

# ANNALES DE L'I. H. P.

MAURICE FRÉCHET

## Généralisations de la loi de probabilité de Laplace

*Annales de l'I. H. P.*, tome 12, n° 1 (1951), p. 1-29

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1951\\_\\_12\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1951__12_1_1_0)

© Gauthier-Villars, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Généralisations de la loi de probabilité de Laplace

par

Maurice FRÉCHET.

---

## RÉSUMÉ.

Deux définitions sont données pour étendre la définition classique de la loi de probabilité de Laplace (dite aussi loi normale) concernant un nombre aléatoire. Toutes deux s'appliquent au cas d'un élément aléatoire de nature quelconque, choisi dans un espace vectoriel distancié.

Dans la première,  $X$  est appelé un élément aléatoire laplacien si  $\mathcal{L}X$  est un nombre aléatoire laplacien quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$ . La seconde est une définition descriptive qui ne présuppose pas ce qu'est un nombre laplacien et qui est fondée sur l'extension d'un théorème de Serge Bernstein.

## SUMMARY.

Two definitions are given for extending the classical definition of the Laplace (or so called, normal) law of probability of a random number. Both apply to the case of a random element of any nature whatsoever, chosen in a distanced vectorial space.

In the first one,  $X$  is called a Laplacian random number if  $\mathcal{L}X$  is a laplacian random number for every linear functional  $\mathcal{L}X$ . The second is a descriptive definition which does not presuppose what a Laplacian number is and is based on an extension of a theorem of Serge Bernstein.

## FONCTION CARACTÉRISTIQUE.

**Fonction caractéristique dans un espace vectoriel distancié.** — Soit  $X$  un élément aléatoire de nature quelconque choisi au hasard dans un espace vectoriel distancié  $B. W.$  <sup>(1)</sup>. Et soit  $\mathcal{L}X$  une fonctionnelle linéaire <sup>(2)</sup> définie sur  $B. W.$

Par exemple, si  $B. W.$  est un espace cartésien à un nombre fini,  $r$ , de dimensions,  $X$  ayant les coordonnées  $X_1, \dots, X_r$ ,  $\mathcal{L}X$  sera de la forme

$$\mathcal{L}X = t_1 X_1 + \dots + t_r X_r,$$

où  $t_1, \dots, t_r$  sont des constantes.

Dans ce cas, on appelle, depuis longtemps, fonction caractéristique de  $X$ , la fonction

$$\varphi_X(t_1, \dots, t_r) = \mathfrak{N} e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_r X_r)} = \mathfrak{N} e^{i\mathcal{L}X},$$

$t_1, \dots, t_r$  définissent  $\mathcal{L}$  et inversement; on peut donc aussi représenter la fonction caractéristique par la notation condensée

$$\varphi_X[\mathcal{L}] = \mathfrak{N} e^{i\mathcal{L}X}.$$

Cette notation où n'intervient plus l'hypothèse que  $B. W.$  est ici à  $r$  dimensions, nous invite à une extension immédiate. Quand l'élément aléatoire  $X$  appartient à un espace vectoriel distancié quelconque  $B. W.$ , nous appellerons <sup>(3)</sup> *fonction caractéristique* de  $X$ , l'expression déjà considérée ci-dessus

$$\varphi_X[\mathcal{L}] = \mathfrak{N} e^{i\mathcal{L}X}$$

qui fait correspondre à toute fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$  définie sur  $B. W.$ , un nombre réel ou complexe fini et déterminé  $\varphi_X[\mathcal{L}]$ .

<sup>(1)</sup> Pour la définition d'un espace vectoriel distancié (donnée simultanément par N. Wiener et Banach) voir par exemple notre ouvrage *Les espaces abstraits*, chez Gauthier-Villars, 1928, au paragraphe XIV, p. 141.

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire une transformation de chaque élément  $x$  de  $B. W.$  en un nombre réel  $\mathcal{L}x$ , qui soit distributive et continue :

$$\mathcal{L}(x_1 + x_2) = \mathcal{L}x_1 + \mathcal{L}x_2; \quad \lim_{\|x_n - x\| \rightarrow 0} \mathcal{L}x_n = \mathcal{L}x.$$

<sup>(3)</sup> Cette définition (ou des définitions voisines) ont été déjà proposées par divers auteurs. Voir, par exemple, pour le cas où  $X$  est une fonction : LE CAM, *Un instrument d'étude des fonctions aléatoires : la fonction caractéristique* (*C. R.*, t. 224, 1947, p. 710-711), et pour le cas général, M<sup>lle</sup> E. MOURIER, *Sur l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 1300-1301).

Par exemple si B. W. est l'espace H de Hilbert, X a une suite de coordonnées  $X_k$  telle que  $\sum X_k^2$  converge et  $\mathcal{L}X$  est de la forme

$$\mathcal{L}X = \sum t_k X_k,$$

où la série  $\sum t_k^2$  converge. Dans ce cas, la fonction caractéristique est aussi une fonction de la suite infinie des  $t_k$

$$\Phi(t_1, t_2, \dots) = \mathfrak{M} e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_k X_k + \dots)}.$$

