

# ANNALES DE L'I. H. P.

BERNARD KWAL

## Quelques progrès récents de la théorie des chocs atomiques

*Annales de l'I. H. P.*, tome 12, n° 4 (1951), p. 171-206

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1951\\_\\_12\\_4\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_4_171_0)

© Gauthier-Villars, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Quelques progrès récents de la théorie des chocs atomiques

par

Bernard KWAL.

---

## CHAPITRE I.

### DIFFUSION MULTIPLE DES PARTICULES CHARGÉES.

1. **Introduction.** — Nous allons étudier les modifications opérées par les chocs atomiques sur les trajectoires des particules chargées, rapides, lorsque celles-ci traversent une certaine épaisseur  $t$  de matière. Les modifications ici en cause, sont le déplacement dans l'espace et le changement de direction de la trajectoire de la particule émergente par rapport à la trajectoire primitive.

Nous dirons que la particule a subi une *diffusion simple, plurale ou multiple*, selon qu'elle aura été l'objet, en cours de route, d'une seule collision, d'un nombre restreint, ou d'un nombre très grand des collisions, respectivement. Dans ce dernier cas, qui est le sujet principal de cette conférence, la théorie d'un choc simple doit être combinée aux considérations statistiques, basées sur l'étude de la fonction de distribution des paramètres (déplacement dans l'espace, angle de direction) qui définissent les modifications opérées sur la trajectoire.

2. **Théorie de la diffusion simple.** — La diffusion simple est due surtout à l'action coulombienne des noyaux atomiques de charge  $Ze$  sur la particule de charge  $ze$  en mouvement. Elle s'exprime par la formule de Rutherford, qui fournit la probabilité de déviation de la trajectoire sous un certain angle  $\theta$ . Cette formule est valable aussi bien dans le cadre de la mécanique classique que dans celui de la mécanique ondu-

latoire, à condition de négliger le terme d'échange (qui apparaît lorsque les particules, diffusantes et diffusées, sont de même espèce), ainsi que le terme de spin. Cette circonstance remarquable, la validité de la formule de Rutherford, aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique ondulatoire, tient à la particularité du champ coulombien d'être en  $r^{-2}$  en fonction de la distance. Toute autre forme du champ conduit aux expressions différentes dans les deux mécaniques.

Mais le point très important est que, même dans le cas du champ coulombien, les deux mécaniques interprètent différemment la façon dont se produit la déviation de la trajectoire sous un même angle  $\theta$ . Car, selon la mécanique classique, une telle déviation provient d'un choc qui s'effectue à la distance  $\frac{Zz e^2}{M v^2 \theta}$  du centre diffuseur, tandis que, selon la mécanique ondulatoire, cette dernière distance est de l'ordre de  $\frac{\hbar}{2\pi M v \theta}$ . Leur rapport est égal à

$$(1) \quad \gamma = \frac{Zz e^2}{\hbar v} = \left( \frac{1}{137} \right) \frac{Zz}{\beta},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Lorsque  $\gamma > 1$ , la distance « classique » déborde la distance « ondulatoire » et nous avons droit d'employer les méthodes de la mécanique classique.

On peut préciser cette condition de validité de l'image classique du mouvement d'une particule chargée, dans un champ de force dans lequel l'énergie d'interaction est égale à  $U$ , par le raisonnement bien connu que voici :

Pour qu'on puisse user de la description du choc en termes de la mécanique classique, il est nécessaire que les longueurs d'onde de Broglie qui entrent dans la composition du paquet d'ondes représentant le corpuscule soient inférieures aux dimensions  $a$  de la région où s'étend le champ d'interaction

$$(2) \quad \frac{\hbar}{M v} \ll a,$$

et que la quantité de mouvement  $p$  transférée au cours de l'interaction et qui est égale à  $\frac{U}{v}$ ,  $U$  étant l'énergie d'interaction, soit supérieure à

l'incertitude  $\frac{\hbar}{a}$  dont est entachée la quantité de mouvement, du fait que la particule est localisée dans le domaine des dimensions  $a$ .

On doit donc avoir

$$(3) \quad \frac{U}{v} \geq \frac{\hbar}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{Ua}{\hbar v} \geq 1.$$

Lorsque l'énergie d'interaction est du type coulombien,  $U = \frac{Zze^2}{a}$  et la relation (3) s'écrit

$$(4) \quad \gamma = \frac{Zze^2}{\hbar v} \geq 1.$$

**3. Approximation de Born et la formule de Rutherford.** — Lorsque la condition (4) n'est pas satisfaite, l'image classique ne peut plus être utilisée et nous devons faire appel aux raisonnements de la mécanique ondulatoire.

Selon l'idée fondamentale de M. L. de Broglie, le mouvement d'une particule libre dans la direction  $Oz$  est représenté par une onde plane

$$(5) \quad \psi_0 = A e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{h}{p}.$$

Supposons maintenant que la particule se meut dans un champ de forces dérivant d'un potentiel  $U(r)$ . Soit  $\psi$  la fonction d'onde qui décrit le mouvement et plaçons-nous dans un des trois cas suivants :

I. *Cas non relativiste.* — Équation de Schrödinger

$$(6.I) \quad \Delta\psi + \frac{8\pi^2 M}{\hbar^2} [E - U(r)] = 0.$$

II. *Cas relativiste sans spin.* — Équation de Gordon-Klein

$$(6.II) \quad \Delta\psi + \left( \frac{4\pi^2}{\hbar^2 c^2} \right) [E - U(r)]^2 - M^2 c^4 \psi = 0.$$

III. *Cas relativiste avec spin.* — Équation de second ordre de Dirac

$$(6.III) \quad \left\{ \Delta + \frac{4\pi^2}{\hbar^2} - \frac{8\pi^2 M}{\hbar^2 \sqrt{1-\beta^2}} \left[ U - \frac{U^2 \sqrt{1-\beta^2}}{2Mc^2} - i \frac{dU}{dr} \frac{2\pi\rho(\sigma, r)}{\hbar cr} \right] \right\} \psi.$$

Dans ces équations

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar \sqrt{1-\beta^2}}{Mv}.$$

L'équation de second ordre de Dirac diffère de l'équation de Gordon-Klein par un terme proportionnel à  $\frac{\partial U}{\partial r}$  qui représente l'effet de spin.

Aux distances du noyau, grandes par rapport à  $\frac{\lambda}{2\pi}$ , ce dernier terme, ainsi que le terme en  $U^2$  sont négligeables. Comme, d'autre part, la diffusion sous l'angle  $\theta$  dans un champ coulombien, est due aux actions qui s'étendent sur les distances de l'ordre de  $\frac{\lambda}{\theta}$ , on voit que les champs qui s'étendent sur les distances supérieures à  $\lambda$  ne donnent que des déviations sous des angles  $\theta$  très petits.

L'équation d'ondes que nous devons envisager s'écrit donc

$$(7) \quad \left[ \Delta + \left( \frac{4\pi}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{8\pi^2 M}{h^2 \sqrt{1-\beta^2}} \right) U(r) \right] \psi = 0$$

dont nous allons chercher les solutions de la forme  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , en supposant que le champ d'interaction  $U(r)$  est suffisamment faible (*approximation de Born*). On trouve alors

$$(8) \quad \left[ \Delta + \left( \frac{4\pi}{\lambda} \right)^2 \right] \psi_1 = \left( \frac{8\pi^2 M}{h^2 \sqrt{1-\beta^2}} \right) U(r) \psi_0$$

qui admet comme solution aux grandes distances  $R$  du centre diffuseur, l'expression suivante :

$$(9) \quad \psi_1 = \frac{2\pi M}{R h^2 \sqrt{1-\beta^2}} \int v(r) e^{2\pi i (R-r)} \psi_0 dv_r,$$

qui, dans le cas du champ coulombien, conduit à la formule de diffusion de Rutherford

$$(10) \quad P(\theta) = |\psi_1(R, \theta)|^2 R^2 = \frac{Z^2 e^4 (1-\beta^2)}{M^2 v^4 \sin^4 \left( \frac{1}{2} \theta \right)}.$$

En tenant compte de l'effet de spin, les équations du second ordre de Dirac nous fournissent la formule de Rutherford-Mott :

$$(11) \quad P(\theta) = Z^2 e^4 (1-\beta^2) \frac{\left[ 1 - \beta^2 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \theta \right) \right]}{M^2 v^4 \sin^4 \left( \frac{1}{2} \theta \right)}.$$

Lorsque les déviations subies par les particules sont suffisamment petites, on peut écrire

$$2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \theta \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 1.$$

En posant alors

$$(12) \quad k = 2\pi Nt \frac{Z^2 e^4 (1 - \beta^2)}{M^2 c^4 \beta^4},$$

où  $N$  désigne le nombre d'atomes par centimètre cube et  $t$  l'épaisseur de matière traversée, la formule de Rutherford s'écrit

$$(13) \quad P(\theta) d\theta = 2k\theta^{-3} d\theta.$$

Nous supposons que dans la traversée de l'épaisseur  $t$ , l'énergie de la particule rapide reste sensiblement constante.

Ce qui intéresse les expérimentateurs, c'est la projection du mouvement des particules sur le plan perpendiculaire à la direction d'observation, plan qui contient la trajectoire initiale. On démontre que la distribution de la déviation projetée suit la loi suivante :

$$(14) \quad P(\Phi) d\Phi = \frac{k d\Phi}{\Phi^3}.$$

**4. Diffusion multiple.** — Nous allons maintenant définir avec Williams [1] un angle  $\Phi_1$  tel que la particule en traversant le diffuseur ne subit, en moyenne, qu'un seul choc qui la dévie d'un angle supérieur à  $\Phi_1$ . Comme  $P(\Phi)$  ( $\sim \Phi^{-3}$ ) varie très rapidement avec  $\Phi$ , les chocs simples ( $\Phi > \Phi_1$ ) sont peu nombreux, tandis que les chocs pour lesquels  $\Phi < \Phi_1$  sont au contraire très nombreux et nous allons admettre que la déviation résultante  $\alpha_1$ , due à ces derniers chocs, suit la loi d'erreurs de Gauss-Laplace

$$(15) \quad P_1(\alpha_1) d\alpha_1 = \frac{2}{\pi \alpha_1} e^{-\frac{\alpha_1^2}{\pi \bar{\alpha}_1^2}} d\alpha_1,$$

où  $\bar{\alpha}_1$  est la moyenne arithmétique des  $\alpha_1$ .

