Annales de l'I. H. P.

André Régnier

Introduction à l'étude dynamique des processus de diffusion

Annales de l'I. H. P., tome 16, nº 2 (1959), p. 47-110
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_2_47_0>

Introduction à l'étude dynamique des processus de diffusion

par

André RÉGNIER.

SOMMAIRE.

Considérant des mouvemements aléatoires d'un point matériel qui généralisent le mouvement brownien, nous nous sommes proposé de les étudier au point de vue de l'inertie. Plus précisément, appelant processus de diffusion ceux dont la probabilité de passage vérifie les conditions classiques de Feller, renforcées par des conditions de convergence bornée, nous avons supposé que, l'inertie étant une propriété locale de tout déplacement de matière, on pouvait associer à tout transfert aléatoire de masse des champs qui en expriment les propriétés inertiques moyennes.

Nous avons donc entrepris de déterminer, pour les processus de diffusion, des champs de vecteurs qui aient le sens de l'impulsion, du moment cinétique et de leurs dérivées par rapport au temps. Mais les trajectoires de ces processus n'ont pas de tangente, la notion de vitesse n'a pas de sens pour un mouvement individuel. Nous avons alors pris pour principe de considérer uniquement des ensembles de mouvements, définis de façon naturelle et suffisamment riches pour que les notions classiques de résultante cinétique, de moment cinétique résultant et de leurs dérivées, aient un sens mathématique acceptable. Comme ensemble de mouvements, nous avons choisi ceux qui passent, en un instant donné, dans une partie donnée de l'espace. Pour que notre idée initiale soit réalisée, il fallait que la grandeur des valeurs mécaniques, ainsi attachées en un instant donné à une partie quelconque de l'espace, ne dépende que de ce qui se passe dans un voisinage arbitraire de celle-ci. C'est bien ce qui arrive dans les processus que nous considérons, ce fait étant en relation avec la continuité des trajectoires.

Toute la cinétique dépend de la comparaison des positions du mobile en deux temps successifs, donc ici de la probabilité de passage simple. Il n'en est plus de même pour la dynamique, et au point de vue de celle-ci, le cas markovien paraît donc bien particulier. Il le paraît encore plus si l'on songe à l'énoncé même du principe d'inertie. Nous montrons qu'il existe des processus de diffusion non markoviens, comme les processus marginaux de certains processus markoviens de diffusion. Nous n'excluons pas la possibilité de coefficients de diffusion identiquement nuls. Dans le cas non markovien, cela fournit une classe très vaste de processus, dégénérés ou non.

Comme application du cas markovien, nous donnons la diffusion brownienne, en présence d'un champ de forces, lorsque la viscosité équilibre ce dernier.

Comme application du cas non markovien, nous donnons l'équation de Schrödinger. En interprétant la phase de la fonction d'onde d'une certaine manière, nous obtenons, comme conséquence de nos résultats généraux, des indications sur la structure de l'équation. La relation de Heisenberg entre le temps et l'énergie apparaît comme un cas particulier d'un phénomène qui a lieu dans des processus de diffusion très généraux. Dans notre introduction, nous discutons la question de l'emploi des fonctions aléatoires en physique quantique.

INTRODUCTION.

1. Place de la Mécanique aléatoire dans l'ensemble de la Mécanique. — La Dynamique est l'étude théorique des effets d'inertie. Elle fut fondée par Galilée et Newton. Au début de ce siècle, elle fut profondément modifiée, lorsque les travaux de A. Einstein introduisirent l'idée que l'inertie était le propre, non seulement de la masse, mais de l'énergie en général. A. Einstein découvrit aussi que les effets inertiques du rayonnement lumineux étaient localisés et non répandus avec lui. La relativité généralisée, due encore à A. Einstein, nous enseigna ensuite que, en présence de masse, ou d'énergie, la formulation du principe de Galilée devait être modifiée, le transport parallèle de l'impulsion ne dépendant plus alors d'une connexion euclidienne.

Au nombre des progrès de la Dynamique, il faut compter aussi l'apparition de la Mécanique quantique. Celle-ci s'occupe d'échanges d'impulsion d'une forme nouvelle, encore mal définie, qui se produisent sur des parcours très petits, et dans des temps très courts. Cette nouvelle dynamique prit, sans qu'on l'eut voulu, un aspect essentiellement probabiliste. Néanmoins elle resta à l'écart de la Mécanique aléatoire, autre branche nouvelle de la Dynamique qui, elle, n'étudie pas une nouvelle forme de l'inertie mais l'inertie, en général, d'un point de vue nouveau, celui des fonctions aléatoires.

Sont du domaine de la Mécanique aléatoire les systèmes mécaniques dont les paramètres présentent un caractère d'instabilité tel que la description déterministe de leur évolution manque de signification concrète.

C'est le cas lorsque les perturbations accidentelles auxquelles le système est soumis, par variation tant de sa constitution propre que de son contexte physique, ont un effet du même ordre de grandeur que les changements du même système, s'il était stable et isolé.

C'est le cas lorsque la complication du système est telle que ceux de ses paramètres qui sont significatifs du point de vue concret sont extrêmement fluctuants.

C'est aussi le cas lorsqu'une ou plusieurs des parties du système, ou encore le système lui-même, donnent aux actions qui leur sont appliquées une réponse d'un ordre de grandeur bien supérieur, les notions différentielles de la dynamique newtonienne perdant ainsi leur sens.

En général, c'est le cas lorsque cesse d'être négligeable ce qui devrait le rester pour que le déterminisme de la Mécanique classique ait un sens concret. Alors, la Mécanique aléatoire substitue à ce schéma déterministe le processus stochastique, où le hasard intervient à chaque instant, rendant toute donnée actuelle ou passée impuissante à fixer l'avenir exactement.

2. **Mécanique aléatoire et déterminisme.** — En passant du point de vue de la Mécanique classique au point de vue de la Mécanique aléatoire, on se jette ainsi d'un extrême dans l'autre. Ce n'est pas parce qu'on change de métaphysique, mais pour des raisons de nécessaire simplicité.

En effet, soit, par exemple, un point matériel M en interaction avec $(n-1)$ autres points. Selon la Mécanique classique, il faut $6n$ paramètres pour fixer l'état du système et la trajectoire de M. Il faut donc au moins les positions de M en $2n$ temps successifs pour déterminer son évolution ultérieure. Si n est très grand, sans que l'influence de chaque point cesse d'être appréciable, on aura tout intérêt à représenter l'évolution de M comme une fonction aléatoire non dégénérée, au sens de M. Paul Lévy [1]. De façon analogue, Boussinesq disait que si l'on a une courbe en dents de scie, il y a peu de chances de la comprendre simplement en la représentant par une fonction à dérivée continue.

Traiter l'évolution d'un système selon la Mécanique aléatoire ne suppose pas qu'on renonce pour toujours à la traiter suivant un schéma déterministe ; cela veut dire qu'on préfère à ce schéma une fonction aléatoire non dégénérée. Cette préférence correspond à des propriétés réelles du système étudié, propriétés que nous avons indiquées plus haut.

Faire une théorie déterministe, dans le sens le plus large, d'un système physique, revient à représenter son évolution par une fonction aléatoire dégénérée. Pour que ce soit possible, il est nécessaire que, par une sorte d'effacement d'un grand nombre de détails devant des traits généraux, la structure réelle, *a priori* infiniment complexe, de ce système et de ce qui l'entoure, apparaisse sous forme de termes simples, impliqués dans des rapports simples. Sinon le hasard est l'idée simplificatrice.

L'enchaînement réel des phénomènes se comporte tantôt comme déterminisme, tantôt comme hasard. Il n'est jamais tout à fait l'un ni tout à fait l'autre, car la réalité n'est jamais identique à une abstraction. Ces deux aspects s'engendrent d'ailleurs mutuellement : la loi des grands nombres crée des constantes et un déterminisme trop aigu engendre le hasard. Un déterminisme apparaît lorsque l'inépuisable complexité de la nature s'organise en aspects décisifs et en aspects négligeables. Le hasard reparaît chaque fois que du négligeable cesse de l'être ; les trois aspects du hasard, selon Henri Poincaré, sont significatifs à cet égard. Aussi, nul déterminisme n'est éternel, car il n'est si petite force qui ne puisse avoir de grands effets lorsqu'elle intervient dans des situations tendues, dans des équilibres instables. Et, selon nous, hasard et déterminisme sont présents simultanément en chaque instant, dans tous les objets de la nature comme le sont la quantité et la qualité. Peut-être même, comme ces dernières, se supposent-ils l'un l'autre.

Nous n'étudions jamais qu'une partie de l'univers et, si même nous considérions l'univers entier, nous ne le ferions que selon un schéma très simplifié. Donc, nous n'avons jamais à faire qu'à des processus marginaux et tout le hasard que nous constatons peut être compris, comme dans l'exemple ci-dessus, du point matériel en interaction avec un grand nombre d'autres. Il n'y a pas contradiction entre cette notion et le principe de raison suffisante. Et en considérant, dans le présent travail, la Mécanique quantique comme une mécanique aléatoire particulière, nous n'apportons pas un argument à « l'indéterminisme ».

3. Point de vue adopté dans le présent travail. — La Mécanique statistique suppose un schéma de mécanique rationnelle, sur les constantes d'intégration duquel elle distribue des probabililtés. La Mécanique aléatoire, au contraire, applique les principes de la mécanique rationnelle à des grandeurs aléatoires, spécialement à des moyennes conditionnelles. Le présent travail est destiné à préparer l'extension de cette méthode aux processus de diffusion dans l'espace de configuration. Nous ne traitons que la question de la définition des grandeurs dynamiques, et dans le seul cas du point matériel.

A priori, l'énoncé du principe d'inertie rend difficile à concevoir une mécanique aléatoire markovienne en configuration. Avec la définition que nous prenons des processus de diffusion, il en existe de non markoviens. Par ailleurs, le cas que nous appelons dégénéré, où les coefficients de diffusion sont identiquement nuls ne comporte, dans le cadre des processus de Markov, que des fonctions aléatoires dégénérées au sens de M. Paul Lévy. Par contre, dans le cas non markovien, ce n'est plus vrai : il suffit de considérer la position d'un électron en interaction avec un champ électromagnétique, du point de vue de l'électrodynamisme classique, et de prendre des données initiales aléatoires. Nous considérons, malgré l'objection de principe mentionnée plus haut des processus de Markov, dans un cas que nous appelons dynamiquement stationnaire, où les échanges d'impulsion sont nuls en moyenne.

4. **Mécanique aléatoire et Mécanique quantique.** — M. Fenyes [2] a émis l'hypothèse d'un processus de diffusion sous-jacent à l'équation de Schrödinger. Ici, nous reprenons cette hypothèse en la généralisant et nous montrons que la constante de diffusion peut prendre n'importe quelle valeur positive ou nulle.

Nous montrons également que l'équation de Schrödinger, ainsi comprise, exprime des relations dynamiques compréhensibles. En particulier, nous sommes en mesure de justifier dans le terme dit « potentiel quantique », son existence, sa dépendance à l'égard de la probabilité de présence et deux de ses propriétés : la force qu'il donne est de moyenne nulle, le produit de chaque composante de cette force par la densité de probabilité de présence est une divergence.

Ceci est obtenu sans autre hypothèse que celle de la diffusion, qui revient à interpréter d'une certaine façon la phase de la fonction d'onde. Nous n'abordons ici aucune des questions relatives aux opérateurs d'impulsion, de moment cinétique, d'énergie, non plus que la question de la signification des états stationnaires ou de l'uniformité de la fonction d'onde. En effet, ces questions changent beaucoup d'aspect, suivant que la constante de diffusion est nulle ou non. Or, le point de vue de la diffusion conduit à fixer de façon assez précise les conditions aux limites à imposer à la fonction d'onde, et dans cette fixation la valeur assignée à la constante de diffusion joue un rôle de premier plan. La valeur de la constante doit donc pouvoir être tranchée par l'expérience et ce résultat devrait être connu avant qu'on aborde les problèmes ci-dessus.

5. **L'argument contre l'emploi des fonctions aléatoires en Mécanique quantique.** [3]. — La possibilité de préciser les conditions aux limites sur la fonction d'onde, conditions connues très vaguement aujourd'hui, crée une situation curieuse relativement aux idées, généralement adoptées, de MM. Bohr, Pauli et Heisenberg.

L'interprétation que ceux-ci ont donnée de l'équation de Shrödinger attribue un rôle fondamental au fait que toute observation perturbe le système observé. De ce fait, il résulte que, si une probabilité *a priori*, prévue par la théorie, peut être confrontée directement avec l'expérience, il n'en est plus de même pour une probabilité de passage : le premier pointage perturbe le système et le second se trouve ainsi être relatif à une autre statistique que le premier. En conséquence, la loi temporelle est inatteignable par l'expérience, et certains en ont conclu que l'emploi des fonctions aléatoires doit être radicalement exclu de la Mécanique quantique.

Ainsi donc, si l'on adopte ce point de vue, l'équation de Schrödinger ne pouvant être alors considérée comme relative à une fonction aléatoire, la possibilité de préciser les conditions aux limites sur la fonction d'onde à partir des idées de la diffusion doit être *a priori* tenue pour un leurre.

Il nous faut donc discuter ce point de vue. Il comporte deux thèses de portée très différente. La première est que toute observation perturbe le système observé. Elle énonce un fait concret que personne ne conteste. La seconde est qu'il ne faut pas faire figurer dans les théories ce qui n'est pas directement accessible à l'expérience. Il s'agit là d'une position philosophique. Examinons ces deux thèses tour à tour.

6. **Question des observations qui perturbent le système observé.** — On peut postuler, pour des raisons philosophiques, que demain on

observera sans perturber. Mais cela répondrait mal à un argument tiré de l'expérience. Examinons plutôt cet argument lui-même.

L'observation perturbe parce que l'interaction entre l'appareil de mesure et le système observé est du même ordre de grandeur que les phénomènes qu'on entend enregistrer. Or, la raison pour laquelle l'ordre de grandeur de cette interaction est ce qu'il est ne réside pas dans le fait que l'appareil de mesure est un appareil de mesure, mais dans le fait qu'il est un système physique. S'il n'avait pas été construit par l'Homme, la situation eut été la même ; elle se résume ainsi : à l'échelle quantique, les interactions entre systèmes sont du même ordre de grandeur que les systèmes eux-mêmes. Il n'est pas utile de faire intervenir la notion d'observateur pour formuler un tel fait physique, on peut l'énoncer en parlant seulement de la Nature et, ainsi énoncé, il est favorable au point de vue des fonctions aléatoires. (*cf* § 1).

7. **Question de la vérification des hypothèses par l'expérience.** — La deuxième thèse, essentiellement philosophique, joue un rôle fondamental dans les idées de MM. Bohr, Pauli, Heisenberg. Il semble bien qu'elle soit nécessaire pour rendre logiquement cohérente leur interprétation de la Mécanique quantique. Elle est tenue pour vérité d'évidence et acceptée sans critique par de nombreux manuels, articles et ouvrages de vulgarisation. Donc, dans l'état actuel des choses, il nous faut, si nous voulons justifier l'emploi des fonctions aléatoires en Mécanique quantique soutenir une philosophie opposée, à savoir qu'on peut faire des théories physiques vraies avec des notions qui ne sont pas accessibles à l'expérience.

Si nous prenons, par exemple, la notion classique d'inertie, elle repose sur le principe de Galilée, qui lui sert de définition. Ce principe affirme qu'un point matériel, non soumis à des forces, conserve indéfiniment sa vitesse. Jamais une telle expérience n'a été et ne sera réalisée ; les notions qu'elle implique n'ont pas de sens concret. Il en est de même des autres principes de la Mécanique ; leur signification est étrangère à leur vérification expérimentale directe. A notre sens, leur valeur comme analyse des phénomènes mécaniques s'exprime par la concordance du système rationnel fondé sur eux avec l'expérience : ce qui est logiquement nécessaire du point de vue de la Mécanique rationnelle est aussi ce qui se produit dans la réalité, ou tout au moins dans un aspect de la réalité qui est le domaine d'application de cette mécanique. Voilà ce qui, à nos yeux, prouve le principe de Galilée.

Par exemple, il est nécessaire, pour obtenir un mouvement qui satisfasse aux lois de Képler, que la force d'attraction soit en $\frac{1}{r^2}$. Cette loi une fois admise, des mouvements célestes, beaucoup plus compliqués que ceux décrits par Képler, se trouvent expliqués. La vérité des principes de la Mécanique newtonienne est garantie par ce passage et des milliers d'autres qui lui sont analogues. En particulier par celui qui, en faisant l'analyse du frottement, déduit de ces principes non seulement la nécessité des phénomèmes qui les vérifient approximativement. mais encore la nécessité du caractère seulement approximatif d'une telle vérification : une théorie est d'autant plus vraie qu'elle indique mieux ses propres limites. D'une façon générale, on sait que les principes d'une théorie expriment une analyse correcte d'une structure physique lorsque, dans les schémas des phénomènes qu'on fait à partir de ces principes, la nécessité logique impose un ordre qui suit l'ordre réel. Et une analyse est plus profonde si les conséquences vraies qu'on peut en tirer sont plus nombreuses, plus variées et plus lointaines.

