ANNALES DE L'I. H. P.

LIANE BOUCHE

Étude d'une généralisation de la théorie du champ unifié relativiste d'Einstein-Schrödinger

Annales de l'I. H. P., tome 18, n° 1 (1963), p. 1-97
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1963__18_1_1_0>

Étude d'une généralisation de la théorie du champ unifié relativiste d'Einstein-Schrödinger

par

Mme Liane BOUCHE,

Institut Henri Poincaré (Paris).

INTRODUCTION.

La théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger a l'ambition de réunir dans un même hyperchamp géométrique d'une variété espace-temps à quatre dimensions, le champ gravitationnel et le champ électromagnétique. Les élements fondamentaux sont une connexion linéaire $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ et un tenseur deux fois covariant $g_{\mu\nu}$, qui interviennent dans un principe variationnel, donnant, par définition, les équations de la théorie.

Le lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\mu\nu},$$

$R_{\mu\nu}$ étant le tenseur de Ricci relatif à la connexion linéaire quelconque $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, et les équations de la théorie se partagent en équations de liaison :

$$\partial_{\rho} g_{\lambda\mu} - L^{\sigma}_{\lambda\rho} g_{\sigma\mu} - L^{\sigma}_{\rho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0 \tag{1}$$

et en équations du champ :

$$\partial_{\rho} \mathcal{G}^{\beta\rho}_{\vee} = 0, \tag{2}$$

$$R_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta}(L) - \frac{2}{3}(\partial_{\alpha}\Sigma_{\beta} - \partial_{\beta}\Sigma_{\alpha}) = 0. \tag{3}$$

Dans ces équations, une connexion linéaire $L^{\rho}_{\mu\nu}$ à vecteur de torsion nul et définissant le même parallélisme a été substituée à la connexion linéaire initiale ($W_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci correspondant). Le quadrivecteur Σ_{α} est un vecteur covariant arbitraire.

En outre, quatre identités de conservation lient $g_{\alpha\beta}$ et $W_{\alpha\beta}$, et jouent un rôle fondamental dans la résolution du problème de Cauchy (étudié par A. Lichnerowicz et F. Tison), ainsi que dans les études sur les équations du mouvement (faites par M.-A. Tonnelat).

C'est par le calcul des équations du mouvement que doit se révéler le sens physique de la théorie; or jusqu'ici toutes les tentatives ont abouti soit à des échecs complets, soit à des solutions physiquement inacceptables. Callaway [11] et Pham Tan Hoang [10] qui appliquent la méthode des singularités, trouvent une force de Newton, mais pas de force d'origine électromagnétique; Clauser [13], Treder [12] et A. Papapetrou [14] trouvent, en plus des forces de Newton et de Coulomb, une force dont le module est indépendant de la distance r de la particule d'épreuve à la singularité : ceci par le choix de la fonction biharmonique à symétrie sphérique la plus générale comme expression du potentiel électrostatique. Signalons également l'étude de W. B. Bonnor [15] qui, partant d'un lagrangien non classique

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + p^2 \mathcal{G}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta}, \qquad \varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}),$$

met en évidence la force Coulomb dans les hypothèses quasi statiques habituelles; M. Lenoir a montré qu'il était possible de donner un caractère géométrique à ce lagrangien [16].

Ce travail a été conduit dans l'espoir de trouver les équations du mouvement d'une particule chargée par une méthode analogue à celle qui les fournit dans le cas intérieur électromagnétique de la Relativité générale. Nous avons cherché à élaborer une théorie du type Einstein-Tonnelat ([3], note II) telle que les équations soient déduites d'un principe variationnel, mais en postulant, *a priori*, et c'est là son originalité, que la connexion initiale — notée $L^{\rho}_{\mu\nu}$ — est à *vecteur de torsion nul.*

Dans les théories du type Einstein-Schrödinger, les équations du champ s'écrivent

(A) $$W_{\mu\nu}(L) = A_{\mu\nu},$$

où $A_{\mu\nu}$ est un tenseur qui dépend de la théorie considérée. En relativité générale, les équations du cas intérieur sont

$$\text{(B)} \qquad S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} G = T_{\mu\nu},$$

$G_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci relatif à la connexion riemannienne déduite de la métrique hyperbolique normale $\gamma_{\mu\nu}$. Pour ramener une équation du type (A) à une équation du type (B), il s'agit donc, en principe, de choisir dans V_4 une métrique riemannienne $\gamma_{\mu\nu}$, puis de mettre en évidence dans la partie symétrique de $W_{\mu\nu}$ un terme $G_{\mu\nu}(\gamma)$. C'est l'idée développée par M.-A. Tonnelat dans un article du *Nuovo Cimento* ([9]).

Les équations du mouvement du cas intérieur en Relativité générale étant basées sur la condition de conservation déduite des équations (B)

$$\text{(C)} \qquad \nabla^{\nu} T_{\mu\nu} = 0 \qquad (\nabla^{\nu} = \gamma^{\nu\lambda}\nabla_{\lambda}),$$

on cherchera si l'équation (A), mise sous la forme (B) donne lieu à de telles conditions de conservation. Les calculs correspondants ne pourront se faire que d'une façon approchée, étant donné leur très grande complexité.

Le plan adopté pour ce travail est le suivant : dans une première partie, après avoir rappelé les principes généraux de la théorie du champ unifié, nous déduisons d'un principe variationnel les équations de la théorie particulière considérée. Le fait de partir d'une connexion linéaire à vecteur de torsion nul modifie les équations de liaison et entraîne la disparition des équations

$$(4) \qquad \partial_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\rho}_{\vee} = 0.$$

L'introduction d'un quadrivecteur covariant arbitraire Γ_{μ} — supposé éventuellement normé — est suggérée par la présence du quadrivecteur Σ_{μ} dans les équations du champ (3) de la théorie classique, et elle entraîne un nouveau groupe d'équations comportant la densité vectorielle $\partial_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\rho}_{\vee}$, dites équations aux Γ.

Les équations du champ sont plus complexes et comportent des termes plus nombreux qu'en théorie du champ unifié classique ; cependant nous avons étudié une modification possible de ces équations par l'apport d'un tenseur phénoménologique dans un nouveau lagrangien $\mathcal{L}_1$. Les équations de liaison et les équations aux Γ ne sont pas modifiées par cet apport (*cf.* [23]).

Nous avons réservé pour la fin de cette partie le calcul des identités de conservation qui se révèlent être les mêmes qu'en théorie classique; nous les avons déduites du principe variationnel, mais avons montré en appendice qu'elles découlent tout aussi bien des identités de Bianchi généralisées par E. Cartan pour le cas du tenseur de Ricci d'une variété à connexion linéaire quelconque (comme l'avait fait S. Mavridès dans le cas de la théorie du champ unifié classique [17]).

C'est en appendice que nous avons montré que le tenseur phénoménologique introduit par le nouveau lagrangien $\mathcal{L}_1$ vérifie aussi des identités de conservation qui le lient à $g_{\mu\nu}$, ceci par une méthode liée au principe variationnel.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du problème de Cauchy de façon à justifier le choix d'une métrique déterminée $\gamma_{\mu\nu}$ dans l'étude approchée des équations du champ. Nous retrouvons les trois cônes éaractéristiques étudiés par M^me^ Tison, mais, en plus, le quadrivecteur Γ est aussi un vecteur caractéristique (il ne doit pas se trouver dans le plan tangent de la surface de Cauchy pour que soient assurées l'existence et l'uicité des solutions) et il intervient une condition supplémentaire très complexe entre les données de Cauchy qui donne naissance à un nouveau cône caractéristique.

Ayant choisi la métrique

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu})$$

qui est une des métriques possibles puisque le cône

$$\gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = 0$$

est un cône caractéristique, nous aborderons dans la troisième partie l'étude approchée des équations du champ de façon à les mettre sous la forme (B) du cas intérieur de la Relativité générale. Nous séparons nettement la partie symétrique et la partie antisymétrique des équations et constatons, au deuxième ordre d'approximation, que la conservation du deuxième membre des équations symétriques écrites

$$S_{\mu\nu}(\gamma) = K_{\mu\nu} + o(\varepsilon^2)$$

est liée à la partie antisymétrique des équations. Ce fait est éclairé (appendice III de cette partie) par l'étude approchée des identités de conservation.

L'espoir de faire apparaître une force de Lorentz dans les équations approchées est donc réduit à néant dès que les équations antisymétriques du champ sont vérifiées. Nous verrons que l'introduction du tenseur phénoménologique $T_{\mu\nu}$ n'améliore pas la situation.

Les résultats de cette partie sont comparables à ceux de M.-A. Tonnelat [9]; certains termes sont identiques et le rapprochement a été fait dans l'appendice II.

En quatrième partie, nous avons calculé les coefficients de connexion linéaire et l'expression des équations du champ, en partant d'un tenseur fondamental qui présente les particularités entraînées par la considération d'un champ statique à symétrie sphérique au sens de A. Papapetrou. Les équations différentielles obtenues sont d'une très grande complexité et ne semblent pas se prêter à une résolution rigoureuse.

NOTATIONS ET SYMBOLES.

La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est admise.

Les indices grecs vont de 1 à 4.

Les indices latins vont de 1 à 3.

La dérivation se note $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

L'ndice 4 désigne la variable de temps.

Tenseurs associés. — Deux tenseurs du deuxième ordre, l'un covariant, l'autre contravariant seront notés par la même lettre d'appui s'ils sont associés ; c'est-à-dire si

$$t^{\alpha\rho}t_{\beta\rho} = t^{\rho\alpha}t_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \delta^\alpha_\beta = 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta \\ \delta^\alpha_\beta = 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \end{array}\right\} \text{c'est le symbole de Kronecker.}$$

Connexions linéaires. — Les symboles de dérivation covariante sont :

∇_ρ pour la connexion riemannienne $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ construite à partir de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$;

$;\rho$ pour la connexion linéaire $L^\rho_{\mu\nu}$ à vecteur de torsion nul,

$\cdot\rho$ pour la connexion linéaire $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ telle que $g_{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu};\rho} = 0$.

Le vecteur de torsion d'une connexion sera noté à l'aide d'un seul indice, par exemple :

$$L^\rho_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = L_\mu.$$

Tenseur de Ricci. — Pour la connexion riemannienne, il sera noté

$$G^\rho_{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} - \partial_\mu \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\mu \end{matrix} \right\},$$

et pour la connexion à vecteur de torsion nul :

$$W_{\lambda\mu\nu}^{\rho} = \partial_\nu L_{\lambda\mu}^{\rho} - \partial_\mu L_{\lambda\nu}^{\rho} + L_{\lambda\mu}^{\sigma} L_{\sigma\nu}^{\rho} - L_{\lambda\nu}^{\sigma} L_{\sigma\mu}^{\rho}.$$

* * *

La numérotation des paragraphes est continue; les chiffres entre parenthèses renvoient aux équations.

Les nombres entre crochets renvoient aux indications bibliographiques.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DU CHAMP ET IDENTITÉS DE CONSERVATION.

CHAPITRE I.

RAPPELS SUR LA THÉORIE CLASSIQUE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN.

1. **La variété fondamentale** V_4. — Nous supposons connues les généralités concernant les variétés à connexion affine [5]. Considérons, alors, une variété différentiable V_4 de classe c^2, c^4 par morceaux (¹) dite variété espace-temps, sur laquelle sont définis un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$ dit tenseur fondamental et indépendamment une connexion linéaire (²) quelconque $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$. L'hypothèse faite sur la classe de V_4 entraîne que les $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ sont c^0, c^2 par morceaux et les $g_{\alpha\beta}$, c^1, c^3 par morceaux d'après les formules de changement de coordonnées dans V_4. En outre $g_{\alpha\beta}$ doit vérifier les conditions suivantes :

(*a*) $$g = \text{dét}(g_{\alpha\beta}) \neq 0;$$

on dit que le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier;

(*b*) la forme *m* quadratique $\Phi(u) = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$

(¹) Ces conditions sont identiques à celles qui apparaissent dans la théorie des ondes hydrodynamiques.

(²) Sur le sens exact de ce terme, *cf.* [5], p. 7.

est non dégénérée de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs localement.

La première condition montre que $g_{\alpha\beta}$ admet un tenseur deux fois contravariant associé $g^{\alpha\beta}$ tel que

$$g^{\alpha\beta}\, g_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} = g^{\beta\alpha}\, g_{\gamma\alpha}.$$

Dans toute la suite, nous désignerons par la même lettre d'appui deux tenseurs associés, ainsi que le déterminant de la matrice des composantes du tenseur covariant.

2. Quelques propriétés des tenseurs déduits de $g_{\alpha\beta}$ par symétrisation et antisymétrisation. — Nous utilisons dans ce travail les notations de M.-A. Tonnelat et posons

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}) = g_{\underline{\alpha\beta}},$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}) = g_{\underset{\vee}{\alpha\beta}},$$

$$h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} + g^{\beta\alpha}) = g^{\underline{\alpha\beta}},$$

$$f^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} - g^{\beta\alpha}) = g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}.$$

L'hypothèse (b) entraîne la régularité des tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $h^{\alpha\beta}$.

Rappelons aussi, les formules permettant le passage de l'un de ces tenseurs aux autres ([3]), et les relations entre les déterminants correspondants :

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\nu\sigma}\gamma^{\rho\sigma}, \tag{2.1}$$

$$\gamma^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\rho}f^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}, \tag{2.2}$$

$$h^{\mu\nu} = \frac{\gamma}{g}\gamma^{\mu\nu} + \frac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma}\gamma_{\rho\sigma}, \tag{2.3}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{g}{h}h_{\mu\nu} + \frac{g}{f}f_{\mu\rho}f_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, \tag{2.4}$$

$$f_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\rho}\varphi^{\rho\sigma}, \tag{2.5}$$

$$\varphi^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + h^{\mu\rho}h^{\nu\sigma}f_{\rho\sigma}, \tag{2.6}$$

$$f^{\mu\nu} = \frac{\varphi}{g}\varphi^{\mu\nu} + \frac{\gamma}{g}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\rho\sigma}, \tag{2.7}$$

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{g}{f}f_{\mu\nu} + \frac{g}{h}h_{\mu\rho}h_{\nu\sigma}f^{\rho\sigma}, \tag{2.8}$$

$$g = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2}\gamma^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} \tag{2.9}$$

([3]) Pour les démonstrations, *voir* [4] (p. 255-258) et [7], (p. 237-241).

et notons enfin une dernière formule qui nous sera utile, démontrée par Mme Tonnelat ([3], Note I] :

$$\varphi\varphi^{\mu\tau}\varphi^{\nu\rho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma} = \delta_\sigma^\tau(g - \gamma - \varphi) - \gamma\gamma^{\mu\tau}\gamma^{\nu\rho}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\sigma\rho} \tag{2.10}$$

qui devient pour $\sigma = \tau$:

$$\varphi\varphi^{\mu\sigma}\varphi^{\nu\rho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma} = \gamma\gamma^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho}\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = 2(g - \gamma - \varphi). \tag{2.11}$$

3. **Principe variationnel et équations du champ.** — Comme en Relativité générale, on veut astreindre le tenseur fondamental donné et la connexion linéaire indépendante à vérifier des équations du champ, déduites d'un principe variationnel. C'est-à-dire : si l'on considère dans V_4 une chaîne différentiable C de dimension 4 et $\mathcal{L}$ un lagrangien, densité scalaire par hypothèse, permettant d'écrire l'intégrale

$$I = \int_C \mathcal{L}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

où $\mathcal{L}$ est fonction des $g_{\alpha\beta}$ et $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ ainsi que de leurs dérivées, on admet que les équations de la théorie sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que soit réalisé l'extrémum de l'intégrale I pour des variations quelconques du tenseur fondamental et de la connexion, astreintes seulement à s'annuler aux bords de C.

Par un calcul maintenant classique, on trouve alors les équations de la théorie d'Einstein-Schrödinger, pour laquelle on choisit

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta},$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci relatif à la connexion linéaire $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ quelconque, et où l'on a posé $\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,.\,g^{\alpha\beta}$. Les équations du champ s'écrivent

$$\text{(I)}\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} \equiv{}& \partial_\rho \mathcal{G}^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\mu\lambda} - \mathcal{G}^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\underline{\rho\lambda}} \\ ={}& -\frac{2}{3}\delta^\nu_\rho \mathcal{G}^{\mu\sigma}\Gamma_\sigma + \mathcal{G}^{\mu\nu}\Gamma_\rho \\ &\left(\partial_\rho \mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0\right); \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)}\qquad R_{\mu\nu} = 0.$$

Le premier groupe d'équations est appelé plus précisément groupe des équations de liaison : ce sont elles qui permettent de déterminer la connexion linéaire en fonction du tenseur fondamental; le second groupe contient les équations du champ proprement dites.

Ces équations peuvent se simplifier par un changement de connexion linéaire conservant le parallélisme. En effet, en posant

$$L^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\delta^{\rho}_{\mu}\Gamma_{\nu},$$

où le quadrivecteur Γ_{ν} est quelconque et

$$W_{\mu\nu} = \partial_{\rho} L^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} L^{\rho}_{\mu\rho} + L^{\lambda}_{\mu\nu} L^{\rho}_{\lambda\rho} - L^{\sigma}_{\mu\rho} L^{\rho}_{\sigma\nu},$$

les équations du champ deviennent

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \mathcal{G}^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_{\rho}\mathcal{G}^{\mu\nu} + L^{\mu}_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\lambda\nu} + L^{\nu}_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\mu\lambda} - \mathcal{G}^{\mu\nu} L^{\lambda}_{\underline{\rho\lambda}} = 0, \\ \partial_{\rho}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0, \qquad L_{\rho} = L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\rho\lambda}} = 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} W_{\underline{\mu\nu}} = 0, \\ W_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\rho]} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad W_{\mu\nu} = \frac{2}{3}(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu});$$

en posant

$$W_{[\underset{\vee}{\mu\nu},\rho]} = \partial_{\rho} W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \partial_{\mu} W_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \partial_{\nu} W_{\underset{\vee}{\rho\nu}}.$$

CHAPITRE II.

BASES D'UNE NOUVELLE THÉORIE DE MÊME TYPE.

4. **Idées directrices.** — En théorie d'Einstein-Schrödinger, tous les essais effectués en vue de trouver les équations du mouvement d'une particule d'épreuve pesante et chargée se sont révélés infructueux. Signalons les travaux de Callaway [11], Pham Tan Hoang [10], M.-A. Tonnelat [9]; et dernièremeut les essais de Treder [12] et Clauser [13] qui, eux, par la méthode des singularités, trouvent bien une force coulombienne mais en sus une force indépendante de la distance entre les particules.

Pensant avec M^me M.-A. Tonnelat que les difficultés rencontrées sont peut-être dues à la trop grande restriction imposée à la théorie par la condition $\partial_{\rho}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}} = 0$, nous avons élaboré une nouvelle théorie à partir d'un principe variationnel semblable au précédent, mais dont le lagrangien s'écrira *a priori* avec une connexion linéaire à vecteur de torsion nul que nous appellerons $L^{\rho}_{\mu\nu}$. De plus, comme la théorie classique peut faire intervenir un quadrivecteur quelconque Γ_{μ}, nous introduisons éventuellement ce quadrivecteur dans le lagrangien en lui imposant une condition de normalisation.

5. **Les éléments de base de cette nouvelle théorie.** — Nous nous plaçons dans une variété différentiable V_4, c^2, c^4 par morceaux, et nous définissons sur cette variété un tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, c^1, c^3 par morceaux, une connexion linéaire indépendante à vecteur de torsion nul $L^{\rho}_{\mu\nu}$, c^0, c^2 par morceaux et un quadrivecteur Γ_{μ} indépendant c^0, c^2 par morceaux. Comme en théorie d'Einstein-Schrödinger, $g_{\alpha\beta}$ devra vérifier les conditions (a) et (b) et les formules du paragraphe 2.

6. **Équations du champ.** — Le principe variationnel est identique à celui formulé au paragraphe 3 pour la théorie d'Einstein-Schrödinger, mais ici le lagrangien s'écrit (*cf.* [23])

$$\mathcal{L} = \mathcal{G}^{\mu\nu} W_{\mu\nu} + 2\sqrt{-g}\,\sigma^{\mu} L_{\mu} + \mathcal{G}^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} + \lambda\left(\mathcal{G}^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \alpha^2\sqrt{-g}\right),$$

où σ^{μ} est le multiplicateur de Lagrange introduit par la condition imposée *a priori* $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = L_{\mu} = 0$, où $\Theta_{\mu\nu}$ est un tenseur qui dépend uniquement du quadrivecteur Γ_{μ} et de ses dérivées, que nous prendrons explicitement de la forme suivante

$$\Theta_{\mu\nu} = p\,\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + q(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu})$$

(p et q étant des constantes scalaires).

Enfin, λ est le multiplicateur de Lagrange introduit par la condition de normalisation imposée *a priori* :

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} = \left|\vec{\Gamma}\right|^2 = -\alpha^2.$$

D'après les résultats classiques du principe des variations, les équations de la théorie s'écrivent :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &G^{\mu\nu}_{\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L^{\rho}_{\mu\nu}} - \partial_{\sigma}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\sigma} L^{\rho}_{\mu\nu})} = 0,\\ &\mathcal{L}_{\mu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma^{\mu}} \qquad\qquad\qquad\quad = 0;\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \pi^{\mu} \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{\mu}} - \partial_{\sigma} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\sigma} \Gamma_{\mu})} & = 0, \\ \mathrm{K} \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = 0; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \mathrm{J}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0.$$

Soit en explicitant, pour le premier groupe :

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^{\mu\nu}_{\rho} \equiv & -\partial_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\nu} + \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathrm{L}^{\lambda}_{\rho\lambda} - \mathcal{G}^{\mu\alpha} \mathrm{L}^{\nu}_{\rho\alpha} - \mathcal{G}^{\alpha\nu} \mathrm{L}^{\mu}_{\alpha\rho} \\ & + \delta^{\nu}_{\rho} \left(\partial_{\alpha} \mathcal{G}^{\mu\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathrm{L}^{\mu}_{\alpha\beta} \right) + \sqrt{-g}\, \sigma^{\mu} \delta^{\nu}_{\rho} - \sqrt{-g}\, \sigma^{\nu} \delta^{\mu}_{\rho} = 0, \end{aligned}$$

or, après contraction en ρ et μ, puis en ρ et μ, on obtient

$$\sqrt{-g}\, \sigma^{\nu} = \frac{2}{3} \mathcal{F}^{\nu}, \qquad \sqrt{-g}\, \sigma^{\mu} = -\partial_{\alpha} \mathcal{G}^{\mu\alpha} - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathrm{L}^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \mathcal{G}^{\mu\alpha} \mathrm{L}_{\alpha},$$

où l'on a posé

$$\mathcal{F}^{\mu} \equiv \partial_{\alpha} \mathcal{G}^{\overset{\mu\alpha}{\vee}}.$$

Si l'on remplace σ^{μ} et σ^{ν} par leurs expressions, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\mu\nu}_{+-;\rho} \equiv & \quad \partial_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\nu} - \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathrm{L}^{\lambda}_{\underline{\rho\lambda}} + \mathcal{G}^{\lambda\nu} \mathrm{L}^{\mu}_{\lambda\rho} + \mathcal{G}^{\mu\lambda} \mathrm{L}^{\nu}_{\rho\lambda} \\ & = -\frac{2}{3} \delta^{\mu}_{\rho} \mathcal{F}^{\nu} - \frac{2}{3} \delta^{\nu}_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\alpha} \mathrm{L}_{\alpha} + \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathrm{L}_{\rho}. \end{aligned}$$

Donc les équations de liaison (I) s'écrivent

$$\text{(I.}\alpha\text{)} \qquad \mathcal{G}^{\mu\nu}_{+-;\rho} = -\frac{2}{3} \delta^{\mu}_{\rho} \mathcal{F}^{\nu} - \frac{2}{3} \delta^{\nu}_{\rho} \mathcal{G}^{\mu\alpha} \mathrm{L}_{\alpha} + \mathcal{G}^{\mu\nu} \mathrm{L}_{\rho},$$

$$\text{(I.}\beta\text{)} \qquad \sqrt{-g}\, \sigma^{\mu} = \frac{2}{3} \mathcal{F}^{\mu},$$

$$\text{(I.}\gamma\text{)} \qquad \sqrt{-g}\, \mathrm{L}_{\rho} = 0.$$

Le groupe (II), ou équations aux Γ devient

$$\text{(II.}\alpha\text{)} \qquad (p + \lambda) \mathcal{G}^{\underline{\mu\alpha}} \Gamma_{\alpha} + q \mathcal{F}^{\mu} = 0,$$

$$\text{(II.}\beta\text{)} \qquad g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu} \Gamma_{\nu} + \alpha^{2} = 0.$$

Pour éliminer le multiplicateur de Lagrange λ des équations (II.α), multiplions en contractant par Γ_{μ} et en tenant compte de l'équation (II.β), il vient

$$-(p + \lambda) \alpha^{2} + q f^{\mu} \Gamma_{\mu} = 0$$

(avec, suivant les notations de M[me] M.-A. Tonnelat [3] :

$$f^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{F}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho \mathcal{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}}\Big),$$

d'où

$$\text{(II.1)} \qquad \lambda = -p + \frac{q}{\alpha^2} f^\mu \Gamma_\mu;$$

(II.α) s'écrit alors

$$\text{(II.2')} \qquad q\left[\frac{f^\rho \Gamma_\rho}{\alpha^2}\mathcal{G}^{\underline{\mu\alpha}}\Gamma_\alpha + \mathcal{F}^\mu\right] = 0,$$

Nous étudierons plus loin (chap. III), l'équivalence des systèmes (II.α, β) et (II. 1, 2').

Écrivons maintenant le groupe (III) des équations du champ :

$$W_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} + \lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}W - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Theta$$
$$- g_{\mu\nu}\sigma^\rho L_\rho - \frac{1}{2}\lambda g_{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}\Gamma_\rho\Gamma_\sigma + \alpha^2) = 0;$$

une multiplication contractée par $g^{\mu\nu}$ nous fournit la relation

$$-\frac{1}{2}[W + \Theta + 2\sigma^\rho L_\rho + \lambda(g^{\rho\sigma}\Gamma_\rho\Gamma_\sigma + \alpha^2)] = \sigma^\rho L_\rho + \frac{1}{2}\lambda\alpha^2,$$

d'où la nouvelle forme des équations du groupe (III)

$$\text{(III)} \quad W_{\mu\nu} + (p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu + q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + g_{\mu\nu}\left(\sigma^\rho L_\rho + \frac{1}{2}\lambda\alpha^2\right) = 0.$$

7. Modification des équations du champ par un apport phénoménologique. — Pour élargir éventuellement le cadre de cette théorie, nous introduirons, suivant l'exemple de D. Sciama [18] et W. B. Bonnor [15] un apport phénoménologique en prenant comme nouvelle fonction d'action

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \mathcal{L}_0$$

telle que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial g^{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu},$$

$T_{\mu\nu}$ étant le tenseur impulsion-énergie, asymétrique évidemment, relatif au milieu considéré. Mais ceci implique que $\mathcal{L}_0$ dépend d'une nouvelle variable de champ, par exemple le quadrivecteur ρ^α pour fixer les idées.

Les systèmes d'équations (I) et (II) ne se trouvent pas modifiés par cet apport, mais le système (III) devient

$$\text{(III.1)} \qquad W_{\mu\nu} + (p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu + q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + g_{\mu\nu}\left(\sigma^\rho L_\rho + \frac{1}{2}\lambda\alpha^2\right) = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T,$$

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial v^\alpha} - \partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma v^\alpha)} = 0.$$

8. Forme tensorielle des équations de liaison. — Remarquons tout d'abord que

$$\overset{\mu\,\nu}{\mathcal{G}}_{+-;\rho} \equiv \overset{\mu\,\nu}{\mathcal{G}}_{++;\rho} - 2\,\mathcal{G}^{\mu\lambda}S^\nu_{\rho\lambda},$$

où $S^\nu_{\rho\lambda} = \frac{1}{2}(L^\nu_{\rho\lambda} - L^\nu_{\lambda\rho})$ est le tenseur de torsion de la variété à connexion linéaire; d'autre part, $\mathcal{F}^\mu$ vérifie l'identité suivante :

$$\mathcal{F}^\mu \equiv \partial_\rho\mathcal{G}^{\overset{\mu\rho}{\vee}} \equiv \frac{1}{2}\left(\overset{\mu\,\rho}{\mathcal{G}}_{++;\rho} - \overset{\rho\,\mu}{\mathcal{G}}_{++;\rho}\right) - \mathcal{G}^{\overset{\mu\rho}{\vee}}L_\rho - \mathcal{G}^{\overset{\lambda\rho}{\vee}}S^\mu_{\lambda\rho}.$$

Or le deuxième membre de l'identité est une densité vectorielle, donc aussi le premier membre; le groupe d'équations (I.α) peut s'écrire

$$\overset{\mu\,\nu}{\mathcal{G}}_{++;\rho} = -\frac{2}{3}\delta^\mu_\rho\mathcal{F}^\nu + 2\,\mathcal{G}^{\mu\lambda}S^\nu_{\rho\lambda} - \frac{2}{3}\delta^\nu_\rho\mathcal{G}^{\mu\lambda}L_\lambda + \mathcal{G}^{\mu\nu}L_\rho.$$

Remarquons que ces équations ne possèdent pas la propriété de pseudo-hermiticité.

CHAPITRE III.

ÉTUDE PLUS DÉTAILLÉE DES TROIS GROUPES D'ÉQUATIONS.

9. Le groupe d'équations (I) ou équations de liaison. — Rappelons que ces équations s'écrivent

$$\text{(I.}\alpha\text{)} \qquad \overset{\mu\,\nu}{\mathcal{G}}_{+-;\rho} = -\frac{2}{3}\delta^\mu_\rho\mathcal{F}^\nu - \frac{2}{3}\delta^\nu_\rho\mathcal{G}^{\mu\rho}L_\rho + \mathcal{G}^{\mu\nu}L_\rho,$$

$$\text{(I.}\beta\text{)} \qquad \sqrt{-g}\,\sigma^\mu = \frac{2}{3}\mathcal{F}^\mu,$$

$$\text{(I.}\gamma\text{)} \qquad \sqrt{-g}\,L_\rho = 0.$$

Disons tout de suite qu'en vertu de l'hypothèse (a) du paragraphe I, g n'est jamais nul; (I.γ) se réduit à $L_\rho = 0$. Si nous portons ces quatre conditions dans le système (I.α) le nouveau système formé (I.1) entraîne réciproquement la nullité du vecteur de torsion de la connexion linéaire $L^{\nu}_{\mu\nu}$. En effet écrivons,

$$\mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} = -\frac{2}{3}\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu}; \tag{I.1}$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\rho}}{}_{;\rho} - \mathcal{G}^{\underset{+-}{\rho\mu}}{}_{;\rho}\right) \equiv \mathcal{F}^{\mu} - \mathcal{G}^{\underline{\mu\rho}} L_\rho = \mathcal{F}^{\mu}$$

ou encore

$$\mathcal{G}^{\underline{\mu\rho}} L_\rho = 0. \tag{9.1}$$

C'est un système linéaire, homogène de quatre équations à quatre inconnues L_ρ, dont le déterminant $\frac{g^2}{h}$ n'est pas nul d'après les hypothèses (a) et (b), donc (9.1) est équivalent aux quatre équations

$$L_\rho = 0.$$

Les équations du groupe (I) peuvent donc s'écrire

$$\mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} = -\frac{2}{3}\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu} \qquad (L_\rho = 0), \tag{I.1}$$

$$\sqrt{-g}\,\sigma^{\mu} = \frac{2}{3}\mathcal{F}^{\mu}. \tag{I.2}$$

10. Changement de connexion ([1]). — Pour pouvoir utiliser les résultats de Mme Tonnelat sur le calcul de la connexion linéaire en fonction du tenseur fondamental en théorie d'Einstein-Schrödinger [8], faisons un changement de connexion linéaire tel que la dérivée covariante $+-$ du tenseur fondamental dans cette nouvelle connexion soit nulle.

Nous voulons donc, étant donnée une connexion linéaire $L^{\rho}_{\mu\nu}$ *vérifiant le groupe d'équations* (I.1) calculer une nouvelle connexion linéaire $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ telle que l'équation (10.1) ci-après soit identiquement vérifiée quand on remplace les $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ par leurs expressions en fonction des $L^{\rho}_{\mu\nu}$:

$$g^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Delta^{\mu}_{\lambda\rho} g^{\lambda\nu} + \Delta^{\nu}_{\rho\lambda} g^{\mu\lambda} = 0. \tag{10.1}$$

([1]) *Cf.* [3], Note II.