Étant donné la définition de  $\Phi_1$ , on a

$$(16) \quad \int_{\Phi_1}^{\pi} P(\Phi) d\Phi \approx 1$$

et comme  $P(\Phi) = k\Phi^{-3}$ , on en tire

$$(17) \quad \Phi_1^2 = \frac{1}{2}k = \pi N t \frac{Z^2 e^4 (1 - \beta^2)}{M^2 c^4 \beta^4}.$$

Nous pouvons passer maintenant au calcul de la déviation moyenne  $\bar{\alpha}_1$ , due à la diffusion multiple sous des angles inférieurs à  $\Phi_1$ . On a, par définition,

$$\bar{\alpha}_1^2 = \frac{2}{\pi} \bar{\alpha}_1^2 \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_1^2 = \int_0^{\Phi_1} \Phi^2 P(\Phi) d\Phi,$$

d'où il vient

$$(18) \quad \bar{\alpha}_1^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Phi_1} \Phi^2 P(\Phi) d\Phi = \frac{2k}{\pi} [\text{Log } \Phi]_{\Phi_{\min}}^{\Phi_1} = \Phi_1^2 \frac{4}{\pi} \text{Log } \frac{\Phi_1}{\Phi_{\min}}.$$

Nous voyons donc que la déviation moyenne due à la diffusion multiple dépend uniquement de deux angles, l'angle limite  $\Phi_1$ , précédemment défini, au delà duquel nous avons affaire à la diffusion simple, et l'angle minimum  $\Phi_{\min}$ . L'existence de ce dernier angle est le résultat du fait que l'action coulombienne du noyau diffuseur ne s'étend pas à l'infini, mais cesse pratiquement à partir d'une certaine distance, en conséquence de l'action neutralisante des électrons du cortège.

**5. Effet d'écran dû aux électrons du cortège.** — Pour tenir compte de cet effet, on doit représenter le champ électrostatique du noyau, non pas par le potentiel coulombien, mais par un potentiel modifié.

Une méthode approchée, mais qui donne d'assez bons résultats, consiste à représenter le champ électrostatique des noyaux par le potentiel de la forme

$$(19) \quad U(r) = \left( \frac{Ze^2}{r} \right) e^{-\frac{r}{a}},$$

avec

$$(20) \quad a = Z^{-\frac{1}{3}} a_0 = Z^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{\hbar c}{e^2} \right)^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) = (137)^2 Z^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right),$$

ce qui a pour conséquence une modification de la loi de Rutherford, qui prend la forme

$$(21) \quad P_{\text{écr}}(\theta) = P(\theta) \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{\lambda}{2\pi a} \right) \sin \left( \frac{1}{2} \theta \right) \right]^2 \right\}^{-2}.$$

L'effet d'écran réduit donc fortement la diffusion à partir de l'angle

$$(22) \quad \theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{2\pi a},$$

au cas où l'approximation de Born en mécanique ondulatoire est valable ( $\gamma \ll 1$ ); tandis que dans le domaine de l'applicabilité de la mécanique classique ( $\gamma \gg 1$ ), nous devons prendre

$$(23) \quad \theta_{\min}^{\text{cl}} = \gamma \theta_{\min}^{\text{B}} = \frac{Zz e^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{m v^2 a}.$$

Mais la formule (19) n'est pas suffisante pour calculer avec une bonne précision les effets de la diffusion multiple des particules cosmiques. Williams, aussi bien que Goudsmit et Saunderson [3], se servent alors des calculs de Bullard et Massey, basés sur le potentiel résultant de la théorie statistique de l'atome de Thomas-Fermi.

La formule (13) est alors remplacée par

$$(24) \quad P'_{\text{écr}} = P(\theta) F\left(\frac{2\pi a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda}\right),$$

où  $F$  est une certaine fonction, pour laquelle Bullard et Massey dressèrent une table des valeurs numériques. S'en étant servi, Williams a obtenu les expressions suivantes pour  $\theta_{\min}$ ,  $\Phi_{\min}$  et  $\bar{\alpha}_1$ :

$$(25) \quad \theta_{\min}^{\text{B}} = 2,10 \left(\frac{\lambda}{2\pi a}\right),$$

$$(26) \quad \Phi_{\min}^{\text{B}} = 1,75 \left(\frac{\lambda}{2\pi a}\right),$$

$$(27) \quad \bar{\alpha}_1^2 = \delta^2 \text{Log } \mathcal{N}.$$

Avec

$$(28) \quad \delta = \sqrt{\frac{k}{\pi}} = 2 \sqrt{N} t \frac{Zz e^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{M c^2 \beta^2}.$$

Si l'on se sert de  $\delta$  comme unité d'angle, alors on a

$$(27 \text{ bis}) \quad \bar{\alpha}_1^2 = \text{Log } \mathcal{N}$$

et

$$(29) \quad \Phi_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$



Quant à la grandeur

$$(30) \quad \mathcal{N} = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_{\min}^2},$$

elle représente le nombre moyen de chocs diffusants sous des angles  $\Phi < \Phi_1$  et elle est égale, selon l'approximation employée, classique, ou celle ondulatoire de Born, aux expressions suivantes, respectivement :

$$(31) \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_{cl} = 0,20 \pi N t Z^{-\frac{2}{3}} \left( \frac{h^2}{4 \pi^2 m c^2} \right) \quad (\gamma \gg 1),$$

$$(32) \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_B = 0,64 \pi N t Z^{\frac{4}{3}} z^2 \beta^{-2} \left( \frac{h}{2 \pi m c} \right) \quad (\gamma \ll 1).$$

Dans le calcul de la moyenne  $\bar{\alpha}_1$ , nous n'avons tenu compte que de l'effet multiple, représentée par la distribution gaussienne  $P_1(\alpha_1)$ , de petites déviations nucléaires sous des angles  $\Phi$ , inférieurs à  $\Phi_1$ . Mais la déviation simple, une en moyenne, sous des angles  $\Phi > \Phi_1$ , apporte elle aussi une contribution à la déviation moyenne, de sorte que nous devons estimer cette dernière comme égale, non pas à  $\bar{\alpha}_1$ , mais à

$$(33) \quad (\bar{\alpha}_1^2 + \Phi_1^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les courbes de la figure 1, extraite du Mémoire de Williams [1], montrent de quelle manière jouent ces deux effets :

La courbe A correspond à la diffusion multiple, décrite par la loi

$$(34) \quad P_1(\alpha_1) = \left( \frac{2}{\pi \alpha_1} \right) \exp \left[ - \frac{\alpha_1^2}{\pi \alpha_1^2} \right],$$

tandis que la courbe B, à la diffusion simple décrite par la loi

$$(35) \quad P(\Phi) = \frac{\pi}{\Phi^3}.$$

En prenant pour unité d'angle  $\delta$ , les deux courbes se coupent au point auquel correspond un certain angle  $\Phi_2$ , défini par

$$(36) \quad \left( \frac{2}{\pi \alpha_1} \right) \exp \left[ - \frac{\Phi_2^2}{\pi \alpha_1^2} \right] = \frac{\pi}{\Phi_2^3}.$$

En tenant compte de la valeur de  $\Phi_{\min}$ , Williams obtient la formule suivante pour la déviation projetée, moyenne :

$$(37) \quad \alpha = \left[ 3,69 + 0,28 \log_{10} \left( \frac{Z^{\frac{4}{3}} dt}{A \beta^2} \right) \right] \delta = 0,80 \bar{\alpha}_1 + 1,45 \delta.$$

Quelle est la distribution des angles dans la région  $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$ ? Admettons qu'elle est approximativement gaussienne, avec une déviation moyenne  $\alpha_m$ , égale à la déviation moyenne  $\bar{\alpha}$ , due à tous les angles,

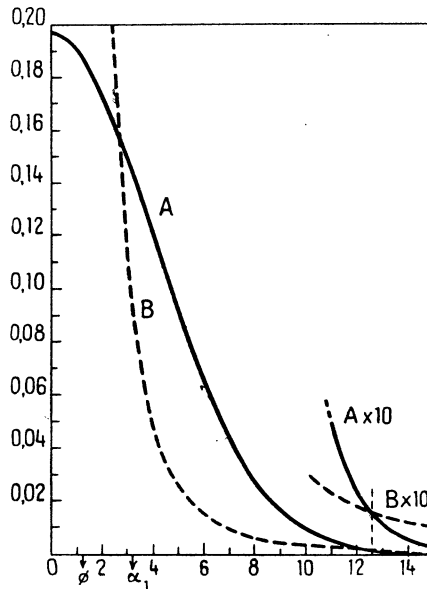


Fig. 1.

moins la contribution des déviations sous des angles supérieurs à  $\Phi_2$ . Comme  $\Phi_2 \gg \alpha_1$ , cette dernière contribution est égale à

$$(38) \quad \alpha_s = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \Phi \left( \frac{\pi}{\Phi^3} \right) d\Phi = \left( \frac{\pi}{\Phi_2} \right) \delta.$$

De sorte que

$$(39) \quad \alpha_m = \alpha - \left( \frac{\pi}{\Phi_2} \right) \delta.$$

Finalement nous voyons que la distribution des déviations est représentée par la somme

$$(40) \quad P(\alpha) = G(\alpha) + S(\alpha),$$

où  $G(\alpha)$  est la distribution gaussienne avec la déviation moyenne  $\alpha_m$ ,

$$(41) \quad G(\alpha) = \left( \frac{1-\pi}{2\Phi_2^2} \right) \left( \frac{2}{\pi\alpha_m} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{\pi\alpha_m^2}},$$

tandis que  $S(\alpha)$  est une distribution de déviations simples de Rutherford, débutant par l'angle  $\Phi_2$

$$(42) \quad \begin{cases} S(\alpha) = 0 & \text{pour } \alpha < \Phi_2, \\ S(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha^3} & \text{pour } \alpha > \Phi_2, \\ \Phi_2 = 5,1\bar{\alpha}_1 - 4,0\delta. \end{cases}$$

Comme la diffusion est simple pour les angles supérieurs à  $\Phi_2$ , il faut donc pour que la déviation moyenne soit surtout due aux diffusions multiples, que l'on ait

$$(43) \quad \Phi_1 < \bar{\alpha}_1 < \Phi_2,$$

c'est-à-dire

$$(44) \quad \Phi_1 \gg \Phi_{\min}$$

ou encore

$$(45) \quad \mathcal{N} = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_{\min}^2} \gg 1.$$

( $\mathcal{N}$  représente le nombre de chocs diffusants, subis en moyenne.)