Si B. W. est l'espace  $L_2$  des fonctions numériques  $X(x)$  d'une variable numérique  $x$ , qui sont de carré intégrable sur un intervalle fixe I, on sait que  $\mathcal{L}X$  est de la forme

$$\mathcal{L}X = \int_I X(x) l(x) dx,$$

où  $l(x)$  appartient à  $L_2$ , de sorte que la fonction caractéristique est aussi une transformation de  $l(x)$  en un nombre réel ou complexe

$$\Phi[l] = \mathfrak{M} e^{i \int_I X(x) l(x) dx}.$$

Si B. W. est l'espace C des fonctions numériques  $X(x)$  d'une variable numérique  $x$  continues sur un intervalle fixe I, on sait que

$$\mathcal{L}X = \int_I X(x) dL(x),$$

où  $L(x)$  est une fonction à variation bornée. La fonction caractéristique est alors une transformation de  $L(x)$  dans le nombre réel ou complexe

$$\Psi[L] = \mathfrak{M} e^{i \int_I X(x) dL(x)}.$$

Considérons encore le cas où, X étant choisi au hasard dans un espace vectoriel distancié B. W., nous supposons que cet espace possède une base. C'est-à-dire qu'il existe une suite dénombrable d'éléments distincts  $e_1, e_2, \dots$ , de B. W. pour laquelle, quel que soit l'élément X de B. W., il lui correspond une suite et une seule de nombres  $X_1, X_2, \dots$  tels que

$$X = X_1 e_1 + X_2 e_2 + \dots,$$

cette égalité signifiant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X^{(n)}\| = 0,$$

en posant

$$X^{(n)} = X_1 e_1 + \dots + X_n e_n.$$

Toute fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$  définie sur B. W. étant distributive et continue, on a

$$\mathcal{L}X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}X^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_1 \mathcal{L}e_1 + \dots + X_n \mathcal{L}e_n),$$

d'où

$$\mathcal{L}X = X_1 \mathcal{L}e_1 + \dots + X_n \mathcal{L}e_n + \dots,$$

$X_n$  étant par hypothèse complètement déterminé par  $X$ , c'est une fonctionnelle de  $X$ . On démontre qu'elle est linéaire.

Notons enfin que si un espace vectoriel distancié possède une base, il est *séparable*, c'est-à-dire qu'on peut extraire de cet espace un ensemble dénombrable  $N$  tel que tout point de l'espace soit limite d'une suite extraite de  $N$ .

On voit que, dans le cas actuel, la fonction caractéristique de  $X$

$$\varphi_X[\mathcal{L}] = \mathfrak{N} e^{i\mathcal{L}X}$$

peut être représentée par

$$\varphi_X[\mathcal{L}] = \mathfrak{N} e^{i \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}X^{(n)}} = \mathfrak{N} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\mathcal{L}X^{(n)}} \right] = \mathfrak{N} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i(X_1 \mathcal{L}e_1 + \dots + X_n \mathcal{L}e_n)}.$$

**Inversion.** — Quand on se donne la fonction caractéristique  $\varphi_X[\mathcal{L}]$  de l'élément  $X$ , on en déduit la fonction caractéristique du nombre  $\mathcal{L}X$

$$\varphi_{\mathcal{L}X}(\rho) = \mathfrak{N} e^{i\rho \mathcal{L}X} = \varphi_X[\rho \mathcal{L}].$$

Il y a donc une seule loi de probabilité correspondante de  $\mathcal{L}X$ , définie par sa fonction de répartition  $F_{\mathcal{L}X}(x)$  au moyen de la formule connue

$$F_{\mathcal{L}X}(x) - F_{\mathcal{L}X}(0) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X[\rho \mathcal{L}] \frac{1 - e^{-ix\rho}}{i\rho} d\rho,$$

où v. p.  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  est mis pour  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^{+c}$  et où la constante  $F(0)$  est déterminée par la condition  $F(-\infty) = 0$ .

La connaissance de la fonction

$$F_{\mathcal{L}X}(x) = \text{Prob}[\mathcal{L}X < x]$$

quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$  contribue à la connaissance

de la loi de probabilité de  $X$ . Car la « fonction de distribution » de  $X$   $P(e) = \text{Prob.}[X \text{ appartient à l'ensemble } e \text{ de B. W.}]$  sera connue pour tout ensemble  $e$  constitué par tous les points de B. W. situé d'un même côté du « plan »  $\mathcal{L}X = x$  de B. W.

On sait même qu'au moins dans les cas les plus simples (par exemple quand l'espace B. W. est un espace euclidien à un nombre fini de dimensions) la fonction caractéristique  $\varphi_X[\mathcal{L}]$  de  $X$  détermine complètement la loi de probabilité de  $X$ .

On peut aller plus loin en revenant au cas où  $X$  appartient à un espace vectoriel distancié possédant une base.

Nous voulons démontrer que la loi de probabilité de  $X$  sera bien déterminée par la connaissance pour toute fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$  de la valeur correspondante de la fonction caractéristique de  $X$ ,  $\varphi_X[\mathcal{L}]$ .

En effet, quels que soient les nombres certains  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , l'expression

$$\mathcal{L}_n X = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n$$

est évidemment une fonction linéaire de  $X$ ; connaissant  $\varphi_X[\mathcal{L}]$ , on connaîtra en particulier

$$\varphi_X[\mathcal{L}_n] = \mathfrak{N} e^{i\mathcal{L}_n X} = \mathfrak{N} e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}.$$

Or cette dernière fonction est la fonction caractéristique classique

$$\varphi_{X^{(n)}}(t) \equiv \varphi_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n)$$

du point aléatoire  $X^{(n)}$  de l'espace euclidien à  $n$  dimensions, Et l'on sait que la connaissance de cette dernière détermine la fonction de répartition de  $X^{(n)}$ , soit

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Prob}[X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n].$$

Ainsi connaissant  $\varphi_X[\mathcal{L}]$  pour toute fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$ , nous savons déterminer quel que soit  $n$  la fonction  $F_n(x_1, \dots, x_n)$ . Or si l'on pose

$$\text{Prob}[X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n, X_n < x_{n+1}, \dots] = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots),$$

on a évidemment

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1, \dots, x_n).$$

Nous voyons bien finalement que la connaissance de  $\varphi_X[\mathcal{L}]$ , quelle que soit la fonctionnelle  $\mathcal{L}$ , détermine la connaissance de la fonction de

répartition de  $X$  mise, dans le cas actuel où B. W. a une base, sous la forme  $F(x_1, \dots, x_n, \dots)$ .