Remarquons que le système d'équations (I.1) peut facilement se mettre sous la forme équivalente

$$(10.2) \qquad \partial_\rho g^{\mu\nu} + L^{\mu}_{\lambda\rho} g^{\lambda\nu} + L^{\nu}_{\rho\lambda} g^{\mu\lambda} = -\frac{2}{3}\delta^{\mu}_{\rho} f^{\nu} + \frac{1}{3} g^{\mu\nu} g_{\rho\lambda} f^{\lambda}.$$

Si nous posons $X^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta^{\rho}_{\mu\nu} - L^{\rho}_{\mu\nu}$, il vient identiquement si $L^{\rho}_{\mu\nu}$ est solutions de (I.1) (ou de 10.2)

$$(10.3) \qquad X^{\nu}_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g^{\lambda\nu} X^{\mu}_{\lambda\rho} \equiv \frac{2}{3} g_{\rho\sigma} f^{\nu} - \frac{1}{3}\delta^{\nu}_{\sigma} g_{\rho\lambda} f^{\lambda}.$$

On voit alors qu'il convient de chercher une solution de la forme suivante :

$$(10.4) \qquad X^{\nu}_{\rho\sigma} = \delta^{\nu}_{\sigma} A_\rho + \delta^{\nu}_{\rho} B_\sigma + g_{\rho\sigma} C^{\nu};$$

en identifiant entre eux les termes facteurs de δ^{ν}_{σ}, δ^{ν}_{ρ} et $g_{\rho\sigma}$ dans (10.3) après avoir remplacé les $X^{\nu}_{\rho\sigma}$ par leur expression (10.4), on trouve un système de douze équations :

$$\begin{aligned}
&A_\rho - \frac{2}{3} g_{\rho\lambda} f^{\lambda} + g_{\rho\lambda} C^{\lambda} = 0,\\
&B_\sigma + A_\sigma + \frac{1}{3} g_{\sigma\lambda} f^{\lambda} \qquad = 0,\\
&C^{\nu} + g^{\nu\lambda} B_\lambda \qquad\qquad = 0,
\end{aligned}$$

Soit après un calcul immédiat :

$$\begin{aligned}
&A_\rho = g_{\rho\lambda}\left(\frac{1}{6} f^{\lambda} - \frac{1}{2} f^{\bar\lambda}\right),\\
&B_\sigma = -\frac{1}{2} g_{\lambda\sigma}\left(f^{\lambda} + f^{\bar\lambda}\right),\\
&C^{\nu} = \frac{1}{2}\left(f^{\nu} + f^{\bar\nu}\right).
\end{aligned}$$

A condition de poser

$$f_\sigma = \gamma_{\sigma\lambda} f^{\lambda}, \qquad f_{\bar\sigma} = \varphi_{\sigma\lambda} f^{\lambda}, \qquad f^{\bar\sigma} = \gamma^{\sigma\lambda} f_{\bar\lambda}.$$

Donc le groupe d'équations (I.1) conduit aux groupes d'équations (10.5) et (10.6) :

$$(10.5) \qquad g^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Delta^{\mu}_{\lambda\rho} g^{\lambda\nu} + \Delta^{\nu}_{\rho\lambda} g^{\mu\lambda} = 0,$$

$$\begin{aligned}
(10.6) \qquad L^{\rho}_{\mu\nu} = \Delta^{\rho}_{\mu\nu} &- \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(f^{\rho} + f^{\bar\rho}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu} g_{\nu\lambda}\left(f^{\lambda} - f^{\bar\lambda}\right) - \delta^{\rho}_{\nu} g_{\mu\lambda}\left(\frac{1}{6} f^{\lambda} - \frac{1}{2} f^{\bar\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Réciproquement, vérifions que le système d'équations (10.5), (10.6) est équivalent au système (I. 1) quand on élimine $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$. Écrivons en effet

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}_{+-;\rho} = & -\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\rho}(f^{\mu}+f^{\bar{\mu}}) - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}(f^{\nu}+f^{\bar{\nu}}) \\ & + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}(f^{\sigma}-f^{\bar{\sigma}}) + \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\rho}(f^{\mu}+f^{\bar{\mu}}) \\ & - \delta^{\mu}_{\rho}\left(\frac{1}{6}f^{\nu}-\frac{1}{2}f^{\bar{\nu}}\right) - g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{6}f^{\sigma}-\frac{1}{2}f^{\bar{\sigma}}\right) \end{aligned}$$

(remarquons que $g_{\mu\nu}(f^{\nu}-f^{\bar{\nu}}) = g_{\nu\mu}(f^{\nu}+f^{\bar{\nu}})$) ou par simplification

$$g^{\mu\nu}_{+-;\rho} = -\frac{2}{3}\delta^{\mu}_{\rho}f^{\nu} + \frac{1}{3}g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}f^{\sigma};$$

nous retrouvons un système d'équations équivalent à (I. 1). Écrivons les parties symétriques et antisymétriques de (10.6) :

$$L^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} = \Delta^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f^{\rho}+f^{\bar{\rho}}) + \frac{1}{6}\left(\delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu\lambda} + \delta^{\rho}_{\nu}g_{\mu\lambda}\right)f^{\lambda};$$

si l'on contracte les ν et ρ :

$$(10.7)\qquad \begin{cases} L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \Delta^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} - \frac{1}{2}(f_{\mu}+f_{\bar{\mu}}) + \frac{5}{6}(f_{\mu}+f_{\bar{\mu}}), \\ L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \Delta^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} + \frac{1}{3}(f_{\mu}+f_{\bar{\mu}}); \end{cases}$$

or (10.5) entraine que

$$\Delta^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \frac{\partial_{\mu}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}.$$

on trouve donc ainsi l'expression de $L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}}$ en fonction du tenseur fondamental et de ses dérivées, expression qu'on aurait d'ailleurs pu facilement tirer directement des équations (I. 1)

$$(10.8)\qquad L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \frac{\partial_{\mu}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \frac{1}{3}(f_{\mu}+f_{\bar{\mu}}).$$

La partie antisymétrique de (10.6) s'écrit

$$L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = \Delta^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}(f^{\rho}+f^{\bar{\rho}}) + \left(\delta^{\rho}_{\mu}g_{\nu\lambda} - \delta^{\rho}_{\nu}g_{\mu\lambda}\right)\left(\frac{1}{3}f^{\lambda} - \frac{1}{2}f^{\bar{\lambda}}\right).$$

Contractons en ν et ρ, il vient

$$(10.9)\qquad \begin{cases} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu}\rho} = \Delta^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu}\rho} - f_{\mu} + \frac{3}{2}\varphi_{\mu\rho}f^{\bar{\rho}} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\rho}f^{\bar{\rho}}, \\ \mathrm{L}_{\mu} = \Delta_{\mu} - f_{\mu} + f_{\bar{\bar{\mu}}}. \end{cases}$$

en posant

$$f_{\bar{\bar{\mu}}} = \varphi_{\mu\lambda}f^{\bar{\lambda}};$$

or l'équation (10.5) entraîne

$$f^{\mu} - \underline{g}^{\mu\lambda}\Delta_{\lambda} = 0, \qquad \text{soit} \quad \Delta_{\sigma} = h_{\mu\sigma}f^{\mu},$$

mais d'après (2.1), nous savons que $h_{\mu\sigma}f^{\sigma} = f_{\mu} - f_{\bar{\bar{\mu}}}$, donc

$$(10.10)\qquad \Delta_{\sigma} = f_{\sigma} - f_{\bar{\bar{\sigma}}}.$$

Cette équation (10.10) est une conséquence de la seule équation (10.5) (calcul fait par M[me] M.-A. Tonnelat [3], p. 39). Donc, des équations (10.9) et (10.10) déduites de (10.6) et (10.5) respectivement, on déduit la nullité du quadrivecteur L_{μ}.

Ceci était à prévoir, bien entendu, puisqu'on a montré que les systèmes (10.5), (10.6) et (I.1) étaient équivalents et que $\mathrm{L}_{\mu} = 0$ est une conséquence de (I.1).

11. Le groupe d'équations (II) ou équations aux Γ. — Initialement, ce groupe s'écrit

$$(\mathrm{II}.\alpha)\qquad (p+\lambda)\underline{\mathcal{G}}^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha} + q\mathcal{F}^{\mu} = 0,$$

$$(\mathrm{II}.\beta)\qquad g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \alpha^{2} = 0.$$

Nous avons vu que ce système pouvait être remplacé par le système suivant :

$$(\mathrm{II}.1)\qquad \lambda = -p + \frac{q}{\alpha^{2}}f^{\rho}\Gamma_{\rho}.$$

$$(\mathrm{II}.2')\qquad q\left[\frac{1}{\alpha^{2}}f^{\rho}\Gamma_{\rho}\underline{\mathcal{G}}^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha} + \mathcal{F}^{\mu}\right] = 0$$

moyennant une multiplication contractée par Γ_{μ} et une division par α^{2}. La nullité de Γ_{μ} entraîne celle de α^{2} (équations (II.β)) et pour que le système (II.1, 2′) soit une conséquence de (II.α, β) il faut et il suffit que α^{2} ne soit pas nul.

Étudions maintenant le cas particulier $\alpha^2 = 0$, en mettant en évidence les différentes possibilités :

D'abord si $\lambda = -p$, les variations de λ sont nulles partout et l'équation (II.β) obtenue par le principe variationnel n'est plus valable, le groupe (II) se réduit aux équations

$$q\mathcal{F}^{\mu} = 0; \tag{II.1}$$

Si $q = 0$ le quadrivecteur Γ_{μ} n'intervient pas dans les équations du champ et aucune restriction n'est imposée à $\mathcal{F}^{\mu}$;

Si $q \neq 0$, l'équation (II.1) devient $\mathcal{F}^{\mu} = 0$; nous sommes ramenés à la théorie du champ unifié habituelle à condition de prendre comme vecteur de torsion de la connexion linéaire $\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu}$ initiale,

$$\Gamma'_{\mu} = \frac{3}{2} q \Gamma_{\mu}.$$

Supposons maintenant λ *quelconque;* l'équation (II.β) est alors valable et (II.α) entraîne, si Γ_{μ} n'est pas nul :

$$q\mathcal{F}^{\mu}\Gamma_{\mu} = 0; \tag{II.2}$$

donc, les différents cas qui se présentent sont :

a. $\Gamma_{\mu} = 0$, alors (II.α) montre que $q\mathcal{F}^{\mu} = 0$:

si $q = 0$ aucune restriction n'est imposée à $\mathcal{F}^{\mu}$;

si $q \neq 0$, nous obtenons $\mathcal{F}^{\mu} = 0$ comme équation supplémentaire.

b. $\Gamma_{\mu} \neq 0$, (II.2) doit alors être vérifiée, ce qui entraîne :

si $q = 0$, $\lambda = -p$ à cause de (II.α) : nous sommes ramenés au premier cas;

si $q \neq 0$, $\mathcal{F}^{\mu}\Gamma_{\mu} = 0$, et si $\mathcal{F}^{\mu}$ était nul nous serions ramenés au deuxième cas; si $\mathcal{F}^{\mu}$ n'est pas nul, c'est un quadrivecteur isotrope colinéaire à Γ.

En résumé, nous trouvons pour α^2 nul :

$\lambda = -p$		λ quelconque		
$q = 0$	$q \neq 0$	$q = 0$	$q \neq 0$	$q \neq 0$
$\mathcal{F}^{\mu}$ non restreint	$\mathcal{F}^{\mu} = 0$	$\mathcal{F}^{\mu}$ non restreint	$\mathcal{F}^{\mu}\Gamma_{\mu} = 0$	$\mathcal{F}^{\mu} = 0$
Γ_{μ} disparaît	Γ_{μ} quelconque	$\Gamma_{\mu} = 0$	$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} = 0$	$\Gamma_{\mu} = 0$

Dans tous les cas où α^2 n'est pas nul, le système (II.1, 2') est une conséquence de (II.α, β). Si q est nul, (II.1) ou (II.α) montre que l'égalité $\lambda = -p$ est satisfaite; Γ_μ disparaît des équations du champ et $\mathcal{F}^\mu$ est non restreint.

Si q n'est pas nul, le système (II.1, 2') s'écrit

$$\lambda = -p + \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho, \tag{II.1}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho \overset{\mu\alpha}{g} \Gamma_\alpha + f^\mu = 0, \tag{II.2}$$

$$q \neq 0. \tag{II.3}$$

Si nous considérons les équations (II.2) comme un système linéaire et homogène par rapport aux quatre inconnues f^μ, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe d'autres solutions que la solution triviale $f^\mu = 0$ (que nous voulons éviter, puisque nous voulons élargir les conditions de la théorie du champ unifié classique).

Or le système (II.2) montre déjà qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f^μ ne soit pas nul est que $f^\rho \Gamma_\rho$ ne le soit pas, d'autre part d'après (II.1) et (II.3) une condition nécessaire et suffisante pour que $f^\rho \Gamma_\rho$ ne soit pas nul est que λ soit différent de $-p$, or ceci est une condition nécessaire et suffisante, nous l'avons vu, pour que l'équation (II.β) soit vérifiée, et celle-ci ne dépend que du tenseur fondamental et du quadrivecteur Γ_μ, son premier membre est donc proportionnel au déterminant du système (II.2).

Remarquons que dans le cas où l'équation (II.β)

$$g^{\mu\nu} \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \alpha^2 = 0$$

est vérifiée, il est impossible d'annuler le quadrivecteur f^μ sauf en des points isolés.

11. Les équations du champ. — Celles-ci s'écrivent comme nous l'avons vu

$$W_{\mu\nu} + (p + \lambda) \Gamma_\mu \Gamma_\nu + q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) + g_{\mu\nu}\left(\sigma^\rho L_\rho + \frac{1}{2}\lambda\alpha^2\right) = 0$$

ou encore en tenant compte des équations (II.2) et (I.1) :

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} &+ \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho \Gamma_\mu \Gamma_\nu \\ &+ q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Si l'on pose $q = -\frac{2}{3}$, $\lambda = p = 0$, les équations (II.1) et (II.2) entraînent $f^\mu = 0$ et les équations (I) et (II) sont alors celles de la théorie habituelle du champ unifié d'Einstein.

Si l'on pose simplement $\lambda = -p$ et $q = -\frac{2}{3}$, les équations (II.1) et (II.2) entraînent encore $f^\mu = 0$; le système (I) est le même que dans la théorie du champ unifié d'Einstein classique, mais le système des équations du champ (III) est modifié par l'apport d'un terme cosmologique, si α^2 n'est pas nul.

CHAPITRE IV.

IDENTITÉS DE CONSERVATION.

13. **Première forme.** — Le procédé variationnel conduit à des équations invariantes par changement de coordonnées admissibles et les premiers membres satisfont automatiquement à quatre identités de conservation que nous allons former suivant l'exemple de A. Lichnerowicz ([4], p. 270) par une méthode dont le principe remonte à Hermann Weyl.

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{C}} (\mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathrm{W}_{\alpha\beta} + 2\sqrt{-g}\, \sigma^\mu \mathrm{L}_\mu)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

et sur la chaîne C à quatre dimensions un champ de vecteurs arbitraires ξ^ρ nuls au bord de C. Ce champ définit une transformation infinitésimale; nous noterons par X(K) la dérivée de Lie de la quantité K. Et par définition

$$\mathrm{X}(\mathrm{I}) = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{X}[(\mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathrm{W}_{\alpha\beta} + 2\sqrt{-g}\, \sigma^\mu \mathrm{L}_\mu)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4].$$

Or on sait que cela devient ([4], p. 252 et [3], p. 34)

$$\mathrm{X}(\mathrm{I}) = \int_{\mathrm{C}} \partial_\rho [\xi^\rho (\mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathrm{W}_{\alpha\beta} + 2\sqrt{-g}\, \sigma^\mu \mathrm{L}_\mu)]\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

Donc $\mathrm{X}(\mathrm{I}) = 0$, puisque par la formule de Stokes on transforme cette intégrale en une intégrale étendue au bord de C qui est nulle puisque sur $\partial\mathrm{C}$, $\xi^\rho = 0$ d'après les hypothèses faites.

On peut écrire X(I) de la façon suivante :

$$X(I) = \int_C [X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) W_{\alpha\beta} + 2X(\sqrt{-g})\sigma^\mu L_\mu]\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$
$$+\int_C [\mathcal{G}^{\alpha\beta} X(W_{\alpha\beta}) + 2\sqrt{-g}\,\sigma^\mu X(L_\mu)$$
$$+ 2\sqrt{-g}\,L_\mu X(\sigma^\mu)]\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

Si l'on considère que $g^{\alpha\beta}$ et $L^\rho_{\mu\nu}$ vérifient les équations (I) et si le champ de vecteurs ξ^ρ s'annule au bord de C ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres (ce qui entraîne que $X(L^\rho_{\mu\nu})$ s'annule aussi au bord de C), alors on a

$$X(I) = \int_C X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) W_{\alpha\beta}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

mais

$$X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) = \partial_\rho(\xi^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta}) - \mathcal{G}^{\alpha\rho}\partial_\rho \xi^\beta - \mathcal{G}^{\rho\beta}\partial_\rho \xi^\alpha,$$

donc

$$X(I) = \int_C \{\partial_\rho[(\xi^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \mathcal{G}^{\alpha\rho}\xi^\beta - \mathcal{G}^{\beta\rho}\xi^\alpha) W_{\alpha\beta}]$$
$$-\xi^\rho[\mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_\rho W_{\alpha\beta} - \partial_\mu(\mathcal{G}^{\alpha\mu}W_{\alpha\rho} + \mathcal{G}^{\mu\alpha}W_{\rho\alpha})]\}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4.$$

Le premier terme peut se transformer en une intégrale étendue au bord de C par la formule de Stokes et s'annule sous les hypothèses faites. Le deuxième terme doit être nul quel que soit le champ de vecteurs ξ^ρ, donc on a identiquement, si le système (I) est vérifié :

$$\partial_\mu(\mathcal{G}^{\mu\nu}W_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu}W_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_\rho W_{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{13.1}$$

Si l'on pose

$$\mathcal{K}^\mu_\rho = \frac{1}{2}(\mathcal{G}^{\mu\nu}W_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu}W_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}\delta^\mu_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta},$$

les identités s'écrivent

$$\partial_\mu \mathcal{K}^\mu_\rho + \frac{1}{2}W_{\alpha\beta}\,\partial_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{13.2}$$

Ce sont exactement les mêmes identités de conservation qu'en théorie du champ unifié d'Einstein classique; elles ne font pas intervenir le quadrivecteur Γ_μ et sont vraies à condition que le système (I) soit vérifié.

14. Autre forme des identités de conservation. — Si au lieu de l'intégrale I, nous considérons maintenant l'intégrale

$$J = \int_C \mathcal{G}^{\alpha\beta} Z'_{\alpha\beta}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

où

$$Z'_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma^\mu L_\mu + p\,\Gamma_\alpha \Gamma_\beta + q\,F_{\alpha\beta} + \lambda\left(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta + \frac{1}{4}\alpha^2 g_{\alpha\beta}\right),$$

avec

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha;$$

il est clair que cette intégrale est celle dont nous sommes partis pour appliquer le procédé variationnel; en effet

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} Z'_{\alpha\beta} = \mathcal{L}.$$

Si, comme dans le paragraphe précédent, nous étudions la dérivée de Lie de cette intégrale pour une transformation infinitésimale définie par un champ de vecteurs ξ^ρ qui s'annulent au bord de C, nous aurons

$$X(J) = \int_C \partial_\rho [\xi^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} Z'_{\alpha\beta}]\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

et comme précédemment, par la formule de Stokes, cette intégrale peut se ramener à une intégrale étendue au bord de C, nulle par conséquent puisque les variations des ξ^ρ y sont nulles par hypothèse.

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} X(J) = \int_C \Big[& X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) Z_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha\beta} X(g_{\alpha\beta}) \sigma^\mu L_\mu \\ & + \mathcal{G}^{\alpha\beta} \frac{\lambda\alpha^2}{4} X(g_{\alpha\beta}) \\ & + \mathcal{G}^{\alpha\beta} \Big(X(W_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} X(\sigma^\mu L_\mu)\Big) \\ & + \mathcal{G}^{\alpha\beta} \big((p+\lambda) X(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) + q\, X(F_{\alpha\beta})\big) \\ & + X(\lambda) \mathcal{G}^{\alpha\beta} \Big(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta + \frac{1}{4}\alpha^2 g_{\alpha\beta}\Big)\Big] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \end{aligned}$$

Les termes autres que les trois premiers donnent une contribution nulle à l'intégrale X(J) considérée *si l'on suppose que les systèmes d'équations* (I) *et* (II) *sont vérifiés*, et à condition que les variations des ξ^ρ et de leurs dérivées des deux premiers ordres s'annulent au bord de C. Il reste donc

$$X(J) = \int_C \left[X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) Z'_{\alpha\beta} + \frac{\lambda\alpha^2}{4} \mathcal{G}^{\alpha\beta} X(g_{\alpha\beta}) \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 = 0,$$

or

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) &= \partial_\rho(\xi^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta}) - \mathcal{G}^{\rho\beta} \partial_\rho \xi^\alpha - \mathcal{G}^{\alpha\rho} \partial_\rho \xi^\beta, \\ X(g_{\alpha\beta}) &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} + g_{\rho\beta} \partial_\alpha \xi^\rho + g_{\alpha\rho} \partial_\beta \xi^\rho. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire l'intégrant sous la forme

$$\begin{aligned} &\partial_\rho \left[\xi^\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} Z'_{\alpha\beta} - \xi^\alpha \mathcal{G}^{\rho\beta} Z'_{\alpha\beta} - \xi^\beta \mathcal{G}^{\alpha\rho} Z'_{\alpha\beta} + \frac{\lambda\alpha^2}{2} \xi^\rho \sqrt{-g} \right], \\ &- \xi^\rho \left[\mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\rho Z'_{\alpha\beta} - \partial_\mu (\mathcal{G}^{\mu\beta} Z'_{\rho\beta} + \mathcal{G}^{\beta\mu} Z'_{\beta\rho}) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\lambda\alpha^2}{4} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{2} \partial_\rho (\sqrt{-g}\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est une divergence et donne une contribution nulle à l'intégrale; le deuxième terme doit être nul quel que soit le champ de vecteur ξ^ρ considéré, donc identiquement, il reste

$$(14.1) \qquad \partial_\mu (\mathcal{G}^{\mu\nu} Z'_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} Z'_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\rho Z'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \alpha^2 \sqrt{-g}\, \partial_\rho \lambda = 0.$$

Or, si nous remarquons que les équations du champ (III) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} = Z'_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \lambda\alpha^2 g_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} \\ + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sigma^\rho L_\rho + p \Gamma_\mu \Gamma_\nu + q F_{\mu\nu} + \lambda \left(\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \frac{1}{2} \alpha^2 g_{\mu\nu} \right) = 0, \end{aligned}$$

l'identité (14.1) en fonction de $Z_{\mu\nu}$ devient

$$(14.2) \qquad \partial_\mu (\mathcal{G}^{\mu\nu} Z_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} Z_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\mu\nu} \partial_\rho Z_{\mu\nu} \equiv 0.$$

Donc les premiers membres des équations du champ vérifient des identités de conservation de même forme que celles vérifiées par le tenseur de Ricci de la connexion linéaire $L^\rho_{\mu\nu}$, mais ici, en plus du tenseur fondamental et de la connexion, les identités font intervenir le quadrivecteur Γ_μ et celui-ci doit vérifier le système (II) pour que les identités de conservation (14.2) soient satisfaites.

Comme précédemment, on peut écrire

$$\mathfrak{M}^\mu_\rho = \frac{1}{2} (\mathcal{G}^{\mu\nu} Z_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} Z_{\nu\rho}) - \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}$$

et les identités (14.2) s'écrivent alors

$$\partial_\mu \mathfrak{M}^\mu_\rho + \frac{1}{2} Z_{\alpha\beta}\, \partial_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{14.3}$$

L'expression détaillée de $M^\mu_\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathfrak{M}^\mu_\rho$ est

$$M^\mu_\rho = K^\mu_\rho + \frac{q}{\alpha_2} f^\sigma \Gamma_\sigma \underline{g^{\mu\nu}} \Gamma_\rho \Gamma_\nu + q g^{\underset{\vee}{\mu\nu}} F_{\rho\nu} + \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho \left(p\alpha^2 - q g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} F_{\alpha\beta} \right),$$

où

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha$$

et

$$K^\mu_\rho = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} W_{\rho\nu} + g^{\nu\mu} W_{\nu\rho}) - \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho g^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}.$$

APPENDICES A LA PREMIÈRE PARTIE.

I. — CALCUL DES IDENTITÉS DE CONSERVATION A PARTIR DES IDENTITÉS DE BIANCHI GÉNÉRALISÉES PAR É. CARTAN.

1. *Identités de la théorie, relativement à la connexion linéaire* $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ (*cf.* [17] et [24]). — Rappelons les équations de définition de la connexion linéaire à coefficients $\Delta^\rho_{\mu\nu}$, relativement au tenseur fondamental :

$$g^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Delta^\mu_{\lambda\rho} g^{\lambda\nu} + \Delta^\nu_{\rho\lambda} g^{\mu\lambda} = 0. \tag{10.5}$$

Or à partir d'une connexion quelconque, É. Cartan (5) a montré que les identités suivantes étaient vérifiées par le tenseur de courbure :

$$D_\rho R^\tau{}_{\nu\sigma\mu} + D_\mu R^\tau{}_{\nu\rho\sigma} + D_\sigma R^\tau{}_{\nu\mu\rho} + 2\Delta^\pi_{\underset{\vee}{\rho\mu}} R^\tau{}_{\nu\pi\sigma} + 2\Delta^\pi_{\mu\sigma} R^\tau{}_{\nu\pi\rho} + 2\Delta^\pi_{\underset{\vee}{\sigma\rho}} R^\tau{}_{\nu\pi\mu} \equiv 0,$$

où D_ρ est la dérivée covariante + par rapport à la connexion linéaire $\Delta^\rho_{\mu\nu}$.

Multiplions par $g^{\nu\sigma}$ et contractons en τ et μ :

$$D_\rho (g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma}) - D_\mu (g^{\nu\mu} R_{\nu\rho} + g^{\nu\sigma} R^\mu{}_{\nu\sigma\rho}) - 2\Delta^\pi_{\underset{\vee}{\rho\mu}} g^{\nu\sigma} R^\mu{}_{\nu\sigma\pi} + 2\Delta^\mu_{\underset{\vee}{\lambda\mu}} g^{\nu\lambda} R_{\nu\rho} \equiv 0.$$

(5) *Cf.* É. Cartan, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 40, 1923.

D'autre part Schrödinger et Bose ont calculé la condition d'intégrabilité de l'équation $\overset{\mu\nu}{g}_{+-;\rho} = 0$, soit

$$R^{\mu}{}_{\lambda\sigma\rho}\, g^{\lambda\nu} + \tilde{R}^{\nu}{}_{\lambda\sigma\rho}\, g^{\mu\lambda} = 0, \tag{1}$$

qui après contraction en ν et σ, devient

$$g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} = g^{\mu\nu}(R_{\rho\nu} + \Phi_{\rho\nu}), \tag{2}$$

en posant

$$\Phi_{\rho\nu} = \partial_\rho \Delta_\nu + \partial_\nu \Delta_\rho - 2\Delta^{\lambda}_{\rho\nu} \Delta_\lambda,$$

sans oublier que

$$g^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} = 0 \quad (^6).$$

L'identité peut alors s'écrire, en tenant compte du système (10.5)

$$\left(\overset{\mu\nu}{g}_{+-} R_{\underset{--}{\rho\nu}} + \overset{\nu\mu}{g}_{+-} R_{\underset{++}{\nu\rho}}\right)_{;\mu} - \left(\overset{\alpha\beta}{g}_{+-} R_{\alpha\beta}\right)_{;\rho} + g^{\mu\nu}\Phi_{\underset{--;}{\rho\nu};\mu} = 0$$

ou encore

$$\begin{aligned}(3)\quad & \partial_\mu(\mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} R_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\, \partial_\rho R_{\alpha\beta} \\ & - (\mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} R_{\nu\rho}) \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \Delta^{\mu}_{\lambda\mu} \mathcal{G}^{\lambda\nu} R_{\rho\nu} + \Delta^{\mu}_{\mu\lambda} \mathcal{G}^{\nu\lambda} R_{\nu\rho} \\ & \qquad + \mathcal{G}^{\mu\nu}\left[\partial_\mu \Phi_{\rho\nu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\Phi_{\lambda\nu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\Phi_{\rho\lambda}\right] = 0.\end{aligned}$$

2. *Expression de ces identités en fonction de la connexion linéaire initiale* $L^{\rho}_{\mu\nu}$. — Nous utiliserons la relation déduite de (10.6) qui lie les deux tenseurs de Ricci :

$$R_{\nu\sigma}(\Delta) = W_{\nu\sigma}(L) - \frac{1}{2}\Phi_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}\Delta_\nu \Delta_\sigma + \frac{1}{2} g_{\nu\sigma} \frac{\partial_\rho \mathcal{F}^{\rho}}{\sqrt{-g}}.$$

L'identité devient alors

$$\begin{aligned}(4)\quad & \partial_\mu[\mathcal{G}^{\mu\nu} W_{\rho\nu}(L) + \mathcal{G}^{\nu\mu} W_{\nu\rho}(L)] - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\, \partial_\rho W_{\alpha\beta}(L) \\ & + \Delta_\mu(\mathcal{G}^{\mu\nu} W_{\rho\nu} - \mathcal{G}^{\nu\mu} W_{\nu\rho}) \\ & + \mathcal{G}^{\mu\nu}(\partial_\mu \Phi_{\rho\nu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\rho}\Phi_{\lambda\nu} - \Delta^{\lambda}_{\mu\nu}\Phi_{\rho\lambda}) \\ & - \partial_\mu\left(\mathcal{G}^{\mu\nu}\Phi_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu}\Phi_{\nu\rho} - 2\,\overset{\mu\nu}{\mathcal{G}}_{-}\Delta_\rho \Delta_\nu - 2\,\delta^{\mu}_{\rho}\, \partial_\sigma \mathcal{F}^{\bar\sigma}\right) \\ & \qquad + \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_\rho\left[\Phi_{\alpha\beta} - \Delta_\alpha \Delta_\beta - g_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma \mathcal{F}^{\bar\sigma}\right] \equiv 0.\end{aligned}$$

(6) [3], p. 47-49.

Ouvrons une parenthèse pour calculer les termes en $\mathfrak{F}^{\bar{\sigma}}$:

$$\partial_\alpha \partial_\sigma \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} - \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\rho \left(g_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\sigma \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} \right) = A_\rho$$

et remarquons que d'après (10.5) :

$$\mathfrak{F}^{\sigma} + \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} = \mathcal{G}^{\sigma\lambda} \Delta_\lambda, \qquad \mathfrak{F}^{\sigma} = \mathcal{G}^{\underline{\sigma\lambda}} \Delta_\lambda, \qquad \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} = \mathcal{G}^{\overset{\sigma\lambda}{\vee}} \Delta_\lambda;$$

$$\partial_\sigma \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} = \partial_\sigma \left(\mathcal{G}^{\overset{\sigma\lambda}{\vee}} \Delta_\lambda \right) = -\Delta_\lambda \mathfrak{F}^{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma \Delta_\lambda - \partial_\lambda \Delta_\sigma);$$

$$\partial_\sigma \mathfrak{F}^{\bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \Delta_\beta - \partial_\beta \Delta_\alpha) - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \Delta_\alpha \Delta_\beta.$$

On sait que $\partial_\rho \mathfrak{F}^{\rho}$ est identiquement nul, donc

$$\partial_\rho \left(\mathcal{G}^{\underline{\rho\sigma}} \Delta_\sigma \right) = 0,$$

d'où

$$A_\rho = g^{\alpha\beta} \partial_\rho \left[\Delta_\alpha \Delta_\beta - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Delta_\beta - \partial_\beta \Delta_\alpha) \right]$$
$$- \left(\Delta^{\alpha}_{\lambda\rho} g^{\lambda\beta} + \Delta^{\beta}_{\rho\lambda} g^{\alpha\lambda} \right) \left(\Delta_\alpha \Delta_\beta - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Delta_\beta - \partial_\beta \Delta_\alpha) \right).$$

Écrivons maintenant l'expression totale (4) en posant

$$\mathcal{K}_\rho \equiv \partial_\mu \left(\mathcal{G}^{\mu\nu} W_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} W_{\nu\rho} \right) - \mathcal{G}^{\alpha\beta} \partial_\rho W_{\alpha\beta}$$

et en utilisant l'équation suivante :

$$(\partial_\rho \Phi_{\alpha\beta}) g^{\alpha\beta} = - \Phi_{\alpha\beta} \partial_\rho g^{\alpha\beta}$$

et les équations (10.5) :

$$\mathcal{K}_\rho + \Delta_\mu (\mathcal{G}^{\mu\nu} R_{\rho\nu} - \mathcal{G}^{\nu\mu} R_{\nu\rho}) + \mathcal{G}^{\mu\nu} \Phi_{\underset{-}{\rho}\underset{-}{\nu};\mu}$$
$$- \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi_{\rho\nu} + \partial_\nu \Phi_{\mu\rho}) - \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} (\mathcal{G}^{\mu\nu} \Phi_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu} \Phi_{\nu\rho})$$
$$+ \frac{1}{2} \Phi_{\rho\nu} \left[\Delta^{\mu}_{\alpha\mu} \mathcal{G}^{\alpha\nu} + \Delta^{\nu}_{\mu\alpha} \mathcal{G}^{\mu\alpha} \right] + \frac{1}{2} \Phi_{\nu\rho} \left[\Delta^{\nu}_{\alpha\mu} \mathcal{G}^{\alpha\mu} + \Delta^{\mu}_{\mu\alpha} \mathcal{G}^{\nu\alpha} \right]$$
$$+ \mathcal{G}^{\underline{\mu\nu}} \Delta_\nu \partial_\mu \Delta_\rho + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\beta} \left[\Delta^{\alpha}_{\lambda\rho} \mathcal{G}^{\lambda\beta} + \Delta^{\beta}_{\rho\lambda} \mathcal{G}^{\alpha\lambda} \right]$$
$$+ \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha\beta} [\partial_\rho (\Delta_\alpha \Delta_\beta) - \partial_\rho (\partial_\alpha \Delta_\beta - \partial_\beta \Delta_\alpha)]$$
$$- \left(\Delta^{\alpha}_{\lambda\rho} \mathcal{G}^{\lambda\beta} + \Delta^{\beta}_{\rho\lambda} \mathcal{G}^{\alpha\lambda} \right) \left(\Delta_\alpha \Delta_\beta - \frac{1}{2} (\partial_\alpha \Delta_\beta - \partial_\beta \Delta_\alpha) \right) \equiv 0.$$

Il vient alors par simplification :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_\rho + \Delta_\mu \left[\mathcal{G}^{\mu\nu}\left(R_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\Phi_{\rho\nu}\right) - \mathcal{G}^{\nu\mu}\left(R_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\Phi_{\nu\rho}\right)\right] \\
&\quad - \mathcal{G}^{\mu\nu}\Delta_\lambda\left[\partial_\mu \Delta^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Delta^\lambda_{\mu\rho}\right] - \Delta^\sigma_{\alpha\beta}\Delta_\sigma\left(\Delta^\beta_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\alpha\lambda} - \Delta^\alpha_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\lambda\beta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\nu}\Delta^\lambda_{\mu\nu}(\Phi_{\lambda\rho} - \Phi_{\rho\lambda}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathcal{G}^{\alpha\beta}[\Delta_\alpha(\partial_\rho \Delta_\beta + \partial_\beta \Delta_\rho) + \Delta_\beta(\partial_\rho \Delta_\alpha + \partial_\alpha \Delta_\rho)] \\
&\qquad\qquad\qquad - \Delta_\alpha \Delta_\beta\left[\Delta^\beta_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\alpha\lambda} + \Delta^\alpha_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\lambda\beta}\right] \equiv 0
\end{aligned}$$

ou encore plus simplement :

$$\begin{aligned}
(5)\quad &\mathcal{K}_\rho + \Delta_\mu[\mathcal{G}^{\mu\nu}(R_{\rho\nu} + \Phi_{\rho\nu}) - \mathcal{G}^{\nu\mu}R_{\nu\rho}] \\
&\quad - g^{\mu\nu}\Delta_\lambda\left[\partial_\mu \Delta^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Delta^\lambda_{\mu\rho} - \Delta^\sigma_{\mu\rho}\Delta^\lambda_{\sigma\nu} + \Delta^\sigma_{\rho\nu}\Delta^\lambda_{\mu\sigma} - 2\Delta^\sigma_{\mu\nu}\Delta^\lambda_{\underset{\vee}{\rho\sigma}}\right] \equiv 0.
\end{aligned}$$

Mais le dernier facteur entre crochets peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\partial_\rho \Delta^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Delta^\lambda_{\mu\rho} + \Delta^\sigma_{\mu\nu}\Delta^\lambda_{\sigma\rho} - \Delta^\sigma_{\mu\rho}\Delta^\lambda_{\sigma\nu} \\
&+ \partial_\mu \Delta^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\rho \Delta^\lambda_{\mu\nu} - \Delta^\sigma_{\mu\nu}\Delta^\lambda_{\sigma\rho} + \Delta^\lambda_{\mu\sigma}\Delta^\sigma_{\rho\nu} - 2\Delta^\sigma_{\mu\nu}\Delta^\lambda_{\underset{\vee}{\rho\sigma}} \equiv R^\lambda{}_{\mu\nu\rho} - \tilde{R}^\lambda{}_{\nu\mu\rho};
\end{aligned}$$

or la condition d'intégralité (1)

$$R^\mu{}_{\lambda\sigma\rho}\, g^{\lambda\nu} + \tilde{R}^\nu{}_{\lambda\sigma\rho}\, g^{\mu\lambda} = 0,$$

qui entraîne déjà (2) par contraction en ν et σ, si on la contracte en μ et σ, deviendra

$$g^{\mu\nu}\tilde{R}^\lambda{}_{\nu\mu\rho} = g^{\nu\lambda}R_{\nu\rho},$$

et le dernier terme de l'identité (5) se mettra sous la forme suivante :

$$\Delta_\lambda \mathcal{G}^{\nu\lambda}R_{\nu\rho} - \Delta_\lambda \mathcal{G}^{\lambda\nu}(R_{\rho\nu} + \Phi_{\rho\nu}).$$

Les identités se présentent bien alors sous leur forme habituelle, en tenant compte des équations de liaison (10.5, 6) équivalentes aux équations (I)

$$\mathcal{K}_\rho \equiv \partial_\rho(\mathcal{G}^{\mu\nu}W_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu}W_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_\rho W_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

II. — IDENTITÉS DE CONSERVATION RELATIVES AU TENSEUR PHÉNOMÉNOLOGIQUE $T_{\mu\nu}$.

1. *Remarques sur les transformations infinitésimales agissant sur l'intégrale d'une densité scalaire.* — Considérons l'intégrale sur une chaîne différentiable C,

$$I = \int \mathcal{L}_0\, d\tau, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{L}_0 = \sqrt{-g}\, L_0,$$

L_0 étant un scalaire.