Comme nous avons déjà dit plus haut pour les angles  $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$ , nous devons ajouter à l'effet de la diffusion multiple, représentée par la distribution  $P_1(\alpha_1)$ , l'effet des diffusions simples sous des angles supérieurs à  $\Phi_1$ .

## 6. Théorie de la diffusion multiple de Goudsmit et Saunderson [3].

— Cette manière de raccorder la région où l'on a affaire uniquement aux diffusions simples à celles où règne la diffusion multiple, n'est pas très satisfaisante et des théories plus raffinées ont été développées afin d'obtenir une fonction de distribution des angles qui embrasse les deux cas extrêmes. Avant de passer en revue les théories rigoureuses, basées sur l'étude des solutions de l'équation intégral-différentielle qui régit le problème, nous allons exposer la théorie de Goudsmit et Saunderson [5] qui est basée sur l'étude de la représentation de la fonction de distri-

bution  $f(\theta)$  au moyen d'un développement en série de polynomes sphériques. Soit

$$(46) \quad f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum (2l+1) G_l P_l(\theta)$$

ce développement, où  $P_l(\theta)$  sont les polynomes de Legendre qui jouissent de la propriété que leur valeur moyenne après  $n$  chocs est égale à la  $n^{\text{ième}}$  puissance de leur valeur moyenne après le premier choc.

Soient, en effet,  $\theta_1$  la déviation après le premier choc;  $\theta_2$ , après le second choc;  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les azimuts et  $\theta_{12}$  la déviation résultante. Le théorème d'addition des fonctions sphériques nous fournit la relation

$$(47) \quad P_l(\cos \theta_{12}) = P_l(\cos \theta_1) P_l(\cos \theta_2) + \sum_m P_l^m(\cos \theta_1) P_l^m(\cos \theta_2) \sin[m(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Si la loi de diffusion simple présente la symétrie sphérique, alors la valeur moyenne de  $\sin[m(\varphi_1 - \varphi_2)] = 0$

$$(48) \quad \overline{\sin[m(\varphi_1 - \varphi_2)]} = 0,$$

de sorte que l'on a

$$(49) \quad \overline{P_l(\cos \theta_{12})} = (\overline{P_l(\cos \theta_1)})^2$$

et, après  $n$  chocs,

$$(50) \quad \overline{P_l(\cos \theta_{1n})} = (\overline{P_l(\cos \theta_1)})^n.$$

La valeur finale de la moyenne totale d'un polynome de Legendre sera la moyenne prise sur toutes les valeurs possibles du nombre  $n$  des chocs subis par la particule chargée. Si  $G_l$  est cette moyenne et  $W(n)$  la probabilité pour que l'électron subisse  $n$  chocs, on doit avoir :

$$(51) \quad G_l = \sum_0^{\infty} W(n) (\overline{P_l(\cos \theta_1)})^n.$$

Soit alors  $\sigma$  la section efficace de choc, relative à un atome. Le nombre moyen des chocs que la particule chargée subit en traversant l'épaisseur  $t$  de matière, contenant  $N$  atomes par centimètre cube est égal à

$$(52) \quad \nu = \sigma N t$$

et la probabilité pour que la particule subisse  $n$  chocs est donnée par la

distribution de Poisson

$$(53) \quad W(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}.$$

Nous avons donc

$$(54) \quad G_l = \sum_n e^{-\nu} \nu^n \frac{(\overline{P_l(\cos \theta)})^n}{n!} = e^{-\nu} Q_l,$$

$$(55) \quad Q_l = 1 - \overline{P_l(\cos \theta)}.$$

En prenant comme champ diffuseur le champ de Thomas-Fermi, Goudsmit et Saunderson arrivent au résultat suivant :

$$\nu Q_l = -\frac{1}{\pi} l(l+1) k \log\left(\frac{1}{2} \theta_{\min}\right) + \sum_2^l S^{-1},$$

où  $k$  est l'expression (12) et  $\theta_{\min}$  l'angle calculé par Williams et donné par (25).

On obtient finalement une distribution gaussienne qui diffère peu de celle obtenue par Williams, comme on peut le voir du tableau suivant, où l'on trouvera, en outre, les données expérimentales, dues à Kultchitsky et Latychev [4], qui sont en très bon accord avec la théorie, sauf pour les éléments lourds, pour lesquels la formule de la diffusion simple de Rutherford, employée dans les calculs précités, n'est plus très rigoureuse.

TABLEAU I.

*Comparaison des résultats théoriques  
de Williams et de Goudsmit et Saunderson  
avec les résultats expérimentaux de Kutchitsky et Latyshev [4].*

Élément.	$\pi = \frac{h^2 N Z^3}{2\pi^2 m^2 v^2 \beta^2}$	$\frac{20Ze^2}{hv}$	Demi-largeur de la distribution de Gauss (en degrés).			
			Valeurs observées.	Williams		Goudsmit et Saunderson (ap. de Born).
				classique.	ap. de Born.	
Al.....	60,2	0,10	9,5	12,1	9,8	9,4
Fe.....	41,4	0,20	9,6	11,9	9,9	9,6
Cu.....	46,8	0,22	10,4	10,4	11,05	10,5
Mo.....	36,6	0,32	10,25	-	10,75	10,35
Ag.....	35,1	0,36	10,20	-	10,80	10,30
S.....	34,2	0,37	10,65	11,9	10,90	10,65
Ta.....	28,7	0,55	9,85	-	11,00	10,95
Au.....	23,4	0,60	9,9	-	11,40	11,35
Pb.....	26,1	0,62	9,7	10,6	10,85	10,85

7. Courbure naturelle de la trajectoire d'une particule chargée par suite de la diffusion. — Lorsque la particule traverse une épaisseur  $t$  de matière, nous avons vu qu'elle y subit une déviation, dont la projection sur le plan d'observation a pour valeur moyenne

$$(56) \quad \bar{\theta} = \bar{\alpha\delta}$$

à laquelle on peut associer un rayon de courbure naturelle

$$(57) \quad \rho_d = \frac{t}{\bar{\theta}} = \frac{t}{\alpha\delta} = \frac{M v^2 t^{\frac{1}{2}}}{2 Z z e^2 N^{\frac{1}{2}}} \sqrt{1 - \beta^2} (0,8 \sqrt{\log 2N} + 1,45) = 1,3 \sqrt{\frac{M}{mZ}} R,$$

R étant le parcours de la particule de masse M dans un gaz, dont les noyaux ont la charge Z et la masse m.

Ce rayon de courbure est mesuré sur la première moitié du parcours.

Une formule un peu différente a été obtenue par Bethe [8]. Selon cet auteur

$$(58) \quad \rho_d = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x}{\sqrt{\theta^2}}$$

qui dans un gaz se réduit à

$$(59) \quad \rho_d = 103 \frac{M \beta^2}{Z} \sqrt{\frac{x}{BP}},$$

où PN est nombre de noyaux par centimètre cube (P = 2 pour l'air et P = 1 pour l'argon). B est un facteur voisin de l'unité

$$(60) \quad B = 1 + 0,444 \log_{10} \left( \frac{P}{mc} \theta_{\max} Z^{-\frac{1}{3}} \right).$$

A l'approximation non relativiste; la formule (59) peut encore s'écrire

$$(59 \text{ bis}) \quad \rho_d = 404 \frac{E}{Z} \sqrt{\frac{X}{BP}},$$

où E représente l'énergie de la particule en mégaelectrovolts (*fig. 2*).

Pour comparer les formules de Williams et de Bethe, on doit poser  $x = \frac{1}{4} R$  et prendre pour E l'énergie de la particule sur le parcours égal à  $\frac{3}{4} R$ . On doit, en plus, tenir compte des faits suivants :

1° Williams se sert de la déviation moyenne, tandis que Bethe se sert

de la déviation quadratique moyenne, ce qui introduit un facteur de l'ordre de  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,8$ ;

2° Williams définit la courbure par le changement de la direction en deux points de la trajectoire, tandis que Bethe définit la courbure par la flèche de la courbe. Il s'introduit de la sorte un second facteur, égal à  $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,87$ ;

3° La définition de Williams introduit une erreur dans la relation

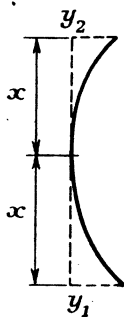


Fig. 2.

énergie-parcours, erreur qui est de l'ordre de 10 % dans l'air et de 20 % dans l'argon.

Finalement, pour obtenir le rayon de courbure selon la définition de Bethe, en partant de celle de Williams, il faut multiplier cette dernière valeur par 0,6, s'il s'agit de l'air et par 0,52, s'il s'agit de l'argon.

8. **Équation de diffusion et la fonction de distribution [9].** — Nous allons considérer un pinceau infiniment délié de particules chargées qui pénètre dans une substance diffusante et nous allons nous demander quelle est la distribution des déplacements spatiaux et des déviations angulaires des trajectoires après la traversée d'une certaine épaisseur  $t$ . Nous admettrons que l'énergie reste constante et nous nous occuperons uniquement des changements résultant de la diffusion.

Soit  $P(x, y, \zeta, \eta | t) dx dy d\zeta d\eta$ , la probabilité pour qu'à la profondeur  $t$  les coordonnées de la particule, dans le plan perpendiculaire à  $Ot$ , soient  $(x, y)$  et que la projection de la direction de la trajectoire

fasse des angles  $\zeta$  et  $\eta$  avec l'axe  $Ot$ . Comme nous supposons que ces angles soient petits, nous avons  $\zeta^2 + \eta^2 = \theta^2$ ,  $\theta$  étant l'angle entre les directions de la trajectoire et de l'axe  $Ot$ .

