r)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \quad \forall I \in G.$$

D'autre part,

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \psi(\theta) &= 1 - f(\theta) = 1 - \sum_I A_I e^{iI \cdot \theta} \\ &= i \left( \sum_I I A_I \right) \cdot \theta + \sum_I A_I \frac{(I \cdot \theta)^2}{2} - \sum_{k=3}^{\infty} \sum_I A_I \frac{(iI \cdot \theta)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Posons

$$(6.7) \quad \begin{cases} F(\theta) = \sum_{I \in \mathcal{J}} A_I \frac{(I \cdot \theta)^2}{2}, \\ G(\theta) = \sum_{k=3}^{\infty} \sum_I A_I \frac{(iI \cdot \theta)^k}{k!}. \end{cases}$$

$F(\theta)$  est alors une forme quadratique définie positive non dégénérée, car nous avons vu que  $I \cdot \theta = 0$  quel que soit  $I \in \mathcal{J}$  entraîne  $\theta = 0$ , il existe donc deux constantes  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que

$$(6.8) \quad k_1 |\theta|^2 \leq F(\theta) \leq k_2 |\theta|^2.$$

Si  $n$  est supérieur ou égal à 3, il résulte de (6.8) que

$$\int_P \frac{d\theta}{|1 - f(\theta)|} < \infty$$

et, par conséquent, en faisant tendre  $p$  vers l'infini dans (6.4) que

$\sum_{r=0}^{\infty} A_I^{(r)} = K(I)$  converge quel que soit  $I$ . Il en résulte que tous les états sont transitoires.

Il en est de même quel que soit  $n$  si  $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K \neq 0$ , car alors si l'on appelle  $J(r)$  l'état à l'instant  $r$ , il résulte de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{J(r)}{r} - \sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K$$

converge presque certainement vers zéro, quand  $r \rightarrow +\infty$ . L'égalité  $J(r) = 0$  ne peut donc être réalisée avec une probabilité 1 que pour un nombre fini de  $r$ . Tous les états sont donc transitoires.

Si  $n \leq 2$  et si  $\sum_{K \in \mathcal{J}} K A_K = 0$ , nous utiliserons le

LEMME. — Il existe une constante  $K_1$  telle que pour  $\theta \in P$ ,

$$(6.9) \quad |\operatorname{Re}[f(\theta)^r - (1 - F(\theta))^r]| \leq K_1 r |\theta|^k.$$

On a, en effet,

$$f(\theta)^r - (1 - F(\theta))^r = G(\theta) \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f(\theta))^r - (1 - F(\theta))^r &= \operatorname{Re} G(\theta) \operatorname{Re} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k} \\ &\quad - \operatorname{Im} G(\theta) \operatorname{Im} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k}; \end{aligned}$$

(6.9) résulte alors des majorations

$$|\operatorname{Re} G(\theta)| \leq K_2 |\theta|^k,$$

$$\left| \operatorname{Re} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k} \right| \leq K_3 r,$$

$$|\operatorname{Im} G(\theta)| \leq K_4 |\theta|^k,$$

$$\left| \operatorname{Im} \sum_0^{r-1} f(\theta)^k (1 - F(\theta))^{r-1-k} \right| = \left| \sum_1^{r-1} (1 - F(\theta))^{r-1-k} \operatorname{Im} f(\theta)^k \right| \leq K_5 |\theta|^k r,$$

où  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  sont des constantes.

D'autre part, étant donné  $0 < \rho < \pi$ , il existe  $K_6 > 0$  tel que  $\rho_1 \leq |\theta| \leq \rho$  entraîne (6.10)  $|f(\theta)| \leq 1 - K_6 \rho_1^2$ . Si l'on appelle  $S_\rho$  la boule de centre  $O$  et de rayon  $\rho$ ,

$$\int_{P-S_\rho} \frac{1 - f(\theta)^{p+1}}{1 - f(\theta)} d\theta \rightarrow \int_{P-S_\rho} \frac{d\theta}{1 - f(\theta)}$$

quand  $p$  tend vers l'infini et, par conséquent,

$$\operatorname{Re} \int_{P-S_\rho} (f(\theta))^r d\theta$$

est le terme général d'une série convergente.

Soit  $\frac{2}{5} < a < \frac{1}{2}$ , on peut écrire si  $r^{-a} \leq \rho$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_P (f(\theta))^r d\theta &= \operatorname{Re} \int_{P-S_\rho} (f(\theta))^r d\theta \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{S_\rho-S_{r^{-a}}} (f(\theta))^r d\theta + \operatorname{Re} \int_{S_{r^{-a}}} (f(\theta))^r d\theta. \end{aligned}$$

Le deuxième terme est majoré en vertu de (6. 10) par

$$\int_{S_0 - S_{r-a}} |f(\theta)|^r d\theta \leq K_7(1 - K_6 r^{-2a})^r \sim K_7 e^{-K_6 r^{1-2a}},$$

terme général d'une série convergente, car  $a < \frac{1}{2}$ .

Il résulte de (6. 9) que

$$\left| \operatorname{Re} \int_{S_{r-a}} [f(\theta)^r - (1 - F(\theta))^r] d\theta \right| \begin{cases} \leq K'_1 r^{1-5a} & \text{si } n = 1, \\ \leq K_1 r^{1-6a} & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

terme général d'une série convergente, car  $a$  est supérieur à  $\frac{2}{5}$ .

Finalement,  $\operatorname{Re} \int_P f(\theta)^r d\theta$  diffère par le terme général d'une série convergente de

$$\int_{S_{r-a}} (1 - F(\theta))^r d\theta \geq \int_{S_{r-a}} (1 - k_1 |\theta|^2)^r d\theta;$$

si  $n = 1$ , cette intégrale est minorée par  $2 I_r \times r^a$ , si  $n = 2$ , elle est égale à  $2 \pi I_r$ , où

$$I_r = \int_0^{r^{-a}} (1 - k_1 \rho^2)^r \rho d\rho = \frac{1 - (1 - k_1 r^{-2a})^{r+1}}{2 k_1 (r + 1)};$$

$(1 - k_1 r^{-2a})^{r+1}$  tend vers zéro et  $\int_{S_{r-a}} (1 - F(\theta))^r d\theta$  est le terme général

d'une série divergente. On en déduit que  $\sum A_0^{(r)}$  diverge. Il en résulte que tous les états sont récurrents nuls en vertu de (6. 5), donc que G est le seul ensemble de séjour.

Nous allons maintenant étudier les ensembles de séjour dans le cas où  $\sum_K KA_K = o(n \geq 3)$ . Pour cela, introduisons un isomorphisme B de  $R^n$  sur lui-même tel que

$$F(\theta) = F(B\varphi) = |\varphi|^2$$

et soit B<sup>0</sup> son transposé; on a la

PROPOSITION 6. 2. — Si  $K(I) = \sum_0^\infty A_I^{(r)}$ ,

$$(6. 11) \quad \lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |\det B|.$$



On a, d'après (6.4),

$$(6.12) \quad \begin{aligned} |B^0 I|^{n-2} K(I) &= \frac{|B^0 I|^{n-2}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{P}} \frac{e^{-iI\theta}}{\psi(\theta)} d\theta \\ &= \frac{|B^0 I|^{n-2}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}\mathbb{P}} \frac{e^{-iB^0 I \cdot \varphi} |\det B| d\varphi}{\psi(B\varphi)}, \end{aligned}$$

où

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\psi(B\varphi)} &= \frac{1}{F(B\varphi) - G(B\varphi)} = \frac{1}{|\varphi|^2 - H(\varphi)}, \\ H(\varphi) &= \sum_I \sum_3^{\infty} A_I \frac{(iB^0 I \cdot \varphi)^k}{k!} = \sum_I A_I (e^{iB^0 I \cdot \varphi} - 1 - |\varphi|^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |H(\varphi)|^2 &= \left| \sum_I A_I \left[ (\cos B^0 I \cdot \varphi - 1) + \frac{(B^0 I \cdot \varphi)^2}{2} \right] + i \sum_I A_I (\sin B^0 I \cdot \varphi - B^0 I \cdot \varphi) \right|^2 \\ &\leq \left( \sum_I A_I \frac{(B^0 I \cdot \varphi)^4}{4!} \right)^2 + \left( \sum_I A_I \frac{(B^0 I \cdot \varphi)^3}{3!} \right)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$(6.14) \quad |H(\varphi)| \leq M |\varphi|^3$$

et

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{|\varphi|^2 - H(\varphi)} &= \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_0^{\infty} \left( \frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \right)^n \\ &= \frac{1}{|\varphi|^2} + \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_1^{\infty} \left( \frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \right)^n \quad \text{pour } |\varphi| \leq \varepsilon < \frac{1}{M}; \end{aligned}$$

$L(\varphi) = \frac{1}{|\varphi|^2} \sum_1^{\infty} \left( \frac{H(\varphi)}{|\varphi|^2} \right)^n$  est majorée par  $\frac{K^0}{|\varphi|}$  pour  $|\varphi| \leq \varepsilon$ ,  $\varphi \neq 0$  et toutes ses dérivées d'ordre  $k$  admettent une majoration de la forme  $\frac{K_k}{|\varphi|^k}$  pour  $|\varphi| \leq \varepsilon$ ,  $\varphi \neq 0$ ; en particulier, les dérivées d'ordre  $n-2$  sont sommables dans la boule de rayon  $\varepsilon$ , donc dans  $B^{-1}\mathbb{P}$ , où  $L(\varphi)$  est définie par

$$L(\varphi) = \frac{1}{\psi(B\varphi)} - \frac{1}{|\varphi|^2}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial e^{-iB^0 I \cdot \varphi}}{\partial \varphi_k} = -i(B^0 I)_k e^{-iB^0 I \cdot \varphi},$$

d'où

$$\text{grad } e^{-iB^0 I \cdot \varphi} = -i(B^0 I) e^{-iB^0 I \cdot \varphi}$$

et

$$(6.16) \quad \Delta e^{-iB^0 I \cdot \varphi} = -|B^0 I|^2 e^{-iB^0 I \cdot \varphi}.$$

Distinguons alors deux cas :

1°  $n$  est pair :

$$(6.17) \quad |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}P} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{e^{-iB^0 I \cdot \varphi} d\varphi}{\psi(B\varphi)},$$

$$(6.18) \quad = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}P} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{1}{\psi(B\varphi)} \right) \Delta e^{-iB^0 I \cdot \varphi} d\varphi$$

en appliquant la formule de Green, les intégrales sur le pourtour de  $B^{-1}P$  étant nulles puisque  $e^{-iB^0 I \cdot \varphi}$  et  $\frac{1}{\psi(B\varphi)}$  sont périodiques.

Or

$$\Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{|\varphi|^2} = (-2)(-4)(-6) \dots (-n+4)(n-4)(n-6) \dots (2) \frac{1}{|\varphi|^{n-2}}$$

et, d'après (6.15),

$$(6.19) \quad \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{|\varphi|^2} + \Delta^{\frac{n-2}{2}} L(\varphi).$$

Appliquons encore une fois la formule de Green

$$(6.20) \quad \int_{B^{-1}P} \Delta e^{-iB^0 I \cdot \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{1}{\psi(B\varphi)} \right) d\varphi \\ = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{B^{-1}P - S_\gamma} \Delta e^{-iB^0 I \cdot \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{1}{\psi(B\varphi)} \right) d\varphi \\ = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{B^{-1}P - S_\gamma} e^{-iB^0 I \cdot \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi \\ + \int_{[B^{-1}P - S_\gamma]} e^{-iB^0 I \cdot \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} \right] - \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-iB^0 I \cdot \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} \right) d\sigma,$$

où  $S_\gamma$  désigne la sphère de centre  $O$  et de rayon  $\gamma$  choisi de sorte que  $S_\gamma$  soit contenue dans  $B^{-1}P$ ,  $[B^{-1}P - S_\gamma]$  désigne la frontière de  $B^{-1}P - S_\gamma$ ,  $\sigma$  son élément d'aire,  $\nu$  la normale intérieure.

L'intégrale sur  $[B^{-1}P]$  est nulle et il reste comme deuxième terme l'intégrale de surface étendue à  $[S_\gamma]$ , où  $\nu$  désigne la normale extérieure à  $[S_\gamma]$ .