Pour une transformation infinitésimale définie par

$$x'^\rho = x^\rho + \xi^\rho,$$

il vient

$$\delta\sqrt{-g} = \partial_\rho(\sqrt{-g}\,\xi^\rho), \qquad \delta L_0 = (\partial_\rho L_0)\,\xi^\rho;$$

donc

$$\delta(\sqrt{-g}\,L_0) = \partial_\rho(\sqrt{-g}\,L_0\,\xi^\rho),$$

et la variation de l'intégrale I, si les ξ^ρ s'annulent aux bords de C, est nulle d'après la formule de Stokes; I est un invariant pour une telle transformation.

2. *Application au cas où $\mathcal{L}_0$ est celui du paragraphe* 7. — Si $\mathcal{L}_0$ dépend du tenseur fondamental $g^{\mu\nu}$ et d'un quadrivecteur v^α, nous pouvons expliciter sa variation

$$\delta\mathcal{L}_0 = \left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial v^\alpha} - \partial_\rho\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\rho v^\alpha)}\right]\delta v^\alpha + \partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial v^\alpha}\,\delta v^\alpha\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu},$$

Si l'on suppose que les équations (III.2) du champ sont vérifiées, le premier terme est nul; le deuxième terme étant une divergence donne une contribution nulle à la variation de l'intégrale δI et comme cette variation doit être nulle, il reste

$$\delta I = \int_C \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial g^{\mu\nu}}\,\delta g^{\mu\nu}\,d\tau = 0$$

quel que soit ξ^ρ, or

$$\delta g^{\mu\nu} = \xi^\rho\,\partial_\rho g^{\mu\nu} - g^{\rho\nu}\,\partial_\rho\xi^\mu - g^{\mu\rho}\,\partial_\rho\xi^\nu$$

et

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial g^{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} = -\mathfrak{T}_{\mu\nu};$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta I = \int_C \{ &\partial_\rho[\mathfrak{T}_{\mu\nu}(g^{\rho\nu}\xi^\mu + g^{\mu\rho}\xi^\nu)] \\ &- \xi^\rho[\mathfrak{T}_{\mu\nu}\,\partial_\rho g^{\mu\nu} + \partial_\mu(\mathfrak{T}_{\rho\nu}g^{\mu\nu} + \mathfrak{T}_{\nu\rho}g^{\nu\mu})]\}\,d\tau,\end{aligned}$$

le premier terme donne une contribution nulle d'après la formule de Stokes; le second doit être nul quel que soit ξ^ρ, donc identiquement

$$\partial_\mu(g^{\mu\nu}\mathfrak{F}_{\rho\nu}+g^{\nu\mu}\mathfrak{F}_{\nu\rho})+\mathfrak{F}_{\mu\nu}\,\partial_\rho g^{\mu\nu}\equiv 0.$$

Ce sont les identités relatives au tenseur phénoménologique des équations du champ de gravitation asymétrique déjà trouvées par D. W. Sciama [18].

DEUXIÈME PARTIE.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DU CHAMP.

INTRODUCTION.

Étant donnés sur une hypersurface S, le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ et ses dérivées premières d'une part, le quadrivecteur covariant Γ_μ d'autre part, le problème consiste à déterminer en dehors de S, le tenseur fondamental et le vecteur Γ_μ.

Ici, nous suivrons l'étude de A. Lichnerowicz ([4], p. 275 et suiv.) faite dans le cadre de la théorie du champ unifié d'Einstein classique. Nous ne ferons que rappeler les théorèmes démontrés à ce sujet et qui s'appliquent à notre cas, mais nous insisterons au contraire, sur les modifications apportées à ce problème par les prémices différentes de cette théorie. La principale modification réside dans le fait qu'à la place des quatre équations $\partial_\rho \mathfrak{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}}=0$ de la théorie du champ unifié d'Einstein, c'est un système linéaire et homogène en $\mathfrak{F}^\mu\left(\mathfrak{F}^\mu=\partial_\rho\mathfrak{G}^{\underset{\vee}{\mu\rho}}\right)$ que nous devons considérer. Précisons que ce système fait intervenir les composantes du quadrivecteur Γ_μ de façon quadratique, ainsi d'ailleurs que son déterminant, dont la nullité est liée à la condition de normalisation du quadrivecteur Γ_μ.

Cette modification entraîne que, contrairement à ce qui se présente en théorie du champ unifié classique, les dérivées secondes $\partial_{44}\mathfrak{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ apparaissant dans les équations du champ, ne sont pas calculables directement en fonction des données de Cauchy, ce qui introduit évidemment certaines complications.

Tout ce que nous venons de dire est valable dans les cas où ni α^2, ni $\mathcal{F}^\mu$ ne sont nuls; nous examinerons en appendice les conséquences de la nullité de α^2, ainsi que celle de $\mathcal{F}^\mu$.

Nous étudierons dans cette partie le problème de Cauchy, uniquement pour des équations de champ ne comportant pas de terme phénoménologique supplémentaire.

CHAPITRE I.

ANALYSE DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE.

15. Unicité de l'expression de la connexion en fonction du tenseur fondamental. — Nous avons déjà vu au paragraphe 10 que le système d'équations (I), ou équations de liaison, est équivalent au système

$$(10.5)\qquad g^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_\rho g^{\mu\nu} + \Delta^\mu_{\lambda\rho} g^{\lambda\nu} + \Delta^\nu_{\rho\lambda} g^{\mu\lambda} = 0,$$

$$(10.6)\qquad \begin{aligned} L^\rho_{\mu\nu} = {} & \Delta^\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(f^\rho + \bar{f^\rho}) \\ & + \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu g_{\lambda\nu}(f^\lambda + \bar{f^\lambda}) - \delta^\rho_\nu g_{\mu\lambda}\left(\frac{1}{6} f^\lambda - \frac{1}{2}\bar{f^\lambda}\right); \end{aligned}$$

or M. A. Tonnelat [3] d'une part et Hlavaty [20] d'autre part ont montré que le système (10.5) déterminait bien la connexion en fonction du tenseur fondamental sauf dans le cas exceptionnel où l'on a simulanément $\varphi = 0$, $g = 2\gamma$, cas que nous écarterons car pour l'interprétation physique on se place dans le cas où g est voisin de γ (⁷). En outre, il est évident qu'une fois $\Delta^\rho_{\mu\nu}$ déterminé, $L^\rho_{\mu\nu}$ l'est dans tous les cas, grâce au système d'équations (10.6).

Les grandeurs définissant le champ sont alors le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, le vecteur covariant Γ_μ, et les constantes p, q et α^2. Dans toute la suite nous supposerons α^2 et q non nuls (*cf.* § 11).

(⁷) Pour le cas où γ est positif ou nul, *cf.* les résultats de Mme M.-A. Tonnelat [3] et Kichenassamy ([21], [22]).

Dans la présente théorie, en tenant compte des restrictions que nous venons de préciser, ces grandeurs vérifient les équations

$$\frac{1}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho g^{\underline{\mu\alpha}} \Gamma_\alpha + f^\mu = 0, \tag{15.1}$$

$$g^{\underline{\mu\nu}} \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \alpha^2 = 0, \tag{15.2}$$

$$W_{\mu\nu} + \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho \Gamma_\mu \Gamma_\nu + q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho = 0), \tag{15.3}$$

dans lesquelles les $L^\rho_{\mu\nu}$ sont considérés comme des fonctions du tenseur fondamental et de ses dérivées premières définies par la solution unique des systèmes (10.5) et (10.6).

16. Problème de Cauchy et recherche des données de Cauchy. — A l'exemple de A. Lichnerowicz ([4], p. 276) et pour généraliser le même problème de la Relativité générale nous énoncerons le problème de Cauchy de la façon suivante :

Étant données sur une hypersurface S les composantes du tenseur fondamental et leurs dérivées premières ainsi que les composantes du vecteur covariant Γ_μ, les constantes p, q et α^2 étant supposées connues et fixes dans la variété V_4, déterminer au voisinage de S le tenseur fondamental et le vecteur Γ_μ supposés satisfaire aux équations (15.1), (15.2) et (15.3).

La surface S est supposée vérifier l'équation $x^4 = 0$ avec la condition $g^{44} \neq 0$.

Ceci signifie géométriquement que S n'est pas tangente au cône C_x d'équation $h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0$.

Rappelons ici un théorème de A. Lichnerowicz ([4], p. 276).

Théorème. — *Au voisinage d'une hypersurface* S *représentée localement par* $x^4 = 0$ *et telle qu'on ait* $g^{44} \neq 0$, *la connaissance des quantités* g_{ij}, $\mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}}$, $\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ *est équivalente à celle du tenseur fondamental* $g_{\mu\nu}$ (8).

Corollaire. — *Dans les mêmes conditions la connaissance des quantités* $\partial_4 g_{ij}$, $\partial_4 \mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}}$, $\partial_4 \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ *est équivalente à celle de la dérivée*

(8) Les indices latins sont des représentants de l'ensemble 1, 2, 3, les indices grecs sont des représentants de l'ensemble 1, 2, 3, 4.

d'indice 1 *du tenseur fondamental, et de même pour les dérivées d'indice supérieur* (9).

Ce résultat étant acquis, cherchons à quelles quantités vont se réduire les données de Cauchy nécessaires.

En ce qui concerne le tenseur fondamental, nous avons vu que la donnée de g_{ij}, $\overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}}$, $\overset{4\lambda}{\mathcal{G}^{-}}$ était suffisante. Remarquons que les dérivées premières $\partial_k g_{ij}$, $\partial_k \overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}}$, $\partial_k \overset{4\lambda}{\mathcal{G}^{-}}$ et par conséquent la combinaison $\partial_i \overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}} \equiv \mathfrak{F}^4$ sont calculables sur S, localement à partir de la donnée de g_{ij}, $\overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}}$ et $\overset{4\lambda}{\mathcal{G}^{-}}$. Il s'ensuit que dans le cas général, les seules dérivées premières du tenseur fondamental qu'il faudra se donner sont les dérivées d'indice 1 suivante : $\partial_4 g_{ij}$ et $\partial_4 \overset{4\lambda}{\mathcal{G}^{-}}$.

En effet, montrons que si le quadrivecteur covariant Γ_μ est donné et vérifie (15.1) et (15.2) sur S, $\partial_4 \overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}}$ est en général calculable sur S. Remarquons d'abord que la connaissance de $\mathfrak{F}^i$ entraîne celle de $\partial_4 \overset{4i}{\mathcal{G}^{\vee}}$, et réciproquement, sur S, car $\mathfrak{F}^i \equiv \partial_4 \overset{i4}{\mathcal{G}^{\vee}} + \partial_k \overset{ik}{\mathcal{G}^{\vee}}$, et les données de Cauchy sur S permettent de calculer le deuxième terme.

Le système (15.1), nous l'avons vu, est un système linéaire et homogène, si l'on prend les quantités $\mathfrak{F}^\mu$ comme inconnues; son déterminant est nul quand l'équation (15.2) est vérifiée (10). Or ici, $\mathfrak{F}^4$ est directement connu à partir des données de Cauchy, donc si certains mineurs du déterminant ne sont pas nuls, nous pouvons déduire les $\mathfrak{F}^i$ des équations (15.1). Voyons dans quelles conditions : pour $\mu = 4$ l'équation (15.1) devient

$$\frac{1}{\alpha^2} \mathfrak{F}^\rho \Gamma_\rho h^{4\alpha} \Gamma_\alpha + \mathfrak{F}^4 = 0;$$

ce qui nous permet d'écrire pour $\mu = i$:

$$h^{4\alpha} \Gamma_\alpha \mathfrak{F}^i = h^{i\alpha} \Gamma_\alpha \mathfrak{F}^4. \tag{16.1}$$

C'est cette dernière relation jointe à la condition essentielle

$$h^{4\alpha} \Gamma_\alpha \neq 0 \tag{16.2}$$

(9) On appelle indice d'une dérivée, l'ordre de dérivation par rapport à la variable x_4.
(10) *Cf.* § 11.

qui nous donne la valeur de $\mathcal{F}^i$, donc de $\partial_4 \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ sur S, soit

$$h^{4\alpha}\Gamma_\alpha \partial_4 \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}} = h^{i\alpha}\Gamma_\alpha \partial_j \mathcal{G}^{\underset{\vee}{4j}} - h^{4\alpha}\Gamma_\alpha \partial_j \mathcal{G}^{\underset{\vee}{ij}}. \tag{16.3}$$

Si $h^{4\alpha}\Gamma_\alpha$ est nul, $\mathcal{F}^i$ est nul d'après (15.1); les $\mathcal{F}^i$ sont indéterminés.

La condition $h^{4\alpha}\Gamma_\alpha \neq 0$ se traduit par la condition suivante : $h^{\mu\nu}\Gamma_\mu \partial_\nu f \neq 0$, si la surface S est représentée par la fonction $f(x^\mu) = 0$.

Ce qui signifie que le vecteur Γ_μ ne doit pas se trouver dans le 3-plan tangent à la surface, si l'on veut que les données de Cauchy puissent se réduire.

En définitive, les données de Cauchy sur S se réduisent à

$$g_{ij}, \quad \mathcal{G}^{\underset{\vee}{ij}}, \quad \mathcal{G}^{\underset{-}{4\lambda}}, \quad \partial_4 g_{ij}, \quad \partial_4 \mathcal{G}^{\underset{-}{i\lambda}}, \quad \Gamma_i, \quad \Gamma_4$$

si la condition (16.2) est satisfaite; ce que nous supposerons dans la suite de cet exposé.

CHAPITRE II.

DÉCOMPOSITION DU PROBLÈME D'INTÉGRATION ET ÉTUDES SUR LES DONNÉES DE CAUCHY.

17. Décomposition du problème d'intégration. — Montrons d'abord l'équivalence du système (15.3) avec le système suivant qui met en évidence l'expression tensorielle K^λ_ρ apparaissant dans la première forme des identités de conservation

$$Z_{\underset{-}{ij}} = W_{\underset{-}{ij}} + \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho \Gamma_i \Gamma_j - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0, \tag{17.1 a}$$

$$Z_{\underset{\vee}{ij}} = W_{\underset{\vee}{ij}} + q(\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i) - \frac{1}{2}\varphi_{ij}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0, \tag{17.1 b}$$

$$Z_{\underset{\vee}{i4}} = W_{\underset{\vee}{i4}} + q(\partial_i \Gamma_4 - \partial_4 \Gamma_i) - \frac{1}{2}\varphi_{i4}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0, \tag{17.1 c}$$

$$M^4_\rho = K^4_\rho + \frac{q}{\alpha^2} f^\sigma \Gamma_\sigma g^{\underset{-}{4\nu}} \Gamma_\rho \Gamma_\nu + q g^{\underset{\vee}{4\nu}} F_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\delta^4_\rho \left(p\alpha^2 - q g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} F_{\alpha\beta}\right) = 0; \tag{17.2}$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu.$$

Or nous savons que

$$M^4_\rho \equiv \frac{1}{2}(g^{4\nu} Z_{\rho\nu} + g^{\nu 4} Z_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}\delta^4_\rho g^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}$$

ou encore

$$M^4_\rho \equiv \left(g^{\underline{4\nu}} Z_{\underline{\rho\nu}} + g^{\overset{4\nu}{\vee}} Z_{\underset{\vee}{\rho\nu}}\right) - \frac{1}{2}\delta^4_\rho\left(g^{\underline{\alpha\beta}} Z_{\underline{\alpha\beta}} + g^{\overset{\alpha\beta}{\vee}} Z_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right).$$

Il est alors évident que si le système des équations du champ $Z_{\mu\nu} = 0$ est vérifié, le système (17.1, 2) le sera aussi. Il nous faut démontrer la réciproque. Le système (17) étant supposé vérifié, montrons qu'alors $Z_{\alpha\beta} = 0$. Or les équations (17.1) nous montrent déjà que $Z_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = 0$ et $Z_{\underline{ij}} = 0$; il suffit donc de prouver que les équations (17.1, 2) entraînent aussi $Z_{\underline{4\alpha}} = 0$.

Si l'on tient compte de (17.1), (17.2) peut s'écrire

$$M^4_\rho = g^{\underline{4\nu}} Z_{\underline{\rho\nu}} - \delta^4_\rho\left(g^{\underline{4i}} Z_{\underline{4i}} + \frac{1}{2} g^{44} Z_{44}\right) = 0,$$

considérons alors le cas $\rho = 4$:

$$M^4_4 = \frac{1}{2} g^{44} Z_{44} = 0. \tag{17.3}$$

Donc $Z_{44} = 0$, puisque $g_{44} \neq 0$.

Le cas $\rho = i$ entraîne

$$M^4_i = g^{44} Z_{\underline{i4}} = 0, \qquad \text{donc} \quad Z_{\underline{i4}} = 0; \tag{17.4}$$

ce qui démontre bien l'équivalence.

Si nous écrivons l'équation (17.2) explicitement, il vient

$$M^4_4 = K^4_4 + \frac{q}{\alpha^2} f^\sigma \Gamma_\sigma\left(g^{\underline{4\nu}} \Gamma_4 \Gamma_\nu + \frac{1}{2}\alpha^2\right) - \frac{1}{2} g^{\overset{ij}{\vee}} F_{ij} - \frac{1}{2}\alpha^2 = 0, \tag{17.5}$$

$$M^4_i = K^4_i + \frac{q}{\alpha^2} f^\sigma \Gamma_\sigma\left(g^{\underline{4\nu}} \Gamma_i \Gamma_\nu\right) + q g^{\overset{4j}{\vee}} F_{ij} = 0. \tag{17.6}$$

Or un théorème de A. Lichnerowicz valable ici si $g^{\underline{4\alpha}} \Gamma_4 \Gamma_\alpha$ n'est pas nul ([4], p. 277) montre que K^4_ρ est obligatoirement de la forme suivante :

$$K^4_\rho = \Psi^4_\rho\Big[g_{ij},\ \mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}},\ \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}},\ \partial_k g_{ij},\ \partial_k \mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}},\ \partial_k \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}},\ \partial_{kl} g_{ij},$$
$$\partial_{kl}\mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}},\ \partial_{kl}\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}},\ \partial_4 g_{ij},\ \partial_4 \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}},\ \partial_{4k} g_{ij},\ \partial_{4k}\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}\Big],$$

donc K^4_ρ est fonction seulement des données de Cauchy et de leurs dérivées d'indice zéro sur S.

Ce résultat est obtenu en utilisant le système d'équations (15.1) afin d'exprimer les $\partial_4 \overset{4i}{\underset{\vee}{\mathfrak{G}}}$ en fonction des $\partial_h \overset{4k}{\underset{\vee}{\mathfrak{G}}}$ et $\partial_k \overset{ki}{\underset{\vee}{\mathfrak{G}}}$ (ce qui n'est possible que si $h^{4\alpha}\Gamma_\alpha \neq 0$), et aussi en utilisant la première forme des identités de conservation.

Mais nous voyons ici que dans ces conditions M^4_ρ dépend encore de f^σ donc de $\partial_4 \overset{i4}{\underset{\vee}{\mathfrak{G}}}$ par l'expression $\overset{4\alpha}{\underline{\mathfrak{G}}}\,\Gamma_4\Gamma_\alpha f^\sigma\Gamma_\sigma$, or cette expression est calculable en fonction des données de Cauchy grâce à l'équation (15.1) et devient

$$\overset{4\alpha}{\underline{\mathfrak{G}}}\,\Gamma_\alpha f^\sigma\Gamma_\sigma = -\alpha^2\,\partial_i \overset{4i}{\underset{\vee}{\mathfrak{G}}}.$$

Si nous remplaçons $\overset{4\alpha}{\underline{\mathfrak{G}}}\,\Gamma_\alpha f^\sigma\Gamma_\sigma$ par cette expression dans les équations (17.5) et (17.6), ces équations ne font plus alors intervenir que les données de Cauchy sur S et deviennent simplement sur S des conditions auxquelles doivent satisfaire ces données de Cauchy.

Écrivons le système (17.1, 2) sous cette forme nouvelle :

$$(17.7)\qquad \underline{Z}_{ij} = 0, \qquad \underset{\vee}{Z}_{ij} = 0, \qquad \underset{\vee}{Z}_{i4} = 0;$$

$$(17.8)\qquad K^4_\rho - q\Gamma_\rho f^4 + qg^{\overset{4\nu}{\vee}}F_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\delta^4_\rho\left(p\alpha^2 - qg^{\overset{\alpha\beta}{\vee}}F_{\alpha\beta}\right) = 0.$$

Remarquons, de même, que, dans le système (15.1), (15.2), l'équation (15.2) ne fait intervenir que les données de Cauchy et peut être considérée comme une condition à laquelle doivent satisfaire ces données sur S.

18. Théorème de décomposition. — Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant :

Étant donnée au voisinage de S *une solution* $(g_{\mu\nu}, \Gamma_\rho)$ *du système* (17.7) *et* (15.1) *qui vérifie sur* S *les équations* (17.8) *et* (15.2), *l'ensemble* $(g_{\mu\nu}, \Gamma_\rho)$ *vérifie* (17.8) *et* (15.2) *en dehors de* S *à condition toutefois que* $\mathfrak{F}^\mu$ *ne soit pas nul sur* S.

Montrons d'abord qu'une solution $(g_{\mu\nu}, \Gamma_\rho)$ de (15.1) au voisinage de S, vérifiant (15.2) sur S vérifie encore (15.2) au voisinage de S.

(15.1) s'écrit

$$\frac{1}{\alpha_2}\mathfrak{F}^\rho\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}}\Gamma_\nu + \mathfrak{F}^\mu = 0.$$

Puisque ces équations sont vérifiées au voisinage de S, la dérivée du premier membre par rapport à la variable x^4 est nulle sur S :

$$\frac{1}{\alpha^2}\partial_4\left(\mathcal{F}^\rho \Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right) + \partial_4 \mathcal{F}^\mu = 0$$

ou

$$\frac{1}{\alpha^2}(\partial_4 \mathcal{F}^\rho)\left(\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right) + \partial_4 \mathcal{F}^\mu = -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho\, \partial_4\left(\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right).$$

Or, Γ_μ n'est pas nul, car α^2 le serait, ce que nous n'avons pas supposé; il est donc justifié d'effectuer une multiplication contractée par Γ_μ, il vient

$$(18.1)\qquad \Gamma_\rho(\partial_4 \mathcal{F}^\rho)\left(\frac{1}{\alpha^2}\overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\mu \Gamma_\nu + 1\right) = -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho \Gamma_\mu\, \partial_4\left(\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right)$$

mais sur S, l'équation (15.2) est vérifiée, donc le premier membre de (18.1) est nul et

$$(18.2)\qquad \mathcal{F}^\rho \Gamma_\mu\, \partial_4\left(\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right) = 0,$$

or (15.1) nous permet d'écrire sur S;

$$\mathcal{F}^\rho = -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\sigma \Gamma_\sigma \overset{\rho\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu.$$

$\mathcal{F}^\rho$ n'étant pas nul sur S, nécessairement $\mathcal{F}^\sigma \Gamma_\sigma$ n'est pas nul non plus, donc (18.2) devient

$$\overset{\rho\sigma}{\underline{g}} \Gamma_\sigma \Gamma_\mu\, \partial_4\left(\Gamma_\rho \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu\right) = 0$$

ou encore

$$\overset{\rho\sigma}{\underline{g}} \Gamma_\rho \Gamma_\sigma\, \partial_4\left(\overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\mu \Gamma_\nu\right) + \overset{\rho\sigma}{\underline{g}} \Gamma_\sigma \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\mu \Gamma_\nu\, \partial_4 \Gamma_\rho - \overset{\mu\nu}{\underline{g}} \Gamma_\nu \overset{\rho\sigma}{\underline{g}} \Gamma_\rho \Gamma_\sigma\, \partial_4 \Gamma_\mu = 0$$

et puisque nous avons supposé dans cette partie, α^2 non nul, ceci peut s'écrire plus simplement

$$(18.3)\qquad \partial_4(g^{\mu\nu}\Gamma_\mu \Gamma_\nu) = 0.$$

L'équation (18.3) est valable sur S et signifie que l'équation (15.2) valable sur S est encore vraie au voisinage de S, à condition que $\mathcal{F}^\mu$ ne soit pas nul sur S. Elle entraîne d'ailleurs que $\mathcal{F}^\mu$ n'est pas nul non plus dans le voisinage de S.

Ce qui démontre la première partie du théorème.

Au voisinage de S, l'ensemble $(g_{\mu\nu}, \Gamma_\rho)$ vérifie donc le système (II) et l'on peut en déduire un ensemble $(g_{\mu\nu}, L^{\alpha}_{\beta\gamma})$ qui vérifie les identités de conservation (14.3) sous leur seconde forme :

$$\partial_\mu \mathfrak{M}^\mu_\rho + \frac{1}{2} Z_{\alpha\beta}\, \partial_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} = 0$$

ou encore

$$\partial_4 \mathfrak{M}^4_\rho + \partial_i \mathfrak{M}^i_\rho + \frac{1}{2} Z_{\alpha\beta}\, \partial_\rho \mathcal{G}^{\alpha\beta} = 0. \tag{18.4}$$

Or

$$M_\rho = \left(g^{\underline{i\nu}} Z_{\underline{\rho\nu}} + g^{\overset{i\nu}{\vee}} Z_{\underset{\vee}{\rho\nu}}\right) - \frac{1}{2} \delta^i_\rho \left(g^{\underline{\alpha\beta}} Z_{\underline{\alpha\beta}} + g^{\overset{\alpha\beta}{\vee}} Z_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right)$$

et pour une solution de (17.7) au voisinage de S, on obtient

$$\begin{aligned} M^i_j &= g^{\underline{i4}} Z_{\underline{j4}} - \frac{1}{2} \delta^i_j \left(g^{44} Z_{44} + 2 g^{\underline{4k}} Z_{\underline{4k}}\right), \\ M^i_4 &= g^{\underline{i\nu}} Z_{\underline{4\nu}}. \end{aligned}$$

En utilisant les équations (17.3) et (17.4) équivalentes à (17.8) afin d'éliminer les termes en $Z_{4\alpha}$ il vient

$$\begin{aligned} M^i_j &= g^{\underline{i4}} \frac{M^4_j}{g^{44}} - \delta^i_j \left(M^4_4 + g^{\underline{4r}} \frac{M^4_r}{g^{44}}\right), \\ M^i_4 &= 2 g^{\underline{i4}} \frac{M^4_4}{g^{44}} + g^{\underline{ij}} \frac{M^4_j}{g^{44}}. \end{aligned}$$

Portons ces résultats dans les identités de conservation, nous trouvons :

d'abord pour $\rho = 4$

$$\begin{aligned} &\partial_4 M^4_4 + 2 \frac{g^{\underline{i4}}}{g^{44}} \partial_i M^4_4 + \frac{g^{\underline{ij}}}{g^{44}} \partial_i M^4_j \\ &\quad + M^4_4 \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_4 \sqrt{-g} + 2\, \partial_i \left(\frac{\mathcal{G}^{\underline{i4}}}{g^{44}}\right) + \frac{\partial_4 \mathcal{G}^{44}}{g^{44}}\right] \\ &\qquad + M^4_j \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_i \left(\frac{\mathcal{G}^{\underline{ij}}}{g^{44}}\right) + \frac{\partial_4 \mathcal{G}^{\underline{4i}}}{g^{44}}\right] = 0; \end{aligned}$$

puis pour $\rho = j$:

$$\begin{aligned} &\partial_4 M^4_j - \partial_j M^4_4 + \frac{g^{\underline{i4}}}{g^{44}} (\partial_i M^4_j - \partial_j M^4_i) \\ &\quad + M^4_4 \frac{\partial_j g^{44}}{g^{44}} + M^4_j \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\partial_4 \sqrt{-g} + \partial_i \left(\frac{\mathcal{G}^{\underline{i4}}}{g^{44}}\right)\right] - M^4_i g^{\underline{4i}} \partial_j \left(\frac{1}{g^{44}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions intervenant dans ce système différentiel sont toutes régulières. Par suite pour des données M^4_ρ nulles sur S, il n'y a pas d'autres solutions que la solution nulle. C'est-à-dire $M^4_\rho = 0$ en dehors de S.

Le problème de l'intégration locale des équations du champ se trouve donc ramené à la recherche de données de Cauchy vérifiant (17.8) et (15.2) puis à l'étude du système (17.7) et (15.1) pour de telles données.

19. Étude des conditions sur les données de Cauchy. — Nous supposons toujours que nous nous donnons g_{ij}, $\mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}}$ $\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$, $\partial_4 g_{ij}$, $\partial_4 \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ sur S ainsi que le quadrivecteur Γ_μ, mais ces quantités doivent vérifier les équations suivantes :

$$K^4_\rho - q\Gamma_\rho f^4 + qg^{\overset{4\nu}{\vee}} F_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\delta^4_\rho\left(p\alpha^2 - qg^{\overset{\alpha\beta}{\vee}} F_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{19.1}$$

$$g^{\mu\nu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \alpha^2 = 0. \tag{19.2}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu$ comme plus haut et toujours avec la condition $q \neq 0$.

Le système d'équations (19.1) se décompose comme suit :

$$\frac{1}{2}g^{\overset{ij}{\vee}} F_{ij} = -\left(\Gamma_4 f^4 - \frac{1}{q}K^4_4\right) + \frac{1}{2}p\alpha^2 \equiv \Lambda_4, \tag{19.3}$$

$$g^{\overset{4j}{\vee}} F_{ij} = \Gamma_i f^4 - \frac{1}{q}K^4_i \equiv a_i. \tag{19.4}$$

On voit immédiatement que, pour que le système (19.4) soit possible, il faut que l'équation suivante soit vérifiée :

$$g^{\overset{4i}{\vee}}\left(\Gamma_i f^4 - \frac{1}{q}K^4_i\right) = 0. \tag{19.5}$$

Or le système (19.4) considéré comme un système de trois équations à trois inconnues F_{rs} (avec $r < s$ et $r, s = 1, 2, 3$) a un déterminant nul et (19.5) est la condition suffisante pour que ce système soit possible, donc indéterminé; il se réduit donc à un système de deux équations auquel on peut adjoindre l'équation (19.3). Pour ce nouveau système le déterminant est proportionnel à

$$D = g^{\overset{12}{\vee}} g^{\overset{43}{\vee}} + g^{\overset{23}{\vee}} g^{\overset{41}{\vee}} + g^{\overset{31}{\vee}} g^{\overset{42}{\vee}} = \frac{1}{\sqrt{f}}.$$

Les F_{ij} sont donc déterminés en fonction des données de Cauchy sur S dans le cas où D est différent de zéro, c'est-à-dire si dét$(f^{\alpha\beta}) \not\equiv 0$.

Ces expressions explicites sont :

$$(19.6)\quad DF_{ij} = \varepsilon_{ijk}\left[\overset{ks}{\underset{\vee}{g}}\left(\Gamma_s f^4 - \frac{1}{q}K^4_s\right) + \overset{4k}{\underset{\vee}{g}}\left(\frac{1}{2}p\alpha^2 - \Gamma_4 f^4 + \frac{1}{q}K^4_4\right)\right].$$

Si nous formons la divergence du vecteur $\varepsilon^{ijk}F_{ij}$ qui est nulle puisque F_{ij} est un rotationnel, il vient

$$(19.7)\quad \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{ij}\partial_k D = a_s\partial_k f^{ks} + A_4\partial_k f^{4k} + \frac{1}{2}f^{ks}f^4 F_{ks} + f^{ks}\Gamma_s\partial_k f^4 - \frac{1}{q}f^{ks}\partial_k K^4_s + f^{4k}\partial_k A_4.$$

Éliminons F_{ij} et $\frac{1}{2}f^{ks}F_{ks}$ à l'aide des équations (19.3) et (19.6) :

$$(19.8)\quad (f^{ks}a_s + f^{4k}A_4)\frac{\partial_k D}{D} = a_s\partial_r f^{rs} + A_4\partial_r f^{4r} + f^4 A_4 + f^{rs}\Gamma_s\partial_r f^4 - \frac{1}{q}f^{rs}\partial_r K^4_s + f^{4r}\partial_r A_4.$$

Cette équation ne dépend que des $g^{\mu\nu}$, de leurs dérivées premières et secondes sur S calculables à partir des données de Cauchy déjà précisées, des Γ_μ et des dérivées d'indice zéro de Γ_4.

Les équations (19.2), (19.5) et (19.8) nous fournissent un système ne comportant comme inconnues que les Γ_μ et les dérivées d'indice zéro de Γ_4. On pourra donc se donner Γ_4 sur S et ces trois équations permettent d'en déduire Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP.

20. Introduction et rappel d'un théorème de A. Lichnerowicz. — Ayant maintenant choisi des données de Cauchy vérifiant les conditions (19.1) et (19.2), nous voulons étudier l'unicité de la solution des équations d'évolution dont nous rappelons la forme

$$(20.1)\quad \frac{1}{\alpha^2}f^\rho\Gamma_\rho \underline{g^{\mu\alpha}}\Gamma_\alpha + f^\mu = 0,$$

$$(20.2)\quad Z_{ij} = 0,$$

$$(20.3)\quad Z_{i\underset{\vee}{4}} = 0.$$

Nous supposerons toujours ici que les équations de liaison sont vérifiées par la connexion et le tenseur fondamental ; ainsi la connexion linéaire est à vecteur de torsion nul.