La fonction de distribution  $P(x, y, \zeta, \eta | t)$  est liée à la valeur qu'elle possède en  $(x', y', \zeta', \eta' | t - dt)$  : lorsque la diffusion ne se produit pas dans l'intervalle  $dt$ , alors

$$x - x' = dx = \zeta dt, \quad y - y' = dy = \eta dt \quad (\zeta = \zeta' \text{ et } \eta = \eta');$$

si, en revanche, la diffusion a lieu, alors la probabilité de diffusion est proportionnelle à  $dt$ . L'équation résultant est une équation intégrodifférentielle du type de Boltzmann

$$(61) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \zeta \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) P = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta \\ \times [P(x, y, \zeta - \theta \cos \beta, \eta - \theta \sin \beta | t) - P(x, y, \zeta, \eta | t)]$$

en posant

$$\zeta - \zeta' = \theta \cos \beta \quad \text{et} \quad \eta - \eta' = \theta \sin \beta$$

et où  $f(\theta)$  représente la fonction de distribution pour la diffusion simple.

Comme en théorie du mouvement brownien, on va développer l'expression entre crochets en série de Taylor, en s'arrêtant aux termes du second ordre (équation de Fokker-Planck), on arrive ainsi à l'équation de diffusion suivante (cf. W. R. Scott) [9] :

$$(62) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \zeta \frac{\partial}{\partial x} - \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) P = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) P,$$

où  $\lambda$  est la longueur caractéristique (libre parcours de la diffusion) caractérisant l'importance de la diffusion et qui est définie par la relation

$$(63) \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} \int_0^\pi \theta^2 f(\alpha) d\theta = \frac{1}{4} \overline{\theta^2}.$$

L'équation (62) se sépare en deux, relatives aux distributions de deux projections. On a

$$(64) \quad P(x, y, \zeta, \eta | t) = P(x, \zeta | t) P(y, \eta | t),$$

$$(65) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \zeta \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x, \zeta | t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}(x, \zeta | t),$$



c'est l'équation qui est étudiée dans l'article bien connu de B. Rossi et K. Greisen [6].

Nous allons chercher une solution qui satisfasse à la condition aux limites

$$(66) \quad P(x, \zeta | t) = \delta(x) \delta(\zeta),$$

[ $\delta(x)$  et  $\delta(\zeta)$  sont les fonctions singulières de Dirac], ce qui correspond à un pinceau initial infiniment délié, passant à l'origine parallèlement à l'axe  $Ot$ .

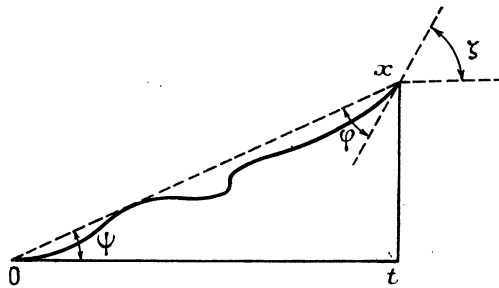


Fig. 3.

Pour trouver la solution, on fait appel à la transformation de Fourier, relativement à  $x$ , et à la transformation de Laplace relativement à  $t$ . Le résultat de l'inversion s'écrit alors

$$(67) \quad P(x, \zeta | t) = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2\pi t^2} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{t} \left[ \zeta^2 - \frac{3x\zeta}{t} + \frac{3x^2}{t^2} \right] \right\}.$$

C'est la fonction de distribution de Fermi, telle qu'on trouve, en particulier, dans l'article de Rossi et Greisen (*fig.* 3).

On peut l'écrire encore en posant  $\frac{x}{t} = \psi$  (angle entre le coude et la tangente initiale) et  $\zeta - \psi = \Phi$ . A la place d'une fonction de distribution, relative aux grandeurs  $x$  et  $\zeta$ , nous avons une fonction de distribution relative aux angles  $\psi$  et  $\Phi$

$$(68) \quad P(\psi, \Phi | t) = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2\pi t} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{t} (\psi^2 - \psi \Phi + \Phi^2) \right\}.$$

Sous cette forme, elle se prête particulièrement bien à l'étude des effets de la diffusion multiple sur l'aspect de la trajectoire, étude qui est d'une

grande importance pour l'examen des trajectoires des particules chargées dans les émulsions photographiques.

En intégrant par rapport à  $\zeta$ , on trouve

$$(69) \quad P(x|t) = \left(\frac{3\lambda}{4\pi t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{3\lambda x^2}{4t^3}\right]$$

ou

$$(70) \quad P(\psi|t) = \left(\frac{3\lambda}{4\pi t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{3\lambda}{t}\psi^2\right].$$

Et, tenant compte du théorème de probabilités composées

$$(71) \quad P(x, \zeta|t) = P(\zeta|x, t)P(x|t),$$

on trouve que

$$(72) \quad P(\zeta|t) = \left(\frac{\lambda}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\lambda}{t}\left(\zeta - \frac{3x}{2t}\right)^2\right].$$

La valeur moyenne de  $\zeta$  est  $\bar{\zeta} = \frac{3x}{t} = \frac{3}{2}\psi$ , ce qui montre que la particule ayant subi une déviation  $\psi$  se déplace dans le sens de l'augmentation de cette déviation. Ceci résulte de la corrélation que la distribution établit entre l'écart spatial et l'écart angulaire de la trajectoire.

En intégrant par rapport à  $x$ , on obtient la formule de distribution gaussienne de Williams

$$(73) \quad P(\zeta|x) = (\lambda/4\pi t)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\lambda\zeta^2}{4t}\right].$$

9. Diffusion multiple dans un milieu infini (Lewis [10]). — Dans le cas précédent, étudié par Snyder et Scott, on fait usage de l'approximation de petits angles. Les solutions exactes peuvent d'ailleurs être obtenues qui montrent la transition entre la région gaussienne de la diffusion multiple et la région de la diffusion simple.

Mais l'équation intégral-différentielle du problème de la diffusion multiple peut être étudiée dans un milieu infini et homogène, sans faire usage de l'approximation précédente. La solution peut être représentée au moyen d'un développement en série de polynômes sphériques dont les coefficients peuvent être déterminés exactement.

## CHAPITRE II.

PERTES D'ÉNERGIE DES PARTICULES CHARGÉES  
DANS LES MILIEUX TRÈS FORTEMENT IONISÉS  
ET DANS LES MILIEUX POLARISABLES.

1. **Les formules de Bohr et de Bethe.** — Dans la théorie de la diffusion multiple on se préoccupe surtout des chocs élastiques des particules chargées avec les noyaux atomiques. On peut également tenir compte des électrons du cortège, en remplaçant partout dans les formules la charge nucléaire  $Z$  par  $\sqrt{Z^2 + Z}$ , l'influence des électrons sur la diffusion étant dans le rapport  $\frac{1}{Z}$  par rapport à celle des noyaux atomiques.

Dans l'étude des pertes d'énergie que subit une particule chargée en traversant la matière, ce sont, en revanche, les collisions avec les électrons du cortège qui jouent le rôle primordial.

Nous devons distinguer la formule classique de Bohr de la formule ondulatoire de Berthe dont les domaines d'applicabilité sont déterminés respectivement par la condition  $\gamma \gg 1$  et  $\gamma \ll 1$ ,  $\gamma$  étant l'expression (1) du chapitre I.

La particule chargée de masse  $M$  et de vitesse  $v$  en heurtant un électron libre (de masse  $m$ ) primitivement au repos, lui communique une quantité de mouvement  $Mv\theta$ , si elle est déviée sous l'angle  $\theta$ . A ce transfert de quantité de mouvement correspond une perte d'énergie égale à  $E(\theta) = \frac{(Mv\theta)^2}{2m}$ . Si la probabilité d'un choc avec la déviation  $\theta$  est égale à  $P(\theta)$ , la perte d'énergie par unité de parcours sera donnée par l'expression

$$(II.1) \quad \frac{dT}{dx} = \int E(\theta) P(\theta) d\theta = \left( \frac{M^2 v^2}{2m} \right) \int P(\theta) \theta^2 d\theta.$$

La dernière intégrale est analogue à celle qui détermine l'intensité de la diffusion multiple. En prenant pour la fonction  $P(\theta)$  la formule de diffusion simple de Rutherford, multipliée par le nombre  $N$  d'atomes qui sont contenus dans une unité de volume de matière traversée,

$$(II.2) \quad P(\theta) = \frac{8\pi N Z z^2 e^4}{M^2 v^4 \theta^3}$$

et l'on trouve

$$(II.3) \quad \frac{dT}{dx} = \frac{4\pi NZ z^2 e^4}{m v^2} \int_{\theta_{\min}}^{\max} \frac{d\theta}{\theta} = 2k' \frac{M^2 v^2}{m} \log\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right),$$

$k'$  étant l'expression  $k$  donnée par la formule (12) du chapitre I, ramenée à l'unité de parcours.

$\theta_{\max}$  est de l'ordre de  $\frac{m}{M}$ . (Plus exactement, l'énergie maximum qu'une particule de masse  $M$  et de vitesse  $v$  est capable de communiquer à un électron immobile libre de masse  $m$ , est donnée par la formule

$$(II.4) \quad W_{\max} = 2mc^2 \frac{\beta^2 M^2 (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}}{m^2 + M^2 + 2mM(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

$\theta_{\min}$ , la limite inférieure, est déterminée par le fait que l'électron n'est pas libre, mais lié à l'atome. La condition de liberté de l'électron en regard des forces de liaisons intra-atomiques se trouve satisfaite dans la mesure où le choc n'est pas adiabatique, c'est-à-dire aussi longtemps que la distance d'approche est inférieure à une distance critique pour laquelle la durée de collision définie par  $\frac{\rho}{v}$  est du même ordre de grandeur que la période d'oscillations de l'électron dans l'atome.