Or  $\frac{\partial}{\partial \nu} e^{-iB^0 I \cdot \varphi}$  est bornée sur  $S_\gamma$  et

$$\Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = O(\gamma^{-(n-2)});$$

$d\sigma = r_1^{n-1} ds_n$ , où  $ds_n$  est l'élément d'aire de la sphère de rayon 1, donc

$$(6.21) \quad \int_{[S_{r_1}]} \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-iB^0 \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{quand } r_1 \rightarrow 0.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = -(n-2) \frac{1}{|\varphi|^{n-1}} + o(|\varphi|^{-n-1})$$

et

$$e^{-iB^0 \varphi} = 1 + O(|\varphi|) \quad (|\varphi| \rightarrow 0).$$

D'où

$$(6.22) \quad \int_{[S_{r_1}]} e^{-iB^0 \varphi} \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\sigma \rightarrow -(n-2)s_n.$$

Finalement,

$$(6.23) \quad |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{B^{-1}P} e^{-iB^0 \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi \\ + \frac{|\det B|}{4(\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!$$

où  $\Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)}$  est sommable dans  $B^{-1}P$ , car  $\Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{|\varphi|^2} = o$  et  $\Delta^{\frac{n-2}{2}} L(\varphi)$  est sommable. En appliquant le théorème de Riemann-Lebesgue,

$$(6.24) \quad \lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} \int_{B^{-1}P} e^{-iB^0 \varphi} \Delta^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi = 0.$$

D'où

$$\lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{\pi^{-\frac{n}{2}}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) |\det B|.$$

2°  $n$  est impair :

$$(6.25) \quad |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}} |\det B|}{(2\pi)^n} |B^0 I| \int_{B^{-1}P} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{e^{-iB^0 \varphi}}{\psi(B\varphi)} d\varphi \\ = \frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}} |\det B|}{(2\pi)^n} |B^0 I| \int_{B^{-1}P} e^{-iB^0 \varphi} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi.$$

Soit  $\Omega_\varepsilon$  le domaine obtenu en retirant de  $B^{-1}P$  un cylindre de révolution de centre  $O$  d'axe parallèle à  $B^0 I$ , de rayon  $\varepsilon$ , de hauteur  $2\varepsilon$ ,  $\Sigma_\varepsilon$  la fron-

tière de  $\Omega_\varepsilon$ ,  $\nu$  la normale intérieure. En appliquant la formule d'Ostrogradski, on obtient

$$\begin{aligned} |B^0 I|^{n-2} \frac{K(I)}{|\det B|} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{i B^0 I \cdot \nu}{|B^0 I|} e^{-i B^0 I \cdot \varphi} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} ds \\ &+ i \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-i B^0 I \cdot \varphi} \frac{B^0 I}{|B^0 I|} \cdot \text{grad} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} d\varphi. \end{aligned}$$

L'intégrale de surface se réduit à l'intégrale sur les deux bases du cylindre dont l'aire est  $O(\varepsilon^{n-1})$  tandis que

$$\Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = o(\varepsilon^{-(n-1)});$$

elle tend donc vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} &= (-2)(-4) \dots (-n+3)(n-4)(n-6) \dots 3.1 \frac{1}{|\varphi|^{n-1}} + R(\varphi) \\ &= (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-3)!}{|\varphi|^{n-1}} + R(\varphi) \end{aligned}$$

et

$$\text{grad} \Delta^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{\psi(B\varphi)} = -(-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-3)!(n-1)}{|\varphi|^{n+1}} \varphi + R_1(\varphi),$$

où  $B^0 I \cdot R_1(\varphi)$  est sommable dans  $B^{-1} P$  et

$$\int_{\Omega_\varepsilon} e^{-i B^0 I \cdot \varphi} \frac{B^0 I \cdot \varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi = -i \int_{\Omega_\varepsilon} \sin(B^0 I \cdot \varphi) \frac{B^0 I \cdot \varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi,$$

puisque  $\Omega_\varepsilon$  est symétrique par rapport à  $o$ . Cette expression tend vers

$$-i \int_{B^{-1} P} \sin(B^0 I \cdot \varphi) \frac{B^0 I \cdot \varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi \quad (\text{quand } \varepsilon \text{ tend vers zéro}).$$

En faisant tendre  $|B^0 I|$  vers l'infini, on déduit du théorème de Lebesgue que

$$\begin{aligned} (6.26) \quad &\lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} |B^0 I|^{n-2} K(I) \\ &= \lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} \frac{(n-3)!(n-1)}{(2\pi)^n} |\det B| \int_{\Omega} \frac{\sin(B^0 I \cdot \varphi) B^0 I \cdot \varphi}{|B^0 I| |\varphi|^{n+1}} d\varphi, \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est un domaine borné quelconque entourant  $o$ . On peut choisir pour  $\Omega$  un cylindre de centre  $O$ , d'axe parallèle à  $B^0 I$ , de rayon  $R$ , de hauteur  $2a$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sin(B^0 I \cdot \varphi) \frac{(B^0 I \cdot \varphi)}{|B^0 I| |\varphi|^{n+1}} d\varphi &= \int_{-a}^{+a} x \sin kx dx \int_0^R \frac{r^{n-2} dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}} s_{n-1}, \\ &= 2s_{n-1} \int_0^{+ka} \sin u \frac{du}{u} \int_0^{\frac{Rk}{u}} \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr \\ &\text{avec } k = |B^0 I|. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$F\left(\frac{k}{u}\right) = \int_0^{\frac{Rk}{u}} \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} dr$$

et

$$\Phi(u) = \frac{1}{u} \left( F\left(\frac{k}{u}\right) - F(\infty) \right),$$

on a

$$\int_0^{+ka} \sin u F\left(\frac{k}{u}\right) \frac{du}{u} = F(\infty) \int_0^{+ka} \sin u \frac{du}{u} + \int_0^{+ka} \sin u \Phi(u) du.$$

Or

$$\Phi'(u) = -\frac{1}{u^2} \left( F\left(\frac{k}{u}\right) - F(\infty) \right) - \frac{k}{u^3} F'\left(\frac{k}{u}\right).$$

D'où

$$-\frac{1}{R^2 k^2} \leq \Phi'(u) \leq \frac{1}{2k^2 R^2}$$

et

$$\left| \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin u \Phi(u) du \right| = \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin u (\Phi(u) - \Phi(u + \pi)) du \right| \leq \frac{\pi^2}{k^2 R^2}.$$

D'où

$$\left| \int_0^{+ka} \sin u \Phi(u) du \right| \leq \frac{ka\pi^2}{2\pi k^2 R^2} + \frac{F(\infty)}{ka - \pi} \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\sin(B^0 I \cdot \varphi)}{|B^0 I|} \frac{B^0 I \cdot \varphi}{|\varphi|^{n+1}} d\varphi \\ = s_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u \frac{du}{u} \int_0^{\infty} \frac{r^{n-2} dr}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \end{aligned}$$

et

$$(6.27) \quad \lim_{|B^0 I| \rightarrow \infty} |B^0 I|^{n-2} K(I) = \frac{|\det B| (n-3)! (n-1) \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ = \frac{|\det B| \pi^{-n+2}}{4} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

La proposition 6.2 généralise un résultat obtenu par Ito et Mc Kean [8] dans le cas particulier où  $\mathcal{J}$  est formé des points  $\pm E_i$  et où  $A_i = \frac{1}{2^n}$ .

DÉFINITION 6.1. — Étant donné un sous-ensemble fini B de G, on appelle capacité C(B) de B le nombre défini par

$$C(B) = \max_{I \in B} \sum_{I \in B} e(I) \quad (e \geq 0, e = 0 \text{ hors de } B),$$

tel que

$$p(I) = \sum_J K(J) e(I - J) \leq 1.$$

PROPOSITION 6.3 (test de Wiener). — Soit Q un sous-ensemble de G,  $Q_l$  le sous-ensemble du complémentaire de Q formé des points tels que  $2^l \leq |I| < 2^{l+1}$ ; Q est un ensemble de séjour si et seulement si la série

$$\sum_{l \geq 1} 2^{-l(s-2)} C(Q_l)$$

converge.

La démonstration utilise uniquement le fait qui résulte de la proposition 6.2, qu'il existe deux constantes k et k' > 0 telles que

$$k |I|^{(2-n)} \leq K(I) \leq k' |I|^{(2-n)} \quad (\text{cf. [8]}).$$

En appliquant la proposition 6.3 et en estimant C(Q<sub>l</sub>) à l'aide de la capacité pour un potentiel newtonien de l'ensemble qui lui correspond dans R<sup>n</sup>, on obtient la

PROPOSITION 6.4. — Si  $n \geq 4$  et si Q est le domaine de révolution défini par

$$I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_{n-1}^2 \geq f^2(I_n) \quad \text{et} \quad I_n \leq 1,$$

Q est de séjour si et seulement si la série

$$\sum (2^{-n} f(2^n))^{n-3}$$

converge.

*Ensembles de séjour quand*  $\sum_{K \in J} A_K K = m \neq 0$ . — L'état  $J(r)$  à l'instant  $r$  du processus d'état initial  $0$  est la somme de  $r$  variables aléatoires indépendantes bornées et de même loi. Pour préciser les ensembles de séjour, nous allons utiliser la loi du logarithme itéré (*cf.*, par exemple, [10], p. 254-263) (on pourrait utiliser une variante plus élaborée, *cf.* [4]). Rappelons l'énoncé que nous utiliserons ici :

Les  $Z_i$  étant des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, de moyenne nulle, d'écart type  $\sigma$ ,

$$(6.28) \quad \begin{aligned} & P \left( \limsup \frac{\sum_1^r Z_i}{\sigma \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} = 1 \right) \\ &= P \left( \limsup \frac{\left| \sum_1^r Z_i \right|}{\sigma \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} = 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Soient maintenant des variables aléatoires  $V_i$  à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ , indépendantes de même loi, de moyenne nulle, telles que

$$E(U.V_i)^2 = \Phi(U) = U.AU$$

soit une forme quadratique définie positive non dégénérée. On peut appliquer la loi du logarithme itéré aux variables réelles  $Z_i = U.V_i$ ; (6.28) s'écrit alors

$$(6.29) \quad P \left( \limsup \frac{U \cdot \sum_1^r V_i}{\sqrt{2\Phi(U)} r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r} = 1 \right) = 1.$$

Autrement dit, quel que soit  $U$  fixé, on a presque certainement

$$\frac{U \cdot \sum_1^r V_i}{\sqrt{\Phi(U)}} \leq (1+d) \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r},$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$  si  $d > 0$ , pour un nombre infini si  $d < 0$ .

Soit  $E_k$  l'ellipsoïde défini par

$$Y.A^{-1}Y \leq k^2;$$

$UY = k\sqrt{\Phi(U)}$  est l'équation du plan tangent au point

$$Y_0 = \frac{kAU}{\sqrt{\Phi(U)}}$$

du bord de  $E_k$ .

Prenons alors  $p \geq n$  vecteurs  $U_1, U_2, \dots, U_p$  engendrant  $R^n$ ; les  $p$  inégalités

$$U_i \cdot Y \leq (1+d)\sqrt{\Phi(U)}$$

définissent un polyèdre  $\Pi(d, p)$  circonscrit à  $E_{1+d}$ ; et presque certainement

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \text{Log Log } r}} \in \Pi(d, p),$$

sauf pour un nombre fini (resp. infini) de valeurs de  $r$  si  $d > 0$  (resp.  $d < 0$ ).

De  $\Pi(d, p) \supset E_{1+d}$  si  $d < 0$ , et de  $\Pi(d', p) \subset E_{1+d}$  si  $0 < d' < d$  pour  $p$  assez grand et des  $U_i$  convenables, on déduit que presque certainement

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \text{Log Log } r}} \in E_{1+d},$$

sauf pour un nombre fini (resp. infini) de valeurs de  $r$  si  $d > 0$  (resp.  $d < 0$ ). Il en résulte aussi que si  $d_1 > 0$  et  $d_2 < 0$ ,

$$\frac{\sum_1^r V_i}{\sqrt{2r \text{Log Log } r}}$$

appartient pour une infinité de valeurs de  $r$ , à la région  $C(d_1, d_2, U)$  définie par

$$\begin{aligned} U \cdot Y &\geq (1+d_2)\Phi(U), \\ Y &\in E_{1+d_1}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6.5. — Si l'on note  $F_r(1+d)$  le sous-ensemble des points  $X$  de  $R^n$ , tels que

$$\frac{X - rm}{\sqrt{2r \text{Log Log } r}} \in E_{1+d}$$



quel que soit  $k$ ,

$$\bigcup_{r=k}^{\infty} F_r(1+d)$$

est de séjour si  $d > 0$ ; il n'est pas de séjour si  $d < 0$ .