### PREMIÈRE DÉFINITION DES ÉLÉMENTS ALÉATOIRES LAPLACIENS.

**Nombre aléatoire laplacien.** — Soit  $X$  un *nombre* aléatoire; sa fonction de répartition est

$$F(x) = \text{Prob } \{ < x \}.$$

On dit souvent (à tort du reste) <sup>(1)</sup> que  $X$  obéit à la loi normale ou à la loi de Gauss quand  $F(x)$  est dérivable et quand de plus sa « densité de probabilité »,  $F'_x$  est de la forme

$$(1) \quad F'_x = e^{g(x)},$$

où  $g(x)$  est une fonction du second degré de  $x$ . Nous dirons que  $X$  est un nombre aléatoire laplacien <sup>(1)</sup> quand  $F'_x$  existe et est de la forme (1) où  $g(x)$  est une fonction *au plus* du second degré en  $x$ . Dans le cas où  $g(x)$  se réduit au premier degré,  $X$  est presque certainement constant et l'on pourra considérer que dans ce cas on a affaire à une loi de Laplace singulière ou dégénérée. Dans les deux cas, on sait que la fonction caractéristique de  $X$  peut être écrite

$$(2) \quad \varphi_X(t) = \mathfrak{N} e^{itX} = e^{it\bar{X} - (\sigma_X)^2 \frac{t^2}{2}},$$

où  $\bar{X}$  et  $(\sigma_X)^2 = \mathfrak{N}(X - \bar{X})^2$  sont la moyenne et la fluctuation de  $X$ .

**Élément aléatoire laplacien.** — Un point  $X$  de l'espace euclidien à  $r$  dimensions vérifie la loi de Laplace-Bravais lorsque ses coordonnées sont de la forme

$$X_k = c_k^1 X^{(1)} + \dots + c_k^r X^{(r)},$$

<sup>(1)</sup> On sait que dans les applications (en particulier dans les phénomènes économiques), on rencontre des lois de probabilités très différentes (sans être anormales pour cela) de la loi des erreurs d'observation.

C'est de Moivre qui le premier a obtenu l'approximation de la loi binomiale par une intégrale, comme, avant K. Pearson, Laplace l'avait déjà rappelé. Mais c'est Laplace et non de Moivre, qui a le premier considéré cette intégrale comme définissant la loi des erreurs d'observation. A cette époque, comme l'a signalé E. B. Wilson, Gauss n'avait encore que trois ans.

où  $X^{(1)} \dots X^{(r)}$  sont des nombres aléatoires laplaciens indépendants et les  $c_k^i$  des constantes. On a alors

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \Phi(t_1, \dots, t_r) &= \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i(t_1 X_1 + \dots)} = \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i(t_1 X^{(1)} + \dots + t_r X^{(r)})} \\
 &= \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i t_1 X^{(1)}} \mathcal{D}\mathcal{N} e^{i t_2 X^{(2)}} \dots = e^{i t_1 \overline{X^{(1)}} - \frac{t_1^2}{2} (\sigma^{(1)})^2} \dots \\
 &= e^{i(t_1 \overline{X^{(1)}} + \dots + t_r \overline{X^{(r)}}) - \frac{1}{2} [(t_1)^2 (\sigma^{(1)})^2 + \dots + (t_r)^2 (\sigma^{(r)})^2]} \\
 &= e^{i(t_1 \overline{X_1} + \dots + t_r \overline{X_r}) - \frac{1}{2} Q(t_1, \dots, t_r)},
 \end{aligned}$$

où

$$t_j^2 = \sum t_k c_k^j,$$

et où  $Q(t_1, \dots, t_r)$  est une forme définie (ou semi-définie) positive en  $t_1, t_2, \dots, t_r$ .

D'ailleurs

$$\begin{aligned}
 Q(t_1, \dots, t_r) &= \sum \mathcal{D}\mathcal{N} \left\{ t_k (X^{(k)} - \overline{X_k^{(k)}}) \right\}^2 \\
 &= \mathcal{D}\mathcal{N} \left\{ t_1 X^{(1)} + \dots + t_r X^{(r)} - t_1 \overline{X^{(1)}} - \dots - t_r \overline{X^{(r)}} \right\}^2 \\
 &= \mathcal{D}\mathcal{N} \left\{ (t_1 X_1 + \dots + t_r X_r) - (t_1 \overline{X_1} + \dots + t_r \overline{X_r}) \right\}^2.
 \end{aligned}$$

En posant encore

$$\mathcal{L}X = t_1 X_1 + \dots + t_r X_r,$$

on a donc

$$(4) \quad \varphi_X[\mathcal{L}] = \Phi(t_1, \dots, t_r) = e^{i \overline{\mathcal{L}X} - \frac{1}{2} \sigma_{\mathcal{L}X}^2},$$

où  $\overline{\mathcal{L}X}$  et  $\sigma_{\mathcal{L}X}^2$  sont la moyenne et la fluctuation du nombre aléatoire  $\mathcal{L}X$ . De sorte que  $\mathcal{L}X$  est un nombre aléatoire laplacien.