Ce paramètre maximum d'impact  $\rho$  joue un rôle analogue au rayon de l'effet d'écran  $a$  dans la théorie de la diffusion multiple. Donc, de même que dans cette dernière théorie, la relation entre  $\theta_{\min}$  et  $\rho$  dépend de la valeur de  $\gamma$  :

a.  $\gamma \gg 1$ , théorie classique :

$$(II.5) \quad \theta_{\min} = \frac{z c^2}{M v^2 \rho} = \frac{2\pi z e^2 v}{M v^3}$$

et l'on obtient la formule de Bohr

$$(II.6) \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_{cl} = \left(\frac{4\pi NZ z^2 e^4}{m v^2}\right) \log \frac{m v^3}{2\pi z e^2 v};$$

b.  $\gamma \ll 1$ , approximation de Born de la théorie ondulatoire des chocs :

$$(II.7) \quad \theta_{\min}^B = \theta_{\min}^{cl} \gamma = \frac{h}{2\pi v M \rho} = \frac{h v}{M v^2}$$

et l'on obtient la formule de Bethe

$$(II.8) \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_B = \left(\frac{4\pi NZz^2e^4}{m\nu^2}\right) \log\left(\frac{m\nu^2}{h\nu}\right),$$

où  $h\nu$  est de l'ordre de l'énergie d'ionisation moyenne  $I$  de l'atome.

Posons

$$(II.9) \quad A = \frac{4\pi NZz^2e^4}{m\nu^2},$$

$$(II.10) \quad B = \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} = \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme

$$E_{\min} = \left(\frac{M^2\nu^2}{2m}\right) \theta_{\min}^2,$$

nous avons

$$(II.11) \quad E_{\min}^{\text{cl}} = \frac{2\pi^2 z^2 e^4 \nu^2}{m\nu^4},$$

$$(II.12) \quad E_{\min}^B = E_{\min}^{\text{cl}} \gamma^2 = \frac{(h\nu)^2}{2m\nu^2} \approx \frac{I^2}{2m\nu^2}$$

et l'on a

$$(II.13) \quad B_{\text{cl}} = \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}^{\text{cl}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m\nu^3}{2\pi z e^2 \nu},$$

$$(II.14) \quad B_B = \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}^B}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m\nu^2}{h\nu} = \frac{m\nu^2}{I}.$$

Quand on fait des calculs plus précis, il s'introduit un coefficient numérique  $k$  voisin de l'unité, et l'on a

$$(II.15) \quad B_{\text{cl}} = \frac{km\nu^3}{2\pi z e^2 \nu}, \quad B_B = \frac{km\nu^2}{h\nu}.$$

Nous pouvons introduire également le paramètre maximum de choc  $q$ , au delà duquel, le choc étant adiabatique, il n'y a pas de transfert d'énergie

$$(II.16) \quad q_{\text{cl}} = \frac{ze^2}{m\nu^2}, \quad q_B = \frac{h}{m\nu^2},$$

moyennant quoi, nous pouvons écrire

$$(II.17) \quad B = \frac{k\nu}{q2\pi\nu}.$$

La formule de diffusion simple de Rutherford peut aussi s'écrire sous forme d'une probabilité d'une perte d'énergie comprise dans l'intervalle  $E, E + dE$ , après la traversée de l'unité d'épaisseur de la matière

$$(II.18) \quad P(E) dE = \frac{1}{2} A dE \cdot E^{-2}$$

qui, dans le cas relativiste (sans effet de spin), doit être complétée comme suit :

$$(II.19) \quad P(E) dE = \frac{1}{2} A dE \cdot E^{-2} (1 - \beta^2 E \cdot E_{\max}^{-1}).$$

Dans le premier cas nous aboutissons à la formule non relativiste de Bohr-Bethe :

$$(II.20) \quad \bar{E} = \left( - \frac{dT}{dx} \right) = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E P(E) dE = A \log B,$$

tandis que dans le second cas, nous aboutissons à la forme relativiste de de cette formule

$$(II.21) \quad \bar{E} = A \left( \log B_{\text{rel}} - \frac{1}{2} \beta^2 \right),$$

avec

$$B_{\text{rel}} = \frac{B}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

**2. Formule de Landau pour la valeur la plus probable de la perte d'énergie [11].** — La perte d'énergie, due aux chocs inélastiques avec les électrons du cortège et dont nous venons de donner les formules classique et ondulatoire, n'est pas constante, mais présente des fluctuations appréciables. On peut se demander quelle est la fonction de distribution  $f(E|t)$  qui régit la chance que possède une particule chargée d'énergie initiale  $E_0 \gg E$  de subir une perte d'énergie dans l'intervalle  $E, E + dE$ , après la traversée de l'épaisseur  $t$ . Si  $P(\varepsilon) d\varepsilon$  est la probabilité pour que la particule perde par unité de parcours une énergie dans l'intervalle  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ , l'équation intégrodifférentielle du type de Boltzmann à laquelle doit satisfaire notre fonction inconnue  $f(E|t)$  a la forme que voici :

$$(II.22) \quad \frac{df}{dt} = \int_0^\infty P(\varepsilon) [f(E - \varepsilon|t) - f(E|t)] d\varepsilon,$$

car la variation de la fonction de distribution sur l'élément  $dt$  est due à la différence entre le nombre de particules qui, par suite des pertes d'énergie  $\varepsilon$ , sont amenées dans l'intervalle  $E$ , et le nombre de particules qui quittent cet intervalle

$$(II.23) \quad f(E|t) = 0 \quad \text{pour } E < 0 \quad \text{et} \quad P(\varepsilon) = 0 \quad \text{pour } \varepsilon > E_0.$$

La résolution de l'équation (II.17) se fait en faisant recours à la transformation de Laplace par rapport à la variable  $E$

$$(II.24) \quad \varphi(p|t) = \int_0^{\infty} f(E) e^{-pE} dE,$$

$$(II.25) \quad f(E|t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{pE} \varphi(p|t) dp.$$

En prenant comme condition initiale

$$(II.26) \quad f(E|0) = \delta(E),$$

on trouve  $\varphi(p|0) = 1$  et

$$(II.27) \quad \varphi(p|t) = e^{-t \int_0^{\infty} P(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon},$$

$$(II.28) \quad f(E|t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} dp e^{-t \int_0^{\infty} P(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon} e^{pE}$$

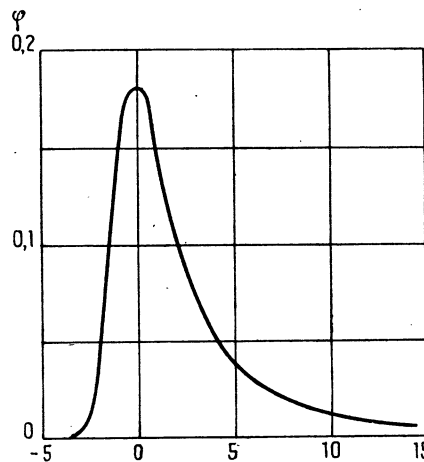


Fig. 4.

En prenant pour  $P(\varepsilon)$  la formule (I.13) et en posant

$$(II.29) \quad \xi = \frac{tA}{2},$$

On trouve pour la fonction de distribution une expression de la forme

$$f(E|t) = \frac{\varphi(\lambda)}{\xi},$$

où  $\varphi(\lambda)$  est une fonction très compliquée dont nous donnons seulement la représentation graphique (*fig. 4*) sous la forme de  $\varphi\left(\frac{E - E_0}{\xi}\right)$ .

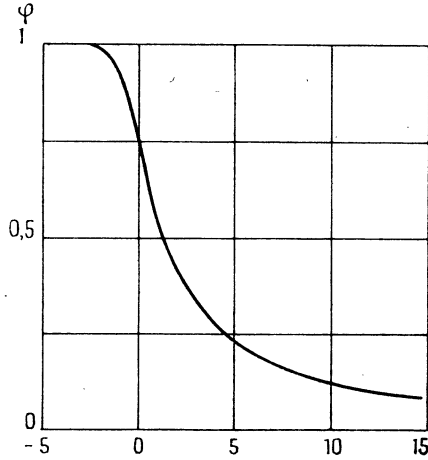


Fig. 5.

La fonction  $\varphi(\lambda)$  présente un maximum pour  $\lambda = -0,5$  et la valeur la plus probable de la perte d'énergie est donnée par la formule

$$E_0 = \xi \left[ \text{Log}(\xi B^2) - \beta^2 \right] = \left( \frac{At}{2} \right) \left[ \text{Log} \left( \frac{tAB^2}{2} \right) - \beta^2 \right],$$

A et B étant les expressions définies par (II. 9) et (II. 10).

La probabilité pour une perte d'énergie qui dépasse une certaine valeur E, est déterminée par l'intégrale

$$\int_E^\infty f(E|t) dE = \psi \left( \frac{E - E_0}{\xi} \right).$$

La fonction  $\psi$  est représentée graphiquement sur la figure 5.

On notera quelques expériences, faites tout à fait récemment [24] et qui confirment l'exactitude de la formule de Landau.

**3. Pertes d'énergie d'une particule chargée rapide dans un milieu très fortement ionisé [13].** — Dans les théories habituelles des pertes



d'énergie (ainsi que celle de la diffusion), les électrons qui entourent les noyaux sont liés à ces derniers en formant les atomes neutres. Que se passe-t-il alors dans un milieu où il existe un grand nombre des électrons libres, formant un gaz électronique en présence d'un gaz d'ions positifs? On rencontre des milieux pareils dans les tubes à décharges électriques et on leur donne, à la suite de Langmuir qui les a étudiés le premier, le nom de *plasmas ioniques*. Les atmosphères stellaires sont censées appartenir à cette catégorie des milieux, ainsi que des vastes régions de l'espace interstellaire.

Comment déterminer dans un tel milieu les paramètres minimum et maximum d'impact qui interviennent dans la théorie des chocs atomiques ou le rayon d'écran qui joue dans la théorie des chocs radiatifs ou dans celle de la diffusion multiple?