Si  $d > 0$ ,  $X_r \in F_r(1+d)$  presque certainement, sauf pour un nombre fini de  $r$ , donc

$$\bigcup_{r=k}^{\infty} F_r(1+d)$$

est de séjour.

Si  $d < 0$ , choisissons  $d < d' < 0$ ,  $U$  tel que  $U.m = 0$  et considérons le sous-ensemble  $C_r(-d, d', U)$  défini par

$$X \in C_r(-d, d', U) \iff \frac{X - rm}{\sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} \in C(-d, d', U).$$

Il existe une constante  $K$  telle que pour

$$|p| \geq K \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r},$$

$F_r(1-d)$  et  $F_{r+p}(1+d)$  soient sans point commun.

Par ailleurs,

$$\frac{U.(X - rm)}{\sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} = \frac{U.X}{\sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}} \geq \sqrt{\Phi(U)}(1+d)$$

entraîne

$$\frac{U.X}{\sqrt{2(r+p) \operatorname{Log} \operatorname{Log} (r+p)}} \geq \sqrt{\Phi(U)}(1+d) \quad \forall |p| \leq K \sqrt{2r \operatorname{Log} \operatorname{Log} r}$$

pour  $r$  assez grand.

Il en résulte que  $C_r(-d, d', U)$  est, pour  $r$  assez grand, extérieur à

$$\bigcup_1^{\infty} F_r(1+d).$$

Or, presque certainement  $X_r \in \bigcup_1^{\infty} C_r$  pour une infinité de  $r$ , donc

$$\bigcup_1^{\infty} F_r(1+d)$$

n'est pas de séjour.

**7. Temps de séjour et temps d'atteinte.** —  $X_r(J)$  étant l'état à l'instant  $r$  du processus d'état initial  $X_0(J) = J$  et  $E$  un sous-ensemble de  $G$ , on peut associer à  $E$  et au processus deux variables aléatoires à valeurs entières positives (éventuellement  $+\infty$ )

$$(7.1) \quad T(J, E) = \sum_{r=0}^{\infty} Y_r(J, E),$$

où

$$(7.2) \quad Y_r(J, E) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_r(J) \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$T(J, E)$  sera appelé temps passé dans  $E$  ou encore temps de séjour total dans  $E$  (on peut, en effet, étudier aussi la durée d'un séjour dans  $E$  entre deux séjours hors de  $E$ ).

$$(7.3) \quad N(J, E) = \text{Inf} \{ r : X_r(J) \in E \}$$

sera appelé temps d'atteinte de  $E$  à partir de  $J$ . [ $N(J, E) = 0$  si  $J \in E$ ,  $N = +\infty$  si  $X_r(J) \notin E \forall r$ ]; cette dernière variable a été étudiée dans de nombreux cas particuliers (cf., par exemple, [6] et [7]).

Considérons tout d'abord

$$(7.4) \quad T(I) = T(J, \{J + I\})$$

qui ne dépend pas de  $J$  en raison de l'homogénéité de la chaîne; la loi de  $T(I)$  est donnée par la

**PROPOSITION 7.1.** — *Si  $I$  est récurrent ( $n \leq 2, \sum K A_K = 0$ )*

$$(7.5) \quad P(T(I) = \infty) = 1;$$

*Si  $I$  est transitoire*

$$(7.6) \quad P\{T(I) = r\} = \begin{cases} \frac{K(I)}{(K(0))^2} \left(1 - \frac{1}{K(0)}\right)^{r-1} & (r \geq 1), \\ 1 - \frac{K(I)}{K(0)} & (r = 0), \end{cases}$$

où

$$K(I) = \sum_0^{\infty} A_I^{(r)}.$$

Si  $I$  est récurrent, on a (cf. [10], p. 31)

$$\Pr(T(I) = \infty) = \Pr(T(I) > 0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=0}^p A_I^{(r)}}{\sum_{r=0}^p A_0^{(r)}}.$$

Distinguons alors les deux cas :  $n = 2$  et  $n = 1$ .

a. Si  $n = 2$  :

$$(7.7) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=0}^{\nu} \Lambda_1^{(r)}}{\sum_{r=0}^{\nu} \Lambda_0^{(r)}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{P}} e^{-n\theta} \frac{1-f(\theta)^{\nu+1}}{1-f(\theta)} d\theta}{\int_{\mathbb{P}} \frac{1-f(\theta)^{\nu+1}}{1-f(\theta)} d\theta}.$$

L'intégrale du dénominateur tend vers  $+\infty$ , quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

D'autre part,  $\frac{e^{-n\theta}-1}{1-f(\theta)}$  est sommable sur  $\mathbb{P}$ , car

$$\frac{e^{-n\theta}-1}{1-f(\theta)} = O(|\theta|^{-1}) \quad (\theta \rightarrow 0) \quad \text{et} \quad |1-f(\theta)^{\nu+1}| \leq 2.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{P}} (e^{-n\theta}-1) \frac{1-f(\theta)^{\nu+1}}{1-f(\theta)} d\theta$$

converge quand  $p$  tend vers  $+\infty$  vers la limite finie

$$\int_{\mathbb{P}} \frac{e^{-n\theta}-1}{1-f(\theta)} d\theta$$

et la limite de (7.7) est 1.

b. Si  $n = 1$ , on a

$$\Lambda_0^{(r)} = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(\theta))^r d\theta = 2 \int_0^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r\varphi(\theta) d\theta,$$

où l'on a posé

$$f(\theta) = \rho(\theta) e^{i\varphi(\theta)}$$

et où

$$\rho(\theta) = 1 + O(\theta)^2, \quad \varphi(\theta) = O(\theta)^3 \quad (\theta \rightarrow 0),$$

on en déduit

$$\Lambda_0^{(r)} = 2 \int_0^{\lambda r^{-\frac{1}{3}}} (\rho(\theta))^r \cos r\varphi(\theta) d\theta + 2 \int_{\lambda r^{-\frac{1}{3}}}^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r\varphi(\theta) d\theta,$$

où l'on peut choisir  $\lambda$  et  $r$  assez grand pour que

$$0 \leq \theta \leq \lambda r^{-\frac{1}{3}} \quad \text{implique} \quad \cos r\varphi(\theta) \geq \alpha > 0$$

et

$$\rho(\theta) \geq 1 - \beta\theta^2 \geq 0 \quad (\beta > 0).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda r^{-\frac{1}{2}}} [\rho(\theta)]^r \cos r \varphi(\theta) \, d\theta &\geq \alpha \int_0^{\lambda r^{-\frac{1}{2}}} (1 - \beta \theta^2)^r \, d\theta \\ &\geq \frac{\alpha r^{\frac{1}{2}}}{2 \lambda \beta} \int_0^{\lambda r^{-\frac{1}{2}}} (1 - \beta \theta^2)^r \, 2 \beta \theta \, d\theta \\ &\geq \frac{r^{\frac{1}{2}} \alpha (1 - (1 - \beta \lambda^2 r^{-\frac{2}{3}})^{r+1})}{2 \lambda \beta (r+1)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il existe  $\beta' > 0$  tel que  $\rho(\theta) \leq 1 - \beta' \theta^2$  quel que soit  $\theta : 0 \leq \theta \leq \pi$ . D'où

$$\left| \int_{\lambda r^{-\frac{1}{2}}}^{\pi} (\rho(\theta))^r \cos r \varphi(\theta) \, d\theta \right| \leq \pi (1 - \beta' \lambda^2 r^{-\frac{2}{3}})^{r+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} |A_0^{(r)}| &\geq \frac{\alpha r^{\frac{1}{2}}}{\lambda \beta (r+1)} - \frac{\alpha r^{\frac{1}{2}} (1 - \beta \lambda^2 r^{-\frac{2}{3}})^{r+1}}{\lambda \beta (r+1)} - 2 \pi (1 - \beta' \lambda^2 r^{-\frac{2}{3}})^{r+1} \\ &\geq k r^{-\frac{2}{3}} \quad \text{pour } r \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |A_k^{(r)} - A_0^{(r)}| &\leq 2 \int_0^{\pi} |e^{ik\theta} - 1| \cdot |f(\theta)|^r \, d\theta \\ &\leq 4 \int_0^{\pi} k \theta |f(\theta)|^r \, d\theta \leq 2 k \int_0^{\pi} \theta (1 - \beta' \theta^2)^r \, d\theta \\ &\leq \frac{k(1 - (1 - \beta' \pi^2)^{r+1})}{\beta' (r+1)}. \end{aligned}$$

Donc  $\frac{A_k^{(r)} - A_0^{(r)}}{A_0^{(r)}}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini; il résulte alors de  $A_0^{(r)} \rightarrow \infty$  et  $A_0^{(r)} \geq 0$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^n A_k^{(r)}}{\sum_0^n A_0^{(r)}} = 1.$$

Si I est transitoire, on a

$$(7.8) \quad \Pr[T(I) = r] = \Pr[T(I) > 0] \Pr[T(I) = r/T(I) > 0].$$

Or

$$\Pr[T(I) = r/T(I) > 0] = \Pr[T(0) = r]$$

en vertu de l'homogénéité de la chaîne.

Posons  $P[T(o) = 1] = p$ . Les différents retours en  $o$  étant indépendants et la probabilité de l'un d'eux étant  $1 - p$ , on a

$$(7.9) \quad P[T(o) = r] = p(1-p)^{r-1} \quad (r > 0).$$

D'autre part,

$$(7.10) \quad E(T(I)) = \sum_0^{\infty} E(Y_r(o, \{I\})) = \sum_0^{\infty} A_I^{(r)} = K(I),$$

où, en vertu de (7.8),

$$K(I) = P[T(I) > 0] K(o)$$

et, en vertu de (7.9),

$$K(o) = \sum_0^{\infty} r p (1-p)^{r-1} = \frac{1}{p}.$$

D'où

$$P[T(I) = r] = \frac{K(I)}{K(o)} \frac{1}{K(o)} \left(1 - \frac{1}{K(o)}\right)^{r-1} \quad (r > 0),$$

$$P[T(I) = 0] = 1 - \frac{K(I)}{K(o)}.$$

Pour les grandes valeurs de  $|I|$ , on pourra remplacer  $K(I)$  par l'estimation fournie par (6.11).

On déduit de (7.10) que

$$(7.11) \quad E(T(J, E)) = \sum_{I \in E} E(T(J, I)) = \sum_{I \in E} K(I - J).$$

ÉTUDE DE  $N(J, E)$ . — On a

$$(7.12) \quad \begin{cases} P[N(J, E) = 0] = 1 & \text{si } J \in E, \\ P[N(J, E) = r] = 1 - \sum_{K \in \mathcal{C}_E} \Pi_{\mathcal{C}_E}^r(J, K) & \text{si } J \in \mathcal{C}_E, \end{cases}$$

où  $\Pi_{\mathcal{C}_E}$  désigne la restriction de la matrice  $\Pi$  à  $\mathcal{C}_E$ . (7.12) est équivalent à

$$(7.13) \quad \begin{cases} P[N(J, E) = 0] = 1 & (J \in E), \\ P[N(J, E) = r+1] = \sum_K A_K P[N(J+K, E) = r] & (J \in \mathcal{C}_E, r \geq 0). \end{cases}$$

Si l'on introduit la fonction génératrice de  $N(J, E)$  :

$$g(s, J, E) = E(s^{N(J, E)})$$

définie pour  $0 \leq s \leq 1$  avec la convention  $1^\infty = 1$  si  $N(J, E)$  peut prendre la valeur  $+\infty$ ,

(7.13) est équivalent à

$$(7.14) \quad \begin{cases} g(s, J, E) = 1 & (J \in E) \\ g(s, J, E) = s \sum_{K \in \mathcal{J}} A_K g(s, J + K, E) & (J \in \mathcal{C}_1 E). \end{cases}$$

(7.14) est analogue aux équations aux différences finies qui s'introduisent dans la résolution approchée d'un problème de Dirichlet.

Si, en particulier, on veut calculer le temps moyen d'atteinte

$$\bar{N}(J, E) = \left. \frac{\partial g(s, J, E)}{\partial s} \right|_{s=1}$$

on voit que, s'il est défini, il satisfait

$$(7.15) \quad \begin{cases} \bar{N}(J, E) = 0 & (J \in E), \\ \bar{N}(J, E) = 1 + \sum_K A_K \bar{N}(J + K, E) & (J \in \mathcal{C}_1 E) \end{cases}$$

qu'on peut aussi déduire directement de (7.13).