La thèse que nous combattons ici participe d'un courant de pensée qui n'est pas neuf et qui arrive, en affirmant sommairement le primat de l'expérimentation, à limiter la portée de l'expérience. Cette idée provient de ce qu'on comprend l'objectivité non comme le but de la pensée scientifique, mais comme sa condition. Alors on souhaite une règle pour éviter toute erreur, bien qu'en pratique il nous suffise de savoir reconnaître nos erreurs pour pouvoir construire la vérité. Les théories se jugent sur leurs conséquences et non sur la manière dont on les a faites. Képler disait, à ceux qui attaquaient le système de Copernic : « Les menteurs ont besoin d'avoir bonne mémoire ; il en serait de même des hypothèses fausses qui auraient conduit par hasard à des conclusions justes. Au cours des démonstrations, au fur et à mesure qu'elles seront appliquées à des cas de plus en plus variés, elles ne garderont pas cette habitude de fournir des conclusions vraies, elles finiront bien par se trahir. » Et simultanément, Képler plaidait pour une astronomie conforme à la raison et à l'ensemble de la physique, au lieu de se perdre dans les épicycles de Ptolémée, qui sauvaient seulement l'apparence des mouvements célestes.

Contre Képler, les « incertitudes » de Heisenberg n'ont par apporté d'argument nouveau, car les ptoléméistes, objectaient déjà qu'on ne pouvait aller voir sur place comment étaient faites réellement les sphères célestes.

Si l'on admet notre point de vue, on ne se laissera pas détourner de considérer une fonction aléatoire par le fait que sa loi temporelle est inobservable. Toute la question sera de savoir si l'on obtient ainsi des résultats, plus ou moins lointains, vérifiés par l'expérience, par exemple des probabilités d'absorption.

8. **L'existence des trajectoires en Mécanique quantique.** — Il convient de préciser un point concernant la recherche d'une fonction aléatoire sous-jacente à l'équation de Schrödinger. Dans une fonction aléatoire, les déterminations individuelles sont importantes surtout par leur existence et certaines propriétés analytiques très générales : mesurabilité, continuité, etc. Physiquement, elles ne doivent pas être prises trop au sérieux ; ce sont les probabilités qu'elles supportent qui comptent.

Prenons, par exemple, un processus de Markov fortement continu. Soit deux réalisations qui ont un point commun au temps t. Considérons les deux nouvelles trajectoires obtenues en intervertissant les deux mobiles au temps t, de façon que chacun emprunte, à partir de ce temps, la trajectoire de l'autre. Nous obtenons ainsi deux nouvelles réalisations de la fonction aléatoire et la probabilité de les observer toutes les deux est égale à celle d'observer les deux réalisations originales, si elles sont supposées indépendantes en probabilité. On peut répéter ce déraillement à toutes les intersections possibles et ceci affaiblit beaucoup la signification physique des déterminations individuelles. Ainsi donc, voir une fonction aléatoire sous l'équation de Schrödinger ne signifie pas qu'on prétend y trouver des trajectoires physiquement significatives, l'espèce d' " indiscernabilité " indiquée plus haut s'y oppose.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS ALÉATOIRES FORTEMENT CONTINUES.

1. Fonctions aléatoires vectorielles [4]. — Soit un ensemble abstrait $\mathcal{W} \ni w$ muni d'un corps de Borel $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{W}$. Sur ce corps, soit une mesure positive, complètement additive et telle que $P(\mathcal{W}) = 1$.

Soit, par ailleurs, un ensemble $\Omega \ni \omega$ de fonctions $m_\omega(t)$ définies sur un intervalle $I \ni t$ de la droite réelle et dont les valeurs sont dans l'espace euclidien à n dimensions R_n, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons $x_{i\omega}(t)$ mesurable en t pour chaque ω et chaque i.

Nous appellerons fonction aléatoire vectorielle sur I et nous noterons $M(t)$, toute application $\omega(w)$ de $\mathcal{W}$ dans Ω telle que pour chaque t la fonction $m_{\omega(w)}(t)$ est $\mathcal{B}$ mesurable. Pour un w donné $m_{\omega(w)}(t)$ comme fonction de t est dite une réalisation de $M(t)$.

Les coordonnées d'une fonction aléatoire vectorielle définissent autant de fonctions aléatoires à une dimension qu'on notera

$$X_1(t), \quad X_2(t), \quad \ldots, \quad X_n(t).$$

De même, $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ sont les coordonnées d'une nouvelle fonction aléatoire vectorielle à trois dimensions.

La loi temporelle de $M(t)$ est la famille des lois de probabilité des variables aléatoires $X_i(t_j)$ pour $i = 1, 2, n$, et les t_j formant un ensemble fini quelconque de valeurs de t. Elle exprime donc toutes les corrélations entre les composantes de $M(t)$ pour chaque t et entre les composantes relatives à des t différents.

Nous supposerons toujours que l'ensemble $\mathcal{W}_0$ des w tels que la réalisation $m_{\omega(w)}(t)$ est une fonction continue vérifie $P(\mathcal{W}_0) = 1$. $M(t)$ est alors dite fortement continue. Et la donnée de sa loi temporelle en fournit une détermination suffisante.

2. **Processus stochastiques.** — Les fonctions aléatoires dont nous nous occupons ne sont pas les plus générales, elles correspondent à une évolution aléatoire dans le temps t, autrement dit à un processus stochastique. Un tel processus peut être considéré d'un autre point de vue : si t_0 et t sont deux instants successifs, divisons l'intervalle $[t_0, t]$ par des instants intermédiaires $t_i < t_{i+1}$, $t_n \doteq t$; considérons $M(t)$ comme la somme de ses accroissements

$$M(t) = M(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} [M(t_{i+1}) - M(t_i)].$$

Chacun de ces accroissements est aléatoire, il dépend de l'intervalle (t_i, t_{i+1}) des valeurs $M(s)$ pour $s \leq t_i$, et aussi d'un élément aléatoire Z indépendant de ces $M(s)$ (et qui de façon très générale pourra être ramené à une variable aléatoire numérique).

On peut essayer de se donner la fonction aléatoire sous forme différentielle. C'est-à-dire remplacer chaque accroissement $M(t_{i+1}) - M(t_i)$ par une valeur approchée δM mieux connue et ne différant de l'accroissement vrai que par un reste $R(t_i, t_{i+1} - t_i)$ tel que, lorsque la division $\{t_i\}$ devient de plus en plus fine, la somme des restes $\sum_{i=0}^{n-1} R(t_i, t_{i+1} - t_i)$ tend vers zéro stochastiquement.

La fonction aléatoire sera alors définie par une différentielle

$$\delta M = \mathcal{L}[M(s), Z, t, \delta t] \qquad (s \leq t), \tag{1}$$

où $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle qui devra être soumise à des restrictions importantes pour que la méthode réussisse. Ce point de vue différentiel, qui est celui de M. Paul Lévy [5] a le mérite de mettre en évidence, par la présence dans $\mathcal{L}$ de la variable Z, le rôle permanent du hasard dans l'évolution de $M(t)$.

3. **Les processus de Markov** [6]. — Parmi les fonctions aléatoires, celles qui dépendent d'un processus de Markov sont caractérisées par le fait que, dans la fonctionnelle $\mathcal{L}$ figurant dans (1), $M(t)$ inter-

vient seule et non les $M(s)$ pour $s < t$. De façon équivalente on peut dire que le vecteur aléatoire $M(t')$ $(t' > t)$ considéré conditionnellement lorsque $M(t) = m$ est indépendant de l'ensemble des vecteurs $M(s)$ $(s < t)$. En faisant intervenir la probabilité de passage

$$(2) \qquad (t < t'); \ \Pr\{M(t') \in A / M(t) = m\} = P(m, t, t', A),$$

on a

$$(3) \quad (t < t' < t''); \ \Pr\{M(t'') \in A / M(t') = m', M(t) = m\} = P(m', t', t'', A),$$

d'où l'on déduit l'équation de Chapman-Kolmogoroff, caractéristique des processus de Markov

$$(4) \qquad (t < t' < t''); \ P(m, t, t'', A) = \int P(m, t, t', dm')\, P(m', t', t'', A).$$

Si le processus débute au temps o, on peut se donner arbitrairement une loi *a priori* de $M(0)$. Celle-ci et la probabilité de passage déterminent alors complètement la loi temporelle du processus de Markov.

L'hypothèse de la continuité forte de $M(t)$ impose des conditions très précises à la probabilité de passage, conditions dont nous parlerons au chapitre suivant.

Du point de vue différentiel un processus de Markov fortement continu est caractérisé par une condition de la forme

$$(5) \qquad \delta M = u[M(t), t]\,\delta t + K[M(t), t]\,Z\sqrt{\delta t},$$

où $u(m, t)$ est une fonction certaine de m et de t, où Z est un vecteur aléatoire laplacien réduit à n dimensions indépendant des $M(s)$ $(s \leq t)$ et où $K(m, t)$ est une matrice certaine, symétrique et définie positive, dépendant de m et de t.

D'après (5), l'accroissement de $M(t)$ est la somme d'un accroissement moyen de l'ordre de δt et d'un vecteur laplacien de l'ordre de $\sqrt{\delta t}$.

Les réalisations des fonctions aléatoires $M(t)$ résultant d'un tel processus sont continues, sauf des exceptions dont la probabilité totale est nulle. Mais elles ne sont pas rectifiables, en aucune manière on ne peut attribuer une vitesse au point $M(t)$.

Enfin, la dispersion de

$$\frac{1}{\tau}[M(t+\tau) - M(t)]$$

est de l'ordre de $\tau^{-\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE II.

LES PROCESSUS GÉNÉRAUX DE DIFFUSION ET LEURS PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES.

1. **La probabilité de passage des processus non markoviens.** — Si la probabilité de passage définie au chapitre I, formule (2), et la probabilité *a priori* définissent à elles seules la loi temporelle d'un processus de Markov, il n'en est pas de même pour les autres fonctions aléatoires.

Néanmoins, la considération d'une fonction aléatoire du seul point de la loi *a priori* et de la probabilité de passage présente un intérêt certain puisqu'on tient ainsi toutes les données relatives à la corrélation de $M(t)$ et $M(t')$ pour tout t et tout $t' > t$. Une telle étude sera d'autant plus fructueuse que la fonction aléatoire sera moins tributaire de son passé, sans pour cela l'oublier instantanément, comme dans le cas de Markov.

2. **Définition des processus généraux de diffusion** [7]. — $M(t)$ étant une fonction aléatoire vectorielle au sens du paragraphe 1 du chapitre I définie pour $0 \leqq t < \infty$, E étant un ensemble ouvert et borné de l'espace R_n nous supposerons que pour chaque réalisation $m_\omega(t)$, il y a un instant T_ω tel que $m_\omega(s) \in E$ si et seulement si $s < T_\omega$. On peut avoir $T_\omega = \infty$ éventuellement. T_ω est le plus petit t pour lequel $M(s)$ tend de l'intérieur de E vers sa frontière lorsque $s \to t$.

La probabilité *a priori* $P(t, A)$ sera une mesure complètement additive définie sur les boréliens contenus dans E et vérifiant $0 \leqq P(t, A) \leqq 1$.

La probabilité de passage $P(m, t, t', A)$ sera définie pour tout $m \in E$, $0 \leqq t < t'$, et A borélien contenu dans E. Elle sera borélienne comme fonction de (m, t, t'), complètement additive comme fonction de A et vérifiera

$$0 \leqq P(m, t, t', A) \leqq 1.$$

La possibilité d'avoir

$$P(t, E) < 1, \qquad P(m, t, t', E) < 1,$$

signifie que certaines déterminations de $M(t)$ sont absorbées à la frontière de E. Les hypothèses faites sur $P(t, A)$ et $P(m, t, t', A)$ donnant un sens à l'intégrale ci-dessous, on a

$$(6) \qquad P(t', A) = \int_E P(t, dm)\, P(m, t, t', A) \qquad (0 \leq t < t').$$

Les hypothèses qui caractérisent les processus de diffusion sont les suivantes :

Pour $0 \leq t < t'$ et tout $\delta > 0$, on a

$$(7) \qquad \lim_{t' \searrow t} \frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm')\right] = 0,$$

$$(8) \qquad \lim_{t' \searrow t} \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (m'-m)\, P(m, t, t', dm') = u(m, t),$$

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \lim_{t' \searrow t} \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)\, P(m, t, t', dm') = k_{ij}(m, t) \\ \qquad\qquad\qquad (i, j = 1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

De plus, nous supposerons ces convergences localement bornées, ce qui veut dire que pour t et δ fixés, m_0 donné quelconque dans E, il existe un voisinage V de m_0 et un nombre positif A, tels que, pour tout $t' > t$ et tout $m \in V$, on ait

$$\frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm')\right] \leq A,$$

$$\left| \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (m'-m)\, P(m, t, t', dm') \right| \leq A,$$

$$\left| \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j)\, P(m, t, t', dm') \right| \leq A$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces hypothèses de convergence localement bornée porteront respectivement les références (7 *bis*), (8 *bis*) et (9 *bis*).

Par le théorème de Borel-Lebesgue, il en résulte que la convergence est bornée sur tout ensemble fermé contenu dans E et, par conséquent, les u_i et les k_{ij} sont bornés sur un tel ensemble.

A la place de (7) on rencontre, la plupart du temps, la condition suivante :

$$(10) \qquad \lim_{t' \searrow t} \int_{|m'-m| \geq \delta} \frac{P(m, t, t', dm')}{t'-t} = 0,$$

cette dernière est conséquence de (7); on a, en effet,

$$\int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm') + \int_{|m'-m|\geqq\delta} P(m, t, t', dm') = \int_{E} P(m, t, t', dm') \leqq 1.$$

Si c'est l'égalité qui a lieu, (10) implique (7), mais dans le cas général, ce n'est pas forcément vrai *a priori*.

3. **Les processus marginaux des processus de diffusion.** — Soit $M(t)$ une fonction aléatoire du type précédent à $n > 3$ dimensions. Soit $R(t)$ la fonction aléatoire à trois dimensions définie par les trois premières coordonnées $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ de $M(t)$, $R(t)$ est une « fonction aléatoire marginale » de $M(t)$, ou encore un « processus marginal » de $M(t)$. Si $M(t)$ est de Markov il n'en sera, en général, pas de même de $R(t)$. Nous allons voir qu'avec une petite restriction, tout processus marginal d'un processus de diffusion est lui-même un processus de diffusion. En partant des processus de Markov de diffusion, nous obtenons ainsi une large classe de processus de diffusion qui ne sont pas de Markov mais qui conserveront une partie des propriétés des fonctions aléatoires markoviennes.

Considérons R_n comme le produit cartésien de deux variétés R_3 et R'_{n-3} orthogonales, respectivement à 3 et $n-3$ dimensions, r et s étant les projections correspondantes de m.

Pour le processus $R(t)$, la projection de E sur R_3 joue le même rôle que E pour $M(t)$, nous supposerons donc qu'elle est ouverte.

Nous adopterons l'écriture

$$P(m, t, t', dm') = P(r, s, t, t', dr', ds').$$

Pour $r \in R_3$, $\bar{r}$ désignera l'ensemble des $m \in E$ qui se projettent sur R_3 en r. De même, pour un ensemble A contenu dans R_3, $\overline{A}$ sera l'ensemble des $m \in E$ dont la projection sur R_3 est dans A.

Les quantités surlignées seront relatives au processus marginal $R(t)$.

La probabilité *a priori* de $R(t)$ sera

$$\overline{P}(t, A) = P(t, \overline{A}).$$

Appelons $\underline{P}(t, r, ds)$ la loi de probabilité de $S(t)$ conditionnellement lorsque $R(t) = \underline{r}$, on a pour la probabilité de passage de $R(t)$

$$\overline{P}(r, t, t', A) = \int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds)\, P(r, s, t, t', \overline{A}). \tag{12}$$

Nous supposerons que les conditions de convergence localement bornée (7 *bis*), (8 *bis*), (9 *bis*) sont renforcées de la manière suivante :

Tout r de la projection de E sur R_3 possède un voisinage V tel que la convergence est bornée sur $\overline{V}$.

En particulier, si les convergences sont bornées sur E cette condition est réalisée.