Pratiquement, nous montrons que les dérivées d'indice 2 du tenseur fondamental (sauf quatre) et les dérivées d'indice 1 du quadrivecteur Γ sont calculables sur S, à certaines conditions que nous préciserons. Nous en déduirons l'unicité de la solution dans le cas analytique.

En vue de ce développement rappelons le théorème de A. Lichnerowicz sur une certaine forme de changement de coordonnées ([4]), p. 279) :

Le changement de coordonnées $x^{\lambda'} = x^{\lambda} + \frac{(x^4)^3}{6}\left[\varphi^{(\lambda)}(x^i) + \varepsilon^{\lambda}\right]$, *où* $\lambda' = \lambda$ *numériquement et où* $\varepsilon^{\lambda} \to 0$ *avec* x^4 :

1° *conserve les valeurs numériques des coordonnées de tout point de* S *et les données de Cauchy;*

2° *conserve les valeurs numériques sur* S *des* $\partial_{44} g_{ij}$ *et* $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{4i}}$;

3° *permet de donner aux* $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ *des valeurs arbitraires sur* S.

On en déduit immédiatement que le tenseur de Ricci $W_{\alpha\beta}$ qui s'exprime en fonction des g_{ij}, des $\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et des $\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ ainsi que de leurs dérivées des deux premiers ordres (*cf.* théorème et corollaire du paragraphe 16) ne peut contenir de termes en $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$, car sur S, dans le changement de coordonnées considéré, on a

$$W_{\alpha'\beta'} = W_{\alpha\beta},$$

puisque $W_{\alpha\beta}$ est un tenseur, quel que soit $\varphi^{(\lambda)}$ évidemment. Donc $W_{\alpha\beta}$ ne peut contenir de termes en $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ qui prennent n'importe quelle valeur dans ces changements de coordonnées ; $W_{\alpha\beta}$ ne fait intervenir comme dérivées d'indice 2, que des termes en $\partial_{44} g_{ij}$ et en $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$.

Écrivons alors les équations (20.2) et (20.3) sous la forme de congruences modulo des termes qui sont directement calculables à partir des données de Cauchy :

$$W_{ij} \sim \partial_4 L^4_{ij} \sim A^{kl}_{ij} \partial_{44} g_{kl} - B_{ijk} \partial_{44} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{k4}} \sim 0, \tag{20.4}$$

$$W_{\underset{\vee}{i4}} \sim \partial_4 L^4_{\underset{\vee}{i4}} + \frac{1}{2} \partial_4 L^{\rho}_{\underline{i\rho}} \sim q\, \partial_4 \Gamma_i. \tag{20.5}$$

Nous voulons montrer qu'il est possible de calculer $\partial_{44} g_{ij}$, $\partial_{44} \mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et $\partial_4 \Gamma_{\mu}$ en fonction des données de Cauchy, à l'aide des équations

(20.1, 2, 3). Pour ce faire, nous montrerons d'abord que $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ s'exprime en fonction des $\partial_4\Gamma_i$ grâce à (20.1), puis que $W_{\underset{\vee}{i4}}$ à l'aide des équations de liaison peut s'exprimer en fonction des inconnues $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et $\partial_4 L^4_{ij}$, donc en vertu de (20.1) l'équation (20.5) devient un système ne comportant que les inconnues $\partial_4\Gamma_i$ et $\partial_4 L^4_{ij}$; on en déduit sous certaine condition, que les $\partial_4\Gamma_i$ sont calculables en fonction des $\partial_4 L^4_{ij}$ et par conséquent aussi les $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$.

Ensuite, à l'aide des équations de liaison nous montrerons que les $\partial_{44} g_{ij}$ sont calculables en fonction des $\partial_4 L^4_{ij}$ et des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ (c'est-à-dire que la matrice A^{kl}_{ij} est réversible, sauf dans un cas particulier étudié par M^me Tison) donc en fonction des $\partial_4 L^4_{ij}$ seuls si nous tenons compte des équations (20.1) et (20.5).

Enfin l'équation (20.4) montre alors que $\partial_4 L^4_{ij}$ est connu directement en fonction des données de Cauchy, donc d'après l'étude faite les $\partial_{44} g_{ij}$, $\partial_4\Gamma_i$ et $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ fonctions des seules inconnues $\partial_4 L^4_{ij}$, sont aussi calculables en fonction des données de Cauchy sur S, donc continues à la traversée de S.

Remarquons que $\partial_4\Gamma_4$ est calculable grâce à la condition de normalisation (15.2), conséquence de (20.1) si f^μ est supposé non nul.

21. Relation entre les $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et les $\partial_4\Gamma_i$. — Le système (20.1) qui nous permettait de calculer les $\partial_4\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ en fonction des données sur S [*cf.* l'équation (16.3)], devient par dérivation par rapport à la variable x^4, en utilisant une congruence modulo des termes qui dépendent uniquement des données de Cauchy :

$$g^{\underline{4\alpha}}\Gamma_\alpha \partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}} \sim \left(\mathcal{F}^4 g^{\underline{i\alpha}} - \mathcal{F}^i g^{\underline{4\alpha}}\right)\partial_4\Gamma_\alpha \tag{21.1}$$

ou encore

$$g^{\underline{4\alpha}}\Gamma_\alpha \partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}} \sim -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho\Gamma_\rho\left(g^{\underline{4\alpha}}g^{\underline{i\beta}} - g^{\underline{i\alpha}}g^{\underline{4\beta}}\right)\Gamma_\alpha\partial_4\Gamma_\beta,$$

mais la condition de normalisation sur S nous conduit au résultat suivant :

$$\begin{cases} g^{\underline{\mu\nu}}\Gamma_\mu\partial_4\Gamma_\nu \sim 0, \\ g^{\underline{4\nu}}\Gamma_\nu\partial_4\Gamma_4 \sim -g^{\underline{j\nu}}\Gamma_\nu\partial_4\Gamma_j, \end{cases} \tag{21.2}$$

(21.1) devient alors

$$\left(g^{\underline{4\nu}}\Gamma_\nu\right)^2 \partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}} \sim \left\{ g^{\underline{j\nu}}\left(\mathcal{F}^i g^{44} - \mathcal{F}^4 g^{\underline{i4}}\right) - g^{\underline{4\nu}}\left(\mathcal{F}^i g^{\underline{4j}} - \mathcal{F}^4 g^{\underline{ij}}\right)\right\}\Gamma_\nu \partial_4 \Gamma_j.$$

C'est une relation entre les dérivées inconnues $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et $\partial_4\Gamma_j$ qui nous sera utile par la suite.

En tenant compte des équations (15.1), (21.1) peut s'écrire plus symétriquement :

$$(21.3)\qquad (h^{4\nu}\Gamma_\nu)^2\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}} \sim -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho\Gamma_\rho[h^{ij}(\Gamma^4)^2 + h^{44}\Gamma^i\Gamma^j - h^{i4}\Gamma^j\Gamma^4 - h^{j4}\Gamma^i\Gamma^4]\partial_4\Gamma_j,$$

à condition de poser

$$\Gamma^\mu = h^{\mu\rho}\Gamma_\rho.$$

Pour pouvoir déterminer les $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$, il faut et il suffit que nous ayons

$$(21.4)\qquad \Gamma^4 \neq 0$$

(condition que nous avait déjà imposée le calcul des $\partial_4\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$).

22. Expression des $W_{\underset{\vee}{i4}}$, en fonction des $\partial_4\Gamma_i$ et des $\partial_4 L^4_{\underset{\vee}{ij}}$ seuls. — *a. Relation entre les $L^\rho_{\underline{i\rho}}$ et les $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$.* — Rappelons que

$$W_{\underset{\vee}{i4}} \sim \partial_4 L^4_{\underset{\vee}{i4}} + \frac{1}{2}\partial_i L^\rho_{\underline{i\rho}}$$

et cherchons d'abord l'expression des $\partial_4 L^\rho_{\underline{i\rho}}$ en fonction des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$. Nous savons que les équations de liaison entraînent l'égalité suivante (10.8) :

$$L^\rho_{\underline{i\rho}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_i\sqrt{-g} + \frac{1}{3}g_{i\rho}\mathcal{F}^\rho\right)$$

qui devient par dérivation par rapport à la variable x^4 et modulo des termes ne dépendant que des données de Cauchy :

$$\partial_4 L^\rho_{\underline{i\rho}} \sim \frac{1}{3\sqrt{-g}}g_{ij}\partial_4\mathcal{F}^j;$$

en effet $\partial_4\mathcal{F}^4 (\equiv -\partial_i\mathcal{F}^i)$ est calculable sur S en fonction des $\mathcal{F}^i$ qu'on peut connaître par (15.1), or

$$\partial_4\mathcal{F}^j = \partial_4\partial_\rho\mathcal{G}^{\underset{\vee}{j\rho}} \sim \partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{j4}}$$

et nous pouvons donc écrire

$$\partial_4 \mathrm{L}^{\rho}_{\underline{i\rho}} \sim \frac{1}{3\sqrt{-g}}\, g_{ij}\, \partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{j4}{\vee}}. \tag{22.1}$$

b. Relation entre les $\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{i4}}$ *et les* $\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$. — C'est $\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{i4}}$ qu'il nous faut maintenant exprimer en fonction des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$ et des $\partial_4 \mathrm{L}^4_{ij}$, sachant que les équations de liaison sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\partial_{44}\mathcal{G}^{i4} \sim & -\partial_4 \mathrm{L}^i_{h4}\,\mathcal{G}^{h4} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{4h}\,\mathcal{G}^{ih} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{44}\,\mathcal{G}^{44} \\
& - \partial_4 \mathrm{L}^4_{44}\,\mathcal{G}^{i4} + \partial_4 \mathrm{L}^{\rho}_{\underline{4\rho}}\,\mathcal{G}^{i4}, \\
\partial_{44}\mathcal{G}^{4i} \sim & -\partial_4 \mathrm{L}^4_{h4}\,\mathcal{G}^{hi} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{4h}\,\mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{44}\,\mathcal{G}^{4i} \\
& - \partial_4 \mathrm{L}^i_{44}\,\mathcal{G}^{44} + \partial_4 \mathrm{L}^{\rho}_{\underline{4\rho}}\,\mathcal{G}^{4i} - \frac{2}{3}\,\partial_4 \mathcal{F}^i
\end{aligned}$$

(ces équations sont déduites des équations de liaison par dérivation par rapport à la variable x^4, et pour un indice de dérivation covariante égal à 4).

En retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\,\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}} \sim\ & \partial_4 \mathrm{L}^i_{4h}\,\mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{h4}\,\mathcal{G}^{h4} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{4h}\,\mathcal{G}^{ih} \\
& + \partial_4 \mathrm{L}^4_{h4}\,\mathcal{G}^{hi} + 2\,\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}\,\partial_4 \mathrm{L}^j_{4j}.
\end{aligned} \tag{22.2}$$

Écrivons, alors, les deux congruences suivantes déduites des équations de liaison :

$$\begin{aligned}
\partial_{4k}\mathcal{G}^{4i} \sim & -\partial_4 \mathrm{L}^4_{hk}\,\mathcal{G}^{hi} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{kh}\,\mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{4k}\,\mathcal{G}^{4i} \\
& - \partial_4 \mathrm{L}^i_{k4}\,\mathcal{G}^{44} - \mathcal{G}^{4i}\,\partial_4 \mathrm{L}^{\rho}_{\underline{k\rho}},
\end{aligned} \tag{22.a}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{4k}\mathcal{G}^{i4} \sim & -\partial_4 \mathrm{L}^i_{hk}\,\mathcal{G}^{h4} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{kh}\,\mathcal{G}^{ih} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{4k}\,\mathcal{G}^{44} \\
& - \partial_4 \mathrm{L}^4_{k4}\,\mathcal{G}^{i4} + \mathcal{G}^{i4}\,\partial_4 \mathrm{L}^{\rho}_{\underline{k\rho}}.
\end{aligned} \tag{22.b}$$

Multiplions les deux membres de la première équation par $\mathcal{G}^{k4}$, les deux membres de la seconde par $\mathcal{G}^{4k}$ et retranchons, il vient

$$\begin{aligned}
\partial_4 \mathrm{L}^i_{4h}\,\mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^i_{h4}\,\mathcal{G}^{h4} \sim & -\partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{hj}}\,\frac{\mathcal{G}^{4i}\mathcal{G}^{h4} - \mathcal{G}^{i4}\mathcal{G}^{4h}}{\mathcal{G}^{44}} \\
& - \partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{h4}}\,\frac{\mathcal{G}^{i4}\mathcal{G}^{4h} + \mathcal{G}^{4i}\mathcal{G}^{h4}}{\mathcal{G}^{44}} + \mathrm{T}^i,
\end{aligned} \tag{22.3}$$

où T_i est une fonction linéaire des $\partial_4 \mathrm{L}^4_{rs}$ [11]. Ceci nous permet

---

[11] La lettre T désignera toujours par la suite une expression qui dépend des données de Cauchy et linéairement des $\partial_4 \mathrm{L}^4_{rs}$.

d'exprimer les deux premiers termes du second membre de (22.2). Il reste à écrire les $\partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{hj}}$, $\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underline{h4}}$ et $\partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{4j}}$ en fonction des $\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$, or

$$\partial_{4k} \mathcal{G}^{44} \sim -\partial_4 \mathrm{L}^4_{hk} \mathcal{G}^{h4} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{kh} \mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{4k} \mathcal{G}^{44} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{k4} \mathcal{G}^{44} + \mathcal{G}^{44} \partial_4 \mathrm{L}^\rho_{\underline{k\rho}};$$

d'où l'on déduit

$$2 \partial_4 \mathrm{L}^4_{\underline{k4}} \sim \partial_4 \mathrm{L}^\rho_{\underline{k\rho}} + 2 \mathrm{T}_k.$$

Si nous reportons à (22.1), il vient

$$\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underline{k4}} \sim \frac{1}{6} g_{kj} \frac{\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{j4}{\vee}}}{\sqrt{-g}} + \mathrm{T}_k, \tag{22.4}$$

$$\partial_4 \mathrm{L}^h_{\underline{kh}} \sim \frac{1}{6} g_{kj} \frac{\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{j4}{\vee}}}{\sqrt{-g}} - \mathrm{T}_k. \tag{22.5}$$

Pour calculer $\partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{4j}}$ considérons l'équation

$$\partial_{4j} \mathcal{G}^{4j} \sim -\partial_4 \mathrm{L}^4_{hj} \mathcal{G}^{hj} - \partial_4 \mathrm{L}^j_{jh} \mathcal{G}^{4h} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{4j} \mathcal{G}^{4j} - \partial_4 \mathrm{L}^j_{j4} \mathcal{G}^{44} + \partial_4 \mathrm{L}^\rho_{\underline{j\rho}} \mathcal{G}^{4j},$$

qui nous fournit le résultat suivant (en tenant compte du fait que $\mathrm{L}^j_{\underset{\vee}{4j}} \equiv \mathrm{L}^\rho_{\underset{\vee}{4\rho}} \equiv \mathrm{L}_4 = 0$) :

$$\mathcal{G}^{44} \partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{4j}} \sim \mathcal{G}^{4j} \left(-\partial_4 \mathrm{L}^r_{\underline{jr}} + \partial_4 \mathrm{L}^r_{\underset{\vee}{jr}} - \partial_4 \mathrm{L}^4_{\underline{j4}} + \partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{j4}} + \partial_4 \mathrm{L}^\rho_{\underline{j\rho}} \right) + \mathrm{T}$$

soit, en utilisant la nullité du vecteur de torsion de la connexion linéaire $\mathrm{L}^\rho_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{G}^{44} \partial_4 \mathrm{L}^j_{\underline{4j}} \sim \mathrm{T}. \tag{22.6}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la relation entre $\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$ et $\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{j4}}$ en portant les résultats (22.3, 4, 5 et 6) dans (22.2); il vient alors

$$\frac{4}{3} \partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}} + \frac{1}{6} \left(2 g^{\overset{ih}{\vee}} - \frac{g^{i4} g^{4h} - g^{4i} g^{h4}}{g^{44}} \right) g_{hj} \partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{j4}{\vee}} \sim \left(2 \mathcal{G}^{\underline{ih}} - \frac{\mathcal{G}^{i4} \mathcal{G}^{4h} + \mathcal{G}^{4i} \mathcal{G}^{h4}}{g^{44}} \right) \partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{h4}} + \mathrm{T}'^i. \tag{22.7}$$

c. Possibilité d'exprimer $\mathrm{W}_{\underset{\vee}{i4}}$ *en fonction des* $\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$. — Si ce dernier système est réversible, l'équation (20.5) devient

$$\Phi\left(\partial_{44} \mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}\right) - q \partial_4 \Gamma_i \sim \mathrm{T}''_i,$$

où Φ dépend linéairement des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ et T'' des $\partial_4 L^4_{ij}$. Étudions donc la réversibilité du système (22.7), c'est-à-dire le déterminant de la matrice

$$g^{\underline{ih}} - \frac{g^{\underline{i4}}\, g^{\underline{h4}}}{g^{44}} + \frac{g^{\underset{\vee}{i4}}\, g^{\underset{\vee}{h4}}}{g^{44}}.$$

Ce déterminant sera la somme

d'un déterminant A ne comportant que des $\dot{h}^{ih} = g^{\underline{ih}} - \frac{g^{\underline{i4}}\, g^{\underline{h4}}}{g^{44}}$;

d'un déterminant B ne comportant que des $\frac{f^{i4} f^{h4}}{g^{44}}$;

de trois déterminants C comportant une rangée de $\dot{h}^{ih}$ et deux rangées de $\frac{f^{i4} f^{h4}}{g^{44}}$;

de trois déterminants D comportant une rangée de $\frac{f^{i4} f^{h4}}{g^{44}}$ et deux rangées de $\dot{h}^{ih}$

On sait que le tenseur de V_3 associé à $\dot{h}^{ih}$ est h_{ih}, or le déterminant de la matrice des h_{ih} est le mineur de h_{44} donc égal à hh^{44} supposé différent de zéro ; le déterminant de la matrice $\dot{h}^{ih}$ est donc égal à $\frac{1}{hh^{44}}$. Le mineur de $\dot{h}^{ih}$ dans la matrice des $\dot{h}^{ih}$ s'écrit, par conséquent, $\frac{h_{ih}}{hh^{44}}$.

Remarquons d'autre part que tous les mineurs du déterminant de la matrice $\left(\frac{f^{i4} f^{h4}}{g^{44}}\right)$ sont nuls comme déterminants d'ordre 2 dont les termes sont des produits de la forme $a^i b^h$.

Donc le déterminant B et les trois déterminants C sont nuls.

Les trois déterminants D ont pour somme

$$\frac{f^{i4} f^{h4}}{g^{44}} \frac{h_{ih}}{hh^{44}}.$$

Il nous reste donc

$$\Delta = \frac{1}{h(h^{44})^2}\left[h^{44} + f^{i4} f^{h4} h_{ih}\right];$$

on reconnaît alors l'expression (2.2) de γ^{44} en fonction de $h^{\mu\nu}$ et de $f^{\mu\nu}$:

$$\Delta = \frac{\gamma^{44}}{h(h^{44})^2}.$$

Le système (22.7) donne donc une expression des $\partial_4 L^4_{\underset{\vee}{h4}}$ en fonction des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underset{\vee}{i4}}$ à condition que γ^{44} soit différent de zéro :

$$\gamma^{44} \neq 0. \tag{22.8}$$

A cette condition le système (20.5) peut se mettre sous la forme suivante (sauf si $h^{4\nu}\Gamma_\nu = 0$) :

$$C_i^j\,\partial_4\Gamma_j \sim T_i, \tag{22.9}$$

si l'on utilise l'expression (21.4) des $\partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}$ en fonction des $\partial_4\Gamma_i$. Les C_i^j sont fonctions de toutes les données de Cauchy et par conséquent la condition que le déterminant de la matrice des C_i^j soit différent de zéro entraîne une inégalité supplémentaire à laquelle doivent satisfaire les données de Cauchy relativement à une surface S d'équation $x^4 = 0$ [12] :

$$\text{dét}\,(C_i^j) \neq 0. \tag{22.10}$$

Il s'agit d'un nouveau cône caractéristique.

Si cette condition est satisfaite, alors on extrait les $\partial_4 L_i$ du système (22.9), puis $\partial_4\Gamma_4$ du système (21.2), et enfin les $\partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}$ du système (21.4) et l'on obtient les expressions de ces quantités, linéairement en fonction des $\partial_4 L_{ij}^4$.

23. Expression des $\partial_{44}g_{ij}$ en fonction des $\partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}$ et des $\partial_4 L_{ij}^4$. — Montrons maintenant que les $\partial_{44}g_{ij}$ sont calculables aussi en fonction des $\partial_4 L_{ij}^4$ à l'aide des équations de liaison :

$$\begin{aligned}\partial_{44}g_{ij} \sim{}& \partial_4 L_{i4}^h\,g_{hj} + \partial_4 L_{4j}^h\,g_{ih} + \partial_4 L_{i4}^4\,g_{4j} + \partial_4 L_{4j}^4\,g_{i4}\\ &+ \frac{2}{3}\,g_{4j}g_{i\rho}\,\partial_4 f^\rho - \frac{1}{3}\,g_{ij}g_{4\rho}\,\partial_4 f^\rho.\end{aligned}$$

Nous montrerons d'abord que les $\partial_{44}g_{ij}$ sont fonctions linéairement des $\partial_4 L_{ij}^4$ et des $\partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}$.

Remarquons tout d'abord que

$$\partial_4 f^\rho \sim \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_4\mathcal{F}^\rho,$$

or

$$\partial_4\mathcal{F}^4 \sim 0 \qquad \text{et} \qquad \partial_4\mathcal{F}^i \sim \partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee},$$

donc

$$\partial_4 f^\rho \sim \delta_i^\rho\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{44}\overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}.$$

---

[12] *Voir* l'appendice II à la fin du chapitre.

Donc nous pouvons déjà écrire

$$\partial_{44} g_{ij} \sim \partial_4 L^h_{i4} g_{hj} + \partial_4 L^h_{4j} g_{ih} + S, \tag{23.1}$$

où S est une fonction linéaire des $\partial_{44} \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$ et des $\partial_4 L^4_{ij}$, car nous avons démontré au paragraphe précédent que $\partial_4 L^4_{\underline{i4}}$ et $\partial_4 L^4_{\underset{\vee}{i4}}$ étaient des fonctions du type S ([13]).

Écrivons de nouveau les deux équations (22.a, b) dont une combinaison nous a permis d'éliminer les termes en $\partial_4 L^j_{4i}$ et $\partial_4 L^j_{i4}$ dans l'expression de $\partial_{44} \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$:

$$\begin{aligned} \partial_{4i} \mathcal{G}^{4h} \sim & -\partial_4 L^4_{ri}\, \mathcal{G}^{rh} - \partial_4 L^h_{ir}\, \mathcal{G}^{4r} - \partial_4 L^4_{4i}\, \mathcal{G}^{4h} \\ & - \partial_4 L^h_{i4}\, \mathcal{G}^{44} + \partial_4 L^\rho_{\underline{i\rho}}\, \mathcal{G}^{4h}, \end{aligned} \tag{22.a}$$

$$\begin{aligned} \partial_{4j} \mathcal{G}^{h4} \sim & -\partial_4 L^h_{rj}\, \mathcal{G}^{r4} - \partial_4 L^4_{jr}\, \mathcal{G}^{hr} - \partial_4 L^h_{4j}\, \mathcal{G}^{44} \\ & - \partial_4 L^4_{j4}\, \mathcal{G}^{h4} + \partial_4 L^\rho_{\underline{j\rho}}\, \mathcal{G}^{h4} \end{aligned} \tag{22.b}$$

et formons une nouvelle combinaison (indépendante de celle du paragraphe **22**, si bien que (**22**.3) et (**23**.2) seront indépendantes) qui mette en évidence les termes en L^h_{i4} et L^h_{4j} qui apparaissent dans l'expression des $\partial_{44} g_{ij}$. Il vient, en faisant entrer dans une fonction S_{ij} tous les termes qui dépendent linéairement des $\partial_{44} \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$ et des $\partial_4 L^4_{ij}$:

$$g^{44}(\partial_4 L^h_{i4} g_{hj} + \partial_4 L^h_{4j} g_{ih}) \sim -\partial_4 L^h_{ir} g^{4r} g_{hj} - \partial_4 L^h_{rj} g^{r4} g_{ih} + S_{ij}. \tag{23.2}$$

Il reste maintenant à montrer que les $\partial_4 L^h_{ir}$ sont des fonctions linéaires des $\partial_4 L^4_{ij}$ et des $\partial_{44} \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$, or les équations

$$\begin{aligned} \partial_{4k} g_{ij} \sim & \ \partial_4 L^h_{ik} g_{hj} + \partial_4 L^h_{kj} g_{ih} + \partial_4 L^4_{ik} g_{4j} + \partial_4 L^4_{kj} g_{i4} \\ & + \frac{2}{3} g_{kj} g_{ir} \partial_4 f^r - \frac{1}{3} g_{ij} g_{kr} \partial_4 f^r \end{aligned}$$

permettent d'écrire plus simplement :

$$\partial_{4k} g_{ij} \sim \partial_4 L^h_{ik} g_{hj} + \partial_4 L^h_{kj} g_{ih} + S_{ijk}. \tag{23.3}$$

C'est, au terme en S_{ijk} près, un système semblable à celui que considère A. Lichnerowicz ([4], p. 285 : équation (91.3)) et le problème de la réversibilité a été résolu, suivant la méthode de

---

([13]) La lettre S désignera dans la suite des fonctions ne dépendant que des données de Cauchy et linéairement des $\partial_{44} \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$ et des $\partial_4 L^4_{ij}$.

V. Hlavaty par M^me^ Tison ([7] chap. V, § **27** à **30**) qui trouve les conditions suivantes :

$$2\gamma\gamma^{44} - gg^{44} \neq 0, \qquad \gamma^{44} \neq 0. \tag{23.4}$$

Si ces conditions sont réalisées (la seconde condition n'est pas nouvelle et a déjà été imposée, dans cette théorie, par la réversibilité du système (22.7)), il est alors possible d'exprimer les dérivées $\partial_4 L^h_{ik}$ sous forme de fonctions S^h_{ik} ; le système (23.2) joint au système (**23.1**) montre que

$$\partial_{44} g_{ij} \sim S'_{ij} \sim D^{rs}_{ij}\,\partial_4 L^4_{rs} + E_{ijk}\,\partial_{44}\overset{k4}{\mathfrak{G}^{\vee}}. \tag{23.5}$$

24. Détermination des dérivées successives du tenseur fondamental et du vecteur Γ. — Les seules équations du champ non utilisées sont les équations (20.4)

$$W_{ij} \sim \partial_4 L^4_{ij} \sim 0.$$

Si nous les supposons satisfaites, $\partial_4 L^4_{ij}$ est fonction des données de Cauchy sur S, donc connu et si aucune des conditions

$$\left\{\begin{array}{l} g^{44} = 0, \qquad \gamma^{44} = 0, \qquad 2\gamma\gamma^{44} - gg^{44} = 0, \\ \qquad\qquad \text{dét}\,|\,C^j_i\,| = 0, \qquad \Gamma^4 = 0 \end{array}\right. \tag{24.1}$$

n'est vérifiée sur la surface S d'équation $x^4 = 0$; alors le système (22.9) (déduit des équations du champ (20.5)) permet de calculer $\partial_4 \Gamma_i$; puis (21.4) donne $\partial_{44}\overset{i4}{\mathfrak{G}^{\vee}}$; enfin le système (23.5) (déduit de (20.4)) fournit l'expression des $\partial_{44} g_{ij}$ en fonction des données de Cauchy. Accessoirement, $\partial_4 \Gamma_4$ est déterminé par la condition de normalisation.

Tous les systèmes considérés sont linéaires par rapport aux inconnues, et leurs formes en tant que congruences, seront invariantes, par dérivation relativement à x^4, si l'on considère comme nouvelles inconnues : $\partial_{444} g_{ij}$, $\partial_{444}\overset{i4}{\mathfrak{G}^{\vee}}$, $\partial_{44}\Gamma_\alpha$ et si l'on remplace les anciennes par leurs valeurs maintenant connues en fonction des données de Cauchy. Par dérivations successives, nous pouvons ainsi déterminer les dérivées de tous les ordres du tenseur fondamental et du vecteur Γ relativement à x^4 sur la surface S.

Ainsi à la traversée de l'hypersurface S ($x^4 = 0$) et à condition que sur S, aucune des égalités (**24.1**) ne soit vérifiée, les dérivées successives du tenseur fondamental et du quadrivecteur Γ seront connues, à l'exclusion toutefois des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\underline{4\lambda}}$ qui peuvent prendre des valeurs arbitraires sur S, mais leurs discontinuités ne sont pas intrinsèques et peuvent être annulées par un changement de coordonnées admissibles, grâce à la structure différentiable de V_4.

Donc, tout au moins dans le cas analytique, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

En théorie élargie du champ unifié d'Einstein, le problème de Cauchy relatif aux équations du champ :

$$(20.2)\qquad Z_{ij} = W_{ij} + \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho \Gamma_i \Gamma_j + q F_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0,$$

$$(20.3)\qquad Z_{\underset{\vee}{i4}} = W_{\underset{\vee}{i4}} + q F_{i4} - \frac{1}{2} \varphi_{i4}(p\alpha^2 - q f^\rho \Gamma_\rho) = 0,$$

auxquelles on adjoint les équations aux Γ :

$$(20.1)\qquad \frac{1}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho g^{\underline{\mu\alpha}} \Gamma_\alpha + f^\mu = 0$$

et aux données de Cauchy :

$$g_{ij},\quad \mathcal{G}^{\overset{4i}{\vee}},\quad \mathcal{G}^{\underline{i\lambda}},\quad \partial_4 g_{ij},\quad \partial_4 \mathcal{G}^{\underline{4\lambda}},\quad \Gamma_\mu$$

portées par l'hypersurface $S(x^4 = 0)$, *satisfaisant sur* S *aux conditions*

$$(19.1)\qquad K^4_\rho - q\Gamma_\rho f^4 + q g^{\overset{4\nu}{\vee}} F_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\delta^4_\rho\left(p\alpha^2 - q g^{\overset{\alpha\beta}{\vee}} F_{\alpha\beta}\right) = 0,$$

$$(19.2)\qquad g^{\mu\nu}\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \alpha^2 = 0,$$

admet une solution unique à un changement de coordonnées admissible près si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$g^{44} \neq 0,\qquad \gamma^{44} \neq 0,\qquad 2\gamma\gamma^{44} - g g^{44} \neq 0,$$
$$\text{dét}\,(C_i^j) \neq 0,\qquad \Gamma^4 \neq 0,$$

dans le cas où q ***et*** α^2 ***ne sont pas nuls et où*** λ ***est différent de*** $-p$.

APPENDICES A LA DEUXIÈME PARTIE.

I. — DÉTERMINATION DES C_i^j.

Pour exprimer d'abord $\partial_4 L^4_{\underset{\vee}{i4}}$ en fonction des $\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$, il nous faut chercher le tenseur associé au tenseur symétrique

$$a^{ih} = h^{ih} - \frac{h^{i4}h^{h4}}{h^{44}} + \frac{f^{i4}f^{h4}}{h^{44}} = \dot{h}^{ih} + \frac{f^{i4}f^{h4}}{h^{44}}.$$

Calculons d'abord les mineurs du déterminant a de la matrice (a^{ih}); ils seront formés :

1° d'un déterminant ne comportant que des $\dot{h}^{ih}$, soit $\dfrac{h_{ih}}{hh^{44}}$ sa valeur;

2° d'un déterminant ne comportant que des f^{i4}, nul;

3° de deux déterminants comportant une ligne de $\dot{h}^{ih}$ et une ligne de $\dfrac{f^{i4}f^{h4}}{h^{44}}$ dont la somme s'écrit

$$\varepsilon_{irk}\varepsilon_{jsl}\frac{\dot{h}^{rs}}{h^{44}}f^{k4}f^{l4}.$$

Ainsi, le tenseur associé à a^{ih} dans V^3 s'écrit, sachant que le déterminant de la matrice a^{ih} est $\dfrac{\gamma^{44}}{h(h^{44})^2}$:

$$\frac{h^{44}}{\gamma^{44}}(h_{ij}+h\,\varepsilon_{irk}\varepsilon_{jsl}\dot{h}^{rs}f^{k4}f^{l4});$$

ce qui permet d'écrire l'équation du champ (22.7) sous la nouvelle forme suivante, à condition que γ^{44} ne soit pas nul :

$$\sqrt{-g}\,\partial_4 \mathrm{L}^4_{\underset{\vee}{i4}} \sim \frac{h^{44}}{\gamma^{44}}(h_{ij}+h\,\varepsilon_{irk}\varepsilon_{jsl}\dot{h}^{rs}f^{k4}f^{l4})$$
$$\times\left(\frac{2}{3}\,\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{j4}{\vee}}+\frac{1}{6}\left(f^{jh}+\frac{h^{j4}f^{h4}-h^{h4}f^{j4}}{h^{44}}\right)g_{hm}\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{m4}{\vee}}\right)+\mathrm{T}'''_i.$$

Il faut maintenant remplacer les $\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}}$ par leur expression en fonction des $\partial_4\Gamma_i$ donnée par le système (21.3) :

$$\partial_{44}\mathcal{G}^{\overset{i4}{\vee}} \sim -\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho\Gamma_\rho\left(h^{ij}+\frac{h^{44}\Gamma^i\Gamma^j}{(\Gamma^4)^2}-\frac{h^{i4}\Gamma^j+h^{j4}\Gamma^i}{\Gamma^4}\right)\partial_4\Gamma_j;$$

ce qui nous fournit l'expression complète des C_i^j :

$$\mathrm{C}_i^j=-\frac{1}{\alpha^2}\mathcal{F}^\rho\Gamma_\rho\left[\frac{h^{44}}{\gamma^{44}}(h_{in}+h\,\varepsilon_{irk}\varepsilon_{nsl}\dot{h}^{rs}f^{k4}f^{l4})\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{2}{3}\,\delta^n_h+\frac{1}{6}\,g_{mh}\left(f^{nm}+\frac{h^{n4}f^{m4}-h^{m4}f^{n4}}{h^{44}}\right)\right)-\frac{1}{6}\,g_{ih}\right]$$
$$\times\left(h^{hj}+\frac{h^{44}\Gamma^h\Gamma^j}{(\Gamma^4)^2}-\frac{h^{h4}\Gamma^j+h^{j4}\Gamma^h}{\Gamma^4}\right)-q\,\delta_i^j.$$

Dans le cas considéré où q est différent de zéro, cela revient à dire que les données de Cauchy sur S sont telles que q ne soit pas une valeur propre pour le déterminant de la matrice $\mathrm{C}'^j_i=\mathrm{C}_i^j+q\,\delta_i^j$ (dont les termes sont indépendants de q).

II. — PROBLÈME DE CAUCHY DANS LES CAS PARTICULIERS MIS EN ÉVIDENCE AU PARAGRAPHE 11 DU CHAPITRE I.

Étudions d'abord les deux cas particuliers qui se présentent quand on suppose que la constante α^2 est choisie différente de zéro.