On peut poursuivre les calculs dans le cas où  $\mathcal{C}_1 E$  est fini. Posons  $\mathcal{C}_1 E = F$  et appelons  $\bar{F}$  l'ensemble des points qu'on peut atteindre en un pas à partir de  $F$ , c'est-à-dire que  $\bar{F} = F + \mathcal{J}$ . Le temps d'atteinte de  $\bar{F} - F$  à partir d'un point de  $F$  est égal au temps d'atteinte de  $\mathcal{C}_1 F$  et satisfait

$$(7.16) \quad \begin{cases} P[N(J, \bar{F} - F) = 0] = 1 & (J \in \bar{F} - F), \\ P[N(J, \bar{F} - F) = r] = 1 - \sum_{K \in F} H_K^r(I, J) & (J \in F) \end{cases}$$

qui est un système fini d'équations, puisque  $\bar{F}$  comme  $F$  est fini. Il en est de même des deux systèmes analogues à (7.14) et (7.15) qu'on en déduit.

#### BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II.

- [1] BOURBAKI (N.), *Intégration*, chap. II, Hermann, Paris, 1952.
- [2] CHOQUET (G.), *Theory of capacities*, chap. VII (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5. 1953-1954, p. 132-294).
- [2 bis] CHOQUET (G.) et DENY (J.), *Sur l'équation de convolution  $\mu = \mu \star \sigma$*  (*C. R. Acad., Sc.* 250, 1960, p. 799-881).
- [3] CHOQUET (G.), *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes* (*Séminaire Bourbaki*, 9<sup>e</sup> année, n° 139, décembre 1956).
- [3 bis] CHUNG (K. L.) et FUCHS (W. H. J.), *On the distribution of values of sums of random variables.* (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, n° 6, 1951, p. 1-12).

- [4] FELLER (W.), *The general form of the so-called law of the iterated logarithm* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 54, 1953, p. 373-402).
- [5] FELLER (W.), *An introduction to probability theory and its applications*, vol. I, chap. XIV, J. Wiley and Sons, New York, 1957.
- [6] FELLER (W.), *Boundaries induced by positive matrices* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 83, 1956, p. 19-54).
- [7] FUCHS (A.), *Un problème de temps d'atteinte* (Publ. Inst. Statistique de l'Université de Paris, t. VII, fasc. 4, 1958, p. 161-166).
- [8] ITO (K.) et Mc KEAN (H. P. Jr), *Potentials and the random walk* (Ill. J. Math., t. 4, n° 1, 1960, p. 119-132).
- [9] JACOBSON (N.), *Lecture in abstract algebra*, t. 2, chap. III, § 9, Van Nostrand, New York, 1951.
- [10] LOEVE (M.), *Probability theory*, 2<sup>e</sup> édition, Van Nostrand, New York, 1960.
- [11] NEVEU (J.), *Lattice methods and submarkovian processes* (Proc. of the 4th Berkeley Symposium, vol. II, 1960, p. 347-391).

### CHAPITRE III.

#### ÉTUDE DE LA FRONTIÈRE DE FELLER POUR DES CHAÎNES DE MARKOFF EN CASCADE NON HOMOGENES.

Nous nous proposons dans ce chapitre de généraliser quelques résultats du chapitre précédent.

1. **Éléments extrémaux de C et décomposition de  $\Pi$ .** — Soit C le convexe défini par

$$(1.1) \quad \Pi Z = Z, \quad Z \geq 0, \quad Z_0 = 1,$$

$\Pi$  étant tel que  $\Pi_j^i > 0$  si et seulement si  $J - I \in \mathcal{J}$  fini; C est compact pour la topologie faible car, quel que soit J, il existe  $n$  tel que  $\Pi_0^{nJ} > 0$

et  $Z_j \leq \frac{Z_0}{\Pi_0^{nJ}}$  (nous supposons  $\bigcup_{n=0}^{\infty} n\mathcal{J} = G$ ). Si  $\Pi$  admet une décomposition de la forme

$$(1.2) \quad \Pi = \sum_1^r T_l, \quad T_l \geq 0, \quad T_l T_m = T_m T_l \quad \text{quels que soient } l, m,$$

on déduit de (1.1) et de (1.2)

$$Z = \Pi Z = \sum_1^r T_l Z.$$

et

$$\Pi T_l Z = T_l \Pi Z = T_l Z \geq 0.$$

Si  $Z$  est extrémal de  $C$ , on déduit de

$$Z = \sum_1^r (T_l Z)_0 \frac{T_l Z}{(T_l Z)_0},$$

où  $\sum_1^r (T_l Z)_0 = Z_0 = 1$  :

$$(1.3) \quad Z = \frac{T_l Z}{(T_l Z)_0} \quad \text{quel que soit } l.$$

Inversement, tout  $Z$  positif satisfaisant (1.3) est un élément de  $C$  si

$$(1.4) \quad \sum_1^r (T_l Z)_0 = 1.$$

On peut encore écrire (1.3) et (1.4) sous la forme

$$(1.5) \quad T_l Z = \lambda_l Z, \quad \sum_1^r \lambda_l = 1, \quad Z_0 = 1, \quad \lambda_l > 0, \quad Z \geq 0.$$

On a donc ramené la recherche de vecteurs propres de  $\Pi$  à celle de vecteurs propres communs aux  $T_l$ .

Remarquons que la condition d'homogénéité dans l'espace permet de prendre

$$\Pi = \sum_{k \in \mathcal{J}} T_k, \quad \text{avec } (T_k)_i^{l+j} = \delta_k^l \Pi_i^{l+j},$$

ce qui permet de retrouver les résultats du chapitre précédent. La condition  $T_l \geq 0$  dans (1.2) limite beaucoup les choix possibles; nous nous

limiterons au cas où  $T_l$  est défini par une partition de  $\mathcal{J} = \sum_1^r \mathcal{J}_l$

par

$$(T_l)_i^{l+j} = \begin{cases} \Pi_i^{l+j} & \text{si } j \in \mathcal{J}_l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une telle décomposition est utilisée pour des matrices finies dans la méthode des directions alternées de Peaceman-Rachford pour la résolution des équations aux différences rencontrées dans les problèmes elliptiques (*cf.*, par exemple, [3]).



(1.2) s'écrit alors

$$(1.6) \quad \sum_{\mathbf{k} \in (I+\mathcal{J}_l) \cap (J-\mathcal{J}_m)} \Pi_{\mathbf{k}}^{\mathbf{I}} \Pi_{\mathbf{k}}^{\mathbf{J}} = \sum_{\mathbf{k} \in (I+\mathcal{J}_m) \cap (J-\mathcal{J}_l)} \Pi_{\mathbf{k}}^{\mathbf{I}} \Pi_{\mathbf{k}}^{\mathbf{J}} \quad \forall l, m, I, J.$$

Montrons que la condition (1.6) impliquée par la condition d'homogénéité est moins restrictive; considérons, par exemple, une marche dans le plan avec

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{J} &= \{ (1, 0) (0, 1) (-1, 0) (0, -1) \}, \\ \mathcal{J}_1 &= \{ (1, 0) (-1, 0) \}, \\ \mathcal{J}_2 &= \{ (0, 1) (0, -1) \}, \\ \Pi_{i,j}^{i+1,j} &= \alpha_i \geq 0, \quad \Pi_{i,j}^{i,j+1} = \beta_j \geq 0, \quad \Pi_{i,j}^{i-1,j} = \alpha'_i \geq 0, \quad \Pi_{i,j}^{i,j-1} = \beta'_j \geq 0, \end{aligned}$$

avec  $\alpha_i + \alpha'_i = p$ ,  $\beta_i + \beta'_i = q$ ,  $p + q = 1$  satisfont (1.5) bien que ne définissant pas une chaîne homogène.

**2. Construction des éléments extrémaux de C.** — Appelons  $S([p, q], \mathcal{E})$  le système des équations

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}_l} \Pi_{\mathbf{I}+\mathbf{j}}^{\mathbf{I}+\mathbf{j}} Z_{\mathbf{I}+\mathbf{j}} = \lambda_l Z_{\mathbf{I}} \quad \text{pour } p \leq l \leq q, \quad \mathbf{I} \in \mathcal{E},$$

où  $\mathcal{E}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{G}$ . Nous nous bornerons au cas où

$\bigcup_0^{\infty} n \mathcal{J} = \mathcal{G}$ . Alors (1.5) s'écrit

$$(2.1) \quad S([1, r], \mathcal{G}),$$

$$(2.2) \quad Z_1 \geq 0,$$

$$(2.3) \quad Z_0 = 1,$$

$$(2.4) \quad \sum_1^r \lambda_l = 1 \quad (\lambda_l > 0).$$

Soit  $\mathcal{G}_l$  le sous-groupe de  $\mathcal{G}$  engendré par  $\mathcal{J}_l$ ; si  $\mathcal{G}_l$  est fini,  $S(l, \mathbf{K} + \mathcal{G}_l)$  s'écrit  $P_{\mathbf{K}} Z^* = \lambda_l Z^*$ , où  $P_{\mathbf{K}}$  et  $Z^*$  sont les restrictions de  $\Pi$  et  $Z$  à  $\mathbf{K} + \mathcal{G}_l$ ; il n'admet donc une solution que si  $\lambda_l$  est valeur propre de  $P_{\mathbf{K}}$ ; tous les  $P_{\mathbf{K}}$  quand  $\mathbf{K}$  parcourt  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_l$  doivent donc avoir une valeur propre commune comprise entre 0 et 1. C'est le cas, en particulier, si  $\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}_l} \Pi_{\mathbf{I}+\mathbf{j}}^{\mathbf{I}+\mathbf{j}} = \mu_l$  est

indépendant de  $\mathbf{I}$ ;  $Z_l$  est entièrement défini par sa donnée pour

$$\mathbf{I} \in \mathbf{K} + \mathcal{A}_l, \quad \text{où } \mathcal{A}_l \subset \mathcal{G}_l.$$

Si  $\mathcal{G}_l$  est infini,  $S[l, \mathbf{K} + \mathcal{G}_l]$  permet, pour  $\lambda_l$  donné, de calculer  $Z_l$  pour  $\mathbf{I} \in \mathbf{K} + \mathcal{G}_l$  si on le donne pour  $\mathbf{I} \in \mathbf{K} + \mathcal{A}_l$ , où  $\mathcal{A}_l$  est un sous-

ensemble de  $\mathcal{G}_l$  qui dépend de  $\mathcal{J}_l$  mais qu'on peut choisir indépendant de  $K$  et contenant 0.

Renumerotons les  $\mathcal{G}_l$  de sorte que  $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_s = \mathcal{G}$ ,  $s$  étant le plus petit possible; on peut alors exprimer une solution  $Z$  du système

$$\begin{aligned} &S(1, \mathcal{G}_1 + \mathcal{H}_2 + \dots + \mathcal{H}_s), \\ &S(2, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{H}_3 + \dots + \mathcal{H}_s), \\ &\dots\dots\dots, \\ &S(s, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_s) \end{aligned}$$

comme fonction linéaire des  $Z_l$  pour

$$I \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \dots + \mathcal{H}_s = \mathcal{H}$$

et comme fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , ceux-ci pouvant d'ailleurs être astreints à certaines conditions, en particulier si  $\mathcal{G}_l$  est fini, les  $\lambda_l$  doivent être valeurs propres communes des  $P_l$ ; choisissons, en outre, les  $\lambda_l$  satisfaisant (2.4);  $Z$  est alors, en vertu de (1.6), solution du système  $S([1, s], \mathcal{G})$ ,

En effet, puisque c'est une solution de  $S(s, \mathcal{G})$ ,

$$(2.5) \quad T_s Z = \lambda_s Z,$$

donc

$$(2.6) \quad T_s(T_{s-1}Z) = T_{s-1}(T_s Z) = \lambda_s T_{s-1}Z.$$

Or, puisque  $Z$  est solution de

$$S(s-1, \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s),$$

$$(T_{s-1}Z)_l = \lambda_{s-1} Z_l \text{ pour}$$

$$I \in \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s,$$

donc  $T_{s-1}Z = \lambda_{s-1}Z$  comme solution de (2.5) entièrement déterminée par sa donnée sur

$$\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_{s-1} + \mathcal{H}_s.$$

De proche en proche, on démontre de même que  $T_l Z = \lambda_l Z$  quel que soit  $l$  compris entre 1 et  $s$ .