Nous sommes ainsi conduit à la généralisation suivante de la loi de Laplace.

**Loi de Laplace généralisée.** — Nous dirons qu'un *élément aléatoire*  $X$  (de nature quelconque) choisi au hasard dans un *espace vectoriel distancié*  $B. W.$  est un *élément laplacien*, lorsque  $\mathcal{L}X$  est un *nombre aléatoire vérifiant la loi de Laplace* (dite aussi loi normale) quelle que soit la *fonctionnelle linéaire*  $\mathcal{L}X$  définie sur  $B. W.$  (1).

Par exemple, si l'espace  $B. W.$  se réduit à un espace euclidien  $C_r$  à

---

(1) On pourra admettre comme cas singulier que pour certaines fonctionnelles linéaires  $\mathcal{L}X$ ,  $\mathcal{L}X$  soit presque certainement constant, mais il ne devra pas en être ainsi quelle que soit  $\mathcal{L}X$ , ce qui aurait lieu si  $X$  lui-même était presque sûrement constant.



$r$  dimensions, on devra avoir pour sa fonction caractéristique l'expression (3) qui peut aussi s'écrire

$$(4) \quad \Phi(t_1, \dots, t_r) = e^{i(t_1 \bar{x}_1 + \dots + t_r \bar{x}_r) - \frac{1}{2} \sum \sum t_j t_k \mathfrak{N}(x - \bar{x}_j)(x_k - \bar{x}_k)}$$

Par exemple si l'espace B. W. se réduit à l'espace de Hilbert H, on aura encore une expression analogue, mais avec un nombre infini de paramètres  $t_k$  tels que  $\sum t_k^2$  converge.

Si B. W. se confond avec  $L_2$ , on aura pour sa fonction caractéristique

$$\Phi_X[l] = e^{i \mathfrak{N} \int_1^x X(x) l(x) dx - \frac{1}{2} \mathfrak{N} \left\{ \int_1^x [X(x) - \bar{X}(x)] l(x) dx \right\}^2}$$

Si B. W. se réduit à l'espace C des fonctions continues, sa fonction caractéristique sera

$$\Psi[L] = e^{i \mathfrak{N} \int_1^x X(x) dL(x) - \frac{1}{2} \mathfrak{N} \left\{ \int_1^x [X(x) - \bar{X}(x)] dL(x) \right\}^2}$$

**Propriété de la loi de Laplace généralisée.** — Si X, Y sont deux éléments aléatoires laplaciens indépendants choisis au hasard dans un espace vectoriel distancié B. W. quelconque,  $z$  un élément certain de W. B. et  $a, b, c$  trois nombres certains quelconques, alors

$$Z = aX + bY + cz$$

qui appartient aussi à B. W., est aussi un élément laplacien.

Car

$$(5) \quad \mathcal{L}Z = a\mathcal{L}X + b\mathcal{L}Y + c\mathcal{L}z.$$

Au second membre  $a, b, c, \mathcal{L}z$  sont des nombres certains,  $\mathcal{L}X$  et  $\mathcal{L}Y$  des nombres aléatoires laplaciens, indépendants, donc  $\mathcal{L}Z$  est un nombre aléatoire laplacien, quelle que soit la transformation  $\mathcal{L}Z$ . Dès lors Z est bien un élément laplacien.

Inversement, si Z est un élément laplacien de B. W., si  $a, b, c, z$  sont certains ( $ab \neq 0$ ), alors, si X et Y sont indépendants ils sont aussi laplaciens. Car le nombre  $\mathcal{L}Z$  étant laplacien et les nombres aléatoires  $\mathcal{L}X$  et  $\mathcal{L}Y$  étant indépendants, il résulte du théorème de Lévy-Cramér que  $\mathcal{L}X$  et  $\mathcal{L}Y$  sont laplaciens quelle que soit la transformation  $\mathcal{L}X$  (l'une ou l'autre pouvant cependant être un nombre presque sûrement constant pour quelque fonctionnelle particulière  $\mathcal{L}$ ). Dès lors X et Y sont laplaciens (l'un d'eux peut être presque sûrement constant,

l'autre étant laplacien non singulier, si  $Z$  n'est pas singulier. Si  $Z$  est presque certainement constant,  $X$  et  $Y$  le sont aussi).

### GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE SERGE BERNSTEIN.

**Vers une définition descriptive de la loi de Laplace.** — Nous avons présenté plus haut une généralisation de la loi de Laplace, *en partant* de la définition « constructive » classique, supposée donnée, de la loi de Laplace pour un *nombre* aléatoire.

On peut considérer comme souhaitable une définition de la loi de Laplace qui conviendrait à des éléments aléatoires de nature quelconque *comme* à des *nombres* aléatoires; c'est-à-dire ne supposant pas, contrairement à ce qui a été fait plus haut, que l'on connaisse déjà la définition d'un *nombre* aléatoire laplacien.

C'est ce qui est rendu possible par un théorème dû à Serge Bernstein quand on lève une restriction qu'il contenait, quand on en modifie la forme pour en faire une définition et quand on en étend la portée, comme nous allons le faire maintenant.