1. *Le cas* $\mathcal{F}^\mu = 0$. — L'équation (II.1) du paragraphe 11 :

$$\lambda = -p + \frac{q}{\alpha^2} f^\rho \Gamma_\rho$$

montre que dans le cas où $\mathcal{F}^\mu$ est nul, λ est une constante et par suite la normalisation de Γ_μ obtenue par la variation de λ n'est plus vérifiée.

Les équations du champ s'écrivent alors

$$W_{\mu\nu} + q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) - \frac{1}{2} p \alpha^2 g_{\mu\nu} = 0$$

c'est, au terme en $g_{\mu\nu}$ près, le système des équations du champ de la théorie du champ unifié d'Einstein. Le problème de Cauchy dans ce cas a été étudié et tous les résultats sont valables ici.

Pour que la surface S d'équation $x^4 = 0$ ne soit pas une variété caractéristique il faut et il suffit que, sur S, aucune des égalités suivantes ne soit vérifiée :

$$h^{44} = 0, \qquad g g^{44} - 2\gamma\gamma^{44} = 0, \qquad \gamma^{44} = 0.$$

2. *Le cas* $q = 0$. — L'équation (II.1) entraîne toujours que le quadrivecteur Γ_μ n'est pas normé, et de toutes manières, il n'intervient pas ici, dans les équations du champ qui s'écrivent

$$W_{\mu\nu} - \frac{1}{2} p \alpha^2 g_{\mu\nu} = 0.$$

Le quadrivecteur f^μ n'est pas restreint, il nous faudra donc prendre, sur S, les données de Cauchy suivantes :

$$g_{ij}, \quad \overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}, \quad \overset{4\lambda}{\mathcal{G}^-}, \quad \partial_4 g_{ij}, \quad \partial_4 \overset{i4}{\mathcal{G}^\vee}, \quad \partial_4 \overset{4\lambda}{\mathcal{G}^-}.$$

Les identités de conservation sont les mêmes que celles calculées au chapitre IV de la première partie; il suffit de prendre q nul.

Le théorème qui s'en déduit concernant les

$$M^4_\rho = K^4_\rho + \frac{1}{2} \delta^4_\rho p \alpha^2$$

à savoir, le fait que les M^4_ρ s'expriment uniquement en fonction des données de Cauchy reste vrai ici puisque les $\partial_4 \mathcal{G}^{i4}_{\vee}$ sont par hypothèse des données de Cauchy.

Les équations se séparent donc en deux groupes et le théorème de décomposition (18) reste vrai.

Pour que la surface S d'équation $x^4 = 0$, ne soit pas une variété caractéristique, il faut et il suffit que, sur S, aucune des égalités suivantes ne soit vérifiée :

$$h^{44} = 0, \qquad g g^{44} - 2\gamma\gamma^{44} = 0, \qquad \gamma^{44} = 0,$$
$$\text{dét}\,|\,C''_{ij}\,| = 0,$$

sans oublier que les C''_{ij} considérés ici s'écrivent

$$C''_{ij} = \frac{h^{44}}{\gamma^{44}}\,(h_{in} + h\,\varepsilon_{irk}\varepsilon_{nsl}h^{rs}f^{k4}f^{l4})$$
$$\times\left(\frac{2}{3}\,\delta^n_j + \frac{1}{6}\,g_{mj}\left(f^{nm} + \frac{h^{n4}f^{m4} - h^{m4}f^{n4}}{h^{44}}\right)\right) - \frac{1}{6}\,g_{ij}.$$

Étudions maintenant les cas particuliers qui peuvent se présenter quand la condition $\alpha^2 = 0$ est satisfaite.

En portant les résultats du tableau du paragraphe 11 dans les équations du champ, on voit que tous les cas se ramènent à l'un ou à l'autre des deux cas particuliers que nous venons de considérer.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS APPROCHÉES DU CHAMP.

INTRODUCTION.

L'idée première ici est de mettre en évidence dans les équations du champ écrites sous l'une ou l'autre forme

$$\text{(III)} \qquad Z_{\mu\nu} \equiv W_{\mu\nu} + (p + \lambda)\,\Gamma_\mu\Gamma_\nu + q\,(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + \frac{1}{2}\,\lambda\alpha^2 g_{\mu\nu} = 0;$$

ou

$$\text{(III.1)} \quad Z_{\mu\nu} \equiv W_{\mu\nu} + (p + \lambda)\,\Gamma_\mu\Gamma_\nu + q\,(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + \frac{1}{2}\,\lambda\alpha^2 g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T,$$

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial v_\alpha} - \partial_\sigma\,\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\sigma v_\alpha)} = 0,$$

le tenseur d'Einstein d'une variété espace-temps de métrique riemannienne choisie *a priori*, afin de comparer les équations de la présente théorie à celles du cas intérieur de la théorie de la Relativité générale dans le cas électromagnétique.

Pour des raisons de simplicité et afin de faire apparaître au second membre des équations, un tenseur électromagnétique, nous choisirons comme tenseur métrique, le tenseur $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu})$. Ce choix étant d'ailleurs justifié par les résultats du chapitre précédent.

Il s'agit donc d'extraire du tenseur de Ricci $W_{\mu\nu}$ le tenseur de Ricci $G_{\mu\nu}$ de l'espace riemannien de métrique $\gamma_{\alpha\beta}$.

Nous nous servirons constamment dans cette partie des résultats de M.-A. Tonnelat ([3], chap. III et [8]) relatifs à la connexion $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ vérifiant les équations

$$\mathcal{G}^{\underset{+-}{\mu\nu}}{}_{;\rho} \doteq 0.$$

Ce sont ces résultats qui nous permettront d'exprimer $W_{\mu\nu}$ en fonction de $G_{\mu\nu}$. La très grande complexité de ces calculs nous obligera à les effectuer de façon approchée en considérant la partie antisymétrique du tenseur fondamental

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} - g_{\nu\mu})$$

comme infiniment petit du premier ordre, ainsi que ses dérivées (hypothèse de champ électromagnétique faible et quasi statique).

Il nous faudra séparer les parties symétrique et antisymétrique des équations du champ et mettre en évidence le tenseur de torsion de la connexion $L^{\rho}_{\mu\nu}$ dans tous les termes où apparaissent des coefficients de connexion, car c'est de cette torsion que nous possédons une expression exacte en fonction du tenseur fondamental.

Nous chercherons ensuite, si, une fois les équations écrites sous la forme

$$G_{\mu\nu}(\gamma) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}G(\gamma) \simeq K_{\mu\nu},$$

le tenseur $K_{\mu\nu}$ est conservatif au deuxième ordre d'approximation. S'il ne l'était pas, la condition pour qu'il le soit nous fournirait une équation supplémentaire qui pourrait peut-être permettre de déduire les équations du mouvement des équations du champ du cas intérieur comme en Relativité générale. Nous verrons qu'avec ou sans l'introduction du tenseur $T_{\mu\nu}$ et en tenant compte de *toutes* les équations de la théorie, le tenseur $K_{\mu\nu}$ est identiquement conservatif.

CHAPITRE I.

EXPRESSION EXACTE DES PARTIES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES DU TENSEUR DE RICCI EN FONCTION DU TENSEUR DE TORSION DE LA CONNEXION LINÉAIRE.

25. Expression exacte de la partie symétrique de la connexion $L^{\rho}_{\mu\nu}$ en fonction de son tenseur de torsion. — Rappelons la forme des équations de liaison

$$\mathcal{G}^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} \equiv \partial_\rho \mathcal{G}^{\mu\nu} + L^{\mu}_{\lambda\rho}\mathcal{G}^{\lambda\nu} + L^{\nu}_{\rho\lambda}\mathcal{G}^{\mu\lambda} - \mathcal{G}^{\mu\nu} L^{\lambda}_{\underline{\rho\lambda}} = -\frac{2}{3}\delta^{\mu}_{\rho}\mathcal{F}^{\nu}.$$

Nous avons déjà montré que ces équations sont équivalentes au système suivant :

$$\mathcal{G}^{\underset{+}{\mu}\underset{-}{\nu}}{}_{;\rho} = 0, \tag{25.1}$$

$$\Delta^{\rho}_{\mu\nu} = L^{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(f^{\rho} + f^{\bar{\rho}}) + \delta^{\rho}_{\nu}\left(\frac{1}{6} f_{\mu} - \frac{1}{3} f_{\bar{\mu}} - \frac{1}{2} f_{\bar{\bar{\mu}}}\right) - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}(f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}), \tag{25.2}$$

en posant

$$f_{\mu} = \gamma_{\mu\lambda} f^{\lambda},$$

$$f_{\bar{\mu}} = \varphi_{\mu\lambda} f^{\lambda}, \qquad f^{\bar{\mu}} = \gamma^{\mu\lambda} f_{\bar{\lambda}},$$

$$f_{\bar{\bar{\mu}}} = \varphi_{\mu\lambda} f^{\bar{\lambda}}, \qquad f^{\bar{\bar{\mu}}} = \gamma^{\mu\lambda} f_{\bar{\bar{\lambda}}}.$$

Or, si l'on écrit

$$\Delta^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + u^{\rho}_{\mu\nu},$$

où $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ est l'algorithme de Christoffel relatif à la métrique $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu})$ que nous choisissons *a priori*, un calcul de M.-A. Tonnelat ([3], chap. III) permet d'écrire

$$\gamma_{\rho\sigma} u^{\sigma}_{\mu\nu} \equiv u_{\mu\nu,\rho} = \varphi_{\lambda\mu}\Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu}\Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}}. \tag{25.3}$$

Posons ici de la même façon

$$L^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + v^{\rho}_{\mu\nu},$$

où $\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\}$ est encore l'algorithme de Christoffel relatif à la métrique $\gamma_{\mu\nu}$, et exprimons $v^{\rho}_{\mu\nu}$ en fonction de la partie antisymétrique de la connexion linéaire initiale $L^{\rho}_{\mu\nu}$.

L'équation (25.2), par symétrisation, devient

$$\Delta^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} = L^{\rho}_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f^{\rho} + f^{\overline{\rho}}) + \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\mu}(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}}) + \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\nu}(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}})$$

ce qui nous permet d'écrire

$$v^{\rho}_{\mu\nu} = u^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f^{\rho} + f^{\overline{\rho}}) + \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\mu}(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}}) + \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\nu}(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}}); \tag{25.4}$$

la relation entre les parties antisymétriques des coefficients de connexion linéaire $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ et $L^{\rho}_{\mu\nu}$ s'écrit

$$\Delta^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}(f^{\rho} + f^{\overline{\rho}}) - \delta^{\rho}_{\mu}K_{\nu} + \delta^{\rho}_{\nu}K_{\mu},$$

avec

$$K_{\mu} = \frac{1}{3}f_{\mu} - \frac{1}{6}f_{\overline{\mu}} - \frac{1}{2}f_{\overline{\overline{\mu}}},$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda\mu}\Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu}\Delta^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} = {} & \varphi_{\lambda\mu}L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu}L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} \\ & - \frac{1}{2}\varphi_{\nu\rho}(f_{\overline{\mu}} + f_{\overline{\overline{\mu}}}) - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\rho}(f_{\overline{\nu}} + f_{\overline{\overline{\nu}}}) - \varphi_{\mu\rho}K_{\nu} - \varphi_{\nu\rho}K_{\mu}. \end{aligned}$$

En portant cette expression dans l'équation (25.3), on trouve l'expression cherchée

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{\rho\sigma}v^{\sigma}_{\mu\nu} \equiv v_{\mu\nu,\rho} = {} & \varphi_{\lambda\mu}L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu}L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f_{\rho} + f_{\overline{\rho}}) \\ & + \frac{1}{6}(\gamma_{\mu\rho} - 2\varphi_{\mu\rho})(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}}) + \frac{1}{6}(\gamma_{\nu\rho} - 2\varphi_{\nu\rho})(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}}). \end{aligned}} \tag{25.5}$$

D'autre part, les équations de liaison entraînent

$$L^{\rho}_{\mu\rho} = L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}(\operatorname{Log} g) + \frac{1}{3}(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}})$$

et par hypothèse :

$$L^{\rho}_{\underline{\mu\rho}} = \left\{ {\rho \atop \mu\rho} \right\} + v^{\rho}_{\mu\rho},$$

donc

$$v^{\mu\rho}_{\rho} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu \operatorname{Log}\frac{g}{\gamma} + \frac{1}{3}(f_\mu + f_{\overline{\mu}})$$

ou

$$\boxed{v^{\rho}_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\,\nabla_\mu \operatorname{Log} g + \frac{1}{3}(f_\mu + f_{\overline{\mu}}),} \tag{25.6}$$

∇ représentant, ici, la différentiation covariante relativement à la connexion riemannienne déduite de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$. Dans toute la suite de cet exposé ∇ aura la même signification.

26. Expression exacte de la partie antisymétrique du tenseur de Ricci en fonction des $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$. — Mettons en évidence dans la partie antisymétrique du tenseur de Ricci $W_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$, les termes en $v^{\rho}_{\mu\nu}$ et $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$:

$$\begin{aligned} W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = {} & \partial_\sigma L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} L^{\lambda}_{\sigma\lambda} + \frac{1}{6}\left[\partial_\mu(f_\nu + f_{\overline{\nu}}) - \partial_\nu(f_\mu + f_{\overline{\mu}})\right] \\ & + L^{\sigma}_{\underline{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} - L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underline{\nu\sigma}}. \end{aligned}$$

En développant les $L^{\sigma}_{\underline{\mu\lambda}}$ d'après les résultats du paragraphe précédent [(25.5)] et en faisant apparaître les différentiations covariantes relatives à la connexion riemannienne déjà utilisée, il vient

$$\begin{aligned} W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = {} & \nabla_\sigma L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}} v^{\rho}_{\sigma\rho} - \left(v^{\sigma}_{\mu\lambda} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\nu}} + v^{\lambda}_{\sigma\nu} L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}}\right) \\ & + \frac{1}{6}\left[\partial_\mu(f_\nu + f_{\overline{\nu}}) - \partial_\nu(f_\mu + f_{\overline{\mu}})\right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression cherchée, il nous suffit maintenant de remplacer les $v^{\rho}_{\mu\nu}$ par leur expression en fonction des $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$, issue de (25.5) :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = {} & \frac{\nabla_\sigma\left(\sqrt{-g}\, L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}\right)}{\sqrt{-g}} + 2\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{\rho\sigma} L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\beta}} \\ & - \left[\frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}(f_\lambda + f_{\overline{\lambda}}) + \gamma^{\beta\rho} L^{\alpha}_{\underset{\vee}{\lambda\rho}}\right]\left[\varphi_{\alpha\mu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\beta\nu}} - \varphi_{\alpha\nu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\beta\mu}}\right] \\ & - \frac{1}{3}\gamma^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\lambda}\left[(f_\mu + f_{\overline{\mu}}) L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\beta\nu}} - (f_\nu + f_{\overline{\nu}}) L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\beta\mu}}\right] \\ & + \frac{1}{2}(f^\sigma + f^{\overline{\sigma}})\left[\gamma_{\mu\lambda} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\nu}} - \gamma_{\nu\lambda} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\mu}}\right] \\ & + \frac{1}{6}\left[\partial_\mu(f_\nu + f_{\overline{\nu}}) - \partial_\nu(f_\mu + f_{\overline{\mu}})\right]. \end{aligned}} \tag{26.1}$$

27. Expression exacte de la partie symétrique du tenseur de Ricci en fonction des $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$. — Mettons, ici aussi, en évidence les termes en $v^{\rho}_{\mu\nu}$ et $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$:

$$W_{\underline{\mu\nu}} = \partial_\sigma L^{\sigma}_{\underline{\mu\nu}} + L^{\sigma}_{\underline{\mu\nu}} L^{\lambda}_{\underline{\sigma\lambda}} - \frac{1}{2}\partial_\mu L^{\sigma}_{\underline{\nu\sigma}} - \frac{1}{2}\partial_\nu L^{\sigma}_{\underline{\mu\sigma}}$$
$$- L^{\sigma}_{\underline{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underline{\nu\sigma}} + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}},$$

$$W_{\underline{\mu\nu}} = \partial_\sigma \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \partial_\nu \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \sigma\lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \sigma\nu \end{Bmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2}\partial_\nu \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\partial_\mu \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\partial_\nu v^{\rho}_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu v^{\rho}_{\nu\rho}$$
$$+ \partial_\sigma v^{\sigma}_{\mu\nu} + v^{\sigma}_{\mu\nu}\left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \sigma\lambda \end{Bmatrix} + v^{\lambda}_{\sigma\lambda}\right) + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} v^{\lambda}_{\sigma\lambda}$$
$$- v^{\sigma}_{\mu\lambda}\left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \sigma\nu \end{Bmatrix} + v^{\lambda}_{\sigma\nu}\right) - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{Bmatrix} v^{\lambda}_{\sigma\nu} + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}}.$$

Nous avons ainsi fait apparaître le tenseur de Ricci, $G_{\mu\nu}$ de la variété riemannienne de métrique $\gamma_{\mu\nu}$, et en utilisant, de nouveau, la différentiation covariante dans cette variété, nous obtenons

$$W_{\underline{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} + \nabla_\sigma v^{\sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu \operatorname{Log} g + v^{\sigma}_{\mu\nu} v^{\rho}_{\sigma\rho}$$
$$- \left(v^{\sigma}_{\mu\lambda} v^{\lambda}_{\sigma\nu} + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\sigma\nu}}\right) - \frac{1}{6}\left[\nabla_\mu(f_\nu + f_{\bar\nu}) + \nabla_\nu(f_\mu + f_{\bar\mu})\right].$$

Remplaçons maintenant les $v^{\sigma}_{\mu\nu}$ par leur expression en fonction des $L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ tirée de (25.5) et posons $\nabla^\rho = \gamma^{\rho\sigma}\nabla_\sigma$:

$$W_{\underline{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} + \nabla^\rho\Big[\varphi_{\lambda\mu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f_\rho + f_{\bar\rho})$$
$$+ \frac{1}{6}(\gamma_{\mu\rho} - 2\varphi_{\mu\rho})(f_\nu + f_{\bar\nu}) + \frac{1}{6}(\gamma_{\nu\rho} - 2\varphi_{\nu\rho})(f_\mu + f_{\bar\mu})\Big]$$
$$- \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu \operatorname{Log} g - \frac{1}{6}\nabla_\mu\left[(f_\nu + f_{\bar\nu}) + \nabla_\nu(f_\mu + f_{\bar\mu})\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\nabla^\rho \operatorname{Log} g + \frac{1}{3}(f^\rho + f^{\bar\rho})\right]\Big[\varphi_{\lambda\mu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(f_\rho + f_{\bar\rho})$$
$$+ \frac{1}{6}(\gamma_{\mu\rho} - 2\varphi_{\mu\rho})(f_\nu + f_{\bar\nu}) + \frac{1}{6}(\gamma_{\nu\rho} - 2\varphi_{\nu\rho})(f_\mu + f_{\bar\mu})\Big]$$
$$- \gamma^{\sigma\alpha}\gamma^{\lambda\beta}\Big[\varphi_{\rho\mu} L^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\alpha}} + \varphi_{\rho\lambda} L^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\lambda}(f_\alpha + f_{\bar\alpha})$$
$$+ \frac{1}{6}(\gamma_{\mu\alpha} - 2\varphi_{\mu\alpha})(f_\lambda + f_{\bar\lambda}) + \frac{1}{6}(\gamma_{\lambda\alpha} - 2\varphi_{\lambda\alpha})(f_\mu + f_{\bar\mu})\Big]$$
$$\times \Big[\varphi_{\tau\nu} L^{\tau}_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} + \varphi_{\tau\sigma} L^{\tau}_{\underset{\vee}{\nu\beta}} - \frac{1}{2}\gamma_{\nu\sigma}(f_\beta + f_{\bar\beta})$$
$$+ \frac{1}{6}(\gamma_{\nu\beta} - 2\varphi_{\nu\beta})(f_\sigma + f_{\bar\sigma}) + \frac{1}{6}(\gamma_{\sigma\beta} - 2\varphi_{\sigma\beta})(f_\nu + f_{\bar\nu})\Big] + L^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} L^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}}.$$

Un calcul évident conduit au résultat suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_{\underline{\mu\nu}} = {} & \mathrm{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla^{\rho} \left[\sqrt{-g} \left(\varphi_{\lambda\mu} \mathrm{L}^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\rho}} + \varphi_{\lambda\nu} \mathrm{L}^{\lambda}_{\underset{\vee}{\mu\rho}} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \operatorname{Log} g - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \gamma_{\mu\nu} \nabla_{\rho} \left(\mathcal{F}^{\rho} + \mathcal{F}^{\overline{\rho}} \right) \\
& + \frac{1}{6} \left[\left(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}} \right) \frac{\nabla_{\nu} \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} + \left(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}} \right) \frac{\nabla_{\mu} \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right] \\
& - \frac{1}{3\sqrt{-g}} \nabla^{\rho} \left[\varphi_{\mu\rho} \left(\mathcal{F}_{\nu} + \mathcal{F}_{\overline{\nu}} \right) + \varphi_{\nu\rho} \left(\mathcal{F}_{\mu} + \mathcal{F}_{\overline{\mu}} \right) \right] \\
& - \gamma^{\sigma\alpha} \gamma^{\lambda\beta} \varphi_{\rho\mu} \varphi_{\tau\nu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\alpha}} \mathrm{L}^{\tau}_{\underset{\vee}{\sigma\beta}} - \varphi_{\rho}{}^{\underline{\beta}} \varphi_{\sigma}{}^{\underline{\alpha}} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} \mathrm{L}^{\sigma}_{\underset{\vee}{\nu\beta}} \\
(27.1) \qquad & - \varphi_{\rho}{}^{\underline{\alpha}} \gamma^{\lambda\beta} \mathrm{L}^{\sigma}_{\underset{\vee}{\lambda\alpha}} \left(\varphi_{\sigma\mu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\nu\beta}} + \varphi_{\sigma\nu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\beta}} \right), \\
& + \frac{1}{3} \left(f^{\alpha} + f^{\overline{\alpha}} \right) \left[\varphi_{\nu}{}^{\underline{\lambda}} \left(\varphi_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\alpha}} + \varphi_{\rho\lambda} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\alpha}} \right) + \varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}} \left(\varphi_{\rho\nu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\lambda\alpha}} + \varphi_{\rho\lambda} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\nu\alpha}} \right) \right] \\
& - \frac{1}{3} \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} \left[\left(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}} \right) \left(\varphi_{\rho\nu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \varphi_{\rho\alpha} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\nu\beta}} \right) + \left(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}} \right) \left(\varphi_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \varphi_{\rho\alpha} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\beta}} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(f^{\alpha} + f^{\overline{\alpha}} \right) \left[\varphi_{\rho\mu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\alpha\nu}} + \varphi_{\rho\nu} \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\alpha\mu}} \right] + \mathrm{L}^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} \mathrm{L}^{\lambda}_{\underset{\vee}{\nu\sigma}} \\
& - \frac{1}{6} \varphi_{\rho}{}^{\underline{\lambda}} \left[\left(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}} \right) \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\nu\lambda}} + \left(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}} \right) \mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\lambda}} \right] \\
& + \frac{2}{9} \left(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}} \right) \left(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}} \right) \left(\frac{g - \varphi}{\gamma} - \frac{7}{4} \right) - \frac{1}{9} \left(f_{\overline{\mu}} + f_{\overline{\overline{\mu}}} \right) \left(f_{\overline{\nu}} + f_{\overline{\overline{\nu}}} \right) \\
& + \frac{1}{9} \left[\left(f_{\mu} + f_{\overline{\mu}} \right) \left(2 f_{\overline{\nu}} + f_{\overline{\overline{\nu}}} - f_{\underline{\overline{\nu}}} \right) + \left(f_{\nu} + f_{\overline{\nu}} \right) \left(2 f_{\overline{\mu}} + f_{\overline{\overline{\mu}}} - f_{\underline{\overline{\mu}}} \right) \right]
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$
\varphi_{\alpha}{}^{\underline{\beta}} = \gamma^{\beta\sigma} \varphi_{\alpha\sigma}, \qquad \varphi^{\underline{\alpha}}{}_{\beta} = \gamma^{\alpha\sigma} \varphi_{\sigma\beta}
$$

et

$$
f_{\underline{\overline{\mu}}} = \varphi_{\mu\lambda} f^{\overline{\overline{\lambda}}}.
$$

CHAPITRE II.

EXPRESSION APPROCHÉE AU DEUXIÈME ORDRE DES PARTIES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES DU TENSEUR DE RICCI $W_{\mu\nu}$ EN FONCTION DU TENSEUR FONDAMENTAL ET DE SES DÉRIVÉES.

Nous partons de l'hypothèse que la partie antisymétrique du tenseur $g_{\mu\nu}$ est un infiniment petit du premier ordre au moins, ainsi que ses dérivées. Nous chercherons à écrire les développements des $\mathrm{L}^{\rho}_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$, puis des $\underline{W}_{\mu\nu}$ et $W_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à 3, sans faire aucune hypothèse sur la partie symétrique des $g_{\mu\nu}$.

28. Expression approchée de la torsion en fonction du tenseur fondamental. — Nous utiliserons le résultat de M.-A. Tonnelat ([3], chap. III) relatif à la torsion de la connexion linéaire $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ déjà définie ci-dessus. Pour ce faire, rappelons quelques définitions : soit un tenseur quelconque d'ordre 3, deux fois covariant et antisymétrique pour ces deux indices covariants, une fois contravariant; nous poserons

$$\text{(I)} \qquad A_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = \gamma_{\rho\sigma} A^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}},$$

$$\text{(II)} \qquad A_{\underset{\vee}{\mu\nu},\bar{\rho}} = \varphi_{\rho\sigma} A^{\sigma}_{\underset{\vee}{\mu\nu}},$$

$$\text{(III)} \qquad A_{\underset{\vee}{\mu\nu},\bar{\bar{\rho}}} = \varphi_{\rho\sigma} \gamma^{\sigma\lambda} A_{\underset{\vee}{\mu\nu},\bar{\lambda}},$$

$$\text{(IV)} \qquad A^{\star}_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma} \gamma^{\tau\lambda} \gamma^{\sigma\omega} A_{\underset{\vee}{\lambda\omega},\rho}.$$

Le résultat de M.-A. Tonnelat se met alors sous la forme

$$(a^2 + b^2)\, \Delta_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = a\, S_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} + b\, S^{\star}_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho},$$

avec

$$a = 2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{6\varphi}{\gamma}, \qquad b = \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}\left(3 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi'}{\gamma}\right),$$

$$S_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = \left(2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right) R_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} - \frac{2\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}} R^{\star}_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} - R_{\underset{\vee}{\mu\nu},\bar{\bar{\rho}}}$$

et enfin

$$\begin{aligned} R_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho} = {} & \nabla_{\rho}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\rho} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\varphi_{[\overset{\star}{\mu\nu}],\rho} \\ & + \frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}}\varphi^{\star}_{\mu\nu}\varphi^{\sigma\tau}\varphi_{\sigma\tau\rho} - \varphi_{\mu\nu}\,\partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{g}{\gamma} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\lambda\sigma}\,\partial_{\lambda}\operatorname{Log}\frac{g}{\gamma} \\ & - \frac{\varphi}{2\sqrt{-\gamma}}\varepsilon_{[\overset{\star}{\mu\nu}],\rho\lambda}\varphi^{\sigma\lambda}\,\partial_{\sigma}\operatorname{Log}\frac{g}{\varphi} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\varphi^{\star}_{\mu\nu}\,\partial_{\rho}\operatorname{Log}\frac{g}{\varphi} \\ & + \gamma^{\sigma\lambda}\left[\sqrt{\varphi}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Delta_{\lambda} + \varphi_{\lambda\rho}(\varphi_{\mu\nu}\Delta_{\sigma} + \varphi_{\sigma\mu}\Delta_{\nu} + \varphi_{\nu\sigma}\Delta_{\mu})\right], \end{aligned}$$

où

$$\varphi_{\mu\nu\rho} = \partial_{\rho}\varphi_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\varphi_{\nu\rho} + \partial_{\nu}\varphi_{\rho\mu}$$

et ∇ représente toujours la dérivation covariante dans l'espace-temps riemannien de tenseur métrique $\gamma_{\mu\nu}$.

Il nous faut maintenant mettre en évidence l'ordre de chaque terme, afin d'abandonner ceux d'ordre supérieur à deux. Nous supposons, comme nous l'avons déjà dit, que les $\varphi_{\mu\nu}$ et leurs dérivées sont des infiniment petits du premier ordre au moins et ne faisons aucune hypothèse sur l'ordre de la partie symétrique de $g_{\mu\nu}$.

a. Expression approchée de a et de b. — On sait que

$$\frac{g}{\gamma} = 1 + \frac{\varphi}{\gamma} + \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}},$$

$\frac{\varphi}{\gamma}$ est d'ordre 4 au moins.

Posons $F = \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}$; c'est une quantité d'ordre 2. Il vient alors

$$\frac{g}{\gamma} \simeq 1 + F, \qquad a \simeq 1 - F, \qquad b \simeq \frac{4\sqrt{\varphi}}{\sqrt{-\gamma}}.$$

b. Expression approchée de $R_{\underset{\vee}{\mu\nu},\rho}$. — $\varphi_{\mu\nu\rho}$ est par hypothèse du premier ordre, $\nabla_\rho\varphi_{\mu\nu}$ aussi, $\frac{\sqrt{\varphi}}{2\sqrt{-\gamma}}\overset{\star}{\varphi}_{[\mu\nu],\rho}$ est du troisième ordre au moins; en effet l'opération $\star$ ne fait intervenir que la partie symétrique du tenseur $g_{\mu\nu}$:

$\frac{\sqrt{\varphi}}{4\sqrt{-\gamma}}\overset{\star}{\varphi}_{\mu\nu}\varphi^{\sigma\tau}\varphi_{\sigma\tau\rho}$ est d'ordre 3 au moins; en effet $\sqrt{\varphi}\,.\,\varphi^{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\sigma\tau\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ est un terme d'ordre 1 ;

$\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{g}{\gamma} \simeq \partial_\rho \operatorname{Log}(1 + F) \simeq \partial_\rho F$ est d'ordre 2 au moins, donc, le cinquième et le sixième termes sont d'ordre 3 ;

$\sqrt{\varphi}\,\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{g}{\varphi}$ est facteur de termes du premier ordre; étudions son ordre propre :

$$\sqrt{\varphi}\,\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{g}{\varphi} = \left[\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{g}{\gamma} - \partial_\rho \operatorname{Log}\varphi + \partial_\rho \operatorname{Log}\gamma\right]\sqrt{\varphi}$$

or $\partial_\rho \operatorname{Log}\varphi = \varphi^{\alpha\beta}\,\partial_\rho\varphi_{\alpha\beta}$, donc $\sqrt{\varphi}\,\partial_\rho \operatorname{Log}\varphi$ est d'ordre 2. $\sqrt{\varphi}\,\partial_\rho \operatorname{Log}\frac{g}{\varphi}$ est donc d'ordre 2 au moins et les termes comportant ce facteur sont d'ordre 3 au moins, donc négligeables ici.

Il nous reste à étudier l'ordre de Δ_μ, or un résultat bien connu, tiré des équations de liaison s'écrit $\Delta_\mu = f_\mu - f_{\overline{\mu}}$ (*cf.* chap. I, § 10); l'opération « barre » augmente, d'après sa définition, l'ordre d'une unité, donc $\boldsymbol{\Delta}_\mu$ est de l'ordre de f_μ, or

$$f_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\rho\left(\sqrt{-g}\cdot g^{\overset{\mu\rho}{\vee}}\right);$$

mais on sait que $g^{\overset{\mu\rho}{\vee}} = f^{\mu\rho} = \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\mu\rho} + \frac{\gamma}{g}\,\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}$ (*cf.* chap. I, § 2).

Nous allons montrer que

$$\partial_\rho\left(\sqrt{-g}\cdot g^{\overset{\mu\rho}{\vee}}\right) = \sqrt{-\gamma}\,\nabla_\rho\left[\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\,\varphi^{\mu\rho} + \varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)\right].$$

Dans ce but, développons le deuxième membre :

$$\begin{aligned}
&\nabla_\rho\left[\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\,\varphi^{\mu\rho} + \varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)\right] \\
&\quad = \nabla_\rho\left[\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}}\left(\frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\mu\rho} + \frac{\gamma}{g}\,\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\partial_\rho\left[\sqrt{-g}\left(\frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\mu\rho} + \frac{\gamma}{g}\,\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left(\varphi\varphi^{\mu\rho} + \gamma\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)(\nabla_\rho - \partial_\rho)\left(\frac{\sqrt{-g}}{g}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varphi\left[\left\{ {\mu \atop \rho\lambda} \right\}\varphi^{\lambda\rho} + \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\}\varphi^{\mu\lambda}\right] - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varphi^{\mu\rho}\,(\nabla_\rho - \partial_\rho)\gamma \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\gamma\left[\left\{ {\mu \atop \rho\lambda} \right\}\varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\rho}} + \left\{ {\rho \atop \lambda\rho} \right\}\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\lambda}}\right] - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}(\nabla_\rho - \partial_\rho)\gamma \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left[\mathcal{F}^\mu - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\frac{\partial_\rho\gamma}{\gamma}\left(\varphi\varphi^{\mu\rho} + \gamma\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varphi\varphi^{\mu\rho}\,\frac{\partial_\rho\gamma}{\gamma}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\gamma\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\,\frac{\partial_\rho\gamma}{\gamma} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\varphi\varphi^{\mu\rho} + \gamma\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)\frac{\partial_\rho\gamma}{\gamma}\right] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\,\partial_\rho\left(\sqrt{-g}\cdot g^{\overset{\mu\rho}{\vee}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$f^\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{g}}\,\nabla_\rho\left[\sqrt{\frac{\gamma}{g}}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\,\varphi^{\mu\rho} + \varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}\right)\right]$$

et à l'approximation du deuxième ordre, il vient

$$\boxed{f^\mu \simeq \nabla_\rho\,\varphi^{\underline{\mu}\,\underline{\rho}}} \tag{28.1}$$

ou encore

$$f^\mu \simeq \nabla_\rho\,\varphi_{\mu\rho},$$

où l'on a posé comme ci-dessus :

$$\nabla^{\rho} = \gamma^{\rho\sigma}\nabla_{\sigma}.$$

Cette dernière relation montre que f_{μ} est du premier ordre, donc Δ_{μ} aussi. Dans $\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho}$, les termes comportant le vecteur de torsion de la connexion $\Delta^{\rho}_{\mu\nu}$ sont donc du troisième ordre.

En définitive, on obtient

$$\boxed{\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho} \simeq \nabla_{\rho}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\rho},} \tag{28.2}$$

terme qui est donc du premier ordre;

$\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\bar{\rho}}$ est du troisième ordre, donc négligeable;

$\underset{\vee}{R}^{\star}_{\mu\nu,\rho}$ est du premier ordre comme $\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho}$.

c. Expression approchée de $\underset{\vee}{L}^{\rho}_{\mu\nu}$. — D'après les équations écrites au début du paragraphe on voit que $\underset{\vee}{S}_{\mu\nu,\rho}$ est du même ordre que $\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho}$ et même, il vient

$$\underset{\vee}{S}_{\mu\nu,\rho} \simeq \underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho}.$$

Donc

$$(1 - 2F)\,\underset{\vee}{\Delta}_{\mu\nu,\rho} \simeq (1 + F)\,\underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho}. \tag{28.3}$$

ou plutôt

$$\underset{\vee}{\Delta}_{\mu\nu,\rho} \simeq \underset{\vee}{R}_{\mu\nu,\rho} \tag{28.4}$$

car F est du deuxième ordre.