On a alors

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{|r'-r|<\delta} P(r, t, t', dr')\right] \\ &= \frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) \int_{|r'-r|<\delta} P(r, s, t, t', dr', ds')\right]. \end{aligned}$$

Remarquant que $|m'-m| < \delta$ implique $|r'-r| < \delta$, l'intégrale qui figure du second membre s'écrit

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) \int_{|m'-m|<\delta} P(r, s, t, t', dr', ds') \\ &+ \int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) \int_{\substack{|r'-r|<\delta \\ |m'-m|\geqq\delta}} P(r, s, t, t', dr', ds'). \end{aligned}$$

Compte tenu de (7) et de la nouvelle hypothèse de convergence bornée, le quotient du second terme par $t'-t$ tend vers zéro, cette convergence étant bornée dans un voisinage de r. Il nous reste à considérer :

$$\frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) \int_{|m'-m|<\delta} P(r, s, t, t', dr', ds')\right]$$

qui s'écrit

$$\int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) \left\{ \frac{1}{t'-t}\left[1 - \int_{|m'-m|<\delta} P(r, s, t, t', dr', ds')\right]\right\}$$

puisqu'on a

$$\int_{\overline{r}} \underline{P}(t, r, ds) = 1.$$

Toujours comme conséquence de (7) et de la nouvelle hypothèse de convergence bornée, nous voyons que cette quantité tend vers zéro, la convergence étant bornée dans un voisinage de r. Donc le processus $R(t)$ vérifie bien les conditions (7) et (7 *bis*) des processus de diffusion.

Considérons maintenant

$$\frac{1}{t'-t}\int_{|r'-r|<\delta}(x'_i-x_i)\,\overline{P}(r, t, t', dr') \qquad (i=1, 2, 3).$$

Cela peut s'écrire, en vertu des remarques déjà faites,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t'-t}\int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\int_{|r'-r|<\delta}(x'_i-x_i)\,P(r, s, t, t', dr', ds')\\
&=\int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\left[\frac{1}{t'-t}\int_{|m'-m|<\delta}(x'_i-x_i)\,P(r, s, t, t', dr', ds')\right]\\
&\quad+\frac{1}{t'-t}\int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\int_{\substack{|r'-r|<\delta\\ |m'-m|\geqq\delta}}(x'_i-x_i)\,P(r, s, t, t', dr', ds').
\end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre est majoré par

$$\frac{\delta}{t'-t}\int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\int_{|m'-m|\geqq\delta}P(r, s, t, t', dr', ds');$$

or, cette quantité tend vers zéro, la convergence étant bornée dans un voisinage de r. De la même manière, le premier terme du second membre tend vers

$$(13)\qquad \int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\,u_i(t, r, s)=\overline{u}_i(t, r) \qquad (i=1, 2, 3),$$

la convergence étant bornée dans un voisinage de r.

Donc, le processus $R(t)$ vérifie bien les conditions (8) et (8 *bis*) des processus de diffusion, le vecteur $\overline{u}$ étant défini par (13).

De la même manière, on aurait

$$(14)\qquad \int_{\overline{r}}\underline{P}(t, r, ds)\,k_{ij}(t, r, s)=\overline{k}_{ij}(t, r) \qquad (i=1, 2, 3)$$

comme coefficients de diffusion, les conditions (9) et (9 *bis*) étant vérifiées.

Finalement, le processus $R(t)$ est bien un processus de diffusion, ses coefficients $\overline{u}_i$ et $\overline{k}_{ij}$ étant donnés par (13) et (14). Ces formules nous permettent de mettre en évidence la différence profonde entre les significations des coefficients u_i et k_{ij} dans le cas d'un processus de

Markov et dans celui d'un processus de diffusion quelconque. Alors que dans le cas markovien ces coefficients sont des fonctions indépendantes de la probabilité *a priori*, dans le cas général elles en dépendent.

Considérons, en effet, (13) dans le cas où $M(t)$ est markovienne, $u(t, r)$ dépend de $\underline{P}(t, r, ds)$, donc de la loi *a priori* de $M(t)$. Mais cette dernière dépend de la loi *a priori* de $M(0)$, donc en particulier de la loi *a priori* de $R(0)$. De plus, parmi toutes les lois *a priori* de $R(t)$ fournies par toutes les lois de $M(0)$ possibles, pour en avoir une déterminée, il faut choisir convenablement la loi de $M(0)$, d'où résultera une loi de $M(t)$ particulière et, finalement, un $\bar{u}(t, r)$ particulier. On peut donc dire que pour un processus de diffusion non markovien, les $u(t, m)$ et $k(t, m)$ dépendent en général de la loi *a priori* de $R(t)$, mais bien entendu, ils ne dépendent pas seulement d'elle.

4. La détermination locale de l'accroissement d'une moyenne. — Nous adoptons, à partir de maintenant les définitions, hypothèses et notations du paragraphe **2** du présent chapitre.

Soit alors A un ensemble fermé contenu dans E, B et B′ deux ouverts tels que $A \subset B \subset B' \subset E$. Soit $f(m)$ une fonction borélienne, bornée en valeur absolue par L sur B′. Considérons d'abord

$$\int_A P(t, dm) \int_{B'} f(m') P(m, t, t', dm') - \int_A P(t, dm) \int_B f(m') P(m, t, t', dm');$$

on peut l'écrire

$$\int_A P(t, dm) \int_{B'-B} f(m') P(m, t, t', dm').$$

Soit δ la plus petite distance d'un point de $R_n - B$ à un point de A, elle est > 0 puisque A est fermé et B ouvert. Donc, pour $m' \in B' - B$ et $m \in A$ on a $|m' - m| > \delta$. Par conséquent,

$$\left| \int_{B'-B} f(m') P(m, t, t', dm') \right|$$
$$\leqq L \int_{B'-B} P(m, t, t', dm') \leqq L \int_{|m'-m|>\delta} P(m, t, t', dm').$$

D'après les hypothèses (7) et (7 *bis*), on a

$$\lim_{t' \downarrow t} \int_A P(t, dm) \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|>\delta} P(m, t, t', dm') = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(15)\qquad \begin{aligned}&\int_A P(t, dm)\int_{B'} f(m')\, P(m, t, t', dm')\\ &-\int_A P(t, dm)\int_B f(m')\, P(m, t, t', dm') = o(t'-t).\end{aligned}$$

Ceci reste vrai si $B' = E$, ou encore si $B' = B$.

Montrons maintenant que

$$(16)\quad \int_A P(t, dm) f(m)\int_B P(m, t, t', dm') - \int_A f(m)\, P(t, dm) = o(t'-t).$$

En effet, le premier membre s'écrit

$$(17)\qquad \int_A P(t, dm) f(m)\left[\int_B P(m, t, t', dm') - 1\right].$$

Comme tout à l'heure, il existe un δ tel que $m \in A$, $|m'-m| < \delta$ ensemble impliquent $m' \in B$. Donc pour tout $m \in A$,

$$\int_B P(m, t, t', dm') \geq \int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm'),$$

f étant bornée par L sur B', donc sur A, (17) est majorée en module par

$$L\int_A P(t, dm)\left[1 - \int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm')\right]$$

et, d'après (7) et (7 *bis*), cette quantité est $o(t'-t)$.

C. Q. F. D.

Récapitulant (15) et (16), nous obtenons le

Lemme I. — *Si* A *est fermé*, B *et* B' *ouverts tels que* $A \subset B \subset B' \subset E$, *et si f est bornée sur* B', *on a*

$$\begin{aligned}&\int_A P(t, dm)\int_{B'} f(m')\, P(m, t, t', dm') - \int_A f(m)\, P(t, dm)\\ &= \int_A P(t, dm)\int_B [f(m') - f(m)]\, P(m, t, t', dm') + o(t'-t).\end{aligned}$$

On peut mettre le second membre sous une forme plus maniable. Prenons encore δ tel que $m \in A$, $|m'-m| < \delta$ ensemble impliquent $m' \in B$.

On aura

$$\begin{aligned}&\int_{B}[f(m')-f(m)]\,P(m,\,t,\,t',\,dm')\\ =\;&\int_{|m'-m|<\delta}[f(m')-f(m)]\,P(m,\,t,\,t',\,dm')\\ &+\int_{\substack{|m'-m|\geqq\delta\\ m'\in B}}[f(m')-f(m)]\,P(m,\,t,\,t',\,dm').\end{aligned}$$

La deuxième intégrale du second membre est majorée en module par

$$2L\int_{|m'-m|\geqq\delta}P(m,\,t,\,t',\,dm'),$$

donc, sommée sur A par rapport à la mesure $P(t,\,dm)$, elle fournira, en vertu de (7) et (7 *bis*), un terme $o(t'-t)$. On aura donc le :

Lemme I *bis*. — *Si* A *est fermé, et* B *ouvert tel que* $A\subset B\subset E$, *si* f *est bornée sur* B, *on a pour* δ *assez petit,*

$$\begin{aligned}&\int_{A}P(t,\,dm)\int_{B}f(m')\,P(m,\,t,\,t',\,dm')-\int_{A}f(m)\,P(t,\,dm)\\ =&\int_{A}P(t,\,dm)\int_{|m'-m|<\delta}[f(m')-f(m)]\,P(m,\,t,\,t',\,dm')+o(t'-t).\end{aligned}$$

Si A *est borélien on obtient un résultat analogue en supposant que sa fermeture est contenue dans* E *et que* B *en est un voisinage.*

Soit alors $\mathcal{A}$ l'ensemble des déterminations de la fonction aléatoire qui vérifient $m_\omega(t)\in A$ et supposons que $\mathcal{A}$ ait une probabilité non nulle. Supposons f bornée sur E et soit $E_{\mathcal{A}}(f,\,s)$ l'espérance mathématique conditionnelle relative à $\mathcal{A}$ de $f(m)$ au temps s. On a

$$E_{\mathcal{A}}(f,\,t)=\frac{1}{P(t,\,A)}\int_{A}f(m)\,P(t,\,dm),$$

$$E_{\mathcal{A}}(f,\,t')=\frac{1}{P(t,\,A)}\int_{A}P(t,\,dm)\int_{E}f(m')\,P(m,\,t,\,t',\,dm')\qquad(t'>t);$$

les lemmes I ou I *bis* nous apprennent qu'à $o(t'-t)$ près l'accroissement $E_{\mathcal{A}}(f,\,t')-E_{\mathcal{A}}(f,\,t)$ ne dépend que des déterminations telles que $m_\omega(t')\in B$, B étant un voisinage arbitraire de A. En particulier, si

$$\lim_{t'\downarrow t}\frac{E_{\mathcal{A}}(f,\,t')-E_{\mathcal{A}}(f,\,t)}{t'-t}\quad\text{existe,}$$

elle aura une signification purement locale. Notamment les conditions imposées au processus à la frontière de E n'auront aucune influence sur cette dérivée.

C'est ce qui nous a permis de nous placer par hypothèse dans le cas où il y a absorption à la frontière, sans perdre pour autant en généralité.

Par ailleurs, si nous considérons pour la fonction aléatoire $M(t)$ l'accroissement entre t et t' de l'espérance mathématique $E(f, t)$ d'une fonction f bornée sur E, celui-ci apparaîtra pour un découpage quelconque de E en un nombre fini de sous-ensembles boréliens A_i, comme la somme des accroissements $[E_{\mathcal{A}_i}(f, t') - E_{\mathcal{A}_i}(f, t)]$. $P(t, A_i)$, chacune de ces contributions ayant la signification locale qu'on a dite.

5. **Forme générale de l'accroissement local d'une moyenne.** — A étant fermé, B ouvert, tel que $A \subset B \subset E$, $f(t, m)$ étant une fonction borélienne et bornée sur B, nous appellerons accroissement local relatif à A de la moyenne de f la quantité

$$(18) \qquad \int_A P(t, dm) \int_B f(t', m')\, P(m, t, t', dm') - \int_A f(t, m)\, P(t, dm).$$

Supposons que $f(s, m)$ est une fonction qui pour $m \in B$ et $s \in [t, t+h]$ est continue et bornée ainsi que sa dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(s, m)$ et supposons également que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, m)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, m)$ sont finies et continues sur B (B étant ouvert, elles n'y sont pas forcément bornées).

Pour tout $m' \in B$ et tout t' tel que $t < t' \leqq t + h$ on a un θ fonction de m' et t', vérifiant $t \leqq \theta \leqq t'$ tel que

$$f(t', m') = f(t, m') + \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')(t' - t).$$

On peut alors écrire (18) sous la forme

$$(19) \qquad (t' - t) \int_A P(t, dm) \int_B \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\, P(m, t, t', dm')$$
$$+ \int_A P(t, dm) \int_B f(t, m')\, P(m, t, t', dm') - \int_A f(t, m)\, P(t, dm).$$

Occupons-nous d'abord du premier terme de (19). En premier lieu remarquons que $\frac{\partial f}{\partial t}(t, m)$ étant bornée sur A on a, en vertu des hypothèses (7) et (7 *bis*),

$$(20)\qquad \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\,P(t, dm) - \int_A P(t, dm)\frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm') = \int_A P(t, dm)\frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\left[1-\int_{|m'-m|<\delta} P(m, t, t', dm')\right] = o(t'-t).$$

Puisque

$$t < \theta(m', t') \leqq t' < t+h,$$

$\frac{\partial f}{\partial t}[\theta(m', t'), m']$ est une fonction bornée de m' et t'. On aura pour δ assez petit

$$(21)\qquad \int_A P(t, dm)\int_B \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\,P(m, t, t', dm') = \int_A P(t, dm)\int_{|m'-m|<\delta}\frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\,P(m, t, t', dm') + \int_A P(t, dm)\int_{\substack{m'\in B\\ |m'-m|>\delta}}\frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\,P(m, t, t', dm')$$

et, toujours comme conséquence de (7) et (7 *bis*), le second terme du second membre est $o(t'-t)$. Par conséquent, il résulte de (20) et (21) que

$$(22)\qquad \int_A P(t, dm)\int_B \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\,P(m, t, t', dm') - \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\,P(t, dm) = \int_A P(t, dm)\int_{|m'-m|>\delta}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m') - \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\right] P(m, t, t', dm') + o(t'-t).$$

Ici, δ est aussi petit qu'on veut. Soit δ_0 tel que l'ensemble des m' vérifiant $|m'-m| < \delta_0$, $m \in A$ ait sa fermeture C contenue dans B, ce qui est possible, puisque A est fermé et B ouvert. $\frac{\partial f}{\partial t}$ étant continue dans l'ensemble $[t, t+h]\times B$, elle est uniformément continue sur $[t, t+h]\times C$ qui est compact. Donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un δ_1 et un η tels que, si $t \leqq s \leqq t+h$, m et $m' \in C$, $|m'-m| < \delta_1$ et $|s-t| < \eta$ entraînent

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(s, m') - \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\right| \leqq \varepsilon;$$

par conséquent, comme $\theta(t', m') - t < t' - t$, si nous prenons $|t'-t| < \eta$

et δ plus petit à la fois que δ_0 et δ_1, nous aurons

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}[\theta(m', t'), m'] - \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\right| \leqq \varepsilon.$$

L'intégrale du second membre de (22) sera majorée en module par ε. Donc pour tout ε nous pouvons trouver un η tel que pour $|t' - t| < \eta$,

$$\left|\int_A P(t, dm)\int_B \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\, P(m, t, t', dm') - \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\, P(t, dm)\right| \leqq \varepsilon + o(t' - t)$$

et, finalement, nous avons

$$(23)\quad \lim_{t' \searrow t}\int_A P(t, dm)\int_B \frac{\partial f}{\partial t}(\theta, m')\, P(m, t, t', dm') = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, m)\, P(t, dm).$$

Il nous reste à considérer

$$(24)\quad \frac{1}{t' - t}\left[\int_A P(t, dm)\int_B f(t, m')\, P(m, t, t', dm') - \int_A f(t, m)\, P(t, dm)\right]$$

qui, d'après le lemme I *bis*, vaut

$$(25)\quad \frac{1}{t' - t}\left[\int_A P(t, dm)\int_{|m' - m| < \delta} [f(t, m') - f(t, m)]\, P(m, t, t', dm')\right]$$

à un terme près qui tend vers zéro avec $t' - t$.