**Théorème de S. Bernstein.** — Serge Bernstein a démontré <sup>(1)</sup> le théorème suivant : *Pour que deux nombres aléatoires indépendants  $X$ ,  $Y$ , chacun pourvu partout d'une densité de probabilité et ayant la même fluctuation  $\sigma^2$  finie et  $\neq 0$ , soient deux variables laplaciennes, il faut et il suffit que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendantes.*

---

(1) En russe (avec un résumé français) sous le titre : *Sur une propriété caractéristique de la loi de Gauss*, p. 21 et 22 des *Transactions of the Leningrad Polytechnic Institute*, 1941.

Le théorème de S. Bernstein est le cas particulier pour  $n = 2$  de la proposition suivante : si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  nombres aléatoires indépendants ayant même loi de probabilité que  $X$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  soit laplacien est que  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  et  $S^2 = \frac{(X_1 - M_n)^2 + \dots + (X_n - M_n)^2}{n}$  soient indépendants. En supposant l'existence d'une densité de probabilité et d'une fluctuation finie de  $X_1$ , la condition nécessaire a été énoncée par Student et démontrée par R. A. Fisher, la condition suffisante a été démontrée par R. C. GEARY, *Journal Royal Statistical Soc.*, Suppl. vol. 3, puis d'une autre façon par LUKACS, *Annals Mathematical Statistics*, vol. 13, 1942.

Le cas de  $n > 2$  ne paraît pas propre à une extension simple aux espaces vectoriels distancés.

On peut étendre cette proposition au cas où l'on ne suppose l'existence d'une densité de probabilité ni pour X, ni pour Y, au moyen d'une démonstration tout à fait différente de celle de S. Bernstein (en ce qui concerne la condition suffisante). Ceci fait, une modification simple des termes du théorème permet d'en tirer une définition « descriptive » de la loi de probabilité de Laplace, définition équivalente à la définition « constructive » habituelle. Et cette définition descriptive a ce grand intérêt de garder un sens (*grâce à l'élimination* de l'hypothèse de l'existence d'une densité de probabilité), quand X et Y au lieu d'être des *nombres* aléatoires sont des éléments aléatoires *de nature quelconque* pris au hasard dans un espace « vectoriel distancié » de Banach-Wiener ou même dans un espace plus général encore.

Nous avons enfin appliqué la nouvelle définition au cas où X est un point aléatoire de l'espace euclidien à un nombre entier de dimensions (cas où cette définition descriptive est équivalente à la définition constructive de Laplace-Bravais) et au cas de l'espace de Hilbert.

**Extension du théorème de Serge Bernstein. — I. Nouvelle démonstration de la condition suffisante.** — Pour la condition suffisante, nous n'aurons besoin ni de supposer l'existence d'une densité de probabilité ni même de supposer les fluctuations égales. Notre démonstration ne fera même intervenir qu'à la fin la supposition que les fluctuations soient finies.

Soient donc deux *nombres* aléatoires *indépendants* X et Y TELS SEULEMENT d'abord, que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient aussi des nombres aléatoires indépendants.

Représentons par  $\varphi_X(t)$  la fonction caractéristique de X,

$$\varphi_X(t) = \mathfrak{M} e^{itX}.$$

Posons

$$2X = U + V; \quad 2Y = U - V,$$

d'où

$$\varphi_X(2t) = \varphi_{2X}(t) = \varphi_U(t) \varphi_V(t),$$

d'où encore

$$(6) \quad \varphi_X(2t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \varphi_X(t) \varphi_{-Y}(t) = [\varphi_X(t)]^2 \varphi_Y(t) \varphi_Y(-t).$$

De la même façon

$$\varphi_Y(2t) = \varphi_U(t) \varphi_{-V}(t),$$

d'où

$$(7) \quad \varphi_Y(2t) = [\varphi_Y(t)]^2 \varphi_X(t) \varphi_X(-t),$$

$\varphi_X(t)$  n'est jamais nul. S'il existait un nombre  $t_0$  tel que  $\varphi_X(t) = 0$ , on aurait d'abord  $t_0 \neq 0$ , puisque  $\varphi_X(0) = 1$ .

Alors d'après (6)

$$0 = \varphi_X(t_0) = \left[ \varphi_X\left(\frac{t_0}{2}\right) \right]^2 \varphi_Y\left(\frac{t_0}{2}\right) \varphi_Y\left(\frac{-t_0}{2}\right).$$

Il existerait donc un nombre  $t_1 = \pm \frac{t_0}{2}$  et tel que  $\varphi_X(t_1) = 0$  ou  $\varphi_Y(t_1) = 0$ . Par récurrence, on verrait qu'il existe  $t_n = \pm \frac{t_0}{2^n}$  tel que  $\varphi_X(t_n) = 0$  ou  $\varphi_Y(t_n) = 0$ .

L'une au moins des deux fonctions  $\varphi_X(t)$  et  $\varphi_Y(t)$  serait nulle pour une infinité des nombres  $t_n$  et puisque  $t_n \rightarrow 0$  et que toute fonction caractéristique est continue, on aurait  $\varphi_X(0) = 0$  ou  $\varphi_Y(0) = 0$ , ce qui est impossible.

Ainsi, on peut, quel que soit  $t$ , prendre les logarithmes [que nous appellerons  $\psi(t)$  et  $\Psi(t)$ ] des deux fonctions  $\varphi_X(t)$ ,  $\varphi_Y(t)$ .