De l'équation (25.2), nous tirons

$$\underset{\vee}{L}^{\rho}_{\mu\nu} \simeq \underset{\vee}{\Delta}^{\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}f^{\rho} + \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\mu}(2f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}) - \frac{1}{6}\delta^{\rho}_{\nu}(2f_{\mu} - f_{\bar{\mu}}). \tag{28.5}$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_{\rho\sigma}\underset{\vee}{L}^{\sigma}_{\mu\nu} \simeq{}& \nabla_{\rho}\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu}f_{\rho}\\ &+ \frac{1}{6}\gamma_{\mu\rho}(2f_{\nu} - f_{\bar{\nu}}) - \frac{1}{6}\gamma_{\nu\rho}(2f_{\mu} - f_{\bar{\mu}}).\end{aligned}} \tag{28.6}$$

29. Expression approchée de la partie antisymétrique de $W_{\mu\nu}$. — Un calcul facile à partir de l'équation (26.1) et le fait que

$$\frac{\nabla_\sigma \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \partial_\sigma \operatorname{Log} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \simeq \frac{1}{2} \partial_\sigma F$$

est du deuxième ordre, montre que

$$\begin{aligned} W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \simeq \nabla^\sigma \Big[\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu\sigma} - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} f_\sigma \Big] + \frac{1}{6} \nabla_\mu (2 f_\nu - f_{\overline{\nu}}) - \frac{1}{6} \nabla_\nu (2 f_\mu - f_{\overline{\mu}}) \\ + \frac{1}{2} f^\sigma \Big[\nabla_\mu \varphi_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{\sigma\nu\mu} + \frac{1}{3} \gamma_{\sigma\mu} f_\nu - \frac{1}{3} \gamma_{\nu\mu} f_\sigma \\ - \nabla_\nu \varphi_{\sigma\mu} + \frac{1}{2} \varphi_{\sigma\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_{\sigma\nu} f_\mu + \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} f_\sigma \Big] \\ + \frac{1}{6} \nabla_\mu (f_\nu + f_{\overline{\nu}}) - \frac{1}{6} \nabla_\nu (f_\mu + f_{\overline{\mu}}) \end{aligned}$$

ou encore

$$W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \simeq \square\, \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla^\sigma \varphi_{\mu\nu\sigma} - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu} \nabla_\sigma f^\sigma + \frac{1}{2} (\nabla_\mu f_\nu - \nabla_\nu f_\mu) ;$$

or on peut montrer que $\nabla_\sigma f^\sigma$ est du troisième ordre. En effet

$$\nabla_\sigma f^\sigma = \frac{\partial_\sigma \mathfrak{F}^\sigma}{\sqrt{-g}} - f^\sigma \partial_\sigma \operatorname{Log} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} .$$

Comme

$$\partial_\sigma \mathfrak{F}^\sigma \equiv \partial_\sigma \partial_\rho \mathfrak{G}^{\underset{\vee}{\sigma\rho}} \equiv 0,$$

il vient

$$\nabla_\sigma f^\sigma = - f^\sigma \partial_\sigma \operatorname{Log} \sqrt{\frac{g}{\gamma}} ,$$

or, cette dernière expression est du troisième ordre, donc nulle à l'approximation considérée.

D'autre part, étudions le terme

$$\begin{aligned} \nabla^\sigma \varphi_{\mu\nu\sigma} \equiv \square\, \varphi_{\mu\nu} + (\nabla^\sigma \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla^\sigma) \varphi_{\nu\sigma} + (\nabla^\sigma \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla^\sigma) \varphi_{\sigma\mu} \\ + \nabla_\mu \nabla^\sigma \varphi_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \nabla^\sigma \varphi_{\mu\sigma}. \end{aligned}$$

Pour exprimer le deuxième et le troisième terme, utilisons les identités de Ricci :

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) F_\rho \equiv G^\lambda{}_{\rho\alpha\beta} F_\lambda$$

et les identités de Bianchi :

$$G^\rho{}_{\alpha\beta\gamma} + G^\rho{}_{\beta\gamma\alpha} + G^\rho{}_{\gamma\alpha\beta} \equiv 0.$$

Nous obtenons

$$(29.1)\quad \nabla^\sigma \varphi_{\mu\nu\sigma} \equiv \Box\, \varphi_{\mu\nu} - G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, \varphi_{\alpha\beta} + G_{\lambda\mu}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}} - G_{\lambda\nu}\, \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}} + \nabla_\mu \nabla^\sigma \varphi_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \nabla^\sigma \varphi_{\mu\sigma}.$$

Donc au deuxième ordre en tenant compte de (**28**.1), il vient

$$(29.2)\quad \boxed{W_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \simeq \frac{1}{2}\Box\, \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, \varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\, G_{\lambda\nu} - \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}\, G_{\lambda\mu}\right).}$$

30. Expression approchée de la partie symétrique de $W_{\mu\nu}$. — Nous portons l'expression approchée de $L^\rho_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ donnée par l'équation (**25**.2) dans l'expression de $W_{\underline{\mu\nu}}$ donnée par (**27**.1)

$$\begin{aligned}
W_{\underline{\mu\nu}} \simeq G_{\mu\nu} + \nabla^\rho \Big[\; & \varphi_{\lambda\mu}\left(\nabla^\lambda \varphi_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\varphi_{\nu\rho}{}^{\underline{\lambda}} + \frac{1}{3}\delta^\lambda_\nu f_\rho - \frac{1}{3}\delta^\lambda_\rho f_\nu\right) \\
& + \varphi_{\lambda\nu}\left(\nabla^\lambda \varphi_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\rho}{}^{\underline{\lambda}} + \frac{1}{3}\delta^\lambda_\mu f_\rho - \frac{1}{3}\delta^\lambda_\rho f_\mu\right)\Big] \\
& - \frac{1}{4}\nabla_\mu \nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\, \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\nabla_\rho f^{\overline{\rho}} - \frac{1}{3}\nabla^\rho(\varphi_{\mu\rho} f_\nu + \varphi_{\nu\rho} f_\mu) \\
& + \left(\nabla^\sigma \varphi_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}{}^{\underline{\sigma}} + \frac{1}{3}\delta^\sigma_\mu f_\lambda - \frac{1}{3}\delta^\sigma_\lambda f_\mu\right) \\
& \times \left(\nabla^\lambda \varphi_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\varphi_{\nu\sigma}{}^{\underline{\lambda}} + \frac{1}{3}\delta^\lambda_\nu f_\sigma - \frac{1}{3}\delta^\lambda_\sigma f_\nu\right) - \frac{1}{6} f_\mu f_\nu
\end{aligned}$$

ou encore, après un calcul évident :

$$\begin{aligned}
W_{\underline{\mu\nu}} \simeq\; & G_{\mu\nu} + \varphi_{\lambda\mu}(\nabla^\rho \nabla^\lambda \varphi_{\nu\rho} - \nabla^\lambda \nabla^\rho \varphi_{\nu\rho}) + \varphi_{\lambda\nu}(\nabla^\rho \nabla^\lambda \varphi_{\mu\rho} - \nabla^\lambda \nabla^\rho \varphi_{\mu\rho}) \\
& - (\varphi_{\mu\lambda}\nabla^\lambda f_\nu + \varphi_{\nu\lambda}\nabla^\lambda f_\mu) - (\nabla^\rho \varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda \varphi_{\nu\rho}) \\
& + \frac{1}{2}\nabla_\rho\left(\varphi_{\mu\sigma}\varphi_\nu{}^{\underline{\rho}\underline{\sigma}} + \varphi_{\nu\sigma}\varphi_\mu{}^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}\right) \\
& + \frac{1}{3}\nabla^\lambda(\varphi_{\mu\lambda} f_\nu + \varphi_{\nu\lambda} f_\mu) - \frac{1}{4}\nabla_\mu \nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\,\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\nabla_\rho f^{\overline{\rho}} \\
& - \frac{1}{3}\nabla^\lambda(\varphi_{\mu\lambda} f_\nu + \varphi_{\nu\lambda} f_\mu) - \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\,\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - \frac{1}{2} f_\mu f_\nu \\
& - \frac{1}{2}\nabla_\rho(\varphi_{\mu\sigma})\,\varphi_\nu{}^{\underline{\rho}\underline{\sigma}} - \frac{1}{2}(\nabla_\rho \varphi_{\nu\sigma})\,\varphi_\mu{}^{\underline{\rho}\underline{\sigma}}.
\end{aligned}$$

En faisant la même remarque que dans le paragraphe précédent, on peut utiliser l'identité de Ricci et la même identité de Bianchi, il vient

$$(\nabla^\rho \nabla^\lambda - \nabla^\lambda \nabla^\rho)\,\varphi_{\nu\rho} = G^\tau{}_\nu{}^{\rho\lambda}\,\varphi_{\tau\rho} + G_{\tau\lambda}\,\varphi_\nu{}^{\underline{\tau}},$$

or

$$\varphi_{\tau\rho}\, G^\tau{}_\nu{}^{\rho\lambda} = \frac{1}{2}\varphi_{\tau\rho}\left[G^\tau{}_\nu{}^{\rho\lambda} + G^\rho{}_\nu{}^{\lambda\tau}\right] = -\frac{1}{2}\varphi_{\tau\rho}\, G^{\rho\tau}{}_\nu{}^\lambda.$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned} W_{\underline{\mu\nu}} \simeq G_{\mu\nu} &+ \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\alpha\beta}}(\varphi_{\mu\lambda}G^{\lambda}{}_{\nu\alpha\beta} + \varphi_{\nu\lambda}G^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}) \\ &- \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha\beta}}\right) - 2\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\varphi_\nu{}^{\underline{\tau}}G_{\lambda\tau} \\ &- (\varphi_{\mu\lambda}\nabla^\lambda f_\nu + \varphi_{\nu\lambda}\nabla^\lambda f_\mu) - (\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda\varphi_{\nu\rho}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu\lambda}\nabla_\rho\varphi_\nu{}^{\underline{\rho\lambda}} + \varphi_{\nu\lambda}\nabla_\rho\varphi_\mu{}^{\underline{\rho\lambda}}\right) \\ &- \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}f_\mu f_\nu + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}f^\rho f_\rho - \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\rho\lambda}}(\nabla_\rho f_\lambda - \nabla_\lambda f_\rho). \end{aligned}} \tag{.1)}$$

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS APPROCHÉES DU CHAMP. PARTIE SYMÉTRIQUE ET PARTIE ANTISYMÉTRIQUE.

Nous avons déterminé dans la première partie de ce travail, l'expression la plus générale possible des équations du champ avec un apport phénoménologique éventuel. Nous remplacerons ici les termes qui y figurent par leur expression approchée au deuxième ordre par rapport à l'infiniment petit $\varphi_{\mu\nu}$ et à ses dérivées, considérés comme étant du premier ordre.

31. Ordre des constantes et du quadrivecteur Γ_μ. — Les équations du champ les plus générales s'écrivent

$$W_{\mu\nu} = -(p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu - q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(T + \lambda\alpha^2). \tag{III.1}$$

Une autre relation entre les constantes de la théorie et le quadrivecteur Γ_μ est fournie par les équations (II)

$$\lambda = -p + \frac{q}{\alpha^2}f^\rho\Gamma_\rho, \tag{II.1}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}f^\rho\Gamma_\rho g^{\underline{\mu\alpha}}\Gamma_\alpha + f^\mu = 0, \tag{II.2}$$

$$q \neq 0. \tag{II.3}$$

Seule la première peut donner quelques indications sur les ordres respectifs de p, q, λ et Γ_μ.

Si Γ_μ est d'ordre zéro, $p+\lambda$ sera d'un ordre supérieur d'une unité à celui de q.

Si Γ_μ est d'ordre 1, $p+\lambda$ sera de l'ordre de q.

Si Γ_μ est d'ordre 2, $p+\lambda$ sera d'un ordre inférieur d'une unité à celui de q, etc.

Or, nous choisissons de prendre $q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu)$ du premier ordre car cette expression intervient dans les équations antisymétriques du champ ou équations de l'Électromagnétisme. Nous supposerons par exemple que l'ordre de Γ_μ est zéro, mais que la constante q est d'ordre 1 ou encore que Γ_μ est d'ordre 1 et la constante q d'ordre zéro. Nous nous bornerons à ces deux cas pour éviter les discussions fastidieuses. Il y a bien entendu beaucoup d'autres cas possibles. Mais ces deux possibilités particulières ont l'avantage de ne pas annuler le terme en $(p+\lambda)\,\Gamma_\mu\Gamma_\nu$ des équations du champ à l'approximation considérée. Cette expression sera alors toujours d'ordre 2.

32. Équation approchée du champ. Partie antisymétrique. — Remplaçons dans (III) la partie antisymétrique de $W_{\mu\nu}$ par son expression approchée fournie par (29.1), il vient

$$(32.1)\qquad \frac{1}{2}\,\Box\,\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}G_{\lambda\nu} - \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}G_{\lambda\mu}\right)$$
$$\simeq -q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\,\varphi_{\mu\nu}(T+\lambda\alpha^2).$$

D'après les hypothèses faites au paragraphe précédent, nous concluons que la partie antisymétrique du tenseur phénoménologique $T_{\mu\nu}$ est du premier ordre.

Rappelons que $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ et écrivons son expression en fonction de $T_0 = \gamma^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ [14] :

$$(32.2)\qquad T = T_0 + \varphi^{\underline{\rho\lambda}}\,T_{\underset{\vee}{\rho\lambda}} + \varphi^{\underline{\rho}}{}_{\sigma}\,\varphi^{\underline{\sigma\lambda}}\,T_{\underline{\rho\lambda}} + o(\varepsilon^2).$$

(Les indices soulignés sont montés à l'aide de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$.)

33. Équation approchée du champ. Partie symétrique. — Remplaçons dans (III.I) la partie symétrique de $W_{\mu\nu}$ par son expression

---

[14] *Cf.* Appendice I à la deuxième partie.

approchée fournie par (30.1) :

$$(33.1) \qquad \begin{aligned} G_{\mu\nu} \simeq & -\frac{1}{2}\, \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(\varphi_{\mu\lambda}\, G^{\lambda}{}_{\nu\alpha\beta} + \varphi_{\nu\lambda}\, G^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\, \nabla_\mu \nabla_\nu \left(\varphi_{\alpha\beta}\, \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) \\ & + 2\, \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\tau}}\, G_{\lambda\tau} + (\varphi_{\mu\lambda} \nabla^\lambda f_\nu + \varphi_{\nu\lambda} \nabla^\lambda f_\mu) \\ & + (\nabla^\rho \varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda \varphi_{\nu\rho}) - \frac{1}{2}\left(\varphi_{\mu\lambda} \nabla_\rho\, \varphi_\nu{}^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}} + \varphi_{\nu\lambda} \nabla_\rho\, \varphi_\mu{}^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}\right) \\ & + \frac{1}{4}\, \varphi_{\mu\alpha\beta}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} + \frac{1}{2}\, f_\mu f_\nu - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu} f_\rho f^\rho \\ & + \frac{1}{4}\, \gamma_{\mu\nu}\, \varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}(\nabla_\rho f_\lambda - \nabla_\lambda f_\rho) - (p + \lambda)\, \Gamma_\mu \Gamma_\nu \\ & - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, \lambda \alpha^2 + T_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, T. \end{aligned}$$

Écrivons les relations (29.1) entre $\square\, \varphi_{\mu\nu}$ et $\Delta^\rho\, \varphi_{\mu\nu\rho}$ de façon approchée :

$$(33.2) \qquad \begin{aligned} \nabla^\rho\, \varphi_{\mu\nu\rho} \simeq\ & \square\, \varphi_{\mu\nu} - G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, \varphi_{\alpha\beta} + G_{\lambda\mu}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}} \\ & - G_{\lambda\nu}\, \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}} + \nabla_\mu f_\nu - \nabla_\nu f_\mu. \end{aligned}$$

Portons dans (33.1) en simplifiant :

$$(33.3) \qquad \begin{aligned} G_{\mu\nu} \simeq\ & \frac{1}{4}\, \nabla_\mu \nabla_\nu \left(\varphi_{\alpha\beta}\, \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) + \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\tau}}\, G_{\lambda\tau} \\ & + \frac{1}{2}\, \varphi_{\mu\lambda}\, \varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\rho}}\, G_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\, \varphi_{\nu\lambda}\, \varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\rho}}\, G_{\rho\mu} \\ & + (\nabla^\rho \varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda \varphi_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\, \square\, \varphi_{\nu\lambda} + \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}\, \square\, \varphi_{\mu\lambda}\right) \\ & + \frac{1}{4}\, \varphi_{\mu\alpha\beta}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} + \frac{1}{2}\, \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\nu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\nu) \\ & + \frac{1}{2}\, \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\mu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\mu) + \frac{1}{2}\, f_\mu f_\nu - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu} f_\rho f^\rho \\ & + \frac{1}{4}\, \gamma_{\mu\nu}\, \varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}(\nabla_\rho f_\lambda - \nabla_\lambda f_\rho) - (p + \lambda)\, \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, \lambda \alpha^2 \\ & + T_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, T. \end{aligned}$$

Remarquons que cette équation se compose en réalité de trois équations différentes, liant respectivement les termes d'ordre 0, 1 et 2, en particulier :

$$(33.4) \qquad \underset{\circ}{G}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, \underset{\circ}{\lambda}\, \underset{\circ}{\alpha}^2 + \underset{\circ}{T}_{\underline{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\, \gamma_{\mu\nu}\, \underset{\circ}{T}.$$

Dans l'équation (33.3), nous pouvons donc remplacer les $G_{\alpha\beta}$ facteurs de termes du second ordre par l'expression d'ordre zéro fournie ci-dessus; il vient alors

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} \simeq{} & \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) + (\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda\varphi_{\nu\rho}) \\
& + \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda}\right) + \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} \\
& + \frac{1}{2}\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\nu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\nu) + \frac{1}{2}\varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\mu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\mu) \\
& + \frac{1}{2}f_\mu f_\nu - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}f^\rho f_\rho + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}(\nabla_\rho f_\lambda - \nabla_\lambda f_\rho) \\
& - (p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\lambda\alpha^2 + T_{\underline{\mu\nu}} \\
& - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\left(T_0 + \varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}T_{\underset{\vee}{\rho\lambda}} + \varphi^{\underline{\rho}}{}_\sigma\varphi^{\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}}T_{\underline{\rho\lambda}}\right) \\
& + \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\varphi_\nu{}^{\underline{\tau}}T_{\underline{\lambda\tau}} + \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}\varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\rho}}T_{\underline{\rho\nu}} + \frac{1}{2}\varphi_{\nu\lambda}\varphi^{\underline{\lambda}\,\underline{\rho}}T_{\underline{\rho\mu}}.
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir former le tenseur d'Einstein à partir du tenseur de Ricci $G_{\mu\nu}$ déduit de la métrique riemannienne $\gamma_{\mu\nu}$, écrivons

$$\begin{aligned}
G \equiv \gamma^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \simeq{} & \frac{3}{2}\varphi_{\alpha\beta}\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} + \frac{1}{2}(\nabla^\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla_\rho\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) \\
& + (\nabla^\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\beta\varphi^{\underline{\alpha}}{}_\rho\right) + \frac{1}{4}\varphi_{\alpha\beta\rho}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\rho}} \\
& - \frac{3}{2}f^\rho f_\rho + 2\varphi_{\rho\lambda}\nabla^\rho f^\lambda + (p-\lambda)\alpha^2 \\
& - T_0 - 2\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\lambda}}T_{\underset{\vee}{\rho\lambda}} - 2\varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}}T_{\underline{\rho\lambda}}.
\end{aligned}$$

En effet, avec les ordres de grandeur choisis $(p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu$ est toujours du deuxième ordre (*cf.* § 31) et dans ces conditions :

$$(p+\lambda)\gamma^{\mu\nu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu = (p+\lambda)h^{\mu\nu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu + o(\varepsilon^3).$$

Remarquons maintenant que les identités suivantes simplifient la forme de G :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta\delta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\delta}} \equiv{} & -\frac{1}{24}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta\delta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\delta}} \\
& - \frac{1}{12}\gamma_{\mu\nu}\left[3(\nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\rho\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) - 6(\nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\beta\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\rho}}\right)\right],
\end{aligned}$$

et écrivons le tenseur d'Einstein :

$$
\begin{aligned}
(33.5)\qquad S_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu} G \simeq \frac{1}{4}&\left[\varphi_{\mu\alpha\beta}\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - \frac{1}{6}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\rho\alpha\beta}\varphi^{\underline{\rho}\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right] \\
&+ (\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda\varphi_{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right) \\
&- \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\rho\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} - \frac{3}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\,\Box\,\varphi_{\alpha\beta}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\nu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\nu) + \frac{1}{2}\varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\mu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\mu) \\
&- \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\rho}\underline{\lambda}}\nabla_\rho f_\lambda + \frac{1}{2}f_\mu f_\nu + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}f^\rho f_\rho \\
&- (p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}p\alpha^2 + T_{\underline{\mu\nu}} \\
&+ \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\left(\varphi_{\mu\alpha}T_{\underline{\nu\beta}} + \varphi_{\nu\alpha}T_{\underline{\mu\beta}} + \gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\rho}}{}_\alpha T_{\underline{\rho\beta}}\right) \\
&+ \varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\varphi_\nu{}^{\underline{\tau}}T_{\underline{\lambda\tau}} + \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\rho}\underline{\lambda}}T_{\overset{\rho\lambda}{\vee}}\gamma_{\mu\nu},
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
(33.6)\qquad S_{\mu\nu} \simeq \chi(X_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} + W'_{\mu\nu}) \equiv K_{\mu\nu},
$$

à condition de poser

$$
\begin{aligned}
X_{\mu\nu} &= \frac{1}{\chi}\left[(\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda\varphi_{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\rho\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right)\right], \\
M_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\chi}\left[\varphi_{\mu\alpha\beta}\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - \frac{1}{6}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\rho\alpha\beta}\varphi^{\underline{\rho}\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right], \\
V_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\chi}\left[\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} - \frac{3}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\,\Box\,\varphi_{\alpha\beta}\right], \\
Z_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\chi}\Big[\varphi_\mu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\nu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\nu) \\
&\qquad + \varphi_\nu{}^{\underline{\lambda}}(\nabla_\mu f_\lambda + \nabla_\lambda f_\mu) - \gamma_{\mu\nu}\varphi^{\underline{\rho}\underline{\lambda}}\nabla_\rho f_\lambda + f_\mu f_\nu + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}f^\rho f_\rho\Big] \\
&\quad - \frac{1}{\chi}\left[(p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}p\alpha^2\right], \\
W'_{\mu\nu} &= \frac{1}{\chi}T_{\underline{\mu\nu}} + \frac{1}{2\chi}\left[T_{\underline{\mu\overline{\overline{\nu}}}} + T_{\underline{\nu\overline{\overline{\mu}}}} + \gamma_{\mu\nu}T_{\underline{\rho\overline{\overline{\rho}}}}\right] + \frac{1}{\chi}\left[T_{\underline{\overline{\mu}\,\overline{\nu}}} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}T_{\rho_\vee\overline{\rho}}\right].
\end{aligned}
$$

Si l'on remplaçait $\Box\,\varphi_{\alpha\beta}$ par son expression donnée par les équations du champ relatives à la partie antisymétrique (32.1), on retrouverait exactement les tenseurs déjà mis en évidence par M^me^ M.-A. Tonnelat

([9], p. 911) mais en plus certains tenseurs supplémentaires qui dépendent de f^{μ}, nul dans la théorie classique du champ unifié et aussi du tenseur phénoménologique $T_{\mu\nu}$ éventuellement introduit. Ces résultats sont indiqués dans le deuxième appendice à cette partie.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS DE CONSERVATION.

Nous allons maintenant, par analogie avec la Relativité Générale, chercher si les équations du champ (33.6), entraînent des conditions de conservation (au deuxième ordre) sur le tenseur $K_{\mu\nu}$, sachant que la divergence covariante du tenseur d'Einstein par rapport à la connexion riemannienne déduite de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ est identiquement nulle.

34. Calcul des divergence covariantes des différents tenseurs dont la somme est $K_{\mu\nu}$. — Cherchons la divergence covariante du premier tenseur :

$$\begin{aligned}\nabla^{\nu}(\chi X_{\mu\nu}) = {} & (\nabla^{\nu}\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^{\lambda}\varphi_{\nu\rho}) + (\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^{\nu}\nabla^{\lambda}\varphi_{\nu\rho}) \\ & + \frac{1}{2}(\nabla^{\nu}\nabla_{\mu}\varphi_{\alpha\beta})(\nabla_{\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}) + \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}\varphi_{\alpha\beta})\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} \\ & + \frac{1}{2}(\nabla^{\nu}\varphi_{\alpha\beta})(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}) + \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}\nabla^{\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} \\ & - (\nabla_{\rho}\varphi_{\alpha\beta})(\nabla_{\mu}\nabla^{\rho}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}).\end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Ricci, chaque fois que les expressions $(\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta} - \nabla^{\beta}\nabla^{\alpha})\varphi_{\rho\sigma}$ se présentent ou quand elle permet de simplifier des termes, on trouve

$$\begin{aligned}\nabla^{\nu}(\chi X_{\mu\nu}) = {} & \frac{1}{2}(\nabla^{\lambda}\varphi_{\nu\rho})[G^{\tau}{}_{\mu}{}^{\nu\rho}\varphi_{\tau\lambda} + G^{\tau}{}_{\lambda}{}^{\nu\rho}\varphi_{\mu\tau}] \\ & + (\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})[G^{\tau}{}_{\nu}{}^{\nu\lambda}\varphi_{\tau\rho} + G^{\tau}{}_{\rho}{}^{\nu\lambda}\varphi_{\nu\tau}] \\ & - (\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^{\lambda}f_{\rho}) \\ & + \frac{1}{2}(\nabla^{\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}})[G^{\tau}{}_{\alpha\nu\mu}\varphi_{\tau\beta} + G^{\tau}{}_{\beta\nu\mu}\varphi_{\alpha\tau}] \\ & + \frac{1}{2}\nabla_{\mu}(\varphi_{\alpha\beta}\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}) \\ & + \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}[G^{\tau}{}_{\alpha\nu\mu}\nabla^{\nu}\varphi_{\tau\beta} + G^{\tau}{}_{\beta\nu\mu}\nabla^{\nu}\varphi_{\alpha\tau} + G^{\tau\nu}{}_{\nu\mu}\nabla_{\tau}\varphi_{\alpha\beta}].\end{aligned}$$

Remarquons que la somme des quatrième et sixième lignes est nulle, et par simplification, il vient

$$
\begin{aligned}
(34.1)\qquad \nabla^{\nu}(\chi X_{\mu\nu}) = {} & \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\left(\varphi_{\alpha\beta}\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) - (\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^{\lambda}f_{\rho}) \\
& - \frac{1}{2}(\nabla^{\lambda}\varphi_{\nu\rho})\,\varphi_{\tau\lambda}\,G_{\mu}{}^{\tau\nu\rho} - \frac{1}{2}(\nabla^{\lambda}\varphi_{\nu\rho})\,\varphi_{\mu\tau}\,G_{\lambda}{}^{\tau\nu\rho} \\
& + \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\,\varphi_{\nu\rho}\,G^{\alpha\beta\nu\rho} - \frac{1}{4}(\nabla_{\mu}\varphi_{\alpha\beta})\,\varphi_{\nu\rho}\,G^{\alpha\beta\nu\rho} \\
& + (\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\lambda})\,\varphi_{\tau\rho}\,G^{\tau\lambda} + \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(\nabla_{\tau}\varphi_{\alpha\beta})\,G_{\mu}{}^{\tau}.
\end{aligned}
$$

Montrons maintenant que la divergence covariante du deuxième tenseur $\chi M_{\mu\nu}$ s'écrit

$$\nabla^{\nu}(\chi M_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\nabla_{\nu}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\nu}}.$$

En effet, les termes supplémentaires S_{μ} disparaissent :

$$
\begin{aligned}
S_{\mu} & = \varphi_{\nu}{}^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\nabla^{\nu}\varphi_{\mu\alpha\beta} - \frac{1}{6}\nabla_{\mu}\left(\varphi_{\rho\sigma\lambda}\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}}\right) \\
& = \varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\left[\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\varphi_{\alpha\beta} + (\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\nu})\varphi_{\beta\mu} - \frac{1}{3}\nabla_{\mu}\varphi_{\nu\alpha\beta}\right] \\
& = \varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}[\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\varphi_{\alpha\beta} + (\nabla_{\nu}\nabla_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\nu})\varphi_{\beta\mu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu})\varphi_{\alpha\beta}].
\end{aligned}
$$

Utilisons l'identité de Ricci, relative à l'espace-temps riemannien de métrique $\gamma_{\mu\nu}$, toujours

$$S_{\mu} = \varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}[G^{\tau}{}_{\alpha\nu\mu}\varphi_{\tau\beta} + G^{\tau}{}_{\beta\nu\mu}\varphi_{\alpha\tau} + G^{\tau}{}_{\beta\nu\alpha}\varphi_{\tau\mu} + G^{\tau}{}_{\mu\nu\alpha}\varphi_{\beta\tau}],$$

or

$$\varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\,G^{\tau}{}_{\beta\nu\alpha} = \frac{1}{3}\varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(G^{\tau}{}_{\beta\nu\alpha} + G^{\tau}{}_{\nu\alpha\beta} + G^{\tau}{}_{\alpha\beta\nu}) \equiv 0,$$

à cause d'une des identités de Bianchi valable dans cet espace-temps. D'autre part, ce qui reste est nul :

$$S_{\mu} = \varphi^{\underline{\nu}\,\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}[G^{\tau}{}_{\alpha\nu\mu} + G^{\tau}{}_{\mu\alpha\nu} + G^{\tau}{}_{\nu\mu\alpha}]\,\varphi_{\tau\beta} \equiv 0,$$

en vertu du même groupe d'identités de Bianchi.

Mais la relation approchée (33.2) entre $\Box\,\varphi_{\mu\nu}$ et $\nabla^{\rho}\varphi_{\mu\nu\rho}$ nous permet d'écrire

$$(34.2)\qquad \nabla^{\nu}(\chi M_{\mu\nu}) \simeq \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}\left(\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} - G^{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma} + 2\nabla^{\alpha}f^{\beta} + 2\,G_{\lambda}{}^{\underline{\alpha}}\varphi^{\underline{\beta}\,\underline{\lambda}}\right).$$

Calculons maintenant, la divergence covariante du troisième tenseur

$$\nabla^{\nu}(\chi V_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Big[(\nabla^{\nu}\varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}})\,\Box\,\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}}(\nabla^{\nu}\Box\,\varphi_{\nu\lambda})$$
$$- f^{\lambda}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\nu}{}^{\underline{\lambda}}(\nabla^{\nu}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda}) - \frac{3}{2}\nabla_{\mu}\big(\varphi_{\alpha\beta}\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\big)\Big].$$

Soit, en utilisant encore l'identité de Ricci :

$$\nabla^{\nu}(\chi V_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Big[(\nabla^{\nu}\varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}})\,\Box\,\varphi_{\nu\lambda} + \varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}}\,(G^{\tau}{}_{\rho}{}^{\nu\rho}\nabla_{\tau}\varphi_{\nu\lambda} + G^{\tau}{}_{\nu}{}^{\nu\rho}\nabla_{\rho}\varphi_{\tau\lambda} + G^{\tau}{}_{\lambda}{}^{\nu\rho}\nabla_{\rho}\varphi_{\nu\tau})$$
$$+ \varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}}\nabla^{\rho}\nabla^{\nu}\nabla_{\rho}\varphi_{\nu\lambda} - f^{\lambda}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\nu}{}^{\underline{\lambda}}(\nabla^{\nu}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda}) - \frac{3}{2}\nabla_{\mu}\big(\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\,\Box\,\varphi_{\alpha\beta}\big)\Big]$$

ou encore

$$\nabla^{\nu}(\chi V_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Big[(\nabla^{\nu}\varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}})(\Box\,\varphi_{\nu\lambda}) - \frac{1}{2}\varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}}G_{\lambda}{}^{\rho\nu\tau}\nabla_{\rho}\varphi_{\nu\tau}$$
$$+ \varphi_{\mu}{}^{\underline{\lambda}}\nabla_{\rho}\big[G^{\tau\nu}{}_{\nu\rho}\varphi_{\tau\lambda} + G^{\tau}{}_{\lambda\nu}{}^{\rho}\varphi^{\underline{\nu}}{}_{\tau}\big]$$
$$- \varphi_{\mu\lambda}\,\Box\, f^{\lambda} - f^{\lambda}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\nu}{}^{\underline{\lambda}}\nabla^{\nu}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} - \frac{3}{2}\nabla_{\mu}\big(\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\,\Box\,\varphi_{\alpha\beta}\big)\Big]$$

soit

$$(34.3)\qquad \nabla^{\nu}(\chi V_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\Big[(\nabla^{\nu}\varphi_{\mu\lambda})(\Box\,\varphi_{\nu\lambda})$$
$$- \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}G^{\lambda\rho\nu\tau}\nabla_{\rho}\varphi_{\nu\tau} - \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}\nabla_{\rho}(G^{\lambda\rho\nu\tau}\varphi_{\nu\tau})$$
$$+ \varphi_{\nu}{}^{\underline{\lambda}}\nabla^{\nu}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} - \frac{3}{2}\nabla_{\mu}\big(\varphi_{\alpha\beta}\,\Box\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\big)$$
$$- \varphi_{\mu\lambda}\,\Box\, f^{\lambda} - f^{\lambda}\,\Box\,\varphi_{\mu\lambda} + \varphi_{\mu\lambda}\nabla_{\rho}\big(G^{\tau\rho}\varphi_{\tau}{}^{\underline{\lambda}}\big)\Big].$$

La divergence covariante du quatrième tenseur $\chi Z_{\mu\nu}$ s'écrit

$$(34.4)\quad \nabla^{\nu}(\chi Z_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\varphi_{\mu\alpha\beta}(\nabla^{\alpha}f^{\beta} - \nabla^{\beta}f^{\alpha}) + (\nabla^{\nu}\varphi_{\mu\sigma})(\nabla^{\sigma}f_{\nu})$$
$$+ \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}f^{\lambda} - \frac{1}{2}\varphi_{\nu\sigma}G_{\mu}{}^{\tau\nu\sigma}f_{\tau} + \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}f^{\rho}G_{\rho}{}^{\lambda} + qf_{\nu}\nabla^{\nu}\Gamma_{\mu}.$$

En effet montrons que

$$-\nabla^{\nu}[(p+\lambda)\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu}] = qf_{\nu}\nabla^{\nu}\Gamma_{\mu}.$$

Des équations (II.β) nous tirons

$$-(p+\lambda)\Gamma_{\nu} = qh_{\nu\sigma}f^{\sigma} = q\big(f_{\nu} - f_{\overset{=}{\nu}}\big),$$

donc

$$-(p+\lambda)\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} = q\big(f_{\nu} - f_{\overset{=}{\nu}}\big)\Gamma_{\mu},$$

mais nous avons vu au paragraphe 31 que l'expression $(p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu$ était toujours ici du deuxième ordre, donc à l'approximation considérée, on a

$$-(p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu \simeq q f_\nu \Gamma_\mu$$

or

$$\nabla^\nu f_\nu \simeq \frac{1}{2}(\nabla^\nu\nabla^\rho - \nabla^\rho\nabla^\nu)\varphi_{\nu\rho} \simeq \frac{1}{2}(G^\tau{}_\nu{}^{\nu\rho}\varphi_{\tau\rho} + G^\tau{}_\rho{}^{\nu\rho}\varphi_{\nu\tau}) = 0.$$

La proposition est bien démontrée.