En vertu de l'hypothèse faite sur la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(t, m)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, m)$ dans B, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(t, m') - f(t, m) = & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, m)\,(x'_i - x_i) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, m)\,(x'_j - x_j)\,(x'_i - x_i) \\ & + \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij}\,(x'_i - x_i)\,(x'_j - x), \end{aligned}$$

avec

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, m'') - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t, m_j),$$

où m'' est fonction de m et m' et vérifie

$$|m'' - m| \leqq |m' - m|.$$

A étant fermé et B ouvert, il existe un voisinage fermé de A soit A' contenu dans B, et un δ_0 tel que

$$m \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad |m' - m| < \delta_0 \quad \text{entraînent} \quad m' \in \mathrm{A}'.$$

Mais, sur A′, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, m)$ sont uniformément continus. Prenons donc $\delta < \delta_0$ et, par ailleurs, assez petit pour que $|m' - m| < \delta$ entraîne

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, m') - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, m) \right| < \varepsilon.$$

Comme $|m'' - m| < |m' - m|$, $|m' - m| < \delta$ entraînera $|\mathrm{R}_{ij}| < \varepsilon$. On aura alors

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t'-t}\left| \int_{|m'-m|<\delta} \mathrm{R}_{ij}(x'_i - x_i)(x'_i - x_i)\,\mathrm{P}(m, t, t', dm') \right| \\ \leqq\ &\frac{\varepsilon}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} |x'_j - x_j|.|x'_j - x_j|\,\mathrm{P}(m, t, t', dm') \\ \leqq\ &\varepsilon \left\{ \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (x'_j - x_j)^2\,\mathrm{P}(m, t, t', dm') \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} (x'_i - x_i)^2\,\mathrm{P}(m, t, t', dm') \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses (9) et (9 *bis*), l'intégrale de A par rapport à la mesure $\mathrm{P}(t, dm)$ de cette dernière quantité sera

$$\varepsilon \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t, dm)\sqrt{k_{ii}k_{jj}} + \eta,$$

où η tend vers zéro, avec $t' - t$. Finalement nous voyons que ε étant donné nous pouvons trouver δ assez petit pour que

$$(26) \quad \overline{\lim_{t' \searrow t}} \frac{1}{t'-t} \left| \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t, dm) \int_{|m'-m|<\delta} \mathrm{R}_{ij}(x'_i - x_i)(x'_j - x_j)\,\mathrm{P}(m, t, t', dm') \right| \leqq \varepsilon \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t, dm)\sqrt{k_{ii}k_{jj}}.$$

Considérons maintenant

$$\frac{1}{t'-t}\int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t, dm) \int_{|m'-m|<\delta} \times \left\{ \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, m)(x'_i - x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, m)(x'_i - x_i)(x'_j - x_j) \right\} \mathrm{P}(m, t, t', dm').$$

Cette quantité s'écrit aussi bien

$$\int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t,\, dm) \left\{ \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\, m) \int_{|m'-m|<\delta} (x'_i - x_i)\, \frac{\mathrm{P}(m,\, t,\, t',\, dm')}{t'-t} \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t,\, m)$$
$$\left. \times \int_{|m'-m|<\delta} (x'_j - x_j)\,(x'_i - x_i)\, \frac{\mathrm{P}(m,\, t,\, t',\, dm')}{t'-t} \right\};$$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ sont bornées sur A, les hypothèses (8) et (8 *bis*), (9) et (9 *bis*) impliquent immédiatement que pour $t' - t \downarrow 0$ cette quantité a une limite qui est

$$(27) \qquad \int_{\mathrm{A}} \left\{ \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,\, m)\, u_i(t,\, m) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t,\, m)\, k_{ij}(t,\, m) \right\} \mathrm{P}(t,\, dm).$$

De ceci et de (26) il résulte que, pour t' tendant vers t, (25) a une limite égale à (27), puisque ε peut être pris arbitrairement petit et que (27) ne dépend pas de δ. Introduisant le vecteur symbolique $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$, nous énoncerons, en récapitulant ce résultat et (23), le

Lemme II. — A *étant fermé*, B *ouvert tels que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, $f(s,\, m)$ *étant une fonction qui, pour* $m \in \mathrm{B}$ *et* $s \in [t,\, t+h]$, *est continue et bornée ainsi que sa dérivée* $\frac{\partial f}{\partial t}(s,\, m)$, *et qui pour* $s = t$, *possède des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t.\, m)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(t,\, m)$ *finies et continues sur* B, *on a*

$$\lim \frac{1}{t'-t} \left[\int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t,\, dm) \int_{\mathrm{B}} f(t',\, m')\, \mathrm{P}(m,\, t,\, t',\, dm') - \int_{\mathrm{A}} f(t,\, m)\, \mathrm{P}(t,\, dm) \right]$$
$$= \int_{\mathrm{A}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + u.\nabla f + \frac{1}{2} \mathrm{K}\, \nabla.\nabla f \right\} \mathrm{P}(t,\, dm).$$

On obtient un résultat analogue pour A borélien et B ouvert contenu dans E et contenant la fermeture de A.

6. Équation de diffusion de la probabilité « a priori ». — Soit $f(m)$ continue sur E, nulle hors d'un ensemble A_1, dont la fermeture est intérieure à A, et telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ sont continues. D'après le lemme II, on a

$$(28)\quad \lim \frac{1}{t'-t}\left\{\int_{A} P(t, dm)\int_{E} f(m')\,P(m, t, t', dm') - \int_{A} f(m)\,P(t, dm)\right\}$$
$$= \int_{A} [u.\nabla f + \tfrac{1}{2} K \nabla . \nabla f]\, P(t, dm).$$

Mais on a, en vertu de (6) (où A n'a pas le même sens qu'ici)

$$\int_{A} P(t, dm)\int_{E} f(m')\,P(m, t, t', dm')$$
$$= \int_{E} f(m')\,P(t', dm') - \int_{E-A} P(t, dm)\int_{E} f(m')\,P(m, t, t', dm').$$

La deuxième intégrale du second membre s'écrit, compte tenu de la nullité de f hors de A_1,

$$\int_{E-A} P(t, dm)\int_{A_1} f(m')\,P(m, t, t', dm');$$

comme f est bornée, cette quantité est $o(t'-t)$, en vertu de (7) et (7 *bis*), puisque tout point de $E - A$ est à une distance plus grande qu'un certain $\delta > 0$ de tout point de A_1.

Par ailleurs, on a

$$\int_{E} f(m')\,P(t', dm') = \int_{A} f(m')\,P(t', dm'),$$

puisque f est nulle hors de A. Finalement, nous pouvons écrire, avec la certitude que la limite du premier membre existe,

$$(29)\quad \lim_{t' \downarrow t} \frac{1}{t'-t}\left[\int_{A} f(m')\,P(t', dm') - \int_{A} f(m)\,P(t, dm)\right]$$
$$= \int_{A}\left[\sum_{i} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] P(t, dm).$$

Supposons maintenant que $P(t, dm)$ soit pour tout t une loi absolument continue de densité $p(t, m)$, que pour tout t, tout i et tout j

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p k_{ij}), \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[p u_i - \frac{1}{2}\sum_{j}\frac{\partial}{\partial x_j}(p k_{ij})\right]$$

existent et soient continus sur E, enfin que $\frac{\partial p}{\partial t}(t, m)$ existe dans un intervalle fini, et y soit majorée par une fonction sommable $g(m)$.

Alors, le premier membre de (28) est égal à

$$\int_A f(m)\frac{\partial p}{\partial t}(t, m)\,dm.$$

De plus, on a

$$k_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}p = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}p\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est nulle à l'extérieur de A_1, le premier terme du second membre donnera o dans l'intégration sur A. On a donc

$$\begin{aligned}
&\int_A\left[\sum_i u_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]p\,dm \\
&= \int_A\sum_i\left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right]\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dm \\
&= -\int_A f(m)\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right]dm,
\end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que f est nulle hors de A_1. L'égalité (28) s'écrit alors

$$\int_A f(m)\frac{\partial p}{\partial t}\,dm = -\int_A f(m)\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right]dm, \tag{30}$$

d'où l'on déduit, vu l'arbitraire laissé sur A et sur f, l'équation de diffusion

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right] = 0. \tag{31}$$

L'équation (31) est établie sous les hypothèses de régularité assez strictes, tant sur $P(t, dm)$ que sur u_i et k_{ij}. Mais (29), qui ne suppose rien de tel, a la même signification par le fait, utilisé d'ailleurs pour passer de (30) à (31), qu'une loi de probabilité est bien définie si l'on se donne les espérances mathématiques d'une classe assez vaste de variables aléatoires qui en dépendent et, par conséquent, sa variation bien définie par la variation de ces espérances mathématiques.

Alors, (29) ou (31) nous disent la même chose : les valeurs de la probabilité *a priori* sur les parties d'un ensemble A au temps $t + \delta t$ dépendent des valeurs au temps t sur les parties d'un voisinage de A, de u et de K dans ce voisinage et ce qui se passe hors de ce voisinage n'intervient que pour $o(\delta t)$.

Il convient de ne pas perdre de vue que, sauf dans les processus de

Markov, les u et k ne sont pas indépendants de $p(t, m)$ et que (31) n'est pas, en général, une équation linéaire en p.

CHAPITRE III.

LES GRANDEURS CINÉTIQUES ATTACHÉES A UN PROCESSUS DE DIFFUSION.

1. Signification concrète de l'accroissement local d'une moyenne. — Supposons que nous étudions physiquement un processus de diffusion dans E : des réalisations $m_{\omega_z}(t)$ $(z = 1, 2, \ldots, N)$ de $M(t)$, indépendantes les unes des autres, nous apparaissent successivement ou simultanément. Ayant rapporté leur instant de départ à une même origine O, nous choisissons une suite t_r d'instants, et nous découpons E en petits volumes A_s $(s = 1, 2, \ldots, S)$ deux à deux disjoints. Pour obtenir une valeur empirique de $P(t_r, dm)$ nous faisons le pointage des $m_{\omega_z}(t_r)$ et dressons le tableau des nombres de $m_{\omega_z}(t_r)$ présents dans chaque A_s pour chaque t_r.

Ceci nous renseigne sur la manière dont l'ensemble des $m_{\omega_z}(t)$ se répartit dans l'espace pour chaque t_r, mais ne nous dit rien du mode selon lequel est engendré le mouvement de cette répartition. Pour acquérir des informations à ce sujet nous procéderons à une expérience de double pointage. C'est-à-dire que pour chaque petit volume A_s, chaque t_r et chaque z, nous regarderons si $m_{\omega_z}(t_r)$ est dans A_s et dans l'affirmative, nous pointerons à nouveau sa position en un instant $t_r + h$. Soit $m_{\omega_z}(t_r + h)$. Pour les A_s qui ont une partie de frontière commune avec E cela nous renseignera sur ce qui se passe à la frontière, pour les A_s intérieurs nous savons que l'effet des frontières sera négligeable.

Soit alors A_s intérieur et $f(t, m)$ une fonction bornée. Prenons sa moyenne sur les $m_{\omega_z}(t_r)$ contenus dans A_s, puis sa moyenne sur les $m_{\omega_z}(t_r + h)$ et considérons l'accroissement correspondant. Sa valeur théorique est

$$(32) \quad \frac{1}{P(t_r, A_s)} \left\{ \int_{A_s} P(t_r, dm) \int_E f(t'_r + h, m') P(m, t_{r'}, t_r + h, dm) \right. \\ \left. - \int_{A_s} f(t_r, m) P(t_{r'}, dm) \right\}.$$

Le lemme I nous enseigne que si nous négligeons, dans le calcul de la moyenne sur les $m_{\omega_z}(t+h)$, ceux de ces points qui ne sont pas dans un voisinage donné de A_s nous commettons une erreur $o(h)$. Celle-ci dépend, bien entendu de t_r, de A_s et du voisinage choisi.

Le lemme II nous apprend que, sous des hypothèses de régularité pour $f(t, m)$, (32) est de la forme

$$\frac{h}{P(t_r, A_s)}\int_{A_s}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+u.\nabla f+\frac{1}{2}K\nabla.\nabla f\right]P(t_r, dm)+o(h)h. \tag{33}$$

L'un et l'autre de ces lemmes expriment que (32) a une signification essentiellement locale, que c'est une grandeur attachée à ce qui se passe au voisinage de A_s. C'est cette remarque qui permet d'associer à un processus de diffusion un champ d'impulsion que nous allons définir.

2. **L'impulsion moyenne** [8]. — Supposons $M(t)$ à trois dimensions ($n=3$). Si les réalisations de $M(t)$ sont des trajectoires de points matériels, dont l'évolution est causée par quelque système physique avec lequel ils interagissent, cette évolution ne va pas sans un échange d'impulsion sur lequel nous pouvons chercher à obtenir des renseignements statistiques.

Reprenant l'expérience de double pointage du paragraphe précédent, nous considérerons les positions $m_{\omega_z}(t_r)$ appartenant à A_s, nous prendrons leur moyenne, ou si l'on préfère, chaque $m_\omega(t)$ étant doué de la même masse, leur centre de gravité. Puis nous ferons la même opération avec les $m_{\omega_z}(t_r+h)$, calculerons l'accroissement correspondant et le diviserons par h. Nous obtiendrons ainsi la vitesse-moyenne-dans-le-temps entre t_r et t_r+h du point moyen des $m_{\omega_z}(t)$ tels que $m_{\omega_z}(t_r)\in A_s$. Son expression théorique est

$$\frac{1}{P(t, A_s)}\frac{1}{h}\left[\int_{A_s}P(t, dm)\int_E m'\,P(m, t, t', dm')-\int_{A_s}m\,P(t, dm)\right].$$

De façon générale, pour A, t et $t+h=t'$ quelconques, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(t, A)}&\left[\int_A P(t, dm)\int_E m'\,P(m, t, t', dm')-\int_A m\,P(t, dm)\right]\\&=(t'-t)\int_A u(t, dm)\,P(t, dm)+o(t'-t)\end{aligned}$$

comme conséquence immédiate de (7), (7 *bis*), (8) et (8 *bis*). Donc le vecteur

$$\frac{1}{P(t, A)}\int_A u(t, m)\,P(t, dm)$$

est la dérivée à droite au temps t de la position du point moyen des déterminations de $M(t)$ qui appartiennent à A au temps t.

Si chaque $M(t)$ est la trajectoire d'un point matériel de masse unité, la quantité

$$\int_A u(t, dm)\,P(t, dm) \tag{34}$$

est l'impulsion totale contenue dans le volume A au temps t, si toutes les réalisations de $M(t)$ ont lieu simultanément. Nous l'appellerons impulsion moyenne relative à A.

En général, les trajectoires $m_\omega(t)$ n'ont pas de tangente à droite (ni à gauche). L'impulsion moyenne n'est donc pas une moyenne d'impulsions. Certes, si l'on avait, dans l'expérience de double pointage, considéré les vitesses-moyennes-dans-le-temps $\frac{m(t_r+h)-m(t_r)}{h}$, pris leur somme et enfin fait tendre h vers zéro, on aurait aussi bien obtenu l'impulsion moyenne. Mais, outre qu'il aurait fallu sommer avant de faire tendre h vers zéro et non l'inverse, la dispersion des $\frac{m(t_r+h)-m(t_r)}{h}$ devient infinie lorsque h tend vers zéro dans tous les cas où l'on n'a pas $k_{ij}=0$. Si leur moyenne reste finie, c'est par un effet de compensation qui permet à la moyenne de $M(t')-M(t)$ conditionnellement lorsque $M(t)=m$, d'être de l'ordre de $t'-t$ alors que la dispersion correspondante est de l'ordre de $\sqrt{t'-t}$.

Il convient de ne pas perdre de vue que c'est la loi temporelle qui contient l'essentiel de la signification, d'une fonction aléatoire. La non-dérivabilité des $m_\omega(t)$ n'exclut pas qu'un processus de diffusion puisse représenter un phénomène où les trajectoires sont susceptibles d'être également considérées comme pourvues d'une tangente. Mais le fait que la dispersion de $M(t')-M(t)$ est de l'ordre de $\sqrt{t'-t}$ est beaucoup plus important, car il implique qu'aucune variable aléatoire à dispersion finie ne peut servir à $M(t)$ de vitesse même en un sens stochastique.

Est-ce à dire que pour les phénomènes décrits par un processus de diffusion on ne puisse jamais trouver d'autre description comportant une vitesse? Non, cela signifie simplement que si l'on considérait cette vitesse, il faudrait lui attribuer une répartition conditionnelle en $M(t) = m$ dont la dispersion soit extrêmement grande ou même infinie.

Le schéma des phénomènes de diffusion que nous adoptons ici pousse cette grande dispersion des vitesse à l'absurde. Mais tout schéma, toute abstraction pousse quelque particularité de l'objet à l'absurde, la seule question pratique que cela pose étant de savoir si ce défaut laisse au schéma le pouvoir de représenter par ses propriétés un aspect important de l'objet.

Ici, la vitesse est préservée sous l'aspect de vitesse d'un point moyen.

Cette définition de la vitesse, ou de l'impulsion moyenne que nous avons donnée souffre d'un grave défaut : ce n'est qu'une dérivée à droite.

Nous avons considéré les déterminations de $M(t)$ qui appartiennent à A au temps t, nous avons calculé leur point moyen aux temps t et $t+\delta t$, divisé la différence par δt et pris la limite. N'aurions-nous pas pu faire la même chose pour les temps $t-\delta t$ et t?