**Un problème de calcul fonctionnel.** — Les logarithmes  $\psi(t)$ ,  $\Psi(t)$  de ces deux fonctions sont donc deux fonctions déterminées, telles en particulier que  $\psi(0) = \Psi(0) = 0$  et vérifiant le système d'équations fonctionnelles

$$S \begin{cases} (6 \text{ bis}) & \psi(2t) - 2\psi(t) = \Psi(t) + \Psi(-t), \\ (7 \text{ bis}) & \Psi(2t) - 2\Psi(t) = \psi(t) + \psi(-t). \end{cases}$$

Résolvons ce problème purement mathématique. En faisant  $t = 0$  dans S, on vérifie d'abord que  $\psi(0) = \Psi(0) = 0$ .

Posons

$$\mathfrak{Q}(t) = \frac{\psi(t) + \Psi(t)}{2}; \quad \mathfrak{I}(t) = \frac{\psi(t) - \Psi(t)}{2}.$$

On aura en ajoutant et retranchant (6<sup>bis</sup>) et (7<sup>bis</sup>)

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{Q}(2t) - 2\mathfrak{Q}(t) = \mathfrak{Q}(t) + \mathfrak{Q}(-t), \\ \mathfrak{I}(2t) - 2\mathfrak{I}(t) = -\mathfrak{I}(t) - \mathfrak{I}(-t). \end{cases}$$

On a d'abord

$$\mathfrak{I}(2t) = \mathfrak{I}(t) - \mathfrak{I}(-t), \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{I}(-2t) = \mathfrak{I}(-t) - \mathfrak{I}(t) = -\mathfrak{I}(2t);$$

donc  $I(t)$  est une fonction impaire et par suite

$$(9) \quad I(2t) = 2I(t).$$

En posant

$$I(t) = t\alpha(t)$$

pour  $t \neq 0$ , on a donc

$$2t\alpha(2t) = 2t\alpha(t)$$

et par suite, pour  $t \neq 0$ ,

$$\alpha(2t) = \alpha(t).$$

Pour  $t > 0$ , posons

$$t = 2^\lambda \quad \text{et} \quad \pi_3(\lambda) = \alpha(2^\lambda),$$

on aura

$$\pi_3(\lambda) = \pi_3(\lambda + 1).$$

Ainsi pour  $t > 0$

$$I(t) = t\pi_3\left(\frac{L|t|}{L_2}\right),$$

où  $\pi_3(\lambda)$  est une fonction définie quel que soit  $\lambda$  et de période égale à 1 et où pour abrégier  $Lu$  désigne le logarithme népérien de  $u$ .

Pour  $t < 0$ , on a

$$I(t) = -I(-t) = -(-t)\pi_3\left(\frac{L(-t)}{L_2}\right)$$

ou

$$I(t) = t\pi_3\left(\frac{L(-t)}{L_2}\right).$$

Donc, quel que soit le signe de  $t \neq 0$ , on a

$$(10) \quad I(t) = t\pi_3\left(\frac{L|t|}{L_2}\right).$$

Passons à  $\mathfrak{Q}(t)$ . Posons

$$p(t) = \frac{\mathfrak{Q}(t) + \mathfrak{Q}(-t)}{2}; \quad i(t) = \frac{\mathfrak{Q}(t) - \mathfrak{Q}(-t)}{2}$$

et portons dans (8)

$$p(2t) + i(2t) - 2p(t) - 2i(t) = 2p(t)$$

ou

$$p(2t) - 4p(t) = 2i(t) - i(2t).$$

Les deux membres sont des fonctions respectivement paires et impaires. Leur valeur commune est donc nulle.

On a d'abord

$$i(2t) = 2i(t)$$

qui se traite comme la relation (9) et donne

$$i(t) = t \pi_2 \left( \frac{L|t|}{L_2} \right),$$

où  $\pi_2(\lambda)$  est une fonction de période égale à 1. D'autre part

$$p(2t) = 4p(t),$$

d'où, en posant

$$\beta(t) = \frac{p(t)}{t^2} \quad \text{pour } t \neq 0,$$

$$\beta(2t) = \beta(t)$$

et par suite

$$\beta(t) = \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) \quad \text{pour } t > 0,$$

où  $\varpi(\lambda)$  est de période 1.

Et puisque  $p(t)$  est paire

$$p(t) = t^2 \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) \quad \text{pour } t \neq 0.$$

Ainsi

$$\varrho(t) = t^2 \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) + t \pi_2 \left( \frac{L|t|}{L_2} \right),$$

$$I(t) = t \pi_3 \left( \frac{L|t|}{L_2} \right),$$

d'où enfin

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(t) = t^2 \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) + t \pi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right), \\ \Psi(t) = t^2 \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) + t \pi_1 \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) \\ \text{avec } \psi(0) = \Psi(0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{pour } t \neq 0,$$

où  $\varpi(\lambda)$ ,  $\pi(\lambda)$ ,  $\pi_1(\lambda)$  sont trois fonctions de période 1. Les expressions (II) fournissent, en prenant pour  $\varpi$ ,  $\pi$ ,  $\pi_1$ , trois fonctions absolument quelconques de période 1, la solution la plus générale de (S), puisque réciproquement ces expressions vérifient (S), comme on peut s'en assurer immédiatement.

Pour utiliser ce qui précède dans notre problème de Calcul des probabilités, on pourrait penser d'abord à chercher parmi ces solutions celles qui sont logarithmes des fonctions caractéristiques et satisfont ainsi à certaines conditions supplémentaires.

Mais cela n'est pas nécessaire, comme le montrera la suite.