Enfin, la divergence covariante du dernier tenseur s'écrit

$$(34.5)\qquad \nabla^\nu(\chi W'_{\mu\nu}) = \nabla^\nu\left(T_{\underline{\mu\nu}} + T_{\underline{\overline{\mu}\,\overline{\nu}}}\right) + \frac{1}{2}\nabla^\nu\left(T_{\underline{\mu\overline{\overline{\nu}}}} + T_{\underline{\nu\overline{\overline{\mu}}}} + \gamma_{\mu\nu}T_{\underline{\rho}}{}^{\overline{\overline{\rho}}} + \gamma_{\mu\nu}T_{\rho\vee}{}^{\overline{\rho}}\right).$$

35. **Divergence covariante du tenseur** $K_{\mu\nu}$. — Déterminons, d'abord, la somme des divergences des différents tenseurs $\chi X_{\mu\nu}$, $\chi M_{\mu\nu}$, $\chi V_{\mu\nu}$, $\chi Z_{\mu\nu}$ sans tenir compte des termes qui dépendent du tenseur $T_{\mu\nu}$; c'est-à-dire sans tenir compte des termes qui dépendent des $\underset{\circ}{G}_{\alpha\beta}$, car on peut montrer que les termes facteurs de $p\alpha^2$ se détruisent; en effet, leur somme s'écrit

$$\left[\frac{1}{2}(\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})\varphi^{\underline{\lambda}}{}_\rho + \frac{1}{4}\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}\nabla_\mu\varphi_{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\varphi_{\mu\rho\sigma}\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}\right]\alpha^2.$$

Posons alors

$$\nabla^\nu K'_{\mu\nu} = \nabla^\nu K_{\mu\nu} - \Phi_\mu(T_{\rho\sigma}),$$

où $\Phi_\mu(T_{\rho\sigma})$ représente tous les termes de $\nabla^\nu K_{\mu\nu}$ qui dépendent des composantes du tenseur $T_{\alpha\beta}$.

Il vient, en tenant compte de l'identité de Bianchi contractée suivante :

$$\nabla_\rho G^\rho{}_{\mu\nu\sigma} \equiv \nabla_\sigma G_{\mu\nu} - \nabla_\nu G_{\mu\sigma},$$

$$(35.1)\qquad \begin{aligned} \nabla^\nu K'_{\mu\nu} \simeq &- \frac{1}{4}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(\nabla_\mu\Box\varphi_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\Box\varphi_{\beta\mu} + \nabla_\beta\Box\varphi_{\mu\alpha}) \\ &- \frac{1}{2}G_\mu{}^{\tau\nu\sigma}(\varphi_{\nu\sigma}f_\tau + \varphi_{\tau\lambda}\nabla^\lambda\varphi_{\nu\sigma}) \\ &- \frac{1}{4}(\nabla_\mu\varphi_{\alpha\beta})(\varphi_{\rho\sigma}G^{\alpha\beta\rho\sigma}) - \frac{1}{2}f^\lambda\Box\varphi_{\mu\lambda} + q f^\lambda\nabla_\lambda\Gamma_\mu. \end{aligned}$$

Ce résultat a été obtenu, rappelons-le, uniquement à partir des équations du champ symétriques. A aucun moment nous n'avons fait intervenir les équations antisymétriques. La condition de conservation du tenseur $K'_{\mu\nu}$, à l'approximation considérée conduit à des équations qui pourraient peut-être permettre, comme en Relativité générale, de déterminer les équations du mouvement sans que soit nécessité l'apport d'un tenseur phénoménologique supplémentaire $T_{\mu\nu}$.

Nous montrerons, dans le prochain paragraphe, que ces équations

$$\nabla^\nu K'_{\mu\nu} = 0 \tag{35.2}$$

sont en réalité liées aux équations antisymétriques du champ (32.1), car, si ces dernières sont vérifiées, l'expression $\nabla^\nu K'_{\mu\nu}$ s'annule identiquement.

Déterminons maintenant $\nabla^\nu K_{\mu\nu}$ en explicitant les termes qui dépendent du tenseur $T_{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu(T_{\rho\sigma}) = {} & (\nabla^\rho \varphi_{\mu\lambda})\, \varphi_{\tau\rho}\, T^{\underline{\tau}\,\underline{\lambda}} + \frac{1}{2}\, \varphi_{\alpha\beta}\left(\nabla^\tau \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) T_{\underline{\mu\tau}} \\
& + \frac{1}{2}\, \varphi_{\mu\alpha\beta}\, \varphi^{\underline{\beta}\,\underline{\lambda}}\, T_{\underline{\lambda}}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\, \varphi_{\mu\lambda} \nabla_\rho\left(\varphi_\tau{}^{\underline{\lambda}}\, T^{\underline{\tau}\,\underline{\rho}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\, \varphi_{\mu\lambda} f^\rho\, T_{\underline{\rho}}{}^{\lambda} + \nabla^\nu\left(T_{\underline{\mu\nu}} + T_{\underline{\bar\mu\bar\nu}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\, \nabla^\nu\left(T_{\underline{\mu\bar{\bar\nu}}} + T_{\underline{\nu\bar{\bar\mu}}}\right) + \frac{1}{2}\, \nabla_\mu\left(T_{\underline{\rho}}{}^{\bar{\bar\rho}} + T_{\underset{\vee}{\rho}}{}^{\bar\rho}\right).
\end{aligned}$$

Soit par simplification :

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu(T_{\rho\sigma}) = {} & \nabla^\nu T_{\underline{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\, \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(\nabla_\tau \varphi_{\alpha\beta})\, T_{\underline{\mu}}{}^{\underline{\tau}} \\
& + \frac{1}{2}\, \nabla^\nu T_{\underline{\mu\bar{\bar\nu}}} + \frac{1}{2}\, (\nabla_\mu \varphi_{\alpha\beta})\left(T^{\underline{\alpha\bar\beta}} - T^{\underline{\beta\bar\alpha}} + T^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right) \\
& + \frac{1}{2}\, \varphi_{\alpha\beta} \nabla_\mu\left(T^{\underline{\alpha\bar\beta}} + T^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right) + \frac{1}{2}\, \nabla^\rho T_{\underline{\bar\mu\bar\rho}}.
\end{aligned} \tag{35.3}$$

On obtient l'expression complète de $\nabla^\nu K_{\mu\nu}$ par addition de $\nabla^\nu K'_{\mu\nu}$ et $\Phi_\mu(T_{\rho\sigma})$ dont les expressions sont fournies par les relations (35.1) et (35.3).

36. Conditions de conservation et équations antisymétriques du champ. — *a. Sans le tenseur* $T_{\mu\nu}$. — Revenons aux équations antisymétriques du champ (32.1); elles s'écrivent

$$\begin{aligned}
\Box \varphi_{\mu\nu} \simeq {} & - G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\, \varphi_{\alpha\beta} - 2q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) \\
& + \varphi^{\underline{\lambda}}{}_\mu\, G_{\lambda\nu} - \varphi^{\underline{\lambda}}{}_\nu\, G_{\lambda\mu} + 2\, T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} - \varphi_{\mu\nu}(T + \lambda\alpha^2).
\end{aligned} \tag{36.1}$$

Si nous remplaçons les composantes du tenseur de Ricci $G_{\mu\nu}$ qui apparaissent dans (36.1) par leurs valeurs fournies par les équations (33.3); ce qui revient à remplacer ici $G_{\alpha\beta}$ par $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}$ à l'approximation considérée, car $G_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}$ est d'ordre 2, et les termes de cette différence donneraient une contribution du troisième ordre dans les équations (36.1), il vient

$$(36.2) \qquad \Box \varphi_{\mu\nu} \simeq - G^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \varphi_{\alpha\beta} - 2q\,(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu) + T_{\underline{\mu\bar{\nu}}} - T_{\underline{\nu\bar{\mu}}} + 2\,T_{\underset{\vee}{\mu\nu}}.$$

Étudions alors l'influence des équations antisymétriques du champ sur les équations de conservation.

Considérons d'abord uniquement les termes qui resteraient si nous n'avions pas introduit le tenseur phénoménologique $T_{\mu\nu}$. C'est-à-dire : portons dans la divergence covariante de $K'_{\mu\nu}$, (35.1), les tenseurs de $\Box \varphi_{\mu\nu}$ qui ne dépendent pas des composantes $T_{\rho\sigma}$, soit H_μ l'expression obtenue

$$\begin{aligned} H_\mu \simeq\ & \frac{1}{4} \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} [(\nabla_\mu G_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma})\, \varphi_{\rho\sigma} + 2\nabla_\alpha (G_{\beta\mu}{}^{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma})] - \frac{1}{2} G_\mu{}^{\beta\nu\sigma} [\varphi_{\nu\sigma} f_\beta + \varphi_{\beta\alpha} \nabla^\alpha \varphi_{\nu\sigma}] \\ & - \frac{1}{4} (\nabla_\mu \varphi_{\alpha\beta})\, \varphi_{\rho\sigma} G^{\alpha\beta\rho\sigma} + \frac{1}{2} f^\lambda G_{\mu\lambda}{}^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} + q f^\lambda F_{\mu\lambda} + q f^\lambda \nabla_\lambda \Gamma_\mu; \end{aligned}$$

par simplification :

$$H_\mu \simeq \frac{1}{4} \varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} \varphi_{\rho\sigma} (\nabla_\mu G^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} + \nabla_\beta G^{\rho\sigma}{}_{\mu\alpha} + \nabla_\alpha G^{\rho\sigma}{}_{\beta\mu}) + q f^\lambda \nabla_\mu \Gamma_\lambda$$

ou encore grâce aux identités de Bianchi :

$$H_\mu \simeq q f^\lambda \nabla_\mu \Gamma_\lambda,$$

or les équations aux Γ (II.α) s'écrivent

$$q f^\lambda = -(p+\lambda)\, g^{\underline{\lambda\sigma}} \Gamma_\sigma,$$

et

$$\begin{aligned} q f^\lambda \nabla_\mu \Gamma_\lambda &= -(p+\lambda)\, g^{\underline{\lambda\sigma}} \Gamma_\sigma \nabla_\mu \Gamma_\lambda \\ &= -\frac{1}{2} (p+\lambda)\, \nabla_\mu (g^{\underline{\lambda\sigma}} \Gamma_\lambda \Gamma_\sigma) + \frac{1}{2} (p+\lambda)\, \Gamma_\lambda \Gamma_\sigma \nabla_\mu g^{\underline{\lambda\sigma}}. \end{aligned}$$

Le premier terme est nul car les équations (II.β) qui s'écrivent

$$g^{\underline{\lambda\sigma}} \Gamma_\lambda \Gamma_\sigma = -\alpha^2 = \text{cte}$$

entraînent

$$\nabla_\rho (g^{\underline{\lambda\sigma}} \Gamma_\lambda \Gamma_\sigma) = 0.$$

Le deuxième terme contient les facteurs $\nabla_\mu g^{\underline{\lambda\sigma}}$ qui s'écrivent d'après (2.3) :

$$\nabla_\mu\left(\frac{\gamma}{g}\,\gamma^{\lambda\sigma}+\frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\lambda\alpha}\varphi^{\sigma\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)=\nabla_\mu(\gamma^{\lambda\sigma}+o(\varepsilon))=o(\varepsilon)$$

mais $(p+\lambda)\Gamma_\lambda\Gamma_\sigma$ est toujours du deuxième ordre (§ 31), donc à l'approximation considérée, ce terme est du quatrième ordre au moins, et négligeable ici :

$$qf^{\lambda}\nabla_\mu\Gamma_\lambda\simeq o,$$

donc

$$\mathrm{H}_\mu\simeq o. \tag{36.3}$$

Si l'on ne fait pas intervenir un tenseur phénoménologique, les équations qui correspondraient ici aux conditions de conservation de la Relativité Générale sont en réalité des identités et ne fournissent aucune indication nouvelle susceptible de permettre le calcul des équations du mouvement.

b. Introduction du tenseur phénoménologique $\mathrm{T}_{\mu\nu}$. — En l'absence du tenseur $\mathrm{T}_{\mu\nu}$, les conditions de conservation, compte tenu des équations antisymétriques du champ, disparaissent. Voyons quelles sont ces conditions de conservation, en la présence du tenseur $\mathrm{T}_{\mu\nu}$. Nous cherchons dans l'expression de $\nabla^\nu \mathrm{K}_{\mu\nu}$, uniquement les termes qui dépendent des composantes du tenseur $\mathrm{T}_{\mu\nu}$: ils se composent de ceux déjà calculés dans $\Phi_\mu(\mathrm{T}_{\rho\sigma})$ [(35.3)] et de ceux qui apparaissent quand on remplace $\square\,\varphi_{\alpha\beta}$ dans $\nabla^\nu \mathrm{K}'_{\mu\nu}$ (35.1) par son expression (36.2). Soit

$$\begin{aligned}\nabla^\nu \mathrm{K}_{\mu\nu}\simeq{}&\nabla^\nu \mathrm{T}_{\underline{\mu\nu}}+\frac{1}{2}\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}(\nabla_\tau\varphi_{\alpha\beta})\,\mathrm{T}_{\underline{\mu}}{}^{\tau}+\frac{1}{2}\,\nabla^\nu \mathrm{T}_{\underline{\mu\bar{\bar\nu}}}\\&+\frac{1}{2}\,(\nabla_\mu\varphi_{\alpha\beta})\left(\mathrm{T}^{\underline{\alpha\bar\beta}}-\mathrm{T}^{\underline{\beta\bar\alpha}}+\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right)+\frac{1}{2}\,\varphi_{\alpha\beta}\nabla_\mu\left(\mathrm{T}^{\underline{\alpha\bar\beta}}+\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right)\\&+\frac{1}{2}\,\nabla^\rho \mathrm{T}_{\underline{\bar\mu\bar\rho}}-\frac{1}{2}\,\varphi_{\alpha\beta}\nabla_\mu\left(\mathrm{T}^{\underline{\alpha\bar\beta}}+\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right)+\frac{1}{2}\,\nabla_\alpha\left[\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\left(\mathrm{T}_{\underline{\mu\bar\beta}}+2\,\mathrm{T}_{\underset{\vee}{\mu\beta}}-\mathrm{T}_{\underline{\beta\bar\mu}}\right)\right]\end{aligned}$$

ou en simplifiant :

$$\begin{aligned}\nabla^\nu \mathrm{K}_{\mu\nu}\simeq{}&\nabla^\nu \mathrm{T}_{\underline{\mu\nu}}+\frac{1}{2}\,\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\,(\nabla_\tau\varphi_{\alpha\beta})\,\mathrm{T}_{\underline{\mu}}{}^{\tau}+\nabla_\alpha\left[\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\left(\mathrm{T}_{\underline{\mu\bar\beta}}+\mathrm{T}_{\underset{\vee}{\mu\beta}}\right)\right]\\&+\frac{1}{2}\,(\nabla_\mu\varphi_{\alpha\beta})\left(\mathrm{T}^{\underline{\alpha\bar\beta}}-\mathrm{T}^{\underline{\beta\bar\alpha}}+\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\right).\end{aligned}\tag{36.4}$$

c'est ici l'expression définitive de la divergence du deuxième membre des équations symétriques du champ (33.6), quand on considère que les équations antisymétriques sont aussi vérifiées (*cf.* [25]).

Mais, si les équations (III.2) déduites du principe variationnel par les variations de la variable supplémentaire v^α contenue dans la fonction d'action $\mathcal{L}_0$, sont vérifiées

$$\text{(III.2)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial v^\alpha} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\rho v^\alpha)} = 0$$

le tenseur $T_{\mu\nu}$ vérifie des identités de conservation que nous avons calculées dans l'appendice II de la première partie (p. 28) et qui sont

$$\text{(36.5)} \qquad \partial_\mu (g^{\mu\nu} \mathcal{C}_{\rho\nu} + g^{\nu\mu} \mathcal{C}_{\nu\rho}) + \mathcal{C}_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu} \equiv 0$$

et au deuxième ordre d'approximation ces identités sont équivalentes à

$$\nabla^\nu K_{\mu\nu} \simeq 0.$$

En effet, (36.5) peut s'écrire

$$\text{(36.6)} \qquad \nabla_\rho \left(g^{\underline{\rho\nu}} T_{\underline{\mu\nu}} + g^{\underset{\vee}{\rho\nu}} T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \nabla_\mu g^{\alpha\beta} + \left(g^{\underline{\rho\nu}} T_{\underline{\mu\nu}} + g^{\underset{\vee}{\rho\nu}} T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \right) \frac{\nabla_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \equiv 0$$

et par approximation, au troisième ordre près :

$$g^{\underline{\rho\nu}} \simeq \gamma^{\rho\nu} - \gamma^{\rho\alpha} \gamma^{\nu\beta} \gamma^{\lambda\tau} \varphi_{\alpha\lambda} \varphi_{\beta\tau},$$

$$g^{\underset{\vee}{\rho\nu}} T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \simeq \varphi^{\underset{\vee}{\bar\rho\bar\nu}} T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = T_{\underset{\vee}{\mu}\bar{\rho}},$$

si l'on se souvient que $T_{\underset{\vee}{\mu\nu}}$ est du premier ordre.

D'autre part

$$\frac{\nabla_\rho \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \simeq \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} \simeq \frac{1}{2} \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta}$$

et

$$\frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \nabla_\mu g^{\alpha\beta} \simeq -\frac{1}{2} T_{\underline{\alpha\beta}} \nabla_\mu \left(\varphi^{\underline{\alpha}\underline{\lambda}} \varphi^{\underline{\beta}}{}_{\underline{\lambda}} \right) + \frac{1}{2} T_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \nabla_\mu \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}};$$

donc à l'ordre d'approximation considéré, l'identité (36.6) devient

$$\text{(36.7)} \qquad \nabla_\rho T_{\underline{\mu}}{}^{\rho} + \nabla_\rho \left[\varphi^{\underline{\rho}\underline{\nu}} \left(T_{\underline{\mu\bar\nu}} + T_{\underset{\vee}{\mu\nu}} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \right) T_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \left(\nabla_\mu \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \right) T_{\underline{\alpha\bar\beta}} + \frac{1}{2} T_{\underline{\mu}}{}^{\rho} \varphi^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \nabla_\rho \varphi_{\alpha\beta} \simeq 0.$$

Le premier membre est identique à $\nabla^\nu K_{\mu\nu}$.

Même avec l'introduction d'un tenseur phénoménologique, si l'on suppose que les équations du champ (III.2) impliquées par la considération de ce tenseur sont vérifiées, les conditions de conservation de la théorie sont encore des identités.

37. **Conclusion.** — D'après les résultats précédents, dans cette théorie, nous voyons que, soit qu'on se limite à de pures données géométriques, soit qu'on introduise un tenseur phénoménologique dans la variété à connexion linéaire initiale, il n'est pas possible de déduire les équations du mouvement des seules conditions de conservation, comme dans le cas intérieur de la Relativité générale. Il faudrait alors, ou ne pas considérer la partie antisymétrique des équations du champ [sans autre justification que d'obtenir une divergence non nulle pour le second membre des équations symétriques, sous la forme (35.1)] dans le cas purement géométrique, ou négliger les équations déduites de l'apparition d'un tenseur $T_{\mu\nu}$ (aussi artificiellement d'ailleurs que dans le cas précédent) dans le cas hybride où l'on introduit le tenseur physique $T_{\mu\nu}$.

Cette théorie élargie ne semble donc pas répondre à l'espoir d'Einstein d'une théorie unitaire (traduisant les champs gravitationnel et électromagnétique en un même hyperchamp) et non dualiste (permettant de déduire les équations du mouvement d'une particule pesante et chargée sans introduire de singularité), à moins de laisser de côté le principe variationnel et de ne prendre en considération que la partie symétrique des équations du champ.

APPENDICES A LA TROISIÈME PARTIE.

I. — RELATION ENTRE $T \equiv g^{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$ ET $T_0 = \gamma_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$.

En nous reportant aux formules (2.3) et (2.7) de la première partie, nous pouvons écrire

$$T \equiv g^{\alpha\beta}\, T_{\alpha\beta} = \frac{\Upsilon}{g}\,\gamma^{\alpha\beta}\, T_{\underline{\alpha\beta}} + \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\alpha\rho}\,\varphi^{\beta\sigma}\gamma_{\rho\sigma}\, T_{\underline{\alpha\beta}} + \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\alpha\beta}\, T_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \frac{\Upsilon}{g}\,\gamma^{\alpha\rho}\,\gamma^{\beta\sigma}\,\varphi_{\rho\sigma}\, T_{\underset{\vee}{\alpha\beta}};$$

or au deuxième ordre d'approximation, on obtient

$$T = (1 - F)\, T_0 + \varphi_{\rho\sigma}\, T^{\underset{\vee}{\rho\sigma}} + \frac{\varphi}{g}\,\varphi^{\alpha\rho}\,\varphi^{\beta\sigma}\gamma_{\rho\sigma}\, T_{\underline{\alpha\beta}}.$$

Mais le dernier terme peut se transformer (*cf.* [3], Note I, formule (I.1)) :

$$\varphi\varphi^{\alpha\rho}\varphi^{\beta\sigma}\gamma_{\rho\sigma} = -\gamma\gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\beta\sigma}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\sigma\tau}\varphi_{\rho\lambda} + \gamma\gamma^{\alpha\beta}\mathrm{F}.$$

Nous en tirons

$$\mathrm{T} \simeq (1-\mathrm{F})\,\mathrm{T}_0 + \varphi_{\rho\sigma}\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\rho\sigma}} + \varphi_{\rho\lambda}\varphi^{\underline{\lambda}}{}_{\sigma}\mathrm{T}^{\underline{\rho\sigma}} + \mathrm{F}\mathrm{T}_0.$$

Soit $\mathrm{T} \simeq \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_{\underset{\vee}{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + \mathrm{T}_{\underline{\rho}}{}^{\bar{\bar{\rho}}}$ avec les définitions habituelles.

II. — TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS SYMÉTRIQUES DU CHAMP PAR L'INTRODUCTION DES ÉQUATIONS ANTISYMÉTRIQUES.

Nous voulons ici porter dans les équations symétriques du champ (33.5), les résultats fournis par les équations antisymétriques (36.2)

$$\Box\varphi_{\mu\nu} = -\mathrm{G}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta} - 2q(\partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu) + \mathrm{T}_{\underline{\mu\bar{\nu}}} - \mathrm{T}_{\underline{\nu\bar{\mu}}} + 2\mathrm{T}_{\underset{\vee}{\mu\nu}};$$

il vient (avec $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{G}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\mathrm{G} \simeq{}& \frac{1}{4}\left(\varphi_{\mu\alpha\beta}\varphi_\nu{}^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} - \frac{1}{6}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta\rho}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\rho}}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\varphi^{\underline{\rho}\,\underline{\sigma}}\left[\varphi_{\mu\lambda}\mathrm{G}^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} + \varphi_{\nu\lambda}\mathrm{G}^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} + \frac{3}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta}\mathrm{G}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\right]\\
&+ (\nabla^\rho\varphi_{\mu\lambda})(\nabla^\lambda\varphi_{\nu\rho}) + \frac{1}{4}\nabla_\mu\nabla_\nu\left(\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right)\\
&- \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(\nabla_\rho\varphi_{\alpha\beta})\left(\nabla^\rho\varphi^{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}\right) + q\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\\
&+ q\left(\varphi_{\mu\lambda}\mathrm{F}_\nu{}^\lambda + \varphi_{\nu\lambda}\mathrm{F}_\mu{}^\lambda - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\left[\varphi_{\mu\lambda}(\nabla^\lambda f_\nu + \nabla_\nu f^\lambda) + \varphi_{\nu\lambda}(\nabla^\lambda f_\mu + \nabla_\mu f^\lambda)\right]\\
&- \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi_{\rho\lambda}\nabla^\rho f^\lambda + \frac{1}{2}f_\mu f_\nu + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}f^\rho f_\rho\\
&- (p+\lambda)\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}p\alpha^2\\
&+ \mathrm{T}_{\underline{\mu\nu}} + \mathrm{T}_{\underset{\vee}{\mu\bar{\nu}}} + \mathrm{T}_{\underset{\vee}{\nu\bar{\mu}}} + \mathrm{T}_{\underline{\mu\bar{\bar{\nu}}}} + \mathrm{T}_{\underline{\nu\bar{\bar{\mu}}}} - \gamma_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma}\left(\mathrm{T}^{\underset{\vee}{\rho\sigma}} + \mathrm{T}^{\underline{\rho\bar{\sigma}}}\right).
\end{aligned}$$

Les tenseurs indépendants de f^μ et de $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ sont identiques à ceux de M[me] M.-A. Tonnelat ([9], p. 10 et 11) à condition de poser

$$q = \frac{\chi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda = -p.$$

III. — EXPLICATIONS DES RÉSULTATS TROUVÉS DANS CE CHAPITRE PAR L'ÉTUDE DES IDENTITÉS DE CONSERVATION.

Nous utiliserons les identités de conservation écrites sous la forme (14.2)

$$\partial_\mu(\mathcal{G}^{\mu\nu}Z_{\rho\nu} + \mathcal{G}^{\nu\mu}Z_{\nu\rho}) - \mathcal{G}^{\mu\nu}\partial_\rho Z_{\mu\nu} \equiv 0.$$

Ce qui peut encore se transformer en l'identité équivalente

$$\nabla_\mu\left(\mathcal{G}^{\underline{\mu\nu}} Z_{\underline{\rho\nu}}\right) - \frac{1}{2}\,\mathcal{G}^{\underline{\alpha\beta}}\nabla_\rho Z_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\,\mathcal{G}^{\overset{\alpha\beta}{\vee}} Z_{[\underset{\vee}{\alpha\beta},\rho]} - Z_{\underset{\vee}{\rho\nu}}\mathcal{F}^{\nu} \equiv 0,$$

où ∇ représente ici la différentiation covariante relative à la connexion riemannienne déduite du tenseur métrique $\gamma_{\mu\nu}$, mais pourrait tout aussi bien être relative à n'importe quelle connexion symétrique.

Posons

$$Z_{\underline{\rho\nu}} = G_{\underline{\rho\nu}} + \Lambda_{\underline{\rho\nu}},$$

où $G_{\underline{\rho\nu}}$ est le tenseur de Ricci relatif à la connexion riemannienne déduite de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ et supposons que les équations antisymétriques de la théorie

$$Z_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = 0$$

soient vérifiées; il vient alors

$$\text{(C)} \qquad \nabla_\mu\left[\mathcal{G}^{\underline{\mu\nu}}\left(G_{\underline{\rho\nu}} + \Lambda_{\underline{\rho\nu}}\right)\right] - \frac{1}{2}\,\mathcal{G}^{\underline{\alpha\beta}}\nabla_\rho\left(G_{\underline{\alpha\beta}} + \Lambda_{\underline{\alpha\beta}}\right) = 0$$

or au deuxième ordre d'approximation :

$$g^{\underline{\mu\nu}} \simeq \gamma^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\alpha\lambda}\varphi_{\beta\tau}$$

et

$$\frac{\nabla_\mu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \simeq \frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\nabla_\mu\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varphi^{\underline{\alpha\beta}}\nabla_\mu\varphi_{\alpha\beta};$$

donc en tenant compte de l'identité de conservation relative au tenseur d'Einstein :

$$\nabla_\mu(\gamma^{\mu\nu}G_{\rho\nu}) - \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\rho G_{\alpha\beta} \equiv 0,$$

l'identité (C) se transforme en

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\mu\left(\gamma^{\underline{\mu\nu}} A_{\underline{\rho\nu}} - \frac{1}{2}\,\delta^\mu_\rho \gamma^{\alpha\beta} A_{\underline{\alpha\beta}}\right) \\
&- \nabla_\mu\left(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta}\gamma^{\lambda\tau}\varphi_{\beta\tau}\varphi_{\alpha\lambda}\left(G_{\underline{\rho\nu}} + A_{\underline{\rho\nu}}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\beta\mu}\gamma^{\sigma\tau}\varphi_{\mu\tau}\varphi_{\lambda\sigma}\nabla_\rho\left(G_{\underline{\alpha\beta}} + A_{\underline{\alpha\beta}}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\nu}\left(G_{\underline{\rho\nu}} + A_{\underline{\rho\nu}}\right)\varphi^{\underline{\gamma\delta}}\nabla_\mu\varphi_{\gamma\delta} \simeq 0.
\end{aligned}
$$

Il est donc évident que pour que le deuxième membre des équations symétriques (33.6) se conserve identiquement au deuxième ordre d'approximation (sans même que ces équations soient vérifiées), il faut et il suffit que $Z_{\underline{\rho\nu}}$ partie symétrique du premier membre des équations du champ soit au moins du premier ordre, les équations antisymétriques du champ étant vérifiées.

QUATRIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DU CHAMP DANS L'HYPOTHÈSE PARTICULIÈRE D'UN CHAMP STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

INTRODUCTION.

L'objet de cette partie est de donner l'expression exacte des équations du champ de la théorie ici étudiée, dans le cas particulier où le tenseur fondamental a, *a priori*, la forme que A. Papapetrou ([26]) considère comme celle qui représente un champ statique à symétrie sphérique dans une variété à connexion linéaire. A. Papapetrou détermine la forme du tenseur fondamental en un point P situé sur l'axe de rotation; ce qui restreint évidemment un peu le problème, mais nous avons choisi cette forme parce qu'elle est très, simple d'une part, et parce qu'elle s'appuie sur la métrique $\gamma_{\mu\nu}$, partie symétrique du tenseur fondamental sous sa forme covariante, métrique que nous avions déjà choisie dans la deuxième partie de ce travail, d'autre part.

Pour de plus amples renseignements sur la symétrie sphérique en théorie du champ unifié, on peut se reporter à l'étude de S. Kichenassamy (*Thèse*, Paris, 1957, p, 66-73 et 120-124) ainsi qu'à celle de M.-A. Tonnelat ([3], p. 63-88).

Les équations du champ ainsi calculées se révèlent malgré la simplicité du point de départ, d'une assez grande complexité et ne permettent pas, comme en Théorie du champ unifié classique, de déterminer l'expression exacte du tenseur fondamental de façon aussi naturelle.

CHAPITRE UNIQUE.

CALCUL DES COEFFICIENTS DE CONNEXION LINÉAIRE ET DES COMPOSANTES DU TENSEUR DE RICCI.

38. **Rappel des hypothèses de A. Papapetrou.** — La partie symétrique du tenseur fondamental (covariant) étant supposée de même forme que le tenseur métrique de la symétrie sphérique en Relativité générale :

$$(38.1)\qquad g_{\underline{\alpha\beta}} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix},$$

les conditions de symétrie sphérique pour la partie antisymétrique sont les suivantes : en un point P de l'axe des z $(0, 0, z = r)$ dans un système de coordonnées « cartésien », les valeurs des composantes $\underset{\vee}{g}_{\alpha\beta}$ après une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des z définie par

$$x' = -y, \qquad y' = x, \qquad z' = z, \qquad t' = t$$

sont

$$\underset{\vee}{g}'_{12} = \underset{\vee}{g}_{12}, \qquad \underset{\vee}{g}'_{23} = -\underset{\vee}{g}_{31}, \qquad \underset{\vee}{g}'_{31} = \underset{\vee}{g}_{23},$$
$$\underset{\vee}{g}'_{14} = -\underset{\vee}{g}_{24}, \qquad \underset{\vee}{g}'_{24} = \underset{\vee}{g}_{14}, \qquad \underset{\vee}{g}'_{34} = \underset{\vee}{g}_{34}.$$

D'autre part, comme en P ces composantes doivent rester les mêmes à cause de la symétrie sphérique et parce qu'en P :

$$x'_\mu = x_\mu,$$

les seules composantes non nulles en P sont $\underset{\vee}{g}_{12}$ et $\underset{\vee}{g}_{34}$ (ce résultat est indépendant de l'angle de rotation considéré). Si l'on opère une nouvelle rotation qui applique le point (o, o, r) sur le point (x, y, z) avec la condition

$$x^2+y^2+z^2=r^2;$$

puis, si l'on écrit les composantes antisymétriques du tenseur fondamental ainsi obtenu dans un système de coordonnées polaires, on trouve, v et w étant fonction de r seulement,

$$g_{\underset{\vee}{\mu\nu}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & r^2 v \sin\theta & 0 \\ 0 & -r^2 v\sin\theta & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que S. Kichenassamy a vérifié qu'avec cette méthode on retrouvait la forme du tenseur symétrique $\gamma_{\alpha\beta}$ écrite *a priori* par analogie avec la Relativité générale.

Nous nous bornerons dans cette étude au cas où v est nul.

39. **Expression des vecteurs fondamentaux de la théorie.** — Nous partons donc du tenseur fondamental suivant :

$$(39.1)\qquad g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & w \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

(nous avons posé, comme A. Papapetrou, $\beta=r^2$).