Dans le cas d'un processus de Markov, la fonction aléatoire « $M(s)\,(s<t)$, conditionnellement lorsque $M(t)\in A$ » dépend d'un autre processus de Markov, bien défini en fonction du premier si $P(m, s, t, A)$ n'est jamais nulle. Ce nouveau Markov a les mêmes coefficients k_{ij} et seuls les u_i sont changés. On peut considérer son point moyen au temps $t-\delta t$ et faire à gauche le raisonnement que nous avons fait à droite. On s'aperçoit qu'il n'y a pas de dérivée à gauche ou bien qu'elle n'est pas égale à la dérivée à droite (33). Pour avoir cette égalité, il faudrait que l'écart-moyen

$$\int_{|m'-m|<\delta} |m'-m|\, P(m, t, t', dm')$$

soit $o(t'-t)$, et cette condition est inadmissible dans le cas où $k_{ij}\neq 0$ (tout au moins à l'intérieur de E; si E était fermé, à la frontière il en serait autrement).

Donc, il faut renoncer à avoir en général une dérivée vraie comme définition de l'impulsion moyenne. Ceci peut paraître gênant, mais nous pensons que c'est un des défauts des fonctions aléatoires que nous étudions, défaut dont on peut s'accommoder, car sans inconvénient physique. En effet, un processsus de diffusion avec $k_{ij}\neq 0$ est fait pour représenter des phénomènes où il y a effectivement diffusion, c'est-à-dire une dispersion irréversible des $m_\omega(t)$ au cours du temps. Plus précisément, les écarts types doivent augmenter avec t. Vouloir considérer un processus où ils peuvent diminuer, ce qui est le cas pour $M(s)\,(s<t)$ lorsque la condition $M(t)\in A$ est imposée, c'est couper la racine même de la parenté entre les faits physiques et l'objet mathématique. En fait lorsqu'on calcule la vitesse moyenne d'un tel processus, on trouve qu'elle est singulière au voisinage de t, et il le faut bien pour rabattre vers A des déterminations de $M(t)$ qui, par nature, ont tendance à se disperser. Une singularité dans la vitesse moyenne est acceptable dans un Markov, comme les travaux de M. Feller l'ont montré. S'il n'y a pas de contradiction mathématique à considérer le processus de Markov « $M(s)\,(s<t)$, conditionnellement lorsque $M(t)\in A$ » il y a néanmoins contradiction à vouloir que ce prélèvement particulier opéré dans l'ensemble des $m_\omega(t)$ nous fournisse un objet mathématique ayant dans tout intervalle de temps un sens physique aussi complet que $M(t)$ lui-même. Ici, très précisément, l'existence de l'impulsion moyenne est liée à un effet de compensation, comme on l'a dit plus haut, la condition $M(t)\in A$ perturbe violemment le jeu de cette compensation à gauche de t. Il ne faut donc pas nous étonner de n'avoir pu obtenir la définition de l'impulsion moyenne que comme dérivée à droite.

3. **Impulsion moyenne et courant moyen.** — Toujours dans le cas où $M(t)$ est à trois dimensions, soit A un volume intérieur à E, limité par une surface S fermée simple. L'équation (31) nous donne, par le théorème d'Ostrogradsky, n étant la normale intérieure à S et $d\sigma$ son élément d'aire,

$$\begin{aligned}(35)\qquad \frac{d}{dt}\int_A p(t,\,m)\,dm &= -\int_A \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right]dm \\ &= \int_S \sum_i \left[pu_i - \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij})\right] n_i\,d\sigma.\end{aligned}$$

Cette équation a un sens évident : l'augmentation de $\int_A p(t,\,m)\,dm$ est due au flux à travers la surface S d'un vecteur de composantes

$$(36)\qquad C_i = pu_i - \frac{1}{2}\sum \frac{\partial}{\partial x_j}(pk_{ij}).$$

Ceci ne contredit pas notre définition de l'impulsion, car (35) représente seulement le bilan de ce qui sort de A et de ce qui y entre.

4. **État cinétique d'un processus de diffusion.** — Si $M(t)$ est la trajectoire d'un point matériel nous cherchons à faire apparaître dans ce transfert aléatoire de masse ce qui est cinétique et à éliminer ce qui est thermique, c'est-à-dire ce qui est diffusion pure.

Considérant le point moyen des déterminations qui, au temps t, se trouvent dans un volume A, ce qui est thermique ne contribue à son déplacement entre t et t' que pour une quantité $o(t'-t)$. Sinon on obtiendrait par intégration dans le temps une contribution finie. Dans la dérivation, l'effet thermique disparaîtra. C'est ce qui nous amène à définir comme suit l'état cinétique au temps t du processus de diffusion.

Soit A un ensemble borélien dont la fermeture est contenue dans E. Soit une partition de A en un nombre fini d'ensembles boréliens A_i. Pour chaque A_i dotons de la masse $P(t, A_i)$ le point moyen des déterminations de la fonction aléatoire qui au temps t sont dans A_i et considérons le mouvement au cours de l'intervalle de temps $(t, t+\delta t)$ du système de points matériels ainsi constitué.

La résultante cinétique et le moment cinétique résultant au temps t de ce système ont, lorsque les A_i augmentent en nombre et diminuent uniformément en diamètre, des limites qui définissent l'impulsion moyenne et le moment cinétique moyen, relatifs à A et au temps t, du processus de diffusion.

Cette définition de l'impulsion moyenne est cohérente et coïncide avec celle donnée au paragraphe 2 du présent chapitre.

On a, en effet,

$$\sum_i P(t, A_i)\Bigg[\frac{1}{P(t, A_i)}\lim_{t'\downarrow t}\frac{1}{t'-t} \times\left\{\int_A P(t, dm)\int_E m'\,P(m, t, t', dm') - \int_A m\,P(t, dm)\right\}\Bigg]$$
$$= \sum_i \int_{A_i} u(t, m)\,P(t, dm) = \int_A u(t, m)\,P(t, dm).$$

Cette impulsion moyenne et le moment cinétique moyen, dont on va montrer l'existence, sont des fonctions additives d'ensemble qui constituent à elles deux ce que nous appelons l'état cinétique du processus de diffusion.

Le moment cinétique résultant du système des points moyens est

$$\sum_i \int_{A_i} \frac{m\,P(t,\,dm)}{P(t,\,A_i)} \wedge \int_{A_i} u(t,\,m)\,P(t,\,dm). \tag{37}$$

Le moment cinétique moyen sera

$$\int_A m \wedge u(t,\,m)\,P(t,\,dm). \tag{38}$$

En effet, la différence entre (37) et (38) s'écrit

$$\sum_i \int_{A_i} \left[\int_{A_i} \frac{m\,P(t,\,dm)}{P(t,\,A_i)} - m \right] \wedge u(t,\,m)\,P(t,\,dm). \tag{39}$$

Si les diamètres de tous les A_i sont $< \delta$, la quantité

$$\int_{A_i} \frac{m\,P(t,\,dm)}{P(t,\,A_i)} - m$$

est majorée en module par δ et (39) est alors majoré en module par

$$\delta \sum_i \int_{A_i} |\,u(t,\,m)\,|\,P(t,\,dm) = \delta \int_A |\,u(t,\,m)\,|\,P(t,\,dm),$$

donc, pour δ tendant vers zéro, (38) tend bien vers (37).

Cette définition de l'état cinétique n'est pas forcément restreinte aux processus de diffusion. Le caractère local de l'accroissement d'une moyenne [hypothèses (7) et (7 *bis*)] et l'existence d'une dérivée à droite pour les positions des points moyens [hypothèses (8) et (8 *bis*)] suffisent à lui donner un sens. Nous aurons à nous servir de cette remarque lorsque nous introduirons les grandeurs dynamiques des processus de diffusion non markoviens.

Dans le cas où

$$\int_E u(t,\,m)\,P(t,\,dm) \quad \text{et} \quad \int_E m \wedge u(t,\,m)\,P(t,\,dm)$$

existent au sens de Lebesgue on les appelle impulsion totale au temps t et moment cinétique total au temps t du processus de diffusion.

5. **La non-détermination de l'énergie cinétique.** — Comme on l'a vu

plus haut, si $k_{ij} \neq 0$, la dispersion de $\dfrac{M(t+\delta t)-M(t)}{\delta t}$ devient infinie lorsque δt tend vers zéro, cependant, en considérant la vitesse-moyenne-dans-le-temps $\dfrac{M(t+\delta t)-M(t)}{\delta t}$, on peut calculer le carré de son module qui fournit une grandeur dont le sens physique est proche du carré de la vitesse ([1]). Nous savons à l'avance que pour δt tendant vers zéro la dispersion de cette grandeur deviendra infinie et nous allons chercher à préciser de quelle manière.

Dans un processus de diffusion markovien à n dimensions, la loi de probabilité, conditionnelle lorsque $M(t)=m$, de $\dfrac{M(t+\delta t)-M(t)}{\sqrt{\delta t}}$ tend très généralement vers une loi de Laplace centrée à n dimensions. En particulier, pour la composante X_i, la loi conditionnelle, lorsque $M(t)=m$, de $\dfrac{X_i(t+\delta t)-X_i(t)}{\sqrt{\delta t}}$ tend vers une loi de Laplace centrée de variance $k_{ii}(t, m)$. Désignant par $E_{m,t}$ l'espérance mathématique conditionnelle lorsque $M(t)=m$, on a donc

$$\lim_{\delta t=0} E_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^2 = k_{ii}(t, m). \tag{40}$$

Étudions $E_{m,t}\left(\dfrac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^4$. Deux cas peuvent se produire : ou bien cette quantité tend vers l'infini lorsque t tend vers zéro, ou bien sa limite inférieure est finie. Dans le second cas, d'après le lemme de Fatou, cette limite inférieure sera au moins égale au quatrième moment de la loi limite de $\dfrac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}$. Cette loi limite étant une loi de Laplace centrée, dont l'écart-type est $\sqrt{k_{ii}(t, m)}$, ce quatrième moment sera $3\,k_{ii}^2(t, m)$. Donc, par définition de la limite inférieure, quel que soit A positif et plus petit que 1, on a pour δt assez petit

$$E_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^4 \geqq 3\,A\,k_{ii}^2(t, m). \tag{41}$$

Considérons maintenant la variable aléatoire $\left(\dfrac{\delta X_i}{\delta t}\right)^2$, qui est le carré

([1]) Plus précisément, ce carré est pour δt petit une valeur à ε près de la moyenne (dans le temps) entre t et $t+\delta t$, du carré de la vitesse. *Voir :* RÉGNIER, *Régularité minima de la trajectoire aléatoire d'un point matériel* (Séminaire de Probabilités, Institut Henri poincaré, 1956).

de la vitesse-moyenne-dans-le-temps t et $t+\delta t$ et calculons son écart-type conditionnel lorsque $M(t)=m$, soit $\sigma_{m,t}\left(\frac{\delta X}{\delta t}\right)^2$. On a

$$(42)\qquad \sigma^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\delta t}\right)^2 = E_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\delta t}\right)^4 - E^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\delta_2 t}\right)^2$$
$$= \frac{1}{\delta t^2}\left[E_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^4 - E^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^2\right];$$

ε étant donné >0, on aura, pour δt assez petit, d'après (40),

$$(43)\qquad \left|E^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^2 - k^2_{ii}\right| \leqq \varepsilon k^2_{ii}.$$

De (41) et (43) résulte immédiatement

$$(44)\qquad E_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^4 - E^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\sqrt{\delta t}}\right)^2 \geqq (3A-1-\varepsilon)\,k^2_{ii}.$$

Pour tout $\varepsilon'>0$ donné on peut trouver $A<1$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$3A-1-\varepsilon > 2-\varepsilon',$$

donc pour δt assez petit, on aura comme conséquence de (42) et (44)

$$(45)\qquad \sigma^2_{m,t}\left(\frac{\delta X_i}{\delta t}\right)^2 \geqq \frac{2-\varepsilon'}{\delta t^2}\,k^2_{ii}(t,\,m).$$

Ceci, rappelons-le, est vrai pour une coordonnée d'une fonction aléatoire $M(t)$ à n dimensions supposée markovienne.

Rappelons maintenant une inégalité bien connue en statistique. X et Y étant deux variables aléatoires, que nous supposerons bornées pour simplifier, $E_x(.)$ étant l'espérance conditionnelle lorsque $X=x$ et $P(dx)$ la loi *a priori* de X, on a

$$E(Y^2)-E^2(Y) = \int E_x(Y^2)\,P(dx) - \left[\int E_x(Y)\,P(dx)\right]^2$$
$$= \int [E_x(Y^2)-E^2_x(Y)]\,P(dx)$$
$$+\int E^2_x(Y)\,dP - \left[\int E_x(Y)\,dP\right]^2.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, la différence des deux derniers termes est positive ou nulle. Par ailleurs, $E_x(Y)^2 - E^2_x(Y)$ est le carré de l'écart-type de Y lié par X, soit $\sigma^2_x(Y)$. $E(Y^2)-E^2(Y)$ est le carré de l'écart-type *a priori* de Y, soit $\sigma^2(\mathrm{Y})$. On a donc

$$\sigma^2(\mathrm{Y}) \geqq \int \sigma_x^2(\mathrm{Y})\,\mathrm{P}(dx).$$

Appliquons cette remarque à (45), $\sigma\left(\frac{\delta \mathrm{X}_i}{\delta t}\right)^2$ étant l'écart-type *a priori* de $\left(\frac{\delta \mathrm{X}_i}{\delta t}\right)^2$, il vient

$$\sigma^2\left(\frac{\delta \mathrm{X}_i}{\delta t}\right)^2 \geqq \frac{(2-\varepsilon')}{\delta t^2} \int k_{ii}^2(t,\, m)\,\mathrm{P}(t,\, dm) \tag{46}$$

en supposant toutefois, ce que nous ferons, que (45) est réalisée uniformément en m, c'est-à-dire que pour ε' donné et lorsque m varie, on n'est pas obligé de prendre des δt indéfiniment décroissants pour vérifier (45). A cette réserve près, nous pourrons écrire, en multipliant (46) par δt^2 membre à membre et en prenant les racines carrées

$$\sigma\left(\frac{\delta \mathrm{X}_i}{\delta t}\right)^2 \delta t \geqq \sqrt{2-\varepsilon'}\left[\int k_{ii}^2(t,\, m)\,\mathrm{P}(t,\, dm)\right]^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\sigma\left(\frac{\delta \mathrm{X}_i}{\delta t}\right)^2 \delta t \geqq \sqrt{2-\varepsilon'}\,\mathrm{E}^{\frac{1}{2}}[k_{ii}^2(t,\, \mathrm{M})]. \tag{47}$$

Cette inégalité est obtenue en supposant que X_i est une coordonnée d'une fonction aléatoire de Markov. Elle s'étend immédiatement aux processus marginaux d'un Markov, en tenant compte de l'expression (14) des coefficients d'un tel processus.

CHAPITRE IV.

LES GRANDEURS DYNAMIQUES ATTACHÉES A CERTAINS PROCESSUS DE DIFFUSION.

1. **Introduction.** — Nous avons défini au paragraphe 4 du précédent chapitre l'état cinétique au temps t d'un processus de diffusion. Nous entreprenons ici d'attacher des grandeurs dynamiques à un tel processus. Mais les grandeurs dynamiques reposent sur la comparaison des vitesses en deux temps successifs, donc au moins des positions en trois temps

successifs. Par conséquent, la corrélation du premier ordre, donnée par $P(m, t, t', dm')$ ne nous suffira pas. Nous serons tenu de considérer, en général, la probabilité conditionnelle de $M(t'') \in A$ lorsque

$$M(t) = m \quad \text{et} \quad M(t') = m' \quad (t < t' < t''),$$

soit $P(m, t, m', t', t'', A)$.

Cette probabilité est reliée à la probabilité de passage par la relation évidente

$$(48) \qquad P(m, t, t'', A) = \int_E P(m, t, t', dm')\, P(m, t, m', t', t'', A).$$

Elle n'est pas arbitraire lorsque $P(m, t, t', A)$ est donnée, mais néanmoins cette dernière ne saurait suffire à la déterminer en général. Il nous faudra donc particulariser nos processus de diffusion pour obtenir des résultats au sujet des grandeurs dynamiques.

Les processus de Markov jouent au point de vue dynamique un rôle tout à fait particulier puisqu'ils satisfont à la condition :

$$P(m, t, m', t', t'', A) = P(m', t', t'', A).$$

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, l'idée même de l'inertie semble s'opposer à ce qu'un processus de Markov puisse avoir une signification dynamique : la position au temps t'' d'un point matériel qui passe en m' au temps t' doit être influencée par sa position au temps t. Mais remarquons que cette dépendance physique n'exclut pas forcément l'indépendance statistique (à l'égard de la position au temps t), c'est-à-dire le caractère markovien du processus.