Soit alors  $Z$  une variable aléatoire indépendante de  $X$  et ayant la même loi de probabilité et  $T = X - Z$ . On aura

$$\varphi_T(t) = \varphi_X(t) \varphi_Z(-t) = \varphi_X(t) \varphi_X(-t),$$

d'où

$$(12) \quad \varphi_T(t) = e^{2t^2 \varpi\left(\frac{L|t|}{L^2}\right)}.$$

Soient maintenant  $T_1, T_2, \dots, T_n$  les valeurs de  $T$  dans  $n$  épreuves indépendantes et

$$K_n = \frac{T_1 + \dots + T_n}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$\varphi_{K_n}(t) = \varphi_{T_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \cdots \varphi_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_T\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = e^{2t^2 \varpi\left(\frac{L|t|}{L^2} - \frac{1Ln}{2L^2}\right)}.$$

Si  $p$  est un entier positif pair, alors, quand on prend  $n = 2^p$ ,

$$(13) \quad \varphi_{K_{2^p}}(t) = e^{2t^2 \varpi\left(\frac{L|t|}{L^2}\right)} = \varphi_T(t),$$

de sorte que  $K_{2^p}$  a une loi de probabilité, celle de  $T$ , qui est indépendante de  $p$ .

Si la fluctuation de  $X$  est finie mais nulle,  $X$  et par suite  $Z$ , sont presque certainement égales, à une même constante et  $T$  est presque certainement nul, donc  $\varphi_T(t) \equiv 1$  et alors  $\varpi(\lambda) = 0$ . D'ailleurs, dans ce cas,  $X + Y$  et  $X - Y$  ne peuvent être indépendants que si  $Y$  est aussi presque certainement égal à une constante.

Et réciproquement si  $X$  et  $Y$  sont presque certainement constants,  $X + Y$  et  $X - Y$  sont indépendants. On a ainsi le système de solutions le plus général quand la fluctuation de  $X$  est nulle (et alors celle de  $Y$  l'est aussi).

Si la fluctuation de  $X$ , soit,  $\sigma^2$ , est finie et non nulle,  $X$  et par suite  $Z$  ont une même moyenne  $\bar{X} = \bar{Z}$  finie et déterminée, et  $\bar{T} = 0$ . On sait qu'alors  $\varphi_{K_n}(t)$  converge quand  $n \rightarrow \infty$  vers la fonction caractéristique d'une variable laplacienne ayant pour moyenne et fluctuations celles de  $T$ , soit zéro et  $2\sigma^2$ . Or

$$(14) \quad \varphi_T(t) = \varphi_{K_{2^p}}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_{K_{2^p}}(t).$$

Ainsi  $T$  est elle-même une variable laplacienne. Mais  $T = X - Z$  où  $X$  et  $Z$  sont indépendants et ont chacun une fluctuation  $\delta^2 \neq 0$ . Donc, d'après le théorème de Lévy-Cramér,  $X$  est une variable laplacienne. D'ailleurs, le raisonnement fait pour  $\psi(t)$  peut se répéter pour  $\Psi(t)$ . Mais d'après (13) et (14),  $\varpi(\lambda)$  est une constante  $\neq 0$ ; comme  $\varpi(\lambda)$  figure aussi dans  $\Psi(t)$ , on voit qu'en désignant par  $Z_1$  une variable aléatoire indépendante de  $Y$ , mais avec la même loi de probabilité, et posant  $T_1 = Y - Z_1$ , on aura

$$\varphi_{T_1}(t) = e^{2t^2\varpi},$$

avec  $\varpi$  constant et  $\neq 0$ .

De sorte que  $T_1$  est aussi une variable laplacienne avec la même fluctuation  $2\sigma^2$  que  $T$ . Alors  $Y$  est aussi non seulement laplacienne mais a la même fluctuation que  $X$ .

On peut donner aussi la démonstration suivante. D'après Paul Lévy (1), quand  $X$  a une fluctuation  $\sigma^2$  finie, on a

$$(15) \quad \log \varphi_X(t) = i\bar{X}t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t), \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0.$$

On a donc d'après (5)

$$i\bar{X} - \frac{\sigma^2 t}{2} + t \varepsilon(t) = \pi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) + t \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right).$$

En remplaçant  $t$  par  $2^p t$  où  $p$  est un entier négatif

$$i\bar{X} - \frac{\sigma^2 2^p t}{2} + 2^p t \varepsilon(2^p t) = \pi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) + 2^p t \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right),$$

d'où, en faisant croître  $p$  indéfiniment par valeurs négatives

$$\pi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) = \text{const.} = i\bar{X},$$

et par suite

$$-\frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon(2^p t) = \varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right).$$

D'où en faisant encore tendre  $p$  vers  $-\infty$

$$\varpi \left( \frac{L|t|}{L_2} \right) = \text{const.} = -\frac{\sigma^2}{2}$$

(1) Voir formule (17), p. 42, dans sa *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, chez Gauthier-Villars, Paris, 1937.



et finalement

$$(16) \quad \varphi_X(t) = i\bar{X}t - \frac{\sigma^2}{2}t^2.$$

**Condition nécessaire.** — Ici on peut conserver, sans chercher à en étendre la validité, la démonstration de S. Bernstein. Comme elle est rédigée en russe, rappelons-la ici. On suppose que X et Y sont des variables laplaciennes indépendantes et, conformément au résultat précédent, nous supposerons qu'elles ont même fluctuation  $\sigma^2 (\neq 0)$ . Alors elles ont chacune une moyenne finie et déterminée  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ . Suivant la remarque de S. Bernstein, on a

$$(17) \quad \mathfrak{N}(U - \bar{U})(V - \bar{V}) = \mathfrak{N}(X - \bar{X})^2 - \mathfrak{N}(Y - \bar{Y})^2 = 0.$$

D'autre part il résulte des hypothèses que  $U = X + Y$  et  $V = X - Y$  sont comme on le sait, nécessairement aussi des variables laplaciennes. Mais de plus, Bravais a démontré que la loi de probabilité du couple U, V est la loi de Laplace généralisée. Et l'on sait que, dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour que U, V soient indépendantes est que leur coefficient de corrélation linéaire soit nul, ce qui est le cas ici d'après (17). Donc U et V sont indépendants.