Dans le plasma ionique, chaque ion est entouré d'un nuage d'ions de signes contraires dont la charge moyenne dans le temps est égale en valeur absolue à celle de l'ion central. La théorie de Debye-Hückel montre que le champ électrique qui émane de ce dernier a la forme

$$(II.28) \quad \frac{e}{r} \exp \left[ -\frac{r}{D} \right],$$

où  $D$  est le rayon de Debye, égal à

$$(II.29) \quad \left( \frac{kT}{4\pi N e^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $T$  est la température du gaz électronique et  $N$  le nombre d'ions, d'un signe déterminé, par centimètre cube.

Nous voyons donc que la forme du champ de Debye-Hückel est la même que celle qui détermine l'effet d'écran, dû aux électrons du cortège atomique. Dans un milieu, simplement ionisé par exemple, la théorie de la diffusion multiple (et la théorie des chocs radiatifs) doit donc se faire en divisant l'espace entourant le noyau atomique en trois régions :

I. Région du noyau nu, qui s'étend jusqu'à la distance  $a = a_0(Z-1)^{\frac{1}{3}}$ , où l'on a affaire au champ coulombien  $U_1 = \frac{Ze}{r}$ .

II. Région où les électrons du cortège (en nombre égal à  $Z-1$ ) jouent le rôle d'écran au champ coulombien du noyau nu.

Cette région s'étend dans l'intervalle

$$a_0(Z-1)^{\frac{1}{3}} < r < D,$$

où l'on peut admettre pour potentiel électrostatique une expression de la forme

$$U_{II} = \frac{e}{r} + \frac{(Ze-1)}{r} \exp\left[-\frac{r}{a}\right], \quad a = a_0(Z-1)^{\frac{1}{3}}.$$

III. Région du plasma de Debye  $r > D$

$$U_{III} = \frac{e}{r} \exp\left[-\frac{r}{D}\right].$$

Le problème se simplifie lorsqu'on se trouve en présence du plasma ionique dans l'hydrogène atomique, car dans ce cas, la région II n'existe pas et l'on a uniquement affaire aux régions I et III.

Quant aux pertes d'énergies, elles se déterminent d'une part, en calculant les pertes dues aux électrons liés aux ions, selon la méthode habituelle appliquée aux atomes neutres. D'autre part, on doit faire intervenir les électrons quasi libres du gaz électronique. Ces électrons ne sont pas, en effet, complètement libres au sein du plasma, car si on les écarte de leur position d'équilibre momentanée, une force harmonique apparaît qui tend de les y ramener. C'est l'origine des oscillations naturelles du plasma dont la fréquence est donnée par la formule suivante, due à Langmuir :

$$(II.30) \quad \nu_L = \left(\frac{Ne^2}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

fréquence qui est à introduire dans les formules de Bohr ou de Bethe, pour tenir compte des pertes d'énergie, dues aux électrons quasi libres du plasma ionique.

Comme, d'autre part, le champ qui règne à l'intérieur de ce milieu n'est pas coulombien, puisqu'il est représenté par (II.28), la condition (I.4) d'applicabilité du formalisme de la Mécanique classique se trouve remplacée par

$$\frac{Zg^2\pi e^2}{h\nu} e^{-\frac{r}{D}} \gg 1,$$

ce qui montre que l'emploi de la formule de Bohr n'est pas permis

même aux vitesses très faibles. On trouve alors dans ce cas (Kwal [13b]) la formule que voici :

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \Lambda \left\{ \log \left[ \frac{mv^3}{4\pi z e^2 v_L \sqrt{1 + \left(\frac{v}{v_T}\right)^2}} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{v_T}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{v_T}\right)^2} \right\},$$

tandis qu'aux vitesses relatives la présence du champ (II.28) se traduit par la formule suivante :

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \Lambda \left\{ \log \frac{2mvv_T}{h\nu_T(1-\beta^2)} - \frac{1}{2}(1+\beta^2) \right\};$$

$v_T = 2\pi\nu_L D$  est la vitesse thermique des électrons du plasma.

On doit noter qu'en toute rigueur les oscillations naturelles du plasma doivent présenter un amortissement et le mouvement de l'oscillation harmonique doit être représenté par la formule

$$(II.31) \quad \ddot{x} + 2p\dot{x} + \nu_0^2 x = 0,$$

$p$  étant le coefficient d'amortissement. La fréquence propre qui doit figurer dans les formules de Bohr ou de Bethe est donc

$$(II.32) \quad \nu = \sqrt{\nu_0^2 - p^2}.$$

Dans le cas extrême d'un mouvement amorti aperiodique  $p > \nu_0$ , c'est la grandeur

$$(II.33) \quad \sqrt{p^2 - \nu^2} + p \sim 2p$$

qui remplace la fréquence  $\nu$  dans les formules précédentes. D'une manière plus précise, la formule complète qui donne les pertes d'énergie en tenant compte de l'amortissement des oscillations harmoniques s'écrit [12] :

$$(II.34) \quad -\frac{d\Gamma}{dx} = \Lambda \left\{ \log \frac{kv}{q 2\pi\nu_0} - \frac{p}{\sqrt{\nu_0^2 - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\nu_0^2 - p^2}}{p} \right\}.$$

#### 4. Pertes d'énergie des particules rapides dans un milieu polarisable.

— Selon une suggestion de Swann [14], les pertes d'énergie d'une particule dans un milieu dense devraient être inférieures, pour la même quantité de matière traversée, à celles subies dans un milieu plus dilué. L'augmentation logarithmique des pertes d'énergie qui apparaît aux

vitesses relativistes extrêmes est due, en effet, en conséquence du ralentissement relativiste des horloges, à la diminution de la durée de choc

$$(II.35) \quad \tau_{\text{rel}} = \frac{\rho \sqrt{1 - \beta^2}}{c},$$

ce qui a pour résultat d'augmenter dans le rapport  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  le paramètre de choc maximum  $\rho_m$ , au delà duquel ne se produisent que des actions adiabatiques.

Au fur et à mesure que la vitesse de la particule rapide augmente, son champ d'interaction avec les atomes de la matière augmente également. Et c'est ici que se place la remarque de Swann, car alors on ne peut plus négliger l'action des atomes du milieu polarisable qui se trouvent placés entre la particule rapide et l'atome lointain qui subit son action.

La première théorie quantitative a été développée par Fermi [15], qui montra que l'effet de la polarisation du milieu joue un rôle notable et que la perte d'énergie, au lieu d'augmenter indéfiniment au delà du minimum d'ionisation, doit tendre vers une certaine valeur fixe, indépendante de l'énergie (le « plateau de Fermi »).

Tant qu'on a affaire aux particules dont la vitesse n'excède pas la vitesse critique des ondes dans le milieu, vitesse égale à  $c\sqrt{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  étant la constante diélectrique, il est facile de tenir compte des effets de la polarisation du milieu. Car, dans ce cas, le potentiel d'interaction électrostatique est égal à

$$(II.36) \quad U = \varepsilon \frac{Zz e^2}{r}$$

et l'angle minimum de choc devient

$$(II.37) \quad \theta_{\text{min}}^\varepsilon = \frac{\varepsilon Zz e^2}{m v^2}$$

(à l'approximation classique).

Il s'ensuit alors que le terme logarithmique  $\log \left( \frac{\theta'_{\text{max}}}{\theta_{\text{min}}} \right)$ , qui figure dans l'expression des pertes d'énergie, est diminué de la quantité  $\log \varepsilon$  par rapport à celui qui intervient en l'absence de la polarisation du milieu.

Mais la simplicité des effets envisagés se perd lorsque nous envisageons une particule de vitesse supérieure à la vitesse critique  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ . Nous nous trouvons d'un seul coup en présence d'une situation absolument nouvelle, qui n'est pas sans présenter des analogies avec celle devant laquelle s'étaient trouvés Heaviside, Des Coudres et Sommerfeld [18], lorsqu'ils étudiaient le champ électromagnétique d'un électron se mouvant avec une vitesse supralumineuse (« supervitesse »). A l'époque où ces études furent entreprises, la théorie de la relativité n'était pas

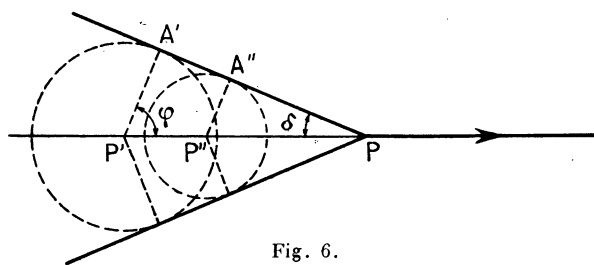


Fig. 6.

encore née; il était donc normal que l'on pût envisager la possibilité de tels mouvements.

C'est Heaviside qui s'occupa le premier du problème des supervitesse et il montra qu'il laissait prévoir un phénomène analogue à celui que Mach venait justement de découvrir dans le domaine de la mécanique des fluides.

En se rapportant à la figure 6, où le schéma de la formation de l'onde de Mach se trouve indiqué, on voit que lorsqu'un mobile se déplace de  $P'$  à  $P''$  avec la vitesse  $v$ , supérieure à la vitesse de propagation  $c'$  des ondes dans le milieu, les ondes émises successivement aux points  $P'$  et  $P''$  atteignent, lorsque le mobile arrive en  $P$ , les points  $A'$  et  $A''$ , situés sur un cône, axé sur la direction de la trajectoire du mobile et dont l'angle au sommet  $\delta$  est défini par la relation

$$(II.38) \quad \cos \delta = \frac{c'}{v} = \frac{1}{\beta'}$$

Si nous considérons alors avec Heaviside un électron qui se meut avec une vitesse uniforme  $v$  dans la direction de l'axe  $Oz$ , l'équation du

potentiel scalaire s'écrira

$$(II.39) \quad \Delta\varphi - \beta'^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\rho = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - \beta'^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\rho \\ = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{\alpha'^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\rho,$$

avec

$$(II.40) \quad \alpha'^2 = \frac{1}{1 - \beta'^2},$$

car

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{v}{c'} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \beta' \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Lorsque  $\beta' > 1$ , l'équation (II.39) qui est du type elliptique tant que  $\beta' < 1$ , se transforme en équation du type hyperbolique.