2. Cas d'un processus de Markov. — Pour $t' \geqq t$, considérons le processus $M(t')$ conditionnellement lorsque $M(t) \in A$, A étant un ensemble fermé contenu dans E. C'est un nouveau processus de Markov, de probabilité de passage $P(m, t, t', A')$, donc de diffusion, avec les mêmes u et k que $M(t)$ et la probabilité *a priori* est

$$P(t', A') = \frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm)\, P(m, t, t', A').$$

Son état cinétique au temps t est donné par la définition du chapitre III, paragraphe 4, en tenant compte de l'expression ci-dessus du $P(t' A')$. Ce sont les deux fonctions de l'ensemble $A' \subset E$ définies par

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_{A'} u(t', m') P(m, t, t', dm'),$$
$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_{A'} [m' \wedge u(t', m')] P(m, t, t', dm').$$

Nous allons, pour définir les grandeurs dynamiques, comparer entre les temps t et t', pour chaque $A \subset E$, l'impulsion totale et le moment cinétique total du processus, $M(t')$ $(t \leq t')$ conditionnellement lorsque $M(t) \in A$.

Faisons sur u les hypothèses du lemme A, ou $B = E$, c'est-à-dire : il existe un h tel que pour $t \leq t' \leq t+h$ et $m \in E$, $u(t', m)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(t', m)$ sont des fonctions continues et bornées, de plus $\frac{\partial u}{\partial x_i}(t, m)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t, m)$ sont supposées être des fonctions continues sur E.

u étant borné, l'impulsion totale et le moment cinétique total du processus au temps t' existent et sont respectivement

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_E u(t', m') P(m, t, t', dm'),$$
$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_E m' \wedge u(t', m') P(m, t, t', dm').$$

Au temps t, ils sont évidemment

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A u(t, m) P(t, dm) \quad \text{et} \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A m \wedge u(t, m) P(t, dm).$$

On peut appliquer le lemme II aux fonctions u et $m \wedge u$. En conséquence, la dérivée à droite au temps t de l'impulsion totale de notre processus est

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right] P(t, dm). \tag{49}$$

Pour le moment cinétique total, il nous faut calculer le résultat de l'opération $\frac{\partial}{\partial t} + u\nabla + \frac{1}{2}K\nabla\nabla$ appliquée à $m \wedge u$.

On a

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \wedge u) = m \wedge \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m \wedge u) = \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge u + m \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Or

$$\sum_i u_i \frac{\partial m}{\partial x_i} = u.$$

Donc

$$\sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(m \wedge u) = m \wedge \sum_i u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Enfin,

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x_i \, \partial x_j} \equiv 0.$$

Donc,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}(m \wedge u) = \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial m}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} + m \wedge \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Finalement, la dérivée à droite du moment cinétique total de notre processus est

$$(50) \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A \left\{ m \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \left(\frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial m}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\} P(t, dm).$$

Remarquons que

$$\sum_i \frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} = \operatorname{rot} u,$$

donc si la diffusion est isotrope, c'est-à-dire si

$$k_{ij}(t, m) = k(t, m)\,\delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

les formules (49) et (50) deviennent respectivement

$$(51) \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u . \nabla u + \frac{k}{2} \nabla^2 u \right] P(t, dm),$$

$$(52) \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A \left[m \wedge \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u . \nabla u + \frac{k}{2} \nabla^2 u \right) + k \operatorname{rot} u \right] P(t, dm).$$

Les grandeurs (49) et (50) multipliées par $(t' - t)$ nous donnent à $o(t' - t)$ près l'accroissement de l'impulsion totale et du moment cinétique total pour le processus $M(t')$ $(t' \geqq t)$ conditionnellement lorsque $M(t) \in A$.

Comme u et $m \wedge u$ sont bornées sur E, on peut, d'après le lemme I, remplacer dans le calcul des dérivées (49) et (50) l'impulsion totale au temps t'

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_E u(t', m') P(m, t, t', dm')$$

par

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_{A'} u(t', m') P(m, t, t', dm'),$$

où A' est un voisinage borélien quelconque de A.

Il en est de même, *mutatis mutandis*, avec le moment cinétique.

Ceci signifie que dans l'accroissement entre t et t' de l'impulsion totale ou du moment cinétique total, la contribution des réalisations $m_\omega(t)$ telles que $m_\omega(t')$ n'est pas dans un voisinage donné de A est $o(t'-t)$. En conséquence, les quantités (49) et (50), ou (51) et (52), ont une signification essentiellement locale.

3. **Cas non markovien. Généralisation de la notion d'état cinétique.** — Considérons, comme dans le cas de Markov, le processus conditionnel lorsque $M(t) \in A$. Au temps t l'état cinétique est donné par

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_{A' \cap A} u(t, m) P(t, dm),$$

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_{A' \cap A} m \wedge u(t, m) P(t, dm).$$

L'impulsion totale et le moment cinétique total sont, tout comme dans le cas de Markov, respectivement

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A u(t, m) P(t, dm) \quad \text{et} \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A [m \wedge u(t, m)] P(t, dm),$$

mais pour $t' > t$ la liaison, par la condition $M(t) \subset A$ va avoir une influence. Le point moyen des déterminations qui sont dans A' au temps t est

$$(53) \qquad \frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_{A'} m' P(m, t, t', dm').$$

Le point moyen au temps t'' des mêmes déterminations est

$$(54) \qquad \frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_{A'} P(m, t, t', dm') \int_E m'' P(m, t, m', t', t'', dm'').$$

Nous supposerons que pour tout $m \in E$, $m' \in E$, $t > t' > t''$, on a

$$(55) \qquad \lim_{t'' \downarrow t'} \frac{1}{t''-t'} \left[1 - \int_{|m''-m'| < \delta} P(m, t, m', t', t'', dm'') \right] = 0,$$

la convergence étant localement bornée en m et m', c'est-à-dire que pour m et m' donnés, t et t' fixés, il y a un voisinage de m et un voisinage de m' sur le produit desquels

$$(55\ bis)\qquad \frac{1}{t''-t'}\left[1-\int_{|m''-m'|<\delta} P(m, t, m', t', t'', dm'')\right] < A.$$

On supposera, de plus, que

$$(56)\qquad \lim_{t''\downarrow t} \frac{1}{t''-t'}\int_{|m''-m'|<\delta} (m''-m')\, P(m, t, m', t', t'', dm'') = w(m, t, m', t'),$$

la convergence étant localement bornée en m et m' et w étant pour t fixé une fonction bornée de m, m' et t'. On aura alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t''-t'}\left[\int_E m''\, P(m, t, m', t', t'', dm'') - m'\right] \\
&= \frac{1}{t''-t'}\int_{|m''-m'|<\delta} (m''-m')\, P(m, t, m', t', t'', dm'') \\
&\quad + \frac{1}{t''-t'}\left\{\int_{|m''-m'|\geq\delta} (m''-m')\, P(m, t, m', t', t'', dm'') \right.\\
&\qquad \left. - \left[1-\int_{|m''-m'|<\delta} P(m, t, m', t', t'', dm'')\right] m'\right\}
\end{aligned}$$

et le premier membre a une limite égale à $w(m, t, m', t')$, la convergence étant bornée en m et m'.

Le quotient de la différence entre (54) et (53) par $t''-t'$ aura donc pour $t''\downarrow t'$ une limite qui sera

$$(57)\qquad \frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_{A'} w(m, t, m', t')\, P(m, t, m', t').$$

Dans ces conditions, la définition de l'état cinétique donnée au chapitre III, paragraphe 4, se transpose sans difficulté. On obtient pour impulsion moyenne relative à A' et au temps t' l'expression (57) et pour moment cinétique moyen correspondant

$$(58)\qquad \frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_{A'} m' \wedge w(m, t, m'\, t')\, P(m, t, t', dm').$$

Puisque w est bornée, l'impulsion totale au temps t' et le moment cinétique total, au temps t' de notre processus lié par $M(t)\in A$ existent et sont donnés respectivement par les expressions suivantes :

$$\frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_E w(m, t, m' t')\, P(m, t, t', dm'), \tag{59}$$

$$\frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_E m' \wedge w(m, t, m', t')\, P(m, t, t', dm'). \tag{60}$$

Pour tout A', A'', $t < t' < t''$, on a

$$\Pr\{M(t')\in A', M(t'')\in A''\} = \Pr\{M(t)\in E, M(t')\in A', M(t'')\in A''\},$$

ce qui fournit la relation

$$\begin{aligned}\int_{A'} P(t' dm')\, P(m', t', t'', A'')\\ =\int_E P(t, dm)\int_{A'} P(m, t, t', dm')\, P(m, t, m', t', t'', A'').\end{aligned} \tag{61}$$

En vertu des hypothèses (7) et (7 *bis*), (8) et (8 *bis*) d'une part, de (56) et de la convergence bornée d'autre part, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\int_E P(t, dm)\int_{A'} u(t', m')\, P(m, t, t', dm')\\
&=\int_{A'} P(t', dm')\, u(t', m')\\
&=\int_{A'} P(t', dm')\left\{\lim_{t''\downarrow t'}\frac{1}{t''-t'}\int_{|m''-m'|<\delta}(m''-m')\, P(m', t', t'', dm'')\right\}\\
&=\lim_{t''\downarrow t'}\frac{1}{t''-t'}\left[\int_{A'} P(t', dm')\int_{|m''-m'|<\delta} m''\, P(m', t', t'', dm'')-\int_{A'} m'\, P(t', dm')\right]\\
&=\lim_{t''\downarrow t'}\frac{1}{t''-t'}\left[\int_E P(t, dm)\int_{A'} P(m, t, t', dm')\right.\\
&\qquad\qquad\times\int_{|m''-m'|<\delta} m''\, P(m, t, m', t', t'', dm'')\\
&\qquad\qquad\left.-\int_E P(t, dm)\int_{A'} m'\, P(m, t, t', dm')\right]\\
&=\lim_{t''\downarrow t'}\frac{1}{t''-t'}\int_E P(t, dm)\int_{A'} P(m, t, t', dm')\\
&\qquad\qquad\times\left[\int_{|m''-m'|<\delta} m''\, P(m, t, m', t', t'', dm'')-m\right]\\
&=\int_E P(t, dm)\int_{A'} P(m, t, t', dm')\\
&\qquad\qquad\times\left[\lim_{t''\downarrow t'}\frac{1}{t''-t'}\int_{|m''-m'|<\delta}(m''-m')\, P(m, t, m', t', t'', dm'')\right]\\
&=\int_E P(t, dm)\int_{A'} w(m, t, m', t')\, P(m, t, t', dm').
\end{aligned}$$

Donc

$$(62)\quad \int_E P(t, dm)\int_{A'}[w(m, t, m', t') - u(t', m')]\, P(m, t, t', dm') = 0.$$

Ceci étant valable pour tout A′, on en déduit immédiatement

$$(63)\qquad \int_E P(t, dm)\int_{A'} m' \wedge [w - u(t', m')]\, P(m, t, t', dm') = 0.$$

Les relations (62) et (63) assurent la cohérence de cette extension de la notion d'état cinétique avec la notion d'état cinétique introduite au chapitre III, paragraphe 4. En effet, si A est remplacé par E, le processus lié par $M(t) \in E$ n'est autre que $M(t)$ lui-même, les deux définitions de l'état cinétique doivent coïncider, c'est justement ce qu'expriment (62) et (63).

4. Grandeurs dynamiques dans le cas non markovien. — Transposant ce que nous avons déjà fait pour les processus de Markov, nous aurons à considérer, si elles existent, les limites pour $t' \downarrow t$ des quantités

$$(64)\quad \frac{1}{t'-t}\left[\frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_E w(m, t, m', t')\, P(m, t, t', dm') - \frac{1}{P(t, A)}\int_A u(t, m)\, P(t, dm)\right],$$

$$(65)\quad \frac{1}{t'-t}\left[\frac{1}{P(t, A)}\int_A P(t, dm)\int_E m' \wedge w(m, t, m', t')\, P(m, t, t', dm') - \frac{1}{P(t, A)}\int_A m \wedge u(t, m)\, P(t, dm)\right].$$

Tenant compte du fait que w a été supposée bornée, B étant un voisinage de la fermeture de A, nous écrirons (64) sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P(t, A)}\,\frac{1}{t'-t}\int_A P(t, dm)\left[\int_B u(t', m')\, P(m, t, t', dm') - u(t, m)\right]\\ &+ \frac{1}{P(t, A)}\,\frac{1}{t'-t}\int_A P(t, dm)\int_B [w(m, t, m', t') - u(t', m')]\\ &\qquad\qquad \times P(m, t, t', dm') + \varepsilon.\end{aligned}$$

Sous les mêmes hypothèses sur u que celles faites à propos des processus de Markov, le premier terme aura une limite donnée par (49).

En ce qui concerne le second, nous supposerons qu'on a

$$(66)\quad \lim_{t' \downarrow t} \frac{1}{t'-t} \int_{|m'-m|<\delta} [w(m,\ t,\ m',\ t') - u(t',\ m')]\ \mathrm{P}(m,\ t,\ t',\ dm') = \gamma(m,\ t),$$

la convergence étant localement bornée.

Sur w et u, il a été supposé que, sur le domaine d'intégration, ce sont des fonctions bornées de m, m', t'; les conditions (7) et (7 *bis*) nous permettent alors d'écrire

$$\lim_{t' \downarrow t} \frac{1}{t'-t} \int_{\mathrm{B}} [w(m,\ t,\ m'\ t') - u(t',\ m')]\ \mathrm{P}(m,\ t,\ t',\ dm') = \gamma(m,\ t)$$

et cette convergence est localement bornée.

Il en résulte que la quantité dont nous nous occupons tendra pour $t' \downarrow t$ vers

$$(67)\qquad \frac{1}{\mathrm{P}(t,\ \mathrm{A})} \int_{\mathrm{A}} \gamma(m,\ t)\ \mathrm{P}(t,\ dm).$$

Donc, moyennant les hypothèses faites sur w et sur u, la dérivée à droite de l'impulsion totale considérée est, dans le cas non markovien, la somme de (49), quantité analogue à ce qu'on avait trouvé dans le cas de Markov et de (67).

Nous allons montrer que dans (67) l'intégrale ne dépend que de l'allure du processus dans un voisinage arbitraire de la frontière de A.

On a, B étant un voisinage de la fermeture de A,

$$\int_{\mathrm{A}} \gamma(m,\ t)\ \mathrm{P}(t,\ dm) = \lim_{t' \downarrow t} \frac{1}{t'-t} \int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t,\ dm) \int_{\mathrm{B}} [w(m,\ t,\ m',\ t') - u(t',\ m')]\ \mathrm{P}(m,\ t,\ t',\ dm').$$

Par ailleurs on a, en vertu de (62),

$$\int_{\mathrm{A}} \mathrm{P}(t,\ dm) \int_{\mathrm{B}} [w - u(t',\ m')]\ \mathrm{P}(m,\ t,\ t',\ dm') = -\int_{\mathrm{E}-\mathrm{A}} \mathrm{P}(t,\ dm) \int_{\mathrm{B}} [w - u(t',\ m')]\ \mathrm{P}(m,\ t,\ t',\ dm').$$

Dans le second membre, la partie de l'intégrale correspondant au domaine d'intégration $m' \in \mathrm{B}$, $|m - m'| \geqq \delta$ est $o(t'-t)$ et ne contribue pas à la limite. Il ne reste donc dans celle-ci que ce qui provient du domaine $m \in \mathrm{E} - \mathrm{A}$, $m' \in \mathrm{B}$, $|m - m'| < \delta$. C'est-à-dire que m' reste à la fois dans B et à une distance $< \delta$ de $\mathrm{E} - \mathrm{A}$, et que m reste à la fois dans $E - A$ et à une distance $< \delta$ de B. L'un et l'autre restent donc dans un voisinage arbitraire de la frontière de A.

Si nous supposons, de plus, que la convergence qui définit γ est non seulement localement bornée, mais bornée sur E, nous pourrons déduire aisément de (62)

$$\int_E \gamma(m, t)\, P(t, dm) = 0. \tag{68}$$

Passons maintenant à l'étude de (65). Nous écrirons

$$m' \wedge w = m' \wedge u(t', m') + m \wedge [w - u(t', m')] + (m' - m) \wedge [w - u(t', m')].$$

Le premier terme fournira, comme dans le cas markovien, la quantité (50). Le second, vu les hypothèses faites au sujet de la définition de γ, et toujours en remplaçant, comme plus haut, le domaine E d'intégration par un voisinage de la fermeture de A, aura une limite égale à

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A m \wedge \gamma(m, t)\, P(t, dm). \tag{69}$$

Au sujet du troisième terme, nous supposerons que

$$\lim_{t' \searrow t} \frac{1}{t' - t} \int_{|m' - m| < \delta} (m' - m) \wedge [w(m, t, m', t') - u(t', m')]\, P(m, t, t', dm') = \mu(m, t), \tag{70}$$

la convergence étant localement bornée.