On peut aussi donner une autre démonstration au moyen des fonctions caractéristiques.

On pose

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \mathfrak{N} e^{i(tU + t'V)}.$$

D'où

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \mathfrak{N} e^{i(t+t')X + i(t-t')Y} = \varphi_X(t+t') \varphi_Y(t-t'),$$

et lorsque X, Y sont deux variables laplaciennes de moyenne  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  et de fluctuations  $\sigma^2$ ,  $\sigma'^2$

$$\begin{aligned} \varphi_{U,V}(t, t') &= e^{i(t+t')\bar{X} + i(t-t')\bar{Y}} e^{-\frac{(t+t')^2}{2}\sigma^2} e^{-\frac{(t-t')^2}{2}\sigma'^2} \\ &= e^{it\bar{U}} e^{it'\bar{V}} e^{-\frac{1}{2}[(t^2(\sigma^2 + \sigma'^2) + 2tt'(\sigma^2 - \sigma'^2) + t'^2(\sigma^2 + \sigma'^2)]}. \end{aligned}$$

Mais puisque U, V sont, comme on le sait, dans le cas actuel, des variables laplaciennes de fluctuations  $\sigma''^2 = \sigma^2 + \sigma'^2$ , on a

$$\varphi_U(t) = e^{it\bar{U} - \frac{t^2\sigma''^2}{2}}, \quad \varphi_V(t') = e^{it'\bar{V} - \frac{t'^2\sigma''^2}{2}}.$$

Dès lors

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \varphi_U(t) \varphi_V(t') \psi(t, t'),$$

où

$$\psi(t, t') = e^{tt'(\sigma'^2 - \sigma^2)}.$$

Ainsi pour qu'on ait

$$(18) \quad \varphi_{X+Y, X-Y}(t, t') = \varphi_{X+Y}(t) \varphi_{X-Y}(t'),$$

quand  $X$  et  $Y$  sont deux variables laplaciennes indépendantes, il faut et il suffit que leurs fluctuations  $\sigma^2$  et  $\sigma'^2$  soient égales quand on donne  $X$ , on pourra prendre à cet effet pour  $Y$  un nombre aléatoire indépendant de  $X$ , mais avec la même loi de probabilité. La condition (18) exprime d'ailleurs que les variables aléatoires  $X + Y$  et  $X - Y$  sont indépendantes.

## DEUXIÈME DÉFINITION DES ÉLÉMENTS LAPLACIENS.

**Définition descriptive d'un nombre Laplacien.** — Il résulte de ce qui précède que :

*Pour qu'un nombre aléatoire  $X$  obéisse à la loi de Laplace, il faut et il suffit : 1° que sa fluctuation soit finie et  $\neq 0$ ; 2° qu'il existe un autre nombre aléatoire  $Y$  indépendant de  $X$  et tel que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendants.*

**Généralisation de la fluctuation.** — Considérons maintenant d'abord le cas où  $X$  (au lieu d'être un nombre aléatoire) est un élément aléatoire de nature quelconque pris au hasard dans un espace distancié complet  $\mathcal{O}$  <sup>(1)</sup>.

Soit  $(\sigma_a)^2 = \mathfrak{M}(X, a)^2$ , où  $a$  est un élément certain de l'espace  $\mathcal{O}$  et où  $(X, a)$  est la distance de  $X$  et de  $a$ . Nous appelons *fluctuation de  $X$* , la borne inférieure de  $(\sigma_a)^2$  quand  $a$  parcourt  $\mathcal{O}$ .

---

(1) Un espace  $\omega$  est distancié si à tout couple d'éléments  $a, b$  de  $\omega$  on peut associer un nombre  $(a, b)$  appelé distance de  $a$  et de  $b$ , tel que  $(a, b) = (b, a) \geq 0$ , que  $(a, b) = 0$  si  $a = b$  et réciproquement, et enfin tel que  $(a, b) \leq (a, c) + (c, b)$ . Il est complet si le critère de convergence de Cauchy y est valable.

**Fluctuation nulle.** — Que peut-on dire d'un élément aléatoire  $X$  dont la fluctuation est nulle? On peut donner la réponse, en faisant usage de l'inégalité triangulaire

$$\sqrt{\mathfrak{N}(X, Y)^2} \leq \sqrt{\mathfrak{N}(X, Z)^2} + \sqrt{\mathfrak{N}(Y, Z)^2}$$

facile à démontrer au moyen de l'inégalité de Schwartz. Dire en effet que la fluctuation de  $X$  est nulle, c'est dire que pour tout entier  $n$ , il existe un élément certain  $a_n$  de  $\mathcal{O}$  tel que

$$\mathfrak{N}(X, a_n)^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Alors

$$(a_n, a_{n+p}) \leq \sqrt{\mathfrak{N}(X, a_n)^2} + \sqrt{\mathfrak{N}(X, a_{n+p})^2} < \frac{2}{n}.$$

Dès lors, l'espace  $\mathcal{O}$  étant complet, la suite des  $a_n$  doit être convergente. Soit  $a$  l'élément certain de  $\mathcal{O}$  qui en est la limite. On a