Alors  $Z$  sera solution de  $S([1, r], \mathcal{G})$  si c'est une solution de  $S([s+1, r], \mathcal{H})$ , ce qui impose de nouvelles conditions sur les  $\lambda_l$  et les  $Z_l$  pour  $I \in \mathcal{H}$ .

En effet,

$$T_p(T_l Z) = T_l(T_p Z) = \lambda_p T_l Z \quad \forall 1 \leq p \leq s < l \leq r,$$

donc  $T_l Z$  est entièrement défini pour  $\lambda_l$  fixé positif par sa donnée sur  $\mathcal{X}$ , et comme il coïncide avec  $\lambda_l Z$  sur cet ensemble, on a  $T_l Z = \lambda_l Z$ . Il reste à écrire que  $Z$  satisfait (2.2) et (2.3); pour tout choix des  $\lambda_l$  satisfaisant les conditions imposées, les conditions linéaires déjà écrites que doivent satisfaire les  $Z_I$  pour  $I \in \mathcal{X}$ , jointes à (2.3) et (2.2) définissent un convexe éventuellement vide  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  de  $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{X}}$  puisque  $Z$  est une fonction linéaire des  $Z_I$  pour  $I \in \mathcal{X}$ . Ce convexe est compact comme  $C$ . Considérons alors l'ensemble  $C_0$  des points de  $(\mathbb{R}^+)^r \times (\mathbb{R}^+)^{\mathcal{X}}$  dont la section par  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  est  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ; à tout élément extrémal de  $C$  correspond un point de  $C_0$  et à tout point de  $C_0$  une solution de (1.5). Soit  $C^*$  l'ensemble des éléments extrémaux  $Z^*$  de  $C$  et  $Z$  la solution de (1.5) associée à un point de  $C_0$  dont les  $r$  premières coordonnées sont  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ . Il existe une mesure  $\mu$  sur  $C^*$  positive de masse totale 1 telle que

$$Z = \int_{C^*} Z^* d\mu.$$

De  $\frac{T_l^n Z}{\lambda_l^n Z} = Z$  on déduit

$$Z = \int_{C^*} \frac{T_l^n Z^*}{\lambda_l^n} d\mu, \quad \text{or } T_l Z^* = \lambda_l^n Z^*,$$

d'où

$$Z = \int_{C^*} \left( \frac{\lambda_l^*}{\lambda_l} \right)^n Z^* d\mu,$$

et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on en déduit que  $\lambda_l^* = \lambda_l$  sur le support de  $\mu$ ; supposons, en outre, que la restriction  $Z_0$  de  $Z$  à  $\mathcal{X}$  soit un élément extrémal de  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ , alors on déduit de

$$Z = \int_{C^*} Z^* d\mu, \quad Z_0 = \int_{C^*} Z_0^* d\mu,$$

où  $Z_0^*$  appartient à  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ ; si le support de  $\mu$  n'était pas réduit à un point de  $C^*$ , on aurait

$$Z_0 = \int_{C_1^*} Z_0^* d\mu + \int_{C_2^*} Z_0^* d\mu$$

et  $Z_0$  serait le barycentre de deux points de  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ . Donc à tout élément extrémal  $Z_0^*$  de  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  est associé un élément extrémal  $Z^*$  de  $C$  et réciproquement. De plus, cette correspondance est un homéomorphisme. En effet, si  $Z^n \rightarrow Z$  dans  $C^*$ ,  $(Z^n)_0 \rightarrow Z_0$  dans  $C_0$  et si

$$T_l Z^n = \lambda_l^n Z^n, \quad T_l Z^n \rightarrow T_l Z = \lambda_l Z, \quad \text{donc } \lambda_l^n \rightarrow \lambda_l.$$

Réciproquement, si  $(Z^n)_0 \rightarrow Z_0$  et  $\lambda_i^n \rightarrow \lambda_i$ ,  $Z_1$  est pour  $Z_0$  fixé un polynome en  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ; c'est donc une fonction continue des  $\lambda_i$  et pour  $I$  fixé  $Z_i^n \rightarrow Z_i$ .

**3. Étude d'une marche au hasard sur la droite.** — Cette étude est assez voisine de celle de [5]. Elle conduit à la recherche des solutions positives de

$$(3.1) \quad \alpha_i z_{i+1} + \alpha'_i z_{i-1} = \lambda z_i,$$

où

$$\alpha_i > 0, \quad \alpha'_i > 0, \quad \alpha_i + \alpha'_i = p.$$

Une solution de (3.1) est entièrement définie par la donnée de  $z_0$  et de  $z_1$ , les résultats relatifs à  $i \leq 0$  se déduisent de ceux relatifs à  $i \geq 1$  par une permutation de  $z_0$  et  $z_1$ , de  $\alpha_i$  et  $\alpha'_i$ , de  $i$  et  $-i + 1$ ; nous énoncerons donc ces derniers.

**LEMME 1.** — Si  $z_1 > 0$  et  $z_0 \geq 0$  sont fixés,  $z_i$  est pour tout  $i \geq 2$  un polynome en  $\lambda$  de degré  $i - 1$  dont toutes les racines sont réelles et séparent les racines de  $z_{i+1}$ . Si  $z_1 = 0$  et  $z_0 > 0$ ,  $z_i$  est de degré  $i - 2$  et ses racines séparent celles de  $z_{i+1}$ . Si  $z_1 = z_0 = 0$ ,  $z_i = 0$ .

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que  $z_i = 0$  implique  $z_{i+1}$  et  $z_{i-1}$  de signe contraire. Supposons d'abord  $z_1 > 0$ . Par récurrence sur  $i$ ,  $z_i$  est un polynome de degré  $i - 1$  dont le terme de plus haut degré est  $\frac{z_1 \lambda^{i-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i-1}}$ .  $z_2$  a donc une racine réelle  $\lambda_2^1$ ;  $z_3$  ( $\lambda_2^1$ ) et  $z_1$  sont de signe contraire, donc  $z_3(\lambda_2^1) < 0$ ; comme  $z_3$  est  $> 0$  pour  $|\lambda|$  assez grand,  $z_3$  a deux racines réelles  $\lambda_3^1, \lambda_3^2$  telles que  $\lambda_3^1 < \lambda_2^1 < \lambda_3^2$ . Si  $z_i$  a  $i - 1$  racines réelles  $\lambda_i^j, \lambda_i^j$  et  $\lambda_i^{j+1}$  étant séparées par  $\lambda_{i-1}^j, z_{i-1}(\lambda_i^j)$  et  $z_{i-1}(\lambda_i^{j+1})$  sont de signe contraire, donc aussi  $z_{i+1}(\lambda_i^j)$  et  $z_{i+1}(\lambda_i^{j+1})$ , et  $z_{i+1}$  a une racine comprise entre  $\lambda_i^j$  et  $\lambda_i^{j+1}$ . Par ailleurs,  $\lambda_i^{i-1} > \lambda_{i-1}^{i-2}$  implique

$$z_{i-1}(\lambda_i^{i-1}) > 0, \quad \text{donc } z_{i+1}(\lambda_i^{i-1}) < 0$$

et  $z_{i+1}$  a une racine réelle  $\lambda_{i+1}^i > \lambda_i^{i-1}$  et, de même, une racine  $\lambda_{i+1}^1 < \lambda_i^1$ .

Si  $z_1 = 0, z_0 > 0, z_2 = \frac{-\alpha'_1}{\alpha_1} z_0 < 0$  joue le rôle de  $z_1$  dans la démonstration précédente.

**COROLLAIRE 1.** —  $z_0 \geq 0$  et  $z_1 > 0$  étant fixés,  $z_i(\lambda) \geq 0$  quel que soit  $i \geq 0$  si et seulement si  $\lambda \geq \sup_{i \geq 2} \lambda_i^{i-1}$ .

La condition est suffisante d'après le lemme 1. Elle est nécessaire, car

$$z_2(\lambda) \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_2^1.$$

D'autre part,

$$z_{n+1}(\lambda) \geq 0 \quad \text{pour } \lambda \geq \lambda_{n+1}^n$$

et

$$z_{n+1}(\lambda) \leq 0 \quad \text{pour } \lambda_n^{n-1} \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}^n,$$

car

$$\lambda_{n+1}^{n-1} \leq \lambda_n^{n-1},$$

donc si  $z_i(\lambda) \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq n \Rightarrow \lambda \geq \lambda_n^{n-1}$ ,

$$z_i(\lambda) \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n+1 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_{n+1}^n.$$

Donc  $z_i(\lambda) \geq 0$  quel que soit  $i$  entraîne

$$\lambda \geq \sup_{i \geq 2} \lambda_i^{i-1}.$$

Soit

$$\lambda^+ = \sup_{i \geq 2} \lambda_i^{i-1}, \quad \lambda^- = \sup_{i \geq 1} \mu_{-i}^i,$$

où  $\mu_{-i}^i$  est la plus grande racine réelle du polynôme  $z_{-i}$  de degré  $i$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $z_i(\lambda) \geq 0$  quel que soit  $i$  est que  $z_1 \geq 0$ ,  $z_0 \geq 0$  et

$$\lambda \geq \sup(\lambda^+, \lambda^-) = \lambda_0.$$

Faisons maintenant varier  $z_0$  et  $z_1$ ; si  $z_1 = 0$ ,  $z_0 \geq 0$ ,

$$z_2 = \frac{\lambda z_1 - \alpha'_1 z_0}{\alpha_1}$$

ne peut être  $\geq 0$  que si  $z_0 = 0$ ; si  $z_1 > 0$ ,  $\lambda_i^{i-1}$ , donc  $\lambda_0$  ne dépend que du rapport  $\frac{z_0}{z_1}$ . De plus,

$$\lambda_0 \geq \lambda_2^1 = \frac{\alpha'_1 z_0}{z_1} \quad \text{et} \quad \lambda_0 \geq \mu_{-1}^1 = \frac{\alpha_0 z_1}{z_0}.$$

Pour  $\lambda$  fixé,  $z_i$  est une fonction linéaire de  $z_0$  et de  $z_1$ ;

$$z_i = a_i z_0 + b_i z_1;$$

$z_i \geq 0$ ,  $z_0 > 0$ ,  $z_1 > 0$  impliquent donc que le rapport  $\frac{z_0}{z_1}$  appartient à un intervalle de  $\mathbb{R}$  éventuellement infini et  $z_i \geq 0$  quel que soit  $i$  que  $\frac{z_0}{z_1}$  appartient à l'intersection de ces intervalles, c'est-à-dire à un intervalle  $[a(\lambda), b(\lambda)]$  nécessairement borné, puisque

$$\frac{\alpha_0}{\lambda_0} \leq \frac{z_0}{z_1} \leq \frac{\lambda_0}{\alpha'_1}.$$

On peut préciser les bornes de cet intervalle pour la valeur particulière  $\lambda = p$  : (3.1) s'écrit alors

$$\alpha_i(z_{i+1} - z_i) = \alpha'_i(z_i - z_{i-1});$$

on en déduit par un calcul simple que  $z_i \geq 0$  quel que soit  $i$  si et seulement si  $z_0 > 0, z_1 > 0$  et

$$a(p) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \leq \frac{z_0}{z_1} \leq \frac{1}{\sigma'} + 1 = b(p),$$

où

$$\sigma = \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{l-1} \frac{\alpha_{-k}}{\alpha'_{-k}}, \quad \sigma' = \sum_{l=1}^{\infty} \prod_{k=1}^l \frac{\alpha'_k}{\alpha_k}.$$

En particulier, si ces deux séries divergent,  $z_i = z_1 = z_0$  est la seule solution positive pour  $\lambda = p$ .

Il en résulte que si  $\lambda > p$ , l'intervalle  $[a(\lambda), b(\lambda)]$  contient  $l$ . Pour  $\lambda$  fixé, toute solution positive de (3.1) peut s'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients positifs des deux solutions correspondant à  $z_1 = 1, z_0 = a(\lambda)$  et  $z_1 = 1, z_0 = b(\lambda)$ .