La solution de l'équation du potentiel se présente alors sous la forme

$$(II.41) \quad \varphi = \frac{\rho}{\left[ z^2 - \left( \frac{1}{\alpha'^2} \right) (x^2 + y^2) \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Les surfaces  $\varphi = \text{const.}$  sont des hyperboloïdes de révolution et le champ électromagnétique est différent de zéro, uniquement dans la partie antérieure du cône, défini précédemment (le cône de Heaviside).

Le champ à l'intérieur du cône est un champ statique et ne donne lieu à aucun rayonnement. Mais une attention particulière doit être accordée à la partie limite du champ, située à la surface conique de discontinuité, formant le front de « l'onde de choc » accompagnant le mouvement superlumineux de l'électron. Cette partie du champ se détache sous forme de rayonnement et, si l'électron était ponctuel, la théorie de Heaviside conduirait à une perte infinie de l'énergie. Comme l'a montré Sommerfeld [18], si l'on attribue à l'électron un rayon fini  $R$ , l'énergie rayonnée par unité de longueur de la trajectoire serait de l'ordre de

$$(II.42) \quad \frac{e^2}{R^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta'^2} \right).$$

En introduisant la fréquence propre, associée à  $R$ ,  $\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{c}{R}$ , la formule de Sommerfeld peut encore s'écrire

$$(II.43) \quad 2 \frac{e^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta'^2} \right) \int_0^{\nu_0} \nu \, d\nu = \frac{e^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta'^2} \right) \nu_0^2.$$

La théorie de la relativité oppose un veto absolu à la possibilité pour un mobile de se mouvoir avec une vitesse supérieure à la vitesse de propagation  $c$  des ondes électromagnétiques dans le vide, où donc le cône de Heaviside ne peut jamais se manifester.

En revanche, dans un milieu matériel, pourvu d'une constante diélectrique  $\varepsilon > 1$ , les conditions requises pour l'existence du phénomène, ici en cause, se trouvent pleinement réalisées.

Mais ce n'est qu'en 1934 qu'un jeune physicien russe, Čerenkov [16], observa un nouveau rayonnement accompagnant les électrons qui se déplacent dans un milieu approprié avec une vitesse supérieure à celle de la propagation des ondes électromagnétiques dans ce milieu. L'explication et la théorie du phénomène observé ont été données par Franck et Tamm [17].

Dans un milieu matériel, la vitesse des ondes électromagnétiques est fonction de la fréquence, et c'est ce phénomène de dispersion qui va introduire une certaine complication dans la théorie.

Les composantes du vecteur densité de courant de l'électron, qui se meut avec la vitesse  $v$  dans la direction  $Oz$ , peuvent s'écrire :

$$(II.44) \quad j_x = 0, \quad j_y = 0, \quad j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt),$$

où  $\delta$  signifie la fonction singulière de Dirac. De la décomposition en série de Fourier on tire alors

$$(II.45) \quad j_z(v) = \left( \frac{e}{2\pi\rho} \right) \exp \left[ \frac{2ivz}{\rho} \right] \delta(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ce qui permet d'écrire les composantes du potentiel-vecteur de la manière que voici :

$$(II.46) \quad A_\rho = A_\varphi = 0, \quad A_z(v) = \left( \frac{e}{2c} \right) A_v(\rho) \exp \left[ -\frac{2\pi ivz}{\rho} \right],$$

$A_v(\rho)$  étant la solution de l'équation

$$(II.47) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 A_v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_v}{\partial \rho} + k^2 A_v = - \left( \frac{4}{\pi\rho} \right) \delta(\rho), \\ k^2 = \frac{4\pi^2 v^2}{\rho^2} [\beta^2 \varepsilon(v) - 1]. \end{cases}$$

Nous pouvons calculer maintenant les expressions du champ magnétique et du champ électrique, qui sont les suivantes :

$$(II.48) \quad H_v = \text{rot } A_v, \quad E_v = - \left( \frac{ic}{2\pi v c} \right) \text{grad div } A_v - \left( \frac{2\pi iv}{c} \right) A_v$$

et obtenir finalement la valeur du flux d'énergie qui s'échappe par la surface latérale d'un cylindre de rayon  $\rho$ , axé sur la trajectoire de la particule. L'expression du vecteur de Poynting étant

$$(II.49) \quad P_\rho = - \left( \frac{c}{4\pi} \right) E_z H_\phi,$$

le flux d'énergie en question, qui représente la perte d'énergie subie par la particule par unité de parcours, est égal à

$$(II.50) \quad -dW = 2\pi\rho dz \int_{-\infty}^{+\infty} S_\rho dt,$$

$$(II.51) \quad -\frac{dW}{dz} = \left( \frac{i4\pi^3 e^2 \rho}{4v^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\varepsilon(v)} - \beta^2 \right] A_v \frac{dA_{-v}}{d\rho} v dv.$$

Les solutions de l'équation, qui s'annulent à l'infini, sont représentées par les fonctions de Hankel

$$(II.52) \quad \begin{cases} A_v(\rho) = -iH_0^{(2)}(k\rho) & \text{si } v > 0, \\ A_v(\rho) = iH_0^{(1)}(k\rho) & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

La part d'énergie perdue, qui se retrouve dans le rayonnement Čerenkov, s'obtient en considérant le flux à l'infini. Il suffit dans ce cas d'employer les expressions asymptotiques des fonctions de Hankel. Mais, pour tenir compte également des pertes d'énergie dues aux chocs avec les atomes, on doit en revanche prendre le rayon  $\rho$  très petit. Plus exactement, on doit prendre

$$(II.53) \quad \rho \frac{2\pi v}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon} \ll 1,$$

où

$$\rho \ll \frac{v}{2\pi v} \sim \lambda.$$

Car, selon cette manière de voir, l'étude des pertes d'énergies, consécutives aux chocs avec les électrons atomiques, se ramène à l'étude de l'absorption des composantes virtuelles du champ, décomposé en série de Fourier.

Lorsque  $k\rho \ll 1$ , nous avons les valeurs approchées suivantes des fonctions de Hankel :

$$(II.54) \quad \begin{cases} H_0^{(1)}(k\rho) \approx 1 - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha_0 k\rho}, \\ H_0^{(2)}(k\rho) \approx 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha_0 k\rho}, \end{cases}$$



où

$$\ln a_0 = C = 0,567, \dots, \quad a_0 = 1,78\dots,$$

ce qui nous amène à l'expression intégrale suivante de la perte d'énergie :

$$(II.55) \quad -\frac{dW}{dz} = -\frac{2\pi ie^2}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\varepsilon(v)} - \beta^2 \right] \text{Log} \frac{v^2}{3,17\rho^2 v^2 [1 - \beta^2 \varepsilon(v)]} v dv,$$

tandis que l'expression correspondante au flux à l'infini (rayonnement Čerenkov) s'écrit

$$(II.56) \quad -\frac{dW}{dz} = \frac{4\pi^2 e^2 v}{c^2} \int_0^{v_m} \left[ 1 - \frac{1}{\varepsilon(v)\beta^2} \right] v dv,$$

où  $v_m$  est la racine de l'équation

$$(II.57) \quad \varepsilon(v_m)\beta^2 - 1 = 0.$$

On remarquera que cette formule de Franck et Tamm est tout à fait analogue à la formule de Sommerfeld, à condition d'y introduire la constante diélectrique  $\varepsilon(v)$ , fonction de la fréquence.

Quant à la formule de Fermi [15], pour pouvoir la discuter, il faut connaître la forme de la fonction  $\varepsilon(v)$ . Fermi a étudié une expression simple de la forme

$$(II.58) \quad \varepsilon(v) = 1 + \frac{ne^2}{\pi m} \frac{1}{v_0^2 - v^2 - ip_0 v},$$

où  $n$  est le nombre d'électrons par unité de volume,  $v_0$  la fréquence propre de l'oscillateur électronique et  $p_0$  le coefficient d'amortissement de ce dernier. Lorsque l'amortissement est négligeable, on obtient les formules suivantes :

$$(II.59) \quad -\frac{dW}{dz} \frac{2\pi ne^4}{mv^2} \left\{ \text{Log} \left[ \frac{mv^2}{3,17\pi ne^2 \rho^2} \frac{\varepsilon(0) - 1}{\varepsilon(0)(1 - \beta^2)} \right] - \beta^2 \right\} \quad \text{pour } \beta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$(II.60) \quad -\frac{dW}{dz} = \frac{2\pi^2 n}{mv^2} \left\{ \text{Log} \left( \frac{mv^2}{3,17\pi ne^2 \rho^2} \right) - \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon(0) - 1} \right\} \quad \text{pour } \beta > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

tandis que la théorie classique de Bohr, en l'absence de l'effet de polarisation, conduit à la formule

$$(II.61) \quad -\frac{dW}{dz} = \frac{2\pi ne^4}{mv^2} \left\{ \text{Log} \left( \frac{mv^2}{3,17\pi ne^2 b^2} \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2} \right) - \beta^2 \right\},$$

Pour la comparaison des pertes d'énergie dans l'air et dans l'eau, selon la théorie de Bohr et la théorie de Fermi, on se reportera aux courbes de la figure 7.