Il en résultera que le terme correspondant de l'intégrale aura une limite égale à

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A \mu(m, t)\, P(t, dm). \tag{71}$$

En vertu de (63), $\int_A (m \wedge \gamma + \mu)\, P(t, dm)$ dépendra uniquement de ce qui se passe au voisinage de la frontière de A, le raisonnement étant analogue à celui que nous avons fait pour γ. En supposant bornée, comme on l'a déjà fait, la convergence qui définit γ et celle qui définit μ bornée aussi, on aura la condition analogue à (68),

$$\int_E (m \wedge \gamma + \mu)\, P(t, dm) = 0. \tag{72}$$

5. Conclusion sur les grandeurs dynamiques. — Pour récapituler ces résultats, posons

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u + \frac{1}{2}\mathrm{K}\nabla\nabla u = \Gamma, \tag{73}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial m}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \Omega. \tag{74}$$

1° Dans le cas de Markov, les dérivées à droite au temps t de l'impulsion totale et du moment cinétique total du processus $\mathrm{M}(t')$ $(t' \geqq t)$ conditionnellement lorsque $\mathrm{M}(t) \in \mathrm{A}$ sont respectivement

$$\frac{1}{\mathrm{P}(t, \mathrm{A})}\int_{\mathrm{A}} \Gamma(t, m)\,\mathrm{P}(t, dm), \tag{75}$$

$$\frac{1}{\mathrm{P}(t, \mathrm{A})}\int_{\mathrm{A}} [m \wedge \Gamma(t, m) + \Omega]\,\mathrm{P}(t, dm). \tag{76}$$

2° Dans le cas non markovien, γ et μ ayant pour définitions respectivement (65) et (70), les dérivées en question sont respectivement

$$\frac{1}{\mathrm{P}(t, \mathrm{A})}\int_{\mathrm{A}} [\Gamma(t, m) + \gamma(t, m)]\,\mathrm{P}(t, dm). \tag{77}$$

$$\frac{1}{\mathrm{P}(t, \mathrm{A})}\int_{\mathrm{A}} [m \wedge (\Gamma + \gamma) + \Omega + \mu]\,\mathrm{P}(t, dm) \tag{78}$$

3° γ et μ sont astreints à vérifier les relations

$$\int_{\mathrm{E}} \gamma(t, m)\,\mathrm{P}(t, dm) = 0, \tag{68}$$

$$\int_{\mathrm{E}} (m \wedge \gamma + \mu)\,\mathrm{P}(t, dm) = 0. \tag{72}$$

De plus,

$$\int_{\mathrm{A}} \gamma(t, m)\,\mathrm{P}(t, dm) \quad \text{et} \quad \int_{\mathrm{A}} [m \wedge \gamma + \mu]\,\mathrm{P}(t, dm)$$

ne dépendent que de ce qui se passe dans un voisinage arbitraire de la frontière de A.

4° Enfin, si $k_{ij}(t, m) = k(t, m)\,\delta_{ij}$, c'est-à-dire si la diffusion est isotrope, on a

$$\Omega = k \operatorname{rot} u. \tag{79}$$

6. **Remarque sur les conditions** (67) **et** (71). — Jusqu'ici, nous nous sommes abstenu de faire des hypothèses sur ce qui se passait aux frontières, ou plus précisément nous avons admis l'absorption pour

compléter la définition de nos fonctions aléatoires, mais nous n'avons fait que des raisonnements qui éliminaient l'influence de ce choix particulier, en particulier dans la définition de l'impulsion totale. Mais faisons l'hypothèse que le processus $M(t)$ vérifie pour tout t et tout $t' > t$

$$P(t, E) = 1; \qquad P(m, t, t', E) = 1.$$

Si, de plus, nous remplaçons les conditions de convergence localement bornée (7 *bis*), (8 *bis*) et (9 *bis*) par les conditions correspondantes de convergence bornée sur E, d'une part $u(t, m)$ sera pour t fixé une fonction bornée sur E et, d'autre part, on pourra remplacer A par E dans les raisonnements du chapitre III, paragraphe 2. Alors, si nous posons

$$\overline{M}(t) = \int_E m\, P(t, dm), \tag{80}$$

nous aurons

$$\frac{d\overline{M}}{dt} = \int_E u(t, m)\, P(t, dm). \tag{81}$$

La dérivée n'est d'ailleurs avec nos hypothèses qu'une dérivée à droite, mais ici rien ne l'empêche d'être une dérivée ordinaire. La condition $P(t, E) = 1$ donne à $\frac{d\overline{M}}{dt}$ un sens physique évident qui justifie la définition de l'impulsion totale que nous avons posée au chapitre II, paragraphe 4.

De la même manière, la relation (48) nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt'}\int_E m'\, P(m, t, t', dm') = \int_E w(m, t, m', t')\, P(m, t, t', dm').$$

Moyennant un renforcement évident des hypothèses sur $u(t, m)$ et ses dérivées partielles, on aura ensuite

$$\frac{d^2\overline{M}}{dt^2} = \int_E \Gamma(t, m)\, P(t, dm). \tag{82}$$

Ceci sera vrai, que le processus soit de Markov ou non. De la même manière, en posant

$$j = \int_E m \wedge u(t, m)\, P(t, dm), \tag{83}$$

on aura

$$\frac{dj}{dt} = \int_E [m \wedge \Gamma(t, m) + \Omega]\, P(t, dm), \tag{84}$$

(81) et (83) contribuent à préciser le sens des relations (67) et (71).

Cas $k_{ij} = 0$. — Tous les raisonnements faits au cours du présent chapitre et de celui qui l'a précédé restent valables si l'on a identiquement $k_{ij} = 0$. Alors, la diffusion est dégénérée, et dans le cas markovien, la présente théorie ne fait que retrouver des formules classiques. Par contre, dans les cas non markoviens, elle constitue une mécanique aléatoire pour des processus stochastiques intéressants, puisque les hypothèses faites sur leur connexion sont faibles. Ces processus ne sont plus, à proprement parler, des processus de diffusion. Ils ont en commun, avec ces derniers, l'existence des termes γ et μ, et les propriétés démontrées de ceux-ci. Par contre, le terme Ω disparaît complètement.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

LES PROCESSUS DE MARKOV DYNAMIQUEMENT STATIONNAIRES.

1. **Perspective physique.** — Soit un point matériel qui reçoit, d'une part, d'un système physique D des impulsions aléatoires, ou chocs, réparties stochastiquement de façon homogène dans le temps et qui, d'autre part, est soumis à l'action d'un système F, cette action se laissant représenter comme l'effet d'un champ de forces certain, indépendant du temps et agissant sur notre point matériel selon les principes de la Mécanique classique entre les instants de chocs. Nous supposerons D et F sans interaction et négligerons la réaction du point matériel sur F. Mais, par contre, nous supposerons que le point matériel peut non seulement recevoir mais aussi céder de l'impulsion au système D et, de plus, que l'impulsion ainsi perdue par le point matériel dans une unité de temps

croît avec l'impulsion qu'il possède. Ceci est courant dans les phénomènes de diffusion, relatifs au mouvement brownien, où la perte d'impulsion que nous considérons est symbolisée par la force visqueuse. Si cette perte d'impulsion, qui est aléatoire, arrive à compenser en moyenne l'effet accélérateur du système F, on obtient un état d'équilibre statistique des échanges d'impulsion.

Traitant la trajectoire du point matériel comme une fonction aléatoire $M(t)$ dépendant d'un processus de diffusion markovien, l'homogénéité dans le temps des conditions physiques envisagées conduit à supposer le processus homogène dans le temps. Nous nous proposons ici de nous servir de grandeurs dynamiques que nous avons introduites au précédent chapitre pour exprimer la nullité en moyenne des échanges d'impulsion.

2. Les conditions de stationnarité dynamique. — Pour un processus homogène dans le temps, la probabilité de passage $P(m, t, t', A)$ ne dépend de t et t' que par leur différence. Il en résulte immédiatement, d'après les définitions mêmes de u_i et k_{ij}, que ces grandeurs ne dépendent pas du temps.

Toute formulation théorique des conditions de stationnarité dynamique doit avoir une signification purement locale. En effet, le phénomène de diffusion est un phénomène local, ainsi que l'action du champ de forces. Remarquons que si les conditions de stationnarité dynamique sont ainsi formulées de façon locale, les conditions aux frontières n'y interviendront pas, ce qui était *a priori* nécessaire.

Considérant, pour un domaine A contenu dans l'enceinte E et situé à une distance > 0 de la paroi de E, les réalisations de la fonction aléatoire qui vérifient $M(t) \in A$, nous leur attribuerons, d'après les principes posés dans la première partie du chapitre III, une impulsion totale et un moment cinétique total respectivement égaux au temps t à

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A u(m)\, P(t, dm) \quad \text{et} \quad \frac{1}{P(t, A)} \int_A m \wedge u(m)\, P(t, dm)$$

et au temps t' à

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_E u(m')\, P(m, t'-t, dm'),$$

$$\frac{1}{P(t, A)} \int_A P(t, dm) \int_E m' \wedge u(m')\, P(m, t', t, dm').$$

Pour exprimer la stationnarité dynamique nous supposerons que l'accroissement entre t et t' de cette impulsion et de ce moment cinétique sont $o(t'-t)$ et ceci quel que soit A et quel que soit t. Sous les hypothèses de la première partie, paragraphe 5 du chapitre IV, ceci s'écrit

$$\frac{1}{P(t, A)}\int_A \Gamma(m)\,P(t, dm) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{P(t, A)}\int_A (m \wedge \Gamma + \Omega)\,P(t, dm) = 0. \tag{2}$$

Comme nous avons affaire à un processus de Markov homogène dans le temps, la probabilité *a priori* $P(t, dm)$ doit pouvoir être choisie de façon absolument quelconque puisque le temps initial est sans signification dynamique, en ce sens que les différentes réalisations de $M(t)$ n'ont aucune relation dynamique entre elles. Nous devons donc écrire

$$\Gamma = 0, \tag{3}$$

$$\Omega = 0 \tag{4}$$

pour exprimer que (1) et (2) sont vérifiées quel que soit A et quel que soit t.

Explicitant Γ et Ω d'après (73) et (74), il vient, en remarquant que t a disparu, comme il se devait, de nos formules

$$\sum_j u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j,i} k_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} = 0, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j} k_{ij}\left(\frac{\partial m}{\partial x_j}\wedge\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial m}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0. \tag{6}$$

Réciproquement, (3) et (4) impliquent (1) et (2) quel que soit t et quelle que soit la probabilité *a priori*.

Les conditions (5) et (6) sont donc des conditions qui doivent être vérifiées par tous les processus de diffusion markoviens destinés à représenter un phénomène dynamiquement en équilibre, ceci quelle que soit la nature physique de la diffusion D et du champ F, et de quelque manière l'équilibre ait été atteint. Lorsque les coefficients de diffusion k_{ij} sont connus, (5) et (6) sont des équations sur la vitesse moyenne u. Mais observons que pour un phénomène dynamiquement stationnaire physiquement donné, la vitesse moyenne et les coefficients de diffusion ne sont l'une comme l'autre que des données statistiques, et que les coefficients de diffusion ne possèdent aucune priorité sur la vitesse moyenne, les deux aspects du processus de diffusion surgissant, si l'on peut dire, ensemble.

Néanmoins, ceci n'exclut pas que l'analyse du phénomène physique puisse nous conduire à déterminer théoriquement les k_{ij}, la vitesse moyenne demeurant une inconnue que les conditions (5) et (6) contribueront à fixer, et même éventuellement à déterminer complètement, moyennant des conditions aux frontières.

3. Cas de la diffusion homogène et isotrope. — Les remarques de la fin du précédent paragraphe nous amènent naturellement à considérer les conditions (5) et (6) dans le cas où la diffusion est isotrope, c'est-à-dire lorsque

$$k_{ij}(m) = k(m)\,\delta_{ij}, \qquad k>0, \quad \delta_{ij}=\begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases} \tag{7}$$

Alors (5) et (6) deviennent respectivement, en tenant compte de (79),

$$\sum_j u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot} u = 0. \tag{9}$$

En vertu de (9), nous pouvons introduire un potentiel S tel que

$$u = \operatorname{grad} S. \tag{10}$$

Si, de plus, la diffusion est homogène, c'est-à-dire si

$$k(m) = \text{Cte},$$

nous avons

$$\begin{aligned}\sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{k}{2}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} &= \sum_j \frac{\partial S}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\,\partial x_i} + \frac{k}{2}\,\frac{\partial^3 S}{\partial x_j^2\,\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}\right].\end{aligned}$$

Et, en introduisant une constante arbitraire A, (8) s'écrit

$$\frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} = A. \tag{11}$$

Posons maintenant

$$(12) \qquad \varphi = e^{\frac{S}{k}}.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = e^{\frac{S}{k}} \frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial x_j} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = \frac{1}{k} e^{\frac{S}{k}} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right)^2 \right].$$

Multiplions (11) membre à membre par $\frac{2}{k^2} e^{\frac{S}{k}}$, nous obtenons

$$e^{\frac{S}{k}} \frac{1}{k^2} \left[\sum_j \frac{\partial S^2}{\partial x_j} + k \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} \right] = \frac{2A}{k^2} e^{\frac{S}{k}}$$

et, finalement, en posant $\frac{2A}{k^2} = A'$,

$$(13) \qquad \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = A' \varphi.$$

De (10) et (12), nous tirons, φ étant essentiellement > 0,

$$(14) \qquad u = \frac{k}{\varphi} \operatorname{grad} \varphi.$$

Le problème de la stationnarité dynamique est donc ramené, lorsque la diffusion est homogène et isotrope et de coefficient k connu, à trouver une solution positive de (13), où A' est une constante arbitraire.

Dans de nombreux cas, ni S, ni par conséquent φ ne seront des fonctions uniformes. L'existence d'une solution uniforme de (13) présente cependant un intérêt particulier. On a, en effet, pour une telle solution,

$$\varphi^2 u_i - \frac{k}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_i} = \varphi^2 \frac{k}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - k\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Donc, si φ est de carré sommable, φ^2 est une densité de probabilité vérifiant

$$p \left(\frac{k}{\varphi} \operatorname{grad} \varphi \right) - \frac{k}{2} \operatorname{grad} p = 0,$$

donc fournissant une loi *a priori* stationnaire pour les processus dynamiquement stationnaires déterminés par φ. C'est une loi stationnaire extrêmement particulière puisque le courant est nul.

CHAPITRE II.

L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER CONSIDÉRÉE COMME RELATIVE A UN PROCESSUS DE DIFFUSION.

1. Introduction. — Soit un point matériel de masse m_0 et de coordonnées (x_1, x_2, x_3) soumis à des forces dérivant d'un potentiel $W(x_1, x_2, x_3)$. La mécanique quantique associe à ce système mécanique l'équation de Schrödinger :

$$\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{h^2}{2m_0}\sum_j \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} + W\psi = 0, \tag{15}$$

où ψ est une fonction complexe des (x_j) et du temps t, et h une constante dont il nous suffira de savoir ici qu'elle est positive et qu'elle a les dimensions d'une action, c'est-à-dire ML^2T^{-1}. ψ est assujettie à être continue, uniforme, de carré sommable et à vérifier

$$\int |\psi|^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 1. \tag{16}$$

Il est universellement admis que le carré du module de ψ est une densité de probabilité. $\psi^\star$ désignera la quantité complexe conjuguée de ψ, a sera son module, $\frac{b}{h}$ son argument. On aura donc

$$\psi = a\,e^{i\frac{b}{h}}, \qquad |\psi|^2 = a^2 = \psi\psi^\star. \tag{17}$$

De (1) nous tirons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^\star) &= \psi^\star\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^\star}{\partial t} \\
&= \psi^\star\left[i\frac{h}{2m_0}\sum_j\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} - i\frac{W}{h}\psi\right] + \psi\left[-i\frac{h}{2m_0}\sum\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial x_j^2} + i\frac{W}{h}\psi^\star\right] \\
&= i\frac{h}{2m_0}\sum_j\left(\psi^\star\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial x_j^2}\right) \\
&= -i\frac{h}{2m_0}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\psi\frac{\partial\psi^\star}{\partial x_j} - \psi^\star\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right];
\end{aligned}$$

or on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a\, e^{i\frac{b}{h}}\right) = \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{i}{h}\, a\, \frac{\partial b}{\partial x_j}\right) e^{i\frac{b}{h}},$$

$$\frac{\partial\psi^\star}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} - \frac{i}{h}\, a\, \frac{\partial b}{\partial x_j}\right) e^{-i\frac{b}{h}},$$

$$\psi\frac{\partial\psi^\star}{\partial x_j} - \psi^\star\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = -\,2\,\frac{i}{h}\, a^2\, \frac{\partial b}{\partial x_j}.$$

On pourra donc écrire comme conséquence de (15) les trois relations suivantes qui ne diffèrent que par l'écriture :

$$\psi^\star\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\frac{h}{2m_0}\sum_j \frac{\partial^2\psi^\star}{\partial x_j^2}\right] + \psi\left[\frac{\partial\psi^\star}{\partial t} + \frac{h}{2m_0}\sum_j \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}\right] = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi\psi^\star) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\psi^\star\frac{h}{2im_0}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \psi\frac{h}{2im_0}\frac{\partial\psi^\star}{\partial x_j}\right] = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a^2\frac{1}{m_0}\frac{\partial b}{\partial x_j}\right] = 0. \tag{20}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{a}e^{-i\frac{b}{h}}\left[\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{i}{h}\, a\frac{\partial b}{\partial t}\right]e^{-i\frac{b}{h}} = \left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}\right) + \frac{i}{h}\frac{\partial b}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{h}{2i}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{\psi^\star}\frac{\partial\psi^\star}{\partial t}\right) = \frac{h^2}{4m_0}\left[\frac{1}{\psi}\sum_j\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\psi^\star}\sum\frac{\partial^2\psi^\star}{\partial x_j^2}\right] - \mathrm{W}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{i}{h}\, a\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)e^{i\frac{b}{h}}\right]$$

$$= e^{i\frac{b}{h}}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2} + 2\frac{i}{h}\frac{\partial a}{\partial x_j}\frac{\partial b}{\partial x_j} + \frac{i}{h}\, a\frac{\partial^2 b}{\partial x_j^2} - \frac{1}{h^2}\, a\left(\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)^2\right]$$

et, finalement,

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{h^2}{2m_0}\,\frac{1}{a}\sum\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2m_0}\sum_j\left(\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)^2 - \mathrm{W}$$

que nous écrirons

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}\sum_j\left(\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)^2 - \frac{h^2}{2m_0}\,\frac{1}{a}\sum_j\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2} + \mathrm{W} = 0. \tag{21}$$

Les relations (20) et (21) ensemble sont équivalentes à l'équation de Schrödinger (15).