Inversement, si  $\sigma = \sigma' = +\infty$ , alors  $\lambda_0 \geq 1$ ; en effet, on a

$$\lambda_0 \left( \frac{z_0}{z_1} \right) > p \quad \text{pour } z_0 \neq z_1,$$

puisque  $a(p) = b(p) = 1$ . Pour  $z_0 = z_1$ , en écrivant (3.1),

$$\alpha_i(z_{i+1} - z_i) = \alpha'_i(z_i - z_{i-1}) + (\lambda - p) z_i$$

on voit que

$$z_{l+1} - z_l \leq \prod_{i=2}^l \frac{\alpha'_i}{\alpha_i} (z_2 - z_1) = \prod_{i=2}^l \frac{\alpha'_i}{\alpha_i} \frac{(\lambda - p) z_1}{\alpha_1}$$

et, puisque  $\sigma = +\infty, z_{l+1} \rightarrow -\infty$  si  $\lambda < p$ . On a donc  $\lambda_0(1) \geq p$ .

**4. Étude de l'exemple du paragraphe 1.** — D'après les résultats du paragraphe 2, les éléments extrémaux de C sont pour un tel processus solution du système S des équations

$$(4.1) \quad \alpha_i z_{i+1,j} + \alpha'_i z_{i-1,j} = \lambda z_{i,j} \quad \forall i, j,$$

$$(4.2) \quad \beta_j z_{i,j+1} + \beta'_j z_{i,j-1} = \mu z_{i,j} \quad \forall i, j,$$

$$(4.3) \quad \lambda + \mu = 1 \quad \text{et} \quad z_{0,0} = 1,$$

où

$$\alpha_i + \alpha'_i = p \quad \text{et} \quad \beta_j + \beta'_j = 1 - p.$$

En fait, ces équations ne sont pas indépendantes et sont équivalentes au système des équations

$$(4.1) \quad \forall i, j,$$

$$(4.2) \quad i = 0, \quad i = 1 \quad \forall j.$$

$$(4.3)$$

D'après le paragraphe 3, pour  $j$  et  $\lambda$  fixés, une solution de (4.1) quel que soit  $i$  est caractérisée par la donnée de  $z_{0,j}, z_{1,j}$ . Ces nombres sont eux-mêmes caractérisés pour  $\mu = 1 - \lambda$  fixé comme solutions de (4.2) par la donnée de  $z_{0,0}, z_{0,1}, z_{1,0}, z_{1,1}$ . Donc on obtient une solution et une seule de S en se donnant  $\lambda, z_{0,0}, z_{0,1}, z_{1,0}, z_{1,1}$ .

Cherchons maintenant les solutions positives de S. Pour chaque valeur de  $\lambda$  comprise entre 0 et 1, l'ensemble des points  $(z_{0,1}, z_{1,0}, z_{1,1})$  qui déterminent une solution positive de S est un convexe fermé  $C_\lambda$  de  $\mathbb{R}^{+3}$  éventuellement vide. Une condition nécessaire pour que  $C_\lambda$  soit non vide est, d'après le paragraphe 3, que

$$(4.4) \quad \lambda_0 \left( \frac{1}{z_{1,0}} \right) \leq \lambda \leq 1 - \mu_0 \left( \frac{1}{z_{0,1}} \right).$$

Choisissons  $\lambda, z_{1,0}, z_{0,1}$  tels que (4.4) soit satisfaite et prenons

$$(4.5) \quad z_{1,1} = z_{1,0} z_{0,1}.$$

Alors on déduit de

$$\begin{aligned} \beta_j z_{0,j+1} + \beta'_j z_{0,j-1} &= \mu z_{0,j}, \\ \beta_j z_{1,j+1} + \beta'_j z_{1,j-1} &= \mu z_{1,j}, \\ \beta_j (z_{0,j+1} z_{1,j} - z_{1,j+1} z_{0,j}) &= \beta'_j (z_{0,j} z_{1,j-1} - z_{1,j} z_{0,j-1}). \end{aligned}$$

D'où

$$z_{0,j+1} z_{1,j} - z_{1,j+1} z_{0,j} = z_{0,1} z_{1,0} - z_{1,1} z_{0,0} = 0$$

et

$$\frac{z_{1,j+1}}{z_{0,j+1}} = \frac{z_{1,j}}{z_{0,j}} = z_{1,0}$$

et, de même,

$$\frac{z_{i+1,i}}{z_{i+1,0}} = \frac{z_{i,1}}{z_{i,0}} = z_{0,1}.$$

Il en résulte que (4.4) est la condition nécessaire et suffisante pour que la solution de S ainsi déterminée soit positive. On peut d'ailleurs mettre alors cette solution sous la forme  $z_{i,j} = x_i y_j$ , où

$$\begin{aligned} \alpha_i x_{i+1} + \alpha'_i x_{i-1} &= \lambda x_i, & x_0 &= y_0 = 1, \\ \beta_j y_{j+1} + \beta'_j y_{j-1} &= (1 - \lambda) y_j, & x_1 &= z_{1,0}, \quad y_1 = z_{0,1}. \end{aligned}$$

Donc si (4.4) est satisfaite, la droite  $x_1 = z_{1,0}$ ,  $x_2 = z_{0,1}$  coupe  $C_\lambda$  suivant un intervalle fermé non vide contenant  $x_3 = z_{1,0} z_{0,1}$ .

Discutons (4.4); on a vu au paragraphe 3 que

$$\lambda_0(1) \leq p \leq 1 - \mu_0(1);$$

on a donc

$$l_0 = \inf \lambda_0 \leq p \leq 1 - \inf \mu_0(1) = 1 - m_0.$$

Pour tout  $\lambda$  tel que  $l_0 \leq \lambda \leq 1 - m_0$ , il existe  $z_{1,0}$  et  $z_{0,1}$  satisfaisant (4.4); si  $l_0 < 1 - m_0$ , soit  $C_\lambda^0$  l'ensemble des éléments extrémaux de  $C_\lambda$  dans  $R^3$  et  $\Gamma$  l'ensemble de  $R^4$  défini par  $(x, y, z) \in C_\lambda^0$ ; on a vu au paragraphe 2 qu'on pouvait définir un homéomorphisme entre  $\Gamma$  et les éléments extrémaux de  $C$ .

Si  $l_0 = 1 - m_0 = p$  et si pour  $x \neq 1$ ,  $\lambda_0(x) > p$ ,  $\mu_0(x) > 1 - p$ , (On a vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour cela est que les quatre séries (4.6) ci-dessous divergent)

(4.4) implique  $\lambda = p$ ,  $z_{1,0} = z_{0,1} = 1$ , d'où  $z_{i,0} = 1$  quel que soit  $i$ , puis  $z_{i,j} = 1$  quel que soit  $i, j$ ; d'où le

**THÉORÈME 4.1.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que la frontière de la chaîne définie par (1.7) soit réduite à un seul point est que les quatre séries*

$$(4.6) \quad \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\alpha_{-k}}{\alpha'_k}, \quad \sum_{k=1}^l \frac{\alpha'_k}{\alpha_k}, \quad \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\beta_{-k}}{\beta'_k}, \quad \sum_{k=1}^l \frac{\beta'_k}{\beta_k}$$

*divergent.*

On voit que c'est le cas, en particulier, si  $\alpha_k = \alpha'_k$ ,  $\beta_k = \beta'_k$  (cas du processus homogène avec  $\sum_j J\Pi_j^j = 0$ ).

**5. Une condition suffisante pour que la frontière soit réduite à un point dans le cas où  $n = 1$ .** — Nous avons vu, au chapitre précédent que, pour un processus homogène, la condition nécessaire et suffisante pour que la frontière soit réduite à un point, était que l'espérance mathématique du pas  $\sum_{j \in \mathcal{J}} J\Pi_j^{j+1}$  soit nulle. L'étude du paragraphe 3 montre que cette condition n'est pas nécessaire, même pour  $n = 1$ , dans le cas général; nous allons montrer qu'elle est suffisante pour  $n = 1$  en utilisant le fait que  $\mathcal{G}$  est totalement ordonné (nous notons les éléments de  $\mathcal{G}$  par une petite lettre si  $n = 1$ ).



PROPOSITION 5.1. — Si  $n = 1$  et si  $\bigcup_0^{\infty} k\mathcal{J} = \mathcal{G}$ , alors

$$(5.1) \quad \sum_{i \in \mathcal{J}} \Pi_i^{i+j} Z_{i+j} = Z_i \quad \forall i \in \mathcal{G},$$

$$(5.2) \quad Z_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{G}; \quad Z_0 = 1,$$

$$(5.3) \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} j \Pi_i^{i+j} = 0, \quad \sum_{j \in \mathcal{J}} \Pi_i^{i+j} = 1,$$

$\Pi_i^{i+j} > 0$  si et seulement si  $j \in \mathcal{J}$ ,  $\forall i \in \mathcal{G}$ ,  
impliquent  $Z_i = 1 \quad \forall i \in \mathcal{G}$ .

*Démonstration.* — Soit

$$-\alpha = \inf(j : j \in \mathcal{J}), \quad \beta = \sup(j : j \in \mathcal{J}),$$

puisque  $\mathcal{J}$  engendre  $\mathcal{G}$ ,  $-\alpha < 0 < \beta$ .

Soit

$$v_i = \inf(v : Z_{i+j} - Z_i - jv \geq 0 \quad \forall j : -\alpha \leq j \leq 0),$$

il résulte de (5.3) qu'il existe  $k > 0$ ,  $k \in \mathcal{J}$  tel que

$$(5.4) \quad Z_{i+k} - Z_i - kv_i \leq 0.$$

Soit  $k_1$  le plus petit  $k > 0$  satisfaisant (5.4), on a

$$\begin{aligned} Z_{i+j} - Z_i - jv_i &\geq 0 \quad \text{pour } -\alpha \leq j \leq 0, \\ Z_{i+k_1} - Z_i - k_1v_i &\leq 0, \end{aligned}$$

d'où, pour  $-\alpha \leq j \leq 0$ ,

$$Z_{i+j} - Z_{i+k_1} - v_i(j - k_1) \geq 0$$

ou, en posant  $j - k_1 = l$ ,

$$(5.5) \quad Z_{i+k_1+l} - Z_{i+k_1} - v_i l \geq 0 \quad \text{pour } -k_1 - \alpha \leq l \leq -k_1.$$

On déduit aussi de (5.4)

$$Z_{i+k} - Z_{i+k_1} - v_i(k - k_1) \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq k_1,$$

où

$$(5.6) \quad Z_{i+k_1+l} - Z_{i+k_1} - v_i l \geq 0, \quad -k_1 \leq l \leq 0.$$

De (5.5) et de (5.6) on déduit

$$(5.7) \quad v_{i+k_1} \leq v_i.$$

On détermine ainsi une suite d'entiers  $k_n$  tels que  $0 < k_n < \beta$ ; si l'on

pose  $i + \sum_1^n k_j = i_n$ ,

$$v_{i_n} \leq v_{i_{n-1}}, \quad Z_{i_n} - Z_{i_{n-1}} - v_{i_{n-1}} k_n \leq 0.$$

D'où

$$Z_{i_n} - Z_i - \sum_0^{n-1} v_{i_j} k_{j+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad v_i \sum_1^n k_j \geq \sum_0^{n-1} v_{i_j} k_{j+1} \geq -Z_i,$$

d'où

$$v_i \geq \frac{-Z_i}{\sum_1^n k_j}$$

et en faisant  $n \rightarrow +\infty$ ,

(5.8)  $v_i \geq 0.$

Par définition de  $v_i$ , il existe  $j_1 \in \mathcal{J}$ , tel que

$$-\alpha \leq j_1 \leq 0, \quad Z_{i+j_1} - Z_i - v_i j_1 = 0$$

et  $j_1, j_2, \dots, j_n$  tels que

$$-\alpha \leq j_l \leq 0, \quad \sum_1^n j_l = k'_n$$

et

$$Z_{i+k'_n} - Z_{i+k'_{n-1}} - v_{i+k'_{n-1}} j_n = 0,$$

d'où

$$Z_{i+k'_n} - Z_i - \sum_{l=1}^n v_{i+k'_{l-1}} j_l = 0.$$

Posons

$$v_i^m = \inf(v_{i+j} : -\alpha \leq j \leq \beta).$$

Quel que soit  $k < 0$ , en appliquant à  $i + k$  la construction ci-dessus, on détermine  $n$  tel que

$$-\alpha \leq k + k_1 + \dots + k_n \leq \beta,$$

donc, en vertu de (5.7),

$$v_{i+k} \geq v_i^m.$$

D'où

$$v_i^m k'_n \geq \sum_1^n v_{i+k'_{l-1}} j_l = Z_{i+k'_n} - Z_i \geq -Z_i$$

et

$$v_i^m \leq \frac{Z_i}{-k_n},$$

d'où, en faisant tendre  $n$  vers l'infini,  $v_i^m \leq 0$  et compte tenu de (5.8),

$$v_i^m = 0.$$

Il existe donc  $i$  tel que  $v_i = 0$  et  $v_{i_n} = 0$  quel que soit  $n$ . D'où  $Z_{i_n} = Z_i$  quel que soit  $n$  [car l'inégalité stricte dans (5.4) implique l'inégalité stricte dans (5.7)]. On en déduit

$$Z_{i+j} \geq Z_i \quad \text{pour } -\alpha \leq j \leq k_1$$

puis pour  $-\alpha \leq j$ , d'où compte tenu de (5.3),  $Z_{i+j} = Z_i$  quel que soit  $j \geq -\alpha$  tel que  $j \in \bigcup_0^\infty n\mathcal{J}$ , et comme  $\bigcup_0^\infty n\mathcal{J} = \mathcal{G}$ , quel que soit  $j \geq -\alpha$ , donc quel que soit  $j$ .