La diminution, prévue par Fermi, de la perte d'énergie aux grandes vitesses par rapport à la théorie ordinaire est donnée par l'expression

$$(II.62) \quad \frac{2\pi ne^4}{m\nu^2} \left\{ \frac{\varepsilon(0) - 1}{1 - \beta^2} + \frac{1 - \varepsilon(0)\beta^2}{\varepsilon(0) - 1} \right\}.$$

Il en résulte que dans le cas relativiste extrême, où la théorie ordinaire prévoit une perte d'énergie égale à

$$(II.63) \quad \frac{2\pi ne^4}{m\nu^2} \left\{ \text{Log} \frac{mc^2 W}{(h\nu_0)^2 (1 - \beta^2)} \right\}$$

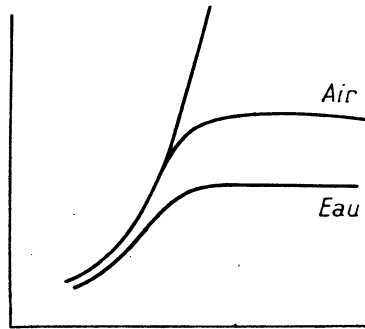


Fig. 7.

qui augmente logarithmiquement avec l'énergie relativiste de la particule; la théorie de Fermi ne prévoit qu'une perte finie, qui ne dépend pas de la fréquence des oscillateurs atomiques, mais uniquement du nombre d'électrons par unité de volume. La formule asymptotique de Fermi s'écrit, en effet,

$$(II.64) \quad -\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{asympt}}^F = \frac{2\pi ne^4}{mc^2} \left\{ \text{Log} \frac{\pi m^2 c^2 W}{ne^2 h^2} - 1 \right\}.$$

Dans sa théorie, Fermi a admis que le milieu polarisable est caractérisé par une seule fréquence de dispersion. Des théories plus complètes ont été développées par Wick et par Halpern et Hall [19]. Le premier de ces auteurs a considéré pour la constante diélectrique l'expression de Sellmayer

$$(II.65) \quad \varepsilon(\nu) = 1 + \frac{ne^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k^2 - \nu^2 - ip_k \nu},$$

tandis que Halpern et Hall, une expression plus générale (de Lorenz-Lorentz)

$$(II.66) \quad \varepsilon(\nu) = \frac{1 + \frac{ne^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k - \nu^2 - ip_k \nu}}{1 - \frac{\pi e^2}{3\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k - \nu^2 - ip_k \nu}} + \frac{ne^2}{\pi m} \left( \frac{f_0}{-\nu^2 + ip_0 \nu} \right).$$

Dans ces formules, les coefficients  $f_k$  (les « forces d'oscillateurs ») déterminent le partage des électrons entre les différents oscillateurs, le coefficient  $f_0$  étant relatif aux électrons de conduction.

La diminution des pertes d'énergie, due aux propriétés diélectriques du milieu dépend essentiellement de la manière dont la constante diélectrique varie en fonction de la fréquence et les résultats détenus par Halpern et Hall présentent des différences notables avec la théorie de Fermi, en fournissant, par exemple, un effet plus prononcé dans le cas de l'eau que dans le cas du plomb.

En exprimant les fréquences et les coefficients d'amortissement (qu'on néglige sauf pour les électrons de conduction) en unités de

$$(II.67) \quad \left( \frac{Ne^2}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Halpern et Hall obtiennent l'expression suivante de la perte d'énergie :

$$(II.68) \quad -\frac{dW}{dz} = \frac{2\pi Ne^4}{m\nu^2} \left\{ \text{Log} \left( \frac{\nu^2}{\pi^2 a_0^2 \varepsilon_0^2 (1 - \beta^2) \nu_m^2 (1 - f_0) (a + g_0)^2 f_0} \right) - \beta^2 + a^2 (1 - \beta^2) \right\},$$

où  $a = i\nu$  est la racine de l'équation

$$(II.69) \quad 1 - \beta^2 \varepsilon = 0,$$

tandis que

$$(II.70) \quad \nu_m^{-1} = \nu_1^* f_1 \nu_2^* f_2 \dots \nu_n^* f_n = \nu_m^{-1} f_0,$$

où

$$(II.71) \quad \nu_j^* = (\nu_j^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La différence par rapport à la formule de Bethe est alors donnée par l'expression

$$(II.72) \quad \Delta = \left( -\frac{dW}{dz} \right)_0 - \left( -\frac{dW}{dz} \right) = \frac{2\pi ne^4}{m\nu^2} \left\{ \log \left[ \frac{\nu_m^2 (1 - f_0) (a + g_0)^2 f_0}{\nu_{m_0}^2} \right] - a^2 (1 - \beta^2) \right\}.$$

On trouvera sur les figures 8 et 9, les courbes qui résultent de la théorie de Halpern et Hall, comparées aux courbes basées sur la formule

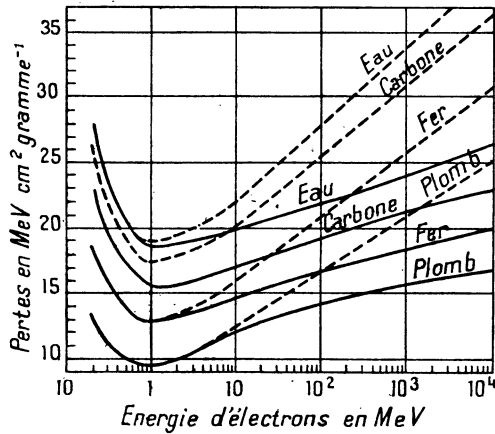


Fig. 8. — Courbes théoriques de Halpern et Hall (en trait plein) des pertes d'énergie par ionisation, subies par les électrons dans les substances condensées, comparées avec les courbes (en trait pointillé) déduites de la théorie de Bethe-Bloch. [Les premières sont déterminées, en soustrayant la quantité  $\Delta$  (II 72) de la formule de Bethe-Bloch, où l'on a posé  $IZ = h \nu_{m_0}, \nu_{m_0}$  étant la moyenne géométrique (II 70) des fréquences atomiques.]

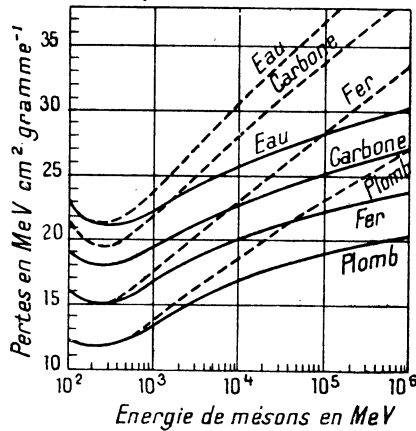


Fig. 9. — Courbes théoriques de Halpern et Hall, relatives aux mésons de masse  $200 m_e$ , comparées aux courbes de la théorie de Bethe-Bloch.

de Bethe-Bloch, et relatives respectivement aux pertes d'énergie des électrons et des mésons rapides.

Il manque encore des expériences précises pour pouvoir faire un choix

entre les différentes formules proposées, bien que dans une Note récente [22], Pickup et Voyvodic apportent quelques preuves en faveur de la théorie de Wick.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. J. WILLIAMS, *Proc. Roy. Soc. A.*, 169, 1938, p. 531; *Phys. Rev.*, 58, 1940, p. 292; *Rev. Mod. Phys.*, 17, 1945, p. 217.
- [2] W. A. FOWLER et OPPENHEIMER, *Phys. Rev.*, 54, 1938, p. 320; W. A. FOWLER, *Phys. Rev.*, 54, 1938, p. 773; N. L. OLESON, K. T. CHAO, J. HALPERN et H. R. CRANE, *Phys. Rev.*, 56, 1933, p. 482; C. W. SHEPPARD et W. A. FOWLER, *Phys. Rev.*, 56, 1933, p. 849.
- [3] S. GOUDSMIT et J. L. SAUNDERSON, *Phys. Rev.*, 57, 1940, p. 24; 58, 1940, p. 36.
- [4] KULCHITSKY et LATYSHEV, *Phys. Rev.*, 61, 1942, p. 260; N. L. OLESON, K. T. CHAO et H. R. CRANE, *Phys. Rev.*, 60, 1941, p. 378.
- [5] L. MARTON et J. L. SCHIFF, *J. Appl. Phys.*, 12, 1941, p. 759.
- [6] B. ROSSI et K. GREISEN, *Rev. Mod. Phys.*, 13, 1941, p. 240.
- [7] R. RICHARD-FOY, *J. Phys. Rad.*, 7, 1946, p. 370.
- [8] H. A. BETHE, *Phys. Rev.*, 70, 1946, p. 821.
- [9] W. T. SCOTT, *Phys. Rev.*, 76, 1949, p. 212; H. S. SNYDER et W. T. SCOTT, *Phys. Rev.*, 76, 1949, p. 220; W. T. SCOTT et H. S. SNYDER, *Phys. Rev.*, 78, 1950, p. 223.
- [10] H. W. LEWIS, *Phys. Rev.*, 78, 1950, p. 526.
- [11] L. LANDAU, *J. Physics (Moscou)*, 8, 1944, p. 204.
- [12] H. A. KRAMERS, *Physica*, 13, 1947, p. 401.
- [13] B. KWAL, *C. R. Acad. Sc.*, 230, 1950, p. 1662; *J. Phys. Rad.*, 12, 1951, p. 805.
- [14] W. F. G. SWANN, *J. Franklin Inst.*, 226, 1938, p. 538.
- [15] E. FERMI, *Phys. Rev.*, 57, 1940, p. 485.
- [16] P. ČERENKOV, *C. R. Acad. U.R.S.S.*, 2, 1934, p. 451.
- [17] I. TAMM et S. FRANK, *C. R. Acad. U.R.S.S.*, 14, 1937, p. 107; I. TAMM, *J. Physics (Moscou)*, 1, 1930, p. 439.
- [18] O. HEAVISIDE, *Electrical Papers*, II, p. 516; DES CONDRES, *Arch. Néerl.* (vol. jub. de H. A. Lorentz), 1900; A. SOMMERFELD, *Proc. Amst.*, 1904, p. 346; *Gött. Nachr.*, 1904, p. 363; *ibid.*, 1905, p. 201; P. HERTZ, *Gött. Nachr.*, 1906, p. 223; *Math. Ann.*, 65, 1907, p. 1.
- [19] G. C. WICK, *La Ricerca Scientifica*, 11, 1940, p. 273; *ibid.*, 12, 1941, p. 858; *Nuovo Cimento*, 9, 1943, p. 302; O. HALPERN et O. HALL, *Phys. Rev.*, 57, 1940, p. 459; *ibid.*, 73, 1948, p. 477.
- [20] N. BOHR, *Det. Kgl. Dans. Videns. Sels.*, 18, 1948, n° 8.
- [21] A. BOHR, *Det. Kgl. Dans. Videns. Sels.*, 24, 1948, n° 9.
- [22] E. PICKUP et L. VOYVODIC, *Phys. Rev.*, 80, 1950, p. 89.
- [23] BIRKHOFF, HAYES et S. GOUDSMIT, *Phys. Rev.*, 79, 1950, p. 199.
- [24] S. D. WARSHAW et J. J. L. CHAN, *Phys. Rev.*, 80, 1950, p. 97.