M. Fenyes a proposé de poser

$$\frac{b}{m_0} = \mathrm{S} - \frac{h}{m_0}\log a, \tag{22}$$

ce qui donne

$$a^2\frac{1}{m_0}\frac{\partial b}{\partial x_j} = a^2\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_j} - \frac{h}{m_0}a\frac{\partial a}{\partial x_j} = a^2\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_j} - \frac{h}{2m_0}\frac{\partial a^2}{\partial x_j}$$

et transforme (20) en équation de diffusion

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^2\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_j} - \frac{h}{2m_0}\frac{\partial a^2}{\partial x_j}\right) = 0; \tag{23}$$

quant à (21), M. Fenyes [9] la fait dériver, en même temps que (20), d'une condition d'extremum classique, mais dont la signification reste obscure et qui ne semble pas, pour l'instant, reliée directement aux questions de diffusion. Nous allons, dans ce chapitre, examiner, après l'avoir généralisée, l'hypothèse de M. Fenyes, du point de vue de la dynamique des processus de diffusion que nous avons développée dans les chapitres précédents.

2. Une relation différentielle entre le courant et l'impulsion dans les processus de diffusion homogènes et isotropes. — Dans une équation de diffusion,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{P}u_j - \frac{k}{2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{24}$$

Posons

$$\mathrm{P}u_j - \frac{k}{2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_j} = \mathrm{P}v_j, \tag{25}$$

d'où

$$v_j = u_j - \frac{k}{2}\frac{\partial \log \mathrm{P}}{\partial x_j} \tag{26}$$

et

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathrm{P}v_j) = 0. \tag{27}$$

Calculons alors la quantité

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - \frac{k}{2}\frac{\partial \log \mathrm{P}}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 \log \mathrm{P}}{\partial x_i\,\partial t}. \tag{28}$$

D'après (27),

$$\frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{P}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(P v_j)\right]$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right).$$

En remplaçant v_j par sa valeur (26), il vient

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 \log P}{\partial x_j^2} + u_j\left(\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right)^2\right].$$

Par ailleurs,

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left(u_j - \frac{k}{2}\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i - \frac{k}{2}\frac{\partial \log P}{\partial x_i}\right),$$

d'où

$$(30)\qquad v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{k}{2}\left(\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial x_j}\right) + \frac{k^2}{4}\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Dans la somme $\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, nous trouverons d'abord des termes qui ne dépendent pas de P, soit

$$(31)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \, \partial x_i}$$

que nous écrirons

$$(32)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Les termes indépendants des u_j sont

$$(33)\qquad \sum_j\left\{-\frac{k^2}{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 \log P}{\partial x_j^2} + \left(\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right)^2\right] + \frac{k^2}{4}\frac{\partial \log P}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial x_j}\right\}$$
$$= -\frac{k^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_j \frac{\partial^2 \sqrt{P}}{\partial x_j^2}.$$

Enfin, les termes dépendant des u_j et de P,

$$(34)\qquad \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j u_j \frac{\partial \log P}{\partial x_j}\right) - \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial \log P}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{k}{2}\sum_j u_j \frac{\partial^2 \log P}{\partial x_i \, \partial x_j}$$
$$= \frac{k}{2}\sum_j \frac{\partial \log P}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Groupons le second membre de (34) et le dernier terme de (32), leur somme s'écrit

$$\frac{k}{2}\frac{1}{P}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[P\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right].$$

Et finalement (32), (33) et (34) nous fournissent le résultat

$$\begin{aligned}(35)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_j v_j\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} &+\sum_j\left[u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{k}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}\right]\\ &-\frac{k^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\sqrt{P}}\sum_j\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2}\right)\\ &+\frac{k}{2}\frac{1}{P}\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[P\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right].\end{aligned}$$

Ceci étant une conséquence de (24) et (25) seuls, ou aussi bien de leurs équivalents (26) et (27).

D'après (26), les deux conditions

$$(36)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}=0 \qquad\text{et}\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0$$

sont équivalentes. Elles impliquent l'identique nullité du dernier groupe de termes de (35). Si nous posons alors

$$(37)\qquad a>0,\qquad P=a^2,\qquad v_i=\frac{1}{m_0}\frac{\partial b}{\partial x_j},\qquad u_i=\frac{\partial S}{\partial x_i},$$

(26) s'écrit alors, à une constante additive près, sans importance

$$(38)\qquad \frac{b}{m_0}=S-k\log a$$

et (35) devient, toujours à une constante additive près,

$$(39)\quad \frac{\partial b}{\partial t}+\frac{1}{2m_0}\sum\left(\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)^2=m_0\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2+\frac{k}{2}\sum_j\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}-\frac{k^2}{2}\frac{1}{a}\sum_j\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2}\right]$$

en vertu des deux identités

$$\begin{aligned}(40)\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{1}{2m_0}\sum_j\left(\frac{\partial b}{\partial x_j}\right)^2\right] &= m_0\left[\frac{1}{m_0}\frac{\partial^2 b}{\partial x_i\,\partial t}+\frac{1}{m^2}\sum_j\frac{\partial b}{\partial x_j}\frac{\partial^2 b}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]\\ &= m_0\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_j v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(41)\qquad &\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_j\left(\frac{\partial S}{\partial x_j}\right)^2+\frac{k}{2}\sum_j\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}\right]\\ &\qquad=\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial t}+\sum_j\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\,\partial x_i}+\frac{k}{2}\frac{\partial^3 S}{\partial x_i\,\partial x_j^2}\\ &\qquad=\left[\frac{\partial}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{k}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right).\end{aligned}$$

3. Généralisation de l'hypothèse de M. Fenyes; la relation (20) **considérée comme une équation de diffusion de coefficient constant quelconque.** — Par sa condition (22), M. Fenyes prenait comme coefficient de diffusion $\frac{h}{m_0}$. Pour notre part, nous prendrons une constante arbitraire k en posant (38) comme définition de S. Nous aurons alors

$$a^2 \frac{1}{m_0} \frac{\partial b}{\partial x_j} = a^2 \frac{\partial S}{\partial x_j} - \frac{k}{2} \frac{\partial a^2}{\partial x_j}$$

et (5) deviendra l'équation de diffusion

$$(42) \qquad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^2 \frac{\partial S}{\partial x_j} - \frac{k}{2} \frac{\partial a^2}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Il nous reste à exprimer la relation (6) en fonction de S et a pour avoir deux relations équivalentes à l'équation de Schrödinger. La relation (39) est à notre disposition puisque nous avons (38) et (37) et que ces deux dernières ensemble identifient (42) et (24). En la portant dans (6), nous obtenons immédiatement

$$(43) \quad m_0 \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial S^2}{\partial x_j^2} \right) + \frac{k}{2} \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} \right] - \frac{1}{2} \left(k^2 m_0 + \frac{h^2}{m_0} \right) \frac{1}{a} \sum_j \frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2} + W = 0.$$

Par dérivation en x_i, cela donne, d'après (41),

$$(44) \quad m_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) + \sum_j \frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) + \frac{k}{2} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \left(k^2 + \frac{m_0^2}{h^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x_j} \right) \right] = - \frac{\partial W}{\partial x_i}.$$

Posant maintenant

$$(45) \qquad a^2 = p, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_i} = u_i, \qquad \frac{1}{2} \left(k^2 + \frac{h^2}{m_0^2} \right) = \alpha^2.$$

Les équations (42) et (44) s'écrivent

$$(46) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[p u_j - \frac{k}{2} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] = 0,$$

$$(47) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \alpha^2 \operatorname{grad} \left(\sum_j \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2 \sqrt{p}}{\partial x_j^2} \right) = - \frac{\operatorname{grad} W}{m_0},$$

$$(48) \qquad \operatorname{rot} u = 0.$$

Ce sont ces relations, dont l'ensemble est équivalent à l'équation de Schrödinger, que nous allons examiner du point de vue de la dynamique des processus de diffusion.

4. Étude dynamique des processus de diffusion attachés à l'équation de Schrödinger. — Nous nous posons ici le problème suivant : l'équation de Schrödinger fournissant des conditions d'évolution avec le temps pour une loi de probabilité, nous supposons que cette loi est la loi de probabilité *a priori* d'un processus de diffusion; l'équation de Schrödinger fournissant également des relations où figurent des grandeurs ayant un sens dynamique pour le processus de diffusion proposé, quel est ce sens?

Nous laissons de côté l'aspect physique de l'hypothèse de diffusion pour nous occuper seulement de sa cohérence du point de vue du calcul des probabilités : d'après (47), l'évolution de u dépend de la valeur de p, à l'instant initial. Donc, la relation (46) n'est pas une équation linéaire en p et le processus n'est pas de Markov. Il faut donc s'attendre à trouver dans les grandeurs dynamiques les termes γ et μ considérés au chapitre IV, paragraphe 4. Ces termes, rappelons-le, dépendent en général de p. Le γ est relié à p par la condition

$$\int \gamma p \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 0 \tag{49}$$

et, de plus, l'intégrale indéfinie de γp doit ne dépendre que des valeurs dans un voisinage de la frontière du domaine d'intégration. L'équation (47) nous incite à essayer de poser

$$\gamma = -\alpha^2 \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2}\right) \tag{50}$$

et ceci, en effet, est compatible avec nos conditions, car on a pour une fonction a quelconque > 0 la suite d'identités

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2}\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_j^2} + \left(\frac{\partial \log a}{\partial x_j}\right)^2\right],$$

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \log a}{\partial x_j}\right)^2 = 2a^2 \frac{\partial \log a}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial a^2}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial x_j^2}\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_j^2}\right) + \frac{\partial a^2}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \log a}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^2 \frac{\partial^2 \log a}{\partial x_i \, \partial x_j}\right).$$

Avec $a = \sqrt{p}$, en sommant sur j, on a

$$p \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2 \sqrt{p}}{\partial x_j^2} \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p \frac{\partial^2 \log \sqrt{p}}{\partial x_i \, \partial x_j} \right). \tag{51}$$

Chacune des composantes des $p\gamma$ est donc une divergence et remplit bien la condition d'avoir une intégrale ne dépendant que des valeurs à la frontière. Conséquemment, la vérification de (49) ne dépendra que du comportement de p à la frontière.

Faisant l'hypothèse (50), nous pourrons écrire (47) sous la forme

$$m_0(\Gamma + \gamma) = -\operatorname{grad} W. \tag{52}$$

Passons aux conditions sur le moment cinétique. La condition (48) s'écrit

$$\Omega = 0; \tag{53}$$

nous ne savons rien sur μ si ce n'est que l'intégrale indéfinie de $p(m \wedge \gamma + \mu)$ doit être un terme de frontière. Considérons la composante sur x_3 de $pm \wedge \gamma$, c'est, à un coefficient constant près,

$$\begin{aligned} & p x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_j \frac{\partial^2 \sqrt{p}}{\partial x_j^2} \right) - p x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} \right) \\ &= x_1 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p \frac{\partial^2 \log \sqrt{p}}{\partial x_2 \, \partial x_j} \right) - x_2 \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p \frac{\partial^2 \log \sqrt{p}}{\partial x_1 \, \partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x_1 p \frac{\partial^2 \log \sqrt{p}}{\partial x_2 \, \partial x_j} - x_2 p \frac{\partial^2 \log \sqrt{p}}{\partial x_1 \, \partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Cette quantité est une divergence, il en serait de même des deux autres composantes de $pm \wedge \gamma$. Nous admettrons en conséquence que $\mu = 0$. Tenant compte alors de (52) et (53), nous aurons

$$m \wedge (\Gamma + \gamma) + \Omega + \mu = -m \wedge \frac{\operatorname{grad} W}{m_0}. \tag{54}$$

Les relations (52) et (54) signifient, d'après la première partie, chapitre IV, que si en un temps t on considère pour un volume A l'ensemble des déterminations de la fonction aléatoire qui vérifient $M(t) \in A$, l'augmentation instantanée de leur impulsion moyenne est la moyenne de $-\operatorname{grad} W$, et l'augmentation instantanée de leur moment cinétique moyen est $-m \wedge \operatorname{grad} W$.

5. **Remarque concernant les conséquences expérimentales de la diffusion.** — Les conditions aux frontières, la plupart du temps à l'infini, auxquelles doit être assujettie la fonction d'onde ne sont pas très bien fixées habituellement. Dans l'hypothèse de la diffusion, la condition (49), ensemble avec (51), permet de les préciser. Par ailleurs, la définition précise de l'impulsion qui doit être associée à ψ dans l'hypothèse de diffusion

$$mu_i = m\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{\partial b}{\partial x_i} + mk\frac{\partial \log a}{\partial x_i}$$

coïncide avec $\dfrac{\partial b}{\partial x_i}$ dans le cas de l'onde plane

$$a^2 = \mathrm{Cte}, \qquad b = \sum_j b_j x_j - \mathrm{E}t.$$

Il n'en est pas de même si a^2, c'est-à-dire la densité de probabilité, n'est pas une constante. On peut, en prenant pour a^2 une loi de Laplace-Gauss, par exemple, les problèmes de Scattering se trouvant ainsi reposés, envisager de calculer k à partir de là.

En considérant la relation, dérivée du (47) de la première partie,

$$\sigma\left[\frac{m}{2}\sum_j\left(\frac{\delta x_i}{\delta t}\right)^2\right]\delta t \geqq \left(\frac{\sqrt{3}\,m}{\sqrt{2}}k - \varepsilon\right)$$

pour δt assez petit, comme analogue à la « quatrième relation de Heisenberg »,

$$\Delta \mathrm{E}\,\Delta t \geqq h, \tag{55}$$

on peut supposer

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{h}{m}.$$

Enfin, remarquons qu'on peut aussi bien supposer $k = 0$, c'est-à-dire une diffusion dégénérée. Mais alors, la condition $\operatorname{rot} u = 0$ n'a plus le sens dynamique que nous lui avons reconnu dans le cas $k > 0$, et l'on n'obtient plus (55).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Paris, 1948, p. 27.

[2] Fenyes, *Eine Warscheinlichkeits theoretische Begrundung und Interpretation der Quanten mechanik* (*Z. Physik*, t. 132, 1952, p. 81-106).

[3] J. von Neumann, *Fondements mathématiques de la Mécanique quantique*, trad. Proca, Paris, 1946.

[4] Sur les fonctions aléatoires, *cf.* Blanc-Lapierre et Fortet, chap. I et III; *cf.* également Dedebant et Wehrlé, *Mécanique aléatoire* (*Portugaliæ Phys.*, t. 1-2, 1944, p. 95-150 et 179-294).

[5] Sur la notion de processus stochastique selon M. Paul Lévy, *cf.* P. Lévy, *Random functions*, etc., Univ. California Publ. in Statistics, t. 1, 1953, p. 331-390.

[6] Sur la définition des processus de Markov, *cf.* Blanc-Lapierre et Fortet, *op. cit.*, chap. VII, § 11.

[7] Feller, Sur les conditions définissant la diffusion (cas de Markov : *Zur theorie des stochastiche Processe* (*Math. Ann.*, t. 113, 1937, p. 113-160); Sur le rôle de la condition (7) : *Diffusion processes in one dimension* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 77, 1954, p. 1-31); Sur la structure des processus de Markov de diffusion : Blanc-Lapierr et Fortet, *loc. cit.*

[8] Sur le cas u continue non bornée, *cf.* Feller, *op. cit.*, 1954.

[9] Fenyes, *op. cit.*

TABLE DES MATIÈRES.