**6. Étude d'une transformation qui conserve la frontière.** — Étant donnée une matrice  $\Pi$  de probabilité, nous cherchons à définir d'autres matrices  $P$  telles que

$$PZ = Z, \quad Z \geq 0 \iff \Pi Z = Z, \quad Z \geq 0.$$

PROPOSITION 6.1. — Si

$$(6.1) \quad P_i^j = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(I) \Pi_1^{n,j},$$

où

$$a_n(I) \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(I) = 1,$$

$$\Pi Z = Z, \quad Z \geq 0 \text{ entraîne } PZ = Z.$$

Cette proposition résulte immédiatement du fait que les sommations peuvent être permutées, puisque tous les termes sont positifs.

La transformation (6.1) admet l'interprétation suivante : considérons un jeu dont les coups sont indépendants, le résultat du  $(p+1)^{\text{ième}}$  coup étant  $J$  avec probabilité  $\Pi_1^j$  si celui du  $p^{\text{ième}}$  est  $I$ . Un joueur qui a joué le  $p^{\text{ième}}$  coup décide de rejouer au  $(p+n)^{\text{ième}}$  par un premier tirage au sort de répartition  $a_n(I)$ ; il joue ainsi à un nouveau jeu défini par  $P$ .

La proposition 6.1 admet une réciproque dans le cas particulier où  $a_n(I) = 0$  quel que soit  $n \geq 2$ .

PROPOSITION 6.2. — Si  $P_1 = a_0(I) \delta_1^1 + (1 - a_0(I)) \Pi_1$  [ $0 \leq a_0(I) < 1$ ]

$$PZ = Z, \quad Z \geq 0 \iff \Pi Z = Z, \quad Z \geq 0.$$

En effet,

$$Z_1 = a_0(I) Z_1 + (1 - a_0(I)) \sum_j \Pi_j^1 Z_j$$

entraîne

$$Z_1 = \sum_j \Pi_j^1 Z_j.$$

La proposition 6.1 admet aussi une réciproque en ce qui concerne les solutions bornées de  $\Pi Z = Z$ .

PROPOSITION 6.3. — Si

$$\sup_I \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n(I)}{1 - a_0(I)} < 1, \quad a_0(I) < 1, \quad PZ = Z,$$

$Z$  borné entraîne  $\Pi Z = Z$ .

Soit  $\Delta_n$  la matrice diagonale d'éléments  $a_n(I) \delta_1^1$ , (6.1) s'écrit

$$P = \sum_0^{\infty} \Delta_n \Pi^n, \quad \text{où} \quad \sum_0^{\infty} \Delta_n = I$$

et  $PZ = Z$  implique

$$\sum_0^{\infty} \Delta_n (\Pi^n - I) Z = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_1^{\infty} \Delta_n \sum_0^{n-1} \Pi^k (\Pi - I) Z = 0$$

ou

$$\left( (I - \Delta_0) + \sum_2^{\infty} \Delta_n \sum_1^{n-1} \Pi^k \right) (\Pi - I) Z = 0,$$

d'où

$$\left( I + (I - \Delta_0)^{-1} \sum_2^{\infty} \Delta_n \sum_1^{n-1} \Pi^k \right) (\Pi - I) Z = 0.$$

Soit

$$B = (I - \Delta_0)^{-1} \sum_2^{\infty} \Delta_n \sum_1^{n-1} \Pi^k$$

puisque

$$\|\Pi\| = 1, \quad \|\mathbf{B}\| \leq \sup_I \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n(I)}{1 - a_0(I)} < 1.$$

$I + \mathbf{B}$  est donc inversible et  $\Pi Z = Z$ .

Il est possible de préciser ces résultats quand  $a_n$  ne dépend pas de  $I$ ;  $\Delta_n$  commute alors avec  $\Pi$ . Cette transformation a été introduite par Cohen [1], [2].

PROPOSITION 6.4. — Si

$$P = \sum_0^{\infty} a_n \Pi^n, \quad a_n \geq 0, \quad \sum_0^{\infty} a_n = 1,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que  $PZ = Z$ ,  $Z \geq 0$  soit équivalent à  $\Pi Z = Z$ ,  $Z \geq 0$  quelle que soit la matrice de probabilité  $\Pi$ , est que l'équation  $\sum_0^{\infty} a_n z^n = 1$  admette  $z = 1$  comme seule racine de module 1 (ou encore que le P.G.C.D. des  $k$  tels que  $a_k > 0$  soit égal à 1).

La condition est nécessaire : soit  $\Pi^j = \delta_{i+j}^j$ ,

$$\Pi Z = Z \Leftrightarrow Z_{i+1} = Z_i;$$

$PZ = Z$  entraîne

$$(6.2) \quad \sum a_n Z_{i+n} = Z_i.$$

Si le P.G.C.D. des  $k$  tels que  $a_k > 0$  est égal à  $p$ , on obtient une solution de (6.2) en choisissant arbitrairement  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  et en prenant  $Z_{i+np} = Z_i$ .

La condition est suffisante : Soit  $Z \geq 0$  tel que  $PZ = Z$ ; on remarque que  $P$  et  $\Pi$  commutent; on a donc  $P\Pi^k Z = \Pi^k Z$  ou, en posant  $(\Pi^k Z)_I = Z_I U^k$ ,

$$(6.3) \quad \sum_0^{\infty} a_n U^{n+k} = U^k, \quad \text{avec } U^k \geq 0, \quad U^0 = 1.$$

On montre comme au chapitre précédent qu'un élément extrémal du cône défini par (6.3) satisfait  $U^j U^k = U^{j+k}$  quels que soient  $j, k$  tels que  $a_k \neq 0$  et comme le P.G.C.D. des  $a_k$  tels que  $a_k \neq 0$  est égal à 1,

$U^j = (u)^j$ , avec  $\sum_0^{\infty} a_n u^j = 1$ , d'où  $u = 1$  et  $(\Pi^k Z)_I = Z_I$  quels que soient  $I$  et  $k$ .

**7. Transformée d'un processus de naissance et de mort.** — Nous nous proposons dans ce paragraphe de déterminer tous les processus obtenus par une transformation de la forme

$$\Pi' = \sum_0^{\infty} a_n \Pi^n, \quad \sum_0^{\infty} a_n = 1, \quad a_n \geq 0,$$

quand  $\Pi$  est la matrice d'un processus homogène, de naissance et de mort.

Il s'agit donc, étant donné

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n = 1,$$

de savoir à quelles conditions il est possible de déterminer

$$a_l \geq 0, \quad \sum_0^{+\infty} a_l = 1,$$

et  $p, q, p \geq 0, q \geq 0$  tels que  $p + q = 1$  satisfaisant

$$(7.1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{ni\theta} = \sum_0^{+\infty} a_l (p e^{i\theta} + q e^{-i\theta})^l$$

ou

$$(7.2) \quad a_n = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C_{2l-n}^l p^l q^{l-n} a_{2l-n}$$

ou

$$(7.3) \quad a_n \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C_{2l-n}^l (pq)^{\frac{2l-n}{2}} a_{2l-n}$$

ou, en posant

$$(7.4) \quad \beta_n = a_n \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad b_l = a_l (pq)^{\frac{l}{2}},$$

$$(7.5) \quad \beta_n = \sum_{\substack{l \geq 0 \\ l \geq n}} C_{2l-n}^l b_{2l-n} = \sum_{l=0}^{\infty} A_n^l b_l,$$

avec

$$(7.6) \quad A_n^l = \begin{cases} 0 & \text{si } n - l \text{ est impair et si } l < |n|, \\ C_l^{\frac{l+n}{2}} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'où une première condition nécessaire

$$\beta_{-n} = \beta_n \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

ou

$$(7.7) \quad \sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}} = \frac{q}{p},$$

d'où

$$\beta_n = \beta_{-n} = \sqrt{\alpha_n \alpha_{-n}}.$$

Les  $A_n^l$  pour  $n \geq 0$ ,  $l \geq 0$  définissent une matrice  $A$  dont l'inverse à gauche,  $X$ , s'il existe satisfait

$$(7.8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} X_k^n A_n^l = \delta_k^l$$

ou, en tenant compte de (7.6),

$$(7.9) \quad \sum_{n=0}^l X_k^n C_l^{\frac{l+n}{2}} = \delta_k^l;$$

(7.9) implique  $X_k^n = 0$  pour  $n < k$  et pour  $n - k$  impair; d'où

$$(7.10) \quad X_k^k = 1$$

et, en posant  $l = k + 2r$ ,  $n = k + 2s$ ,

$$(7.11) \quad \sum_{s=0}^r C_{k+2r}^{r-s} X_k^{k+2s} = 0 \quad \text{pour } r > 0,$$

ce qui détermine de façon unique les  $X_k^n$  pour  $n \geq k$ .

On déduit d'ailleurs de

$$(7.12) \quad \sum_0^{k+2r} C_{k+2r}^s z^{s-r} = \frac{(1+z)^{k+2r}}{z^r},$$

$$(7.13) \quad \frac{d^k}{dz^k} \left[ \frac{(1+z)^{k+2r}}{z^r} \right] = \sum_0^{k+2r} C_{k+2r}^s (s-r) \dots (s-r-k+1) z^{s-r-k},$$

$$= \sum_0^r C_{k+2r}^s [(s-r) \dots (s-r-k+1) z^{s-r-k} + (r-s+k) \dots (r-s+1) z^{r-s}].$$

D'où, en faisant  $z = -1$ , le premier membre de (7.13) étant nul pour  $r > 0$  égal à  $k!$  pour  $r = 0$ ,

$$(7.14) \quad X_k^{k+2s} = \frac{s \dots (s+k-1)(-1)^s + (s+k) \dots (s+1)(-1)^s}{k!} \\ = (-1)^s \frac{(k+2s)(s+1) \dots (s+k-1)}{k!},$$

résultat qu'on aurait pu établir à partir de (7.1) en utilisant les polynomes de Tchebycheff.

$X$  est aussi un inverse à droite de  $A$ , en effet

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_n^l X_l^k = 0 \quad \text{si } n \leq k \quad \text{ou} \quad \text{si } k-n \text{ est impair,} \\ = A_n^n X_n^n = 1 \quad \text{si } n = k, \\ = \sum_0^q A_n^{n+2p} X_{n+2p}^{n+2q} \quad \text{si } k = n + 2q \quad (q \text{ entier } > 0), \\ = \sum_0^q C_{n+2p}^{n+p} \frac{(-1)^{q-p}}{(n+2p)!} (n+2q)(q-p+1) \dots (q+p+n-1) \\ = \frac{1}{(n+q)!} \sum_0^q C_{n+q}^r (2q+n-r) \dots (q-r+1)(-1)^r \\ - \frac{1}{(n+q-1)!} \sum_0^{q-1} C_{n+q-1}^r (2q+n-r-2) \dots (q-r)(-1)^r.$$

Or

$$(7.15) \quad \frac{1}{(n+q)!} \sum_0^q C_{n+q}^r (2q+n-r) \dots (q-r+1) z^{q-r} \\ = \frac{1}{(n+q)!} \frac{d^{n+q}}{dz^{n+q}} \left[ z^q \left( 1 + \frac{1}{z} \right)^{r+q} \right].$$

D'où

$$(7.16) \quad \frac{1}{(n+q)!} \sum_0^q C_{n+q}^r (2q+n-r) \dots (q-r+1)(-1)^r = 1$$

et

$$(7.17) \quad \sum_{l=0}^{\infty} A_n^l X_l^k = \delta_n^k.$$

Soit

$$(7.18) \quad b_k = \sum_{l=0}^{\infty} X_k^l \beta_l = \sum_{s=0}^{\infty} X_k^{k+2s} \beta_{k+2s},$$



$p$  et  $q$  étant déterminés par (7.7), distinguons deux cas :

a.  $p \neq q$  (on peut alors supposer  $p > q$ ). — De

$$|X_k^{k+2s}| \leq \frac{(k+2s)^k}{k!},$$

on déduit que

$$(7.19) \quad \sum_s |X_k^{k+2s}| \beta_{k+2s} \leq \sum_s \frac{(k+2s)^k}{k!} \alpha_{k+2s} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k+2s}{2}}$$

converge absolument. D'où

$$(7.20) \quad b'_k = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} X_k^{k+2s} C_{k+2r}^{k+r+s} b_{k+2r} = \sum_0^{\infty} \delta_0^r b_{k+2r} = b_k,$$

d'où l'unicité de la solution.