Il vient immédiatement

$$(39.2)\qquad \sqrt{|g|}=\sqrt{\lambda\pi-w^2}\,|\beta\sin\theta|$$

et

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} \dfrac{-\beta\pi\sin\theta}{\sqrt{\lambda\pi-w^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-w\beta\sin\theta}{\sqrt{\lambda\pi-w^2}} \\ 0 & -\sin\theta\sqrt{\lambda\pi-w^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\sqrt{\lambda\pi-w^2}}{\sin\theta} & 0 \\ \dfrac{w\beta\sin\theta}{\sqrt{\lambda\pi-w^2}} & 0 & 0 & \dfrac{\lambda\beta\sin\theta}{\sqrt{\lambda\pi-w^2}} \end{bmatrix}$$

il s'ensuit pour $\mathcal{F}^\rho\equiv\partial_\lambda\mathcal{G}^{\underset{\vee}{\rho\lambda}}$:

$$(39.3)\qquad \mathcal{F}^1=\mathcal{F}^2=\mathcal{F}^3=0,$$

$$(39.4)\qquad \mathcal{F}^4=\partial_r\left(\frac{w\beta}{\sqrt{\lambda\pi-w^2}}\right)\sin\theta$$

et

$$f^4 = \frac{1}{2\beta^2 w}\,\partial_r\left(\frac{w^2\beta^2}{\lambda\pi - w^2}\right) = \frac{2}{rw}\,\frac{1-\mathrm{U}}{\mathrm{U}} - \frac{1}{2w}\,\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}^2}, \tag{39.5}$$

à condition d'écrire

$$\beta = r^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U} = 1 - \frac{w^2}{\lambda\pi}.$$

Intéressons-nous maintenant au système (II)

$$f^\rho \Gamma_\rho \overset{\mu\alpha}{\underset{-}{g}} \Gamma_\alpha + \alpha^2 f^\mu = 0$$

qui devient par explicitation :

$$f^4\Gamma_4\,\frac{\gamma}{w^2-\lambda\pi}\,\Gamma_1 = 0, \qquad -f^4\Gamma_4\,\frac{1}{\beta}\,\Gamma_2 = 0, \qquad -f^4\Gamma_4\,\frac{1}{\beta\sin^2\theta}\,\Gamma_3 = 0$$

$$f^4\left[-\frac{\lambda}{w^2-\lambda\pi}\,(\Gamma_4)^2 + \alpha^2\right] = 0;$$

d'où nécessairement, si f^4 et α^2 ne sont pas nuls :

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0, \\ &\Gamma_4 = \pm\alpha\sqrt{\frac{w^2-\lambda\pi}{\lambda}} = \pm\alpha\sqrt{-\pi\mathrm{U}}. \end{aligned}\right. \tag{39.6}$$

40. Expression des coefficients de connexion linéaire. — Maintenant, dans ce cas particulier, il nous faut résoudre de façon exacte le système des 64 équations de liaison (I) par rapport aux 64 coefficients de connexion linéaire. Elles s'écrivent

$$g_{\underset{+-}{\mu\nu};\rho} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \mathrm{L}^\alpha_{\mu\rho} g_{\alpha\nu} - \mathrm{L}^\alpha_{\rho\nu} g_{\mu\alpha} = \frac{2}{3}\,g_{\rho\nu} g_{\mu\sigma} f^\sigma - \frac{1}{3}\,g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} f^\sigma.$$

Nous obtenons déjà facilement quatre équations à une seule inconnue, soient [15]

$$\mathrm{L}^1_{11} = \frac{\lambda'}{2\lambda} - \frac{1}{6}\,w f^4, \qquad \mathrm{L}^2_{22} = 0 = \mathrm{L}^3_{33}, \qquad \mathrm{L}^4_{44} = -\frac{1}{6}\,\pi f^4,$$

puis trois systèmes indépendants de douze équations homogènes et un système de trois équations homogènes, les 39 coefficients $\mathrm{L}^\rho_{\mu\nu}$ qui y

([15]) Ici et dans la suite : $\lambda' = \partial_r\lambda$, $w' = \partial_r w$, $\pi' = \partial_r \pi$.

figurent sont donc nuls à condition que les déterminants correspondants ne le soient pas, enfin, trois systèmes de six équations avec second membre dont le premier s'écrit

$$
(40.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda L^1_{14} + \varpi L^4_{14} + \lambda L^1_{41} - \varpi L^4_{41} = \frac{\lambda\pi - 2\varpi^2}{3} f^4,\\
&\varpi L^1_{14} - \pi L^4_{14} - \varpi L^1_{41} - \pi L^4_{41} = \frac{1}{3}\varpi\pi f^4 - \pi,\\
&\lambda L^1_{44} + \varpi L^4_{44} + \varpi L^1_{41} - \pi L^4_{41} = -\frac{1}{3}\varpi\pi f^4,\\
&-\varpi L^1_{14} - \pi L^4_{14} + \lambda L^1_{44} - \varpi L^4_{44} = \frac{1}{3}\varpi\pi f^4,\\
&-\pi L^4_{11} + \lambda L^1_{14} - \varpi L^4_{14} \qquad = -\varpi' + \frac{\varpi\lambda'}{2\lambda} + \frac{\varpi^2}{6} f^4,\\
&-\pi L^4_{11} + \lambda L^1_{41} - \varpi L^4_{41} \qquad = \varpi' - \frac{\varpi\lambda'}{2\lambda} - \frac{2}{3}\lambda\pi f^4 + \frac{\varpi^2}{2} f^4.
\end{aligned}
\right.
$$

La solution de ce système s'écrit (à condition que son déterminant ne soit pas nul), en posant $U = 1 - \frac{\varpi^2}{\lambda\gamma}$:

$$
\begin{aligned}
L^1_{14} &= \frac{\pi}{2\varpi}\partial_r \operatorname{Log} U + \frac{\pi}{2} f^4,\\
L^1_{41} &= -\frac{\pi}{2\varpi}\partial_r \operatorname{Log} U - \frac{\pi}{6} f^4,\\
L^4_{14} &= \frac{1}{2}\partial_r \operatorname{Log}(\pi U) - \frac{\varpi}{6} f^4,\\
L^4_{41} &= \frac{1}{2}\partial_r \operatorname{Log}(\pi U) + \frac{\varpi}{2} f^4,\\
L^1_{44} &= \frac{\pi'}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda}\partial_r \operatorname{Log} U + \frac{\varpi\pi}{2\lambda} f^4,\\
L^4_{11} &= \frac{\lambda}{2} f^4.
\end{aligned}
$$

Le deuxième système de six équations est le suivant :

$$
(40.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\beta\, L^2_{12} + \lambda L^1_{22} - \varpi L^4_{22} = -\frac{2}{3}\beta\varpi f^4,\\
&\beta\, L^2_{21} + \lambda L^1_{22} + \varpi L^4_{22} = 0,\\
&\beta\, L^2_{24} - \varpi L^1_{22} - \pi L^4_{22} = 0,\\
&\beta\, L^2_{42} + \varpi L^1_{22} - \pi L^4_{22} = -\frac{2}{3}\beta\pi f^4,\\
&\beta(L^2_{21} + L^2_{12}) \qquad = \beta' + \frac{1}{3}\beta\varpi f^4,\\
&\beta(L^2_{24} + L^2_{42}) \qquad = \frac{1}{3}\beta\pi f^4.
\end{aligned}
\right.
$$

La solution s'écrit (si le déterminant n'est pas nul)

$$L^4_{22} = \frac{\beta}{2} f^4, \qquad L^1_{22} = -\frac{\beta'}{2\lambda} - \frac{\beta w}{2\lambda} f^4,$$

$$L^2_{12} = \frac{\beta'}{2\beta} + \frac{1}{3} w f^4, \qquad L^2_{21} = \frac{\beta'}{2\beta},$$

$$L^2_{42} = \frac{w\beta'}{2\lambda\beta} + \frac{3w^2 - \lambda\pi}{6\lambda} f^4,$$

$$L^2_{24} = -\frac{w\beta'}{2\lambda\beta} + \frac{\lambda\pi - w^2}{2\lambda} f^4.$$

Le troisième système de six équations est alors

$$(40.3) \qquad \begin{cases} \beta(\sin^2\theta) L^3_{13} + \lambda L^1_{33} - w L^4_{33} = -\frac{2}{3}\beta(\sin^2\theta) w f^4, \\ \beta(\sin^2\theta) L^3_{31} + \lambda L^1_{33} + w L^4_{33} = 0, \\ \beta(L^3_{31} + L^3_{13}) = \beta' + \frac{1}{3}\beta w f^4, \\ \beta(L^3_{34} + L^3_{43}) = \frac{1}{3}\beta\pi f^4, \\ \beta(\sin^2\theta) L^3_{34} - w L^1_{33} - \pi L^4_{33} = 0, \\ \beta(\sin^2\theta) L^3_{43} + w L^1_{33} - \pi L^4_{33} = -\frac{2}{3}\beta(\sin^2\theta)\pi f^4. \end{cases}$$

En comparant avec le système (40.2), on trouve immédiatement

$$L^4_{33} = \frac{1}{2}\beta(\sin^2\theta) f^4 = L^4_{22}\sin^2\theta,$$

$$L^1_{33} = -\frac{\beta'\sin^2\theta}{2\lambda} - \frac{w\beta\sin^2\theta}{2\lambda} f^4 = L^1_{22}\sin^2\theta,$$

$$L^3_{13} = \frac{\beta'}{2\beta} + \frac{1}{3} w f^4 = L^2_{12},$$

$$L^3_{31} = \frac{\beta'}{2\beta} = L^2_{21},$$

$$L^3_{43} = \frac{w\beta'}{2\lambda\beta} + \frac{3w^2 - \lambda\pi}{6\lambda} f^4 = L^2_{42},$$

$$L^3_{34} = -\frac{w\beta'}{2\lambda\beta} + \frac{\lambda\pi - w^2}{2\lambda} f^4 = L^2_{24}.$$

Il ne reste plus alors qu'un système de trois équations qui s'écrit

$$\begin{cases} L^3_{23} + L^3_{32} = 2\cot\theta, \\ (\sin^2\theta) L^3_{23} + L^2_{33} = 0, \\ (\sin^2\theta) L^3_{32} + L^2_{33} = 0 \end{cases}$$

et dont la solution est (avec $\sin\theta \neq 0$)

$$L^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad L^3_{23} = L^3_{32} = \operatorname{cotg}\theta.$$

Résumons les résultats en supposant $\beta = r^2$; il nous reste 23 coefficients non nuls pour la connexion linéaire :

$$\begin{array}{ll}
L^1_{11} = \dfrac{\lambda'}{2\lambda} - \dfrac{1}{6}\,w f^4, & L^4_{11} = \dfrac{\lambda}{2} f^4, \\
L^1_{22} = -\dfrac{r}{\lambda} - \dfrac{r^2 w}{2\lambda} f^4, & L^4_{22} = \dfrac{r^2}{2} f^4, \\
L^1_{33} = -\left(\dfrac{r}{\lambda} + \dfrac{r^2 w}{2\lambda} f^4\right)\sin^2\theta, & L^4_{33} = \dfrac{1}{2} r^2 (\sin^2\theta) f^4, \\
L^1_{44} = \dfrac{\pi'}{2\lambda} + \dfrac{\pi}{\lambda}\,\partial_r \operatorname{Log} U + \dfrac{w\pi}{2\lambda} f^4, & L^4_{44} = -\dfrac{1}{6}\,\pi f^4, \\
L^2_{12} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{3}\,w f^4, & L^2_{21} = \dfrac{1}{r}, \\
L^3_{13} = L^2_{12}, & L^3_{31} = L^2_{21}, \\
L^4_{14} = \dfrac{1}{2}\,\partial_r \operatorname{Log}(\pi U) - \dfrac{w}{6} f^4, & L^4_{41} = \dfrac{1}{2}\,\partial_r \operatorname{Log}(\pi U) + \dfrac{w}{2} f^4, \\
L^1_{14} = \dfrac{\pi}{2w}\,\partial_r \operatorname{Log} U + \dfrac{\pi}{2} f^4, & L^1_{41} = -\dfrac{\pi}{2w}\,\partial_r \operatorname{Log} U - \dfrac{\pi}{6} f^4, \\
L^2_{24} = -\dfrac{w}{\lambda r} + \dfrac{\lambda\pi - w^2}{2\lambda} f^4, & L^2_{42} = \dfrac{w}{\lambda r} - \dfrac{\lambda\pi - 3w^2}{6\lambda} f^4, \\
L^3_{34} = L^2_{24}, & L^3_{43} = L^2_{42},
\end{array}$$

$$L^3_{23} = \operatorname{cotg}\theta, \qquad L^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad L^3_{32} = \operatorname{cotg}\theta.$$

Ces résultats sont valables évidemment si les déterminants de tous les systèmes étudiés sont différents de zéro; nous avons un renseignement global sur ces déterminants en utilisant le résultat de M.-A. Tonnelat ([3], p. 47) sur la condition de possibilité du calcul des coefficients de connexion linéaire à partir des équations de liaison sans second membre, car nous savons que le système étudié ici est équivalent au système suivant :

$$g_{\mu\nu;\rho} \equiv \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Delta^\lambda_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Delta^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0,$$

$$L^\rho_{\mu\nu} = \Delta^\rho_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(f^\rho + f^{\bar\rho}) + \frac{1}{2}\delta^\rho_\mu g_{\nu\lambda}(f^\lambda - f^{\bar\lambda}) - \delta^\rho_\nu g_{\mu\lambda}\left(\frac{1}{6} f^\lambda - \frac{1}{2} f^{\bar\lambda}\right).$$

Donc les conditions de possibilité trouvées par M.-A. Tonnelat sont ici encore les mêmes, mais en plus il faut que f^λ soit calculable pour que la connexion linéaire le soit. Or, dans le cas qui nous occupe, le déterminant φ est nul, et le déterminant γ s'écrit

$$\gamma = -\lambda\pi\beta^2 \sin^2\theta ;$$

il n'est nul que si un des facteurs s'annule, c'est-à-dire si $r = 0$, ou $\sin\theta = 0$. Les points de l'axe des z s'introduisent donc comme des points singuliers mais cette singularité n'est pas intrinsèque et disparaît par un changement de coordonnées. Les conditions de possibilité générales sont

$$(\lambda\pi - w^2)(\lambda\pi + w^2)\, r^4 \sin^2\theta \neq 0$$

par simple transcription de la condition d'existence des solutions dans le cas général ([3], chap. III, p. 47). Or ces conditions entraînent l'existence des deux vecteurs f^4 et Γ_4, donc celle des coefficients de connexion linéaire $L^{\rho}_{\mu\nu}$.

41. Expression des composantes du tenseur de Ricci. — La forme générale du tenseur de Ricci en fonction de la connexion linéaire $L^{\rho}_{\mu\nu}$ est

$$W_{\mu\nu} = \partial_\alpha L^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu L^{\alpha}_{\mu\alpha} + L^{\alpha}_{\mu\nu} L^{\rho}_{\alpha\rho} - L^{\alpha}_{\mu\rho} L^{\rho}_{\alpha\nu}.$$

Si nous explicitons les indices, il vient pour les composantes non nulles :

$$\begin{aligned}
(41.1)\qquad W_{11} &= -\partial_1 (L^{2}_{12} + L^{3}_{13} + L^{4}_{14}) + 2 L^{2}_{12} (L^{1}_{11} - L^{2}_{21}) \\
&\quad + L^{4}_{14} (L^{1}_{11} - L^{4}_{41}) + L^{4}_{11} (2 L^{2}_{42} + L^{4}_{44} - L^{1}_{14}),\\
(41.2)\qquad W_{22} &= \partial_1 L^{1}_{22} - \partial_2 L^{3}_{23} - L^{3}_{23} L^{3}_{32} \\
&\quad + L^{1}_{22} (L^{1}_{11} + L^{2}_{12} - L^{2}_{21} + L^{4}_{14}) \\
&\quad + L^{4}_{22} (L^{1}_{41} + L^{2}_{42} - L^{2}_{24} + L^{4}_{44}),\\
W_{33} &= \partial_1 L^{1}_{33} + L^{1}_{33} (L^{1}_{11} + L^{3}_{13} - L^{3}_{31} + L^{4}_{14}) \\
&\quad + L^{4}_{33} (L^{1}_{41} + L^{3}_{43} - L^{3}_{34} + L^{4}_{44}) - L^{3}_{32} L^{2}_{33},
\end{aligned}$$

or ici,

$$\begin{aligned}
L^{1}_{33} &= L^{1}_{22} \sin^2\theta,\\
L^{4}_{33} &= L^{4}_{22} \sin^2\theta,\\
L^{3}_{32} L^{2}_{33} &= (\partial_2 L^{3}_{23} + L^{3}_{23} L^{3}_{32}) \sin^2\theta
\end{aligned}$$

et

$$L^{1}_{22} = L^{1}_{33}, \qquad L^{2}_{12} = L^{3}_{13}, \qquad L^{2}_{21} = L^{3}_{31}$$
$$L^{2}_{42} = L^{3}_{43}, \qquad L^{2}_{24} = L^{3}_{34} ;$$

donc

$$W_{33} = W_{22} \sin^2\theta, \tag{41.3}$$

$$\begin{aligned} W_{44} = {} & \partial_1 L^1_{44} + L^1_{44} (L^1_{11} + 2 L^2_{12} - L^4_{41}) \\ & + L^1_{41} (L^4_{44} - L^1_{14}) + 2 L^2_{42} (L^4_{44} - L^2_{24}), \end{aligned} \tag{41.4}$$

$$W_{14} = \partial_1 L^1_{14} + 2 L^2_{12} (L^1_{14} - L^2_{24}) + L^4_{14} (L^1_{41} + 2 L^2_{42}) - L^4_{11} L^1_{44}, \tag{41.5}$$

$$\begin{aligned} W_{41} = {} & -\partial_1 (2 L^2_{42} + L^4_{44}) + L^1_{41} (2 L^2_{12} + L^4_{14}) \\ & + 2 L^2_{42} (L^4_{41} - L^2_{21}) - L^1_{44} L^4_{11}. \end{aligned} \tag{41.6}$$

Portons maintenant les expressions des coefficients de connexion linéaire calculées au paragraphe précédent (p. 129). Pour la première composante du tenseur de Ricci (41.1), il vient (avec $U' = \partial_r U$)

$$\begin{aligned} W_{11} = {} & -\partial_r \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{3} w f^4 + \frac{1}{2} \frac{(\pi U)'}{\pi U} - \frac{w}{6} f^4 \right] \\ & + \left[\frac{2}{r} + \frac{2}{3} w f^4 \right] \left[-\frac{1}{r} + \frac{\lambda'}{2\lambda} - \frac{1}{6} w f^4 \right] \\ & + \left[\frac{(\pi U)'}{2\pi U} - \frac{w}{6} f^4 \right] \left[\frac{\lambda'}{2\lambda} - \frac{1}{6} w f^4 - \frac{(\pi U)'}{2\pi U} - \frac{w}{2} f^4 \right] \\ & + \frac{\lambda}{2} f^4 \left[\frac{2w}{\lambda r} - \frac{\lambda\pi - w^2}{\lambda} f^4 - \frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} \right]. \end{aligned}$$

Après avoir remarqué que le dernier terme est nul, car

$$\frac{2w}{\lambda r} - \pi U \left[\frac{2}{rw} \frac{1-U}{U} - \frac{1}{2w} \frac{U'}{U^2} \right] - \frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} = \frac{2w}{\lambda r} \left[1 - \frac{\lambda\pi}{w^2} (1-U) \right] = 0;$$

en effet $U = 1 - \frac{w^2}{\lambda\pi}$ $\left(\text{ce qui entraîne } \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{2w'}{w} - \frac{\pi'}{\pi} + \frac{U'}{1-U}\right)$, il vient

$$\begin{aligned} W_{11} = {} & \frac{1-2U}{4U^2} U'' - \frac{\pi''}{2\pi} + \frac{U'^2}{U^2} \frac{4U-3}{8U(1-U)} + \frac{U'}{U} \frac{\pi'}{\pi} \frac{(2U-1)^2}{4U(1-U)} \\ & + \frac{U'}{U} \frac{w'}{w} \frac{2U-1}{4U} + \frac{1}{2} \frac{\pi'}{\pi} \frac{w'}{w} + \frac{U'}{rU} \frac{1}{U(1-U)} \\ & + \frac{w'}{rw} \frac{1+U}{U} - \frac{\pi'}{r\pi} \frac{1}{U} - \frac{1}{r^2} \frac{1-U}{U}. \end{aligned} \tag{41.7}$$

Les deuxième et troisième composantes se calculent ensemble

$$\begin{aligned} W_{22} = {} & -\partial_r \left(\frac{r}{\lambda} + \frac{r^2 w}{2\lambda} f^4 \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\theta} \\ & - \left(\frac{r}{\lambda} + \frac{r^2 w}{2\lambda} f^4 \right) \left(\frac{\lambda'}{2\lambda} + \frac{1}{2} \frac{(\pi U)'}{\pi U} \right) + \frac{r^2}{2} f^4 \left[-\frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{2w}{\lambda r} + \frac{w^2 - \lambda\pi}{\lambda} f^4 \right], \end{aligned}$$

or, de nouveau, le dernier terme s'annule ; en effet,

$$-\frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{2w}{\lambda r} - \pi U \left(\frac{2}{rw} \frac{1-U}{U} - \frac{1}{2w} \frac{U'}{U^2} \right) = \frac{2w}{\lambda r} \left[1 - \frac{\lambda\pi}{w^2} (1-U) \right] = 0$$

et

$$W_{22} = 1 - \partial_r \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{r}{U} - \frac{r^2}{4} \frac{U'}{U^2} \right) \right] - \frac{1}{\lambda} \left[\frac{r}{U} - \frac{r^2}{4} \frac{U'}{U^2} \right] \left[\frac{w'}{w} + \frac{U'}{2U(1-U)} \right];$$

soit, en définitive,

$$(41.8) \qquad W_{22} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{r^2}{4} \frac{U''}{U^2} + r^2 \frac{2U-3}{8U(1-U)} \frac{U'^2}{U^2} + \frac{U'}{U^2} \frac{r^2}{4} \left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w} \right) \right.$$
$$\left. - r \frac{U'}{U} \frac{U-2}{2U(1-U)} - \frac{r}{U} \left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w} \right) - \frac{1}{U} \right] + 1.$$

La quatrième composante se calcule à partir de (41.4)

$$W_{44} = \partial_r \left[\frac{\pi'}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} \frac{U'}{U} + \frac{w\pi}{2\lambda} f^4 \right]$$
$$+ \left[\frac{\pi'}{2\lambda} + \frac{\pi}{\lambda} \frac{U'}{U} + \frac{w\pi}{2\lambda} f^4 \right] \left[\frac{\lambda'}{2\lambda} + \frac{2}{r} - \frac{(\pi U)'}{2\pi U} \right]$$
$$+ \left[\frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{\pi}{6} f^4 \right] \left[\frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{2}{3} \pi f^4 \right]$$
$$+ \left[\frac{2w}{\lambda r} - \frac{\lambda\pi - 3w^2}{3\lambda} f^4 \right] \left[\frac{w}{\lambda r} - \frac{4\lambda\pi - 3w^2}{6\lambda} f^4 \right],$$

soit

$$(41.9) \quad W_{44} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{4U-1}{4U^2} \pi U'' + \frac{\pi''}{2} + \frac{\pi U'^2}{U^2} \frac{8U^2 - 13U + 3}{8U(1-U)} \right.$$
$$- \frac{\pi' U'}{U} \frac{(2U-1)^2}{4U(1-U)} + \frac{2U-1}{U} \frac{\pi}{r} \frac{U'}{U}$$
$$\left. + \frac{1-4U}{4U} \pi \frac{w'}{w} \frac{U'}{U} - \frac{\pi' w'}{2w} + \frac{\pi'}{rU} - \frac{\pi w'}{rw} \frac{1-U}{U} + \frac{\pi}{r^2} \frac{1-U}{U} \right].$$

L'expression de W_{14} donnée par (41.5) devient, en simplifiant les termes suivants,

$$L^1_{14} + L^2_{24} = \frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{\pi}{2} f^4 + \frac{w}{\lambda r} - \frac{\pi}{2} f^4 + \frac{w^2}{2\lambda} f^4 = \frac{\pi}{2} f^4 + \frac{3}{4} \frac{\pi}{w} \frac{U'}{U},$$

$$L^1_{41} + 2 L^2_{42} = - \frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} - \frac{\pi}{6} f^4 + \frac{2w}{\lambda r} - \frac{\pi}{3} f^4 + \frac{w^2}{\lambda} f^4 = \frac{\pi}{2} f^4,$$

$$W_{14} = \partial_r \left[\frac{\pi}{2w} \frac{U'}{U} + \frac{\pi}{2} f^4 \right] + \left(\frac{2}{r} + \frac{2}{3} w f^4 \right) \left(\frac{\pi}{2} f^4 + \frac{3}{4} \frac{\pi}{w} \frac{U'}{U} \right)$$
$$+ \frac{\pi}{2} f^4 \left[\frac{1}{2} \frac{(\pi U)'}{\pi U} - \frac{w}{6} f^4 \right] - \frac{1}{2} f^4 \left[\frac{\pi'}{2} + \frac{\pi U}{U} + \frac{w}{2} \pi f^4 \right];$$

soit après un calcul simple :

$$(41.10) \quad W_{14} = \frac{\pi}{w} \left[\frac{2U-1}{4U^2} U'' + \frac{3-4U}{8U^3} U'^2 + \frac{2U-1}{4U^2} U' \left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r} \frac{U'}{U} \frac{1-U}{U} + \frac{1-U}{rU} \left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1-U}{U} \right].$$

Enfin, l'expression de W_{41} est donnée par (41.6) et donne lieu aux simplifications suivantes :

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{L}^{2}_{42} + \mathrm{L}^{4}_{44} &= \frac{2w}{\lambda r} - \frac{\pi}{2} f^{4} + \frac{w^{2}}{\lambda} f^{4} = \frac{\pi}{2} f^{4} + \frac{\pi}{2w}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}},\\
2\mathrm{L}^{2}_{12} + \mathrm{L}^{4}_{14} &= \frac{2}{r} + \frac{\pi'}{2\pi} + \frac{\mathrm{U}'}{2\mathrm{U}} + \frac{w}{2} f^{4},\\
2\mathrm{L}^{4}_{41} + \mathrm{L}^{2}_{21} &= -\frac{1}{r} + \frac{\pi'}{2\pi} + \frac{\mathrm{U}'}{2\mathrm{U}} + \frac{w}{2} f^{4},\\
2\mathrm{L}^{2}_{42} \qquad &= \frac{2}{3}\pi f^{4} + \frac{\pi}{2w}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_{41} = &-\partial_r\left[\frac{\pi}{w}\left(\frac{1-\mathrm{U}}{r\mathrm{U}} + \frac{2\mathrm{U}-1}{4\mathrm{U}^{2}}\mathrm{U}'\right)\right]\\
&-\left(\frac{\pi}{2w}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} + \frac{\pi}{6} f^{4}\right)\left(\frac{\pi'}{2\pi} + \frac{\mathrm{U}'}{2\mathrm{U}} + \frac{w}{2} f^{4} + \frac{2}{r}\right)\\
&+\left(\frac{2}{3}\pi f^{4} + \frac{\pi}{2w}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\right)\left(\frac{\pi'}{2\pi} + \frac{\mathrm{U}'}{2\mathrm{U}} + \frac{w}{2} f^{4} - \frac{1}{r}\right)\\
&-f^{4}\left(\frac{\pi'}{4} + \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} + \frac{w\pi}{4} f^{4}\right);
\end{aligned}
$$

après avoir remarqué que le facteur de $(f^{4})^{2}$ est nul, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_{41} = \frac{\pi}{w}\Bigg[&\frac{1-2\mathrm{U}}{4\mathrm{U}^{2}}\mathrm{U}'' + \frac{4\mathrm{U}-3}{8\mathrm{U}^{3}}\mathrm{U}'^{2}\\
&+\left(\frac{w'}{w} - \frac{\pi'}{\pi}\right)\left(\frac{1-\mathrm{U}}{r\mathrm{U}} + \frac{2\mathrm{U}-1}{4\mathrm{U}^{2}}\mathrm{U}'\right) + \frac{1-\mathrm{U}}{\mathrm{U}}\frac{\mathrm{U}'}{r\mathrm{U}} - \frac{1-\mathrm{U}}{r^{2}\mathrm{U}}\Bigg];
\end{aligned}
$$

en comparant avec (41.10) nous voyons que

$$
(41.11) \qquad \mathrm{W}_{41} = -\mathrm{W}_{14}.
$$

Ainsi nous avons les expressions de toutes les composantes du tenseur de Ricci en fonction de λ, π et w qui sont par hypothèse des fonctions arbitraires de r seul qu'il s'agit de déterminer.

42. Forme des équations du champ. — Il nous reste maintenant à écrire les équations du champ de la théorie, en les explicitant. Rappelons qu'elles s'écrivent (quand elles comportent le tenseur phénoménologique)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W}_{\mu\nu} = \mathrm{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathrm{T} &- q(\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu)\\
&- p\left(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\alpha^{2}\right) + \frac{q}{\alpha^{2}} f^{\rho}\Gamma_\rho\left(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\alpha^{2}\right).
\end{aligned}
$$

Ces équations sont au nombre de quatre si l'on suppose que le tenseur $T_{\mu\nu}$ présente les mêmes symétries que le tenseur de Ricci $W_{\mu\nu}$, c'est-à-dire

$$T_{33} = T_{22}\sin^2\theta, \qquad T_{41} = -T_{14}.$$

Mais ces quatre équations ne seront pas indépendantes en vertu des identités de conservation qui dans, le cas particulier de la symétrie sphérique, se ramènent à une seule

$$2\partial_r[\mathcal{G}^{11}W_{11} + \mathcal{G}^{14}W_{14}] - \mathcal{G}^{\alpha\beta}\partial_r W_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Les équations indépendantes du champ seront donc en réalité au nombre de trois. Écrivons toutefois les quatre équations trouvées :

$$\begin{aligned}
W_{11} = {} & \frac{1-2U}{4U^2}U'' - \frac{\pi''}{2\pi} + \frac{4U-3}{8U(1-U)}\frac{U'^2}{U^2} + \frac{(2U-1)^2}{4U(1-U)}\frac{U'}{U}\frac{\pi'}{\pi} \\
& + \frac{2U-1}{4U}\frac{U'}{U}\frac{w'}{w} + \frac{1}{2}\frac{\pi'}{\pi}\frac{w'}{w} + \frac{1}{rU(1-U)}\frac{U'}{U} \\
& + \frac{1+U}{rU}\frac{w'}{w} - \frac{1}{rU}\frac{\pi'}{\pi} - \frac{1-U}{r^2U} \\
= {} & T_{11} + \frac{1}{2}\lambda T - \frac{\lambda\alpha}{2}\left[p\alpha \mp \frac{q}{w}\sqrt{-\frac{\pi}{U}}\left(2\frac{1-U}{r} - \frac{U'}{2U}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{r^2}W_{22} = {} & \frac{1}{4}\frac{U''}{U^2} + \frac{2U-3}{8U(1-U)}\frac{U'^2}{U^2} + \frac{1}{4}\frac{U'}{U^2}\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w}\right) - \frac{U-2}{2rU(1-U)}\frac{U'}{U} \\
& - \frac{1}{rU}\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w}\right) - \frac{1}{r^2U} + \frac{w^2}{\pi}\frac{1}{1-U} \\
= {} & \frac{\lambda}{r^2}T_{22} + \frac{1}{2}\lambda T - \frac{\lambda\alpha}{2}\left[p\alpha \mp \frac{q}{w}\sqrt{-\frac{\pi}{U}}\left(2\frac{1-U}{r} - \frac{U'}{2U}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\pi}W_{44} = {} & \frac{4U-1}{4U^2}U'' + \frac{\pi''}{2\pi} + \frac{8U^2-13U+3}{8U(1-U)}\frac{U'^2}{U^2} - \frac{(2U-1)^2}{4U(1-U)}\frac{U'}{U}\frac{\pi'}{\pi} \\
& + \frac{1-4U}{4U}\frac{U'}{U}\frac{w'}{w} - \frac{1}{2}\frac{\pi'}{\pi}\frac{w'}{w} + \frac{2U-1}{rU}\frac{U'}{U} - \frac{1-U}{rU}\frac{w'}{w} \\
& + \frac{1}{rU}\frac{\pi'}{\pi} + \frac{1-U}{r^2U} \\
= {} & \frac{\lambda}{\pi}T_{44} - \frac{1}{2}\lambda T \\
& + \frac{\lambda\alpha}{2}(2U+1)\left[p\alpha \mp \frac{q}{w}\sqrt{-\frac{\pi}{U}}\left(2\frac{1-U}{r} - \frac{U'}{2U}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{w}{\pi}W_{14} = {} & \frac{2U-1}{4U^2}U'' + \frac{3-4U}{8U}\frac{U'^2}{U^2} + \frac{2U-1}{4U}\frac{U'}{U}\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w}\right) \\
& - \frac{1-U}{rU}\frac{U'}{U} + \frac{1-U}{rU}\left(\frac{\pi'}{\pi} - \frac{w'}{w}\right) + \frac{1-U}{r^2U} \\
= {} & \frac{w}{\pi}T_{14} - \frac{1}{2}\frac{w^2}{\pi}T \mp \frac{q\alpha}{2}\sqrt{-\pi U}\left(\frac{\pi'}{\pi} + \frac{U'}{U}\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{w^2}{\pi}\alpha\left[p\alpha \mp \frac{q}{w}\sqrt{-\frac{\pi}{U}}\left(2\frac{1-U}{r} - \frac{U'}{2U}\right)\right].
\end{aligned}$$

Voici donc un système de trois équations différentielles du second ordre dont les trois fonctions de r inconnues sont U, ϖ et π; λ ne figurant jamais par ses dérivées est calculable directement en fonction de U, ϖ et π. La résolution de ce système semble être d'une grande complexité et dépasse le cadre de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — *Ouvrages d'ensemble.*

[1] J. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
[2] A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 3e édition, Princeton University Press, 1950.
[3] M.-A. TONNELAT, *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
[4] A. LICHNEROWICZ, *Les Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, Paris, 1954.
[5] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Rome, 1955.
[6] V. HLAVATY, *Geometrý of Einstein's Unified field Theory*, P. Nordhoff, Groningen, Hollande.

II. — *Travaux sur la Théorie du champ unifié.*

[7] F. TISON, *Thèse*, Paris, 1958.
[8] M.-A. TONNELAT, *J. Phys. Rad.*, 13, 1952, p. 177; 16, 1955, p. 21.
[9] M.-A. TONNELAT, *Nuovo Cim.*, 3, 1956, p. 902.
[10] PHAM TAN HOANG, *Thèse*, Paris, 1957.
[11] J. CALLAWAY, *Phys. Rev.*, 92, 1953, p. 1567.
[12] H. TREDER, *Ann. Physik*, 19, 1956, p. 369.
[13] E. CLAUSER, *Rendi Acc. Lincei*, 21, 1956, p. 408; *Nuovo Cim.*, 7, 1958, p. 764.
[14] A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 15, 1957, p. 173.
[15] W. B. BONNOR, *Proc. Roy. Soc.*, A, 226, 1954, p. 366.
[16] M. LENOIR, *C. R. Acad. Sc.*, 248, 1959, p. 1944 et 2074.
[17] S. MAVRIDÈS, *C. R. Acad. Sc.*, 244, 1957, p. 2482.
[18] D. W. SCIAMA, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 54, 1958, p. 72.
[19] É. CARTAN, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 40, 1923.
[20] V. HLAVATY et SAENZ, *J. Rat. Mech. and Anal.*, 2, 1953, p. 523.
[21] S. KICHENASSAMY, *Thèse*, Paris, 1958.
[22] S. KICHENASSAMY, *C. R. Acad. Sc.*, 244, 1957, p. 168 et 2007.
[23] L. BOUCHE, *C. R. Acad. Sc.*, 247, 1958, p. 2302.
[24] L. BOUCHE, *C. R. Acad. Sc.*, 250, 1960, p. 3784.
[25] L. BOUCHE, *C. R. Acad. Sc.*, 249, 1959, p. 1321.
[26] A. PAPAPETROU, *Proc. Roy. Ir. Acad.*, 52, A, n° 6, 1948, p. 69.

TABLE DES MATIÈRES.