Par ailleurs, on déduit de (7.20)

$$(7.21) \quad |b'_k| \leq \sum_s \alpha_{k+2s} \frac{k^k e^{-k}}{k! \left(\log \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^k},$$

donc le rayon de convergence de  $\sum b'_k z^k$  est supérieur à  $\text{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$ . Supposons  $\beta_k$  choisi de façon que

$$(7.22) \quad b'_k = \sum_{s=0}^{\infty} X_k^{k+2s} \beta_{k+2s} \geq 0;$$

soient  $a'_k = b'_k (pq)^{-\frac{k}{2}}$  et  $R$  le rayon de convergence de  $\sum a'_k z^k$ .

Pour  $\frac{q}{p} < |z| < 1$  et  $\left|pz + \frac{q}{z}\right| < R$ ,

$$(7.23) \quad \sum_0^{\infty} \alpha_n \left[ z^n + \left(\frac{q}{pz}\right)^n \right] = \sum_0^{\infty} a'_n \left( pz + \frac{q}{z} \right)^n.$$

En effet,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \rho^k |X_k^{k+2s}| \beta_{k+2s} < \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \rho^k \frac{r^k}{k!} \alpha_r \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{2}} \leq \sum_{r=0}^{\infty} e^{\rho r} \alpha_r \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{2}}$$

est sommable pour  $\rho < \text{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$ .

(7.23) est donc valable pour

$$\left| pz + \frac{q}{z} \right| < \text{Log} \sqrt{\frac{p}{q}}$$

et, par prolongement, pour

$$\frac{q}{p} < |z| < 1 \quad \text{et} \quad \left| pz + \frac{q}{z} \right| < R.$$

Si  $z = r e^{i\theta}$ ,

$$\zeta = pz + \frac{q}{z} = \left( pr + \frac{q}{r} \right) \cos \theta + i \left( pr - \frac{q}{r} \right) \sin \theta$$

définit une correspondance biunivoque entre l'intérieur de l'ellipse à deux feuillettes de demi-axes 1 et  $p - q$  et la couronne  $\frac{q}{p} < |z| < 1$ .

Soit  $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  le premier membre de (7.23),  $\varphi(z) + \varphi\left(\frac{q}{pz}\right)$  définit une fonction de  $\zeta$  analytique à l'intérieur de l'ellipse de demi-axes 1 et  $p - q$ . On a alors

$$\psi(\zeta) = \sum_0^\infty a_n \zeta^n \quad \text{pour} \quad |\zeta| < R.$$

Si  $R$  était strictement inférieur à 1,  $\psi(\zeta)$  pourrait se prolonger le long de l'axe réel par une fonction totalement croissante ( $a_n \geq 0$ ) elle-même prolongeable analytiquement à l'intérieur du cercle  $|\zeta| \leq 1$ ; on a donc  $R \geq 1$ .

En faisant tendre  $z$  vers 1 dans (7.23), on obtient

$$\sum_0^\infty a'_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n = 1,$$

les deux conditions (7.7) et (7.22) sont donc, si  $p > q$ , des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité des  $a_i$ .

b.  $p = q$ . — Alors  $\beta_n = \alpha_n$ , mais la majoration fournie par (7.19) ne permet plus d'affirmer que  $\sum_s |X_k^{k+2s}| \alpha_{k+2s}$  converge. Or, si la série qui définit  $b'_k$  converge, celle qui définit  $b'_{k-2}$  converge absolument; en effet, elle a pour terme général

$$\begin{aligned} & (-1)^s (k + 2s - 2) (s + 1) \dots (s + k - 3) \alpha_{k+2(s-1)} \\ & = (-1)^{s'+1} (k + 2s') (s' + 2) \dots (s' + k - 2) \alpha_{k+2s'} \\ & = (-1)^{s'+1} \frac{(k + 2s') (s' + 1) \dots (s' + k - 1)}{(s' + 1) (s' + k - 1)} \alpha_{k+2s'}. \end{aligned}$$

L'exemple suivant montre que  $\sum_s X_k^{k+2s} \alpha_{k+2s}$  peut diverger. On a

$$(7.24) \quad 1 - \frac{2\theta}{\pi} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0} \frac{\cos(2p+1)\theta}{(2p+1)^2} \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

D'autre part, de

$$(7.25) \quad \text{Arc cos } u = \frac{\pi}{2} - \sum_0^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq u \leq 1)$$

on déduit

$$(7.26) \quad 1 - \frac{2\theta}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{(\cos \theta)^{2n+1}}{2n+1} \quad (0 \leq \theta \leq \pi).$$

La relation (7.1) est donc satisfaite par  $p = q = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n(2n+1)}, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha_{-(2n+1)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

et

$$X_k^{k+2s} \alpha_{k+2s} = (-1)^s \frac{4}{\pi^2} \frac{(s+1) \dots (s+k-1)}{k+2}$$

ne tend pas vers zéro si  $k \geq 2$ .

Étant donné les  $\alpha_i$  tels que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_i = \alpha_{-i},$$

la fonction

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + 2 \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos n\theta$$

est défini pour tout  $\theta$  réel. Par ailleurs,

$$\theta = \frac{\text{Log}(u + \sqrt{u^2 - 1})}{i}$$

est holomorphe à l'intérieur du cercle  $|u| < 1$  et prolonge Arc cos  $u$  si l'on prend la détermination du logarithme réelle pour  $u$  réel.

Si l'on pose

$$\frac{\pi}{2} - \theta = x + iy,$$

on a  $|u|^2 = \text{sh}^2 y + \sin^2 x$  et  $|u| < 1$  entraîne

$$\text{sh}^2 y + \sin^2 x < 1 \quad \text{ou} \quad |\text{sh } y| < |\cos x|,$$

ce qui définit un domaine D. Donc, si  $\varphi(\theta)$  peut être prolongée par une fonction holomorphe dans D,  $\psi(u) = \varphi(\theta(u))$  sera holomorphe à l'intérieur du cercle  $|u| < 1$  et de

$$\psi(u) = \sum_0^{\infty} a_n u^n,$$

on déduira

$$(7.27) \quad \alpha_0 + 2 \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos n\theta = \sum_0^{\infty} a_n (\cos\theta)^n,$$

les  $a_n$  étant donnés par

$$(7.28) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\psi(u) du}{u^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\theta) \sin\theta d\theta}{(\cos\theta)^{n+1}},$$

où  $\Gamma'$  est une courbe de D entourant  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Si les  $a_n$  ainsi déterminés sont  $\geq 0$ , en faisant tendre  $\theta$  vers zéro, on obtient

$$\sum_0^{\infty} a_n = \alpha_0 + 2 \sum_1^{\infty} \alpha_n = 1.$$

L'exemple suivant montre qu'on peut avoir

$$\alpha_n \geq 0, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n = 1$$

et que  $\varphi$  peut ne pas être analytique pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  : il suffit de remplacer  $\theta$  par  $2\theta$  dans (7.24)

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(4\nu+2)\theta}{(2\nu+1)^2} = \begin{cases} 1 - \frac{4\theta}{\pi} & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -3 + \frac{4\theta}{\pi} & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

En résumé, on a le

THÉORÈME 7.1. — *Étant donné*

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i = 1,$$

pour qu'il existe  $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$ , et

$$\alpha_i \geq 0 \quad \sum_0^{\infty} \alpha_i = 1,$$

tels que (7.1), il est nécessaire que

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}}$$

ne dépende pas de  $n$ . Alors

$$\frac{p}{q} = \sqrt[n]{\frac{\alpha_{-n}}{\alpha_n}}.$$

Si  $p \neq q$ , il est nécessaire et suffisant que

$$\forall k, \quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(k+2s)(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \sqrt{\alpha_{k+2s}\alpha_{-(k+2s)}} \geq 0$$

et alors on a la solution unique

$$\alpha_k = \frac{1}{(pq)^{\frac{k}{2}}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(k+2s)(s+1)\dots(s+k-1)}{k!} \sqrt{\alpha_{k+2s}\alpha_{-(k+2s)}}.$$

Si  $p = q = \frac{1}{2}$ , il est nécessaire et suffisant que la fonction

$$\varphi(\theta) = \alpha_0 + 2 \sum_1^{\infty} \alpha_n \cos n\theta$$

puissent être prolongée par une fonction holomorphe dans le domaine  $D$  défini par

$$\sin^2 \operatorname{Re}(\theta) + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Im}(\theta) < 1.$$

S'il en est ainsi, et si

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta^{k+1}} \geq 0,$$

où  $\Gamma$  est une courbe de  $D$  entourant le point  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors on a la solution unique

$$\alpha_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\theta) \sin \theta d\theta}{(\cos \theta)^{k+1}}.$$

#### BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III.

- [1] COHEN (J. W.), *On derived Markov chains with a discrete state space*, Mathematical Institute of the technological University, Delft, octobre 1960.  
 [2] COHEN (J. W.), *Application on derived Markov chains in queuing and inventory theory*, Mathematical Institute of the Technological University, Delft, octobre 1960.

- [3] FORSYTHE (G. E.) et WASOW (W. R.), *Finite difference methods for partial differential equations*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- [4] HENNEQUIN (P. L.), *Matrices de probabilité définissant la même frontière* (C. R. Acad. Sc., t. 252, 1961, p. 235-236).
- [5] KARLIN (S.) et MC GREGOR (J.), *The differential equations of birth and death processes and the Stieltjes moment problem* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 85, 1957, p. 489-546).
- [6] KARLIN (S.) et MC GREGOR (J.), *The classification of birth and death processes* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 86, 1958), p. 366-400).

(Manuscrit reçu le 20 avril 1962.)

---



## TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	109
Bibliographie de l'Introduction.....	113
CHAPITRE I.	
PROCESSUS EN CASCADE SUR $E_n$ .	
1. Notations et définitions.....	114
2. Exemples.....	116
3. Les opérateurs $\Pi$ et $\Pi^*$ .....	117
4. Étude des vecteurs propres de $\Pi$ .....	118
5. Propriétés des opérateurs $\Pi$ et $T_\lambda$ .....	120
6. Détermination de $\Pi$ à partir des $T_\lambda$ .....	121
7. Étude des ensembles de séjour.....	125
8. Trajectoires et ensembles de séjour.....	127
9. Ensembles de séjour et mesure définie par la chaîne sur $R^+$ .....	135
Bibliographie du chapitre I.....	136
CHAPITRE II.	
CHAÎNES DE MARKOFF EN CASCADE HOMOGÈNES SUR UN GROUPE COMMUTATIF.	
1. Définition.....	137
2. Caractérisation et construction.....	137
3. La frontière de Feller.....	140
4. Étude de $M$ quand $F = G$ .....	141
5. Étude de la frontière quand $F \neq G$ .....	148
6. Détermination des ensembles de séjour.....	152
7. Temps de séjour et temps d'atteinte.....	165
Bibliographie du chapitre II.....	169
CHAPITRE III.	
ÉTUDE DE LA FRONTIÈRE DE FELLER POUR DES CHAÎNES DE MARKOFF EN CASCADE NON HOMOGÈNES.	
1. Éléments extrémaux de $C$ et décomposition de $\Pi$ .....	170
2. Construction des éléments extrémaux de $C$ .....	172
3. Étude d'une marche au hasard sur la droite.....	175
4. Étude de l'exemple du paragraphe 1.....	177
5. Une condition suffisante pour que la frontière soit réduite à un point dans le cas où $n = 1$ .....	179
6. Étude d'une transformation qui conserve la frontière.....	182
7. Transformée d'un processus de naissance ou de mort.....	185
Bibliographie du chapitre III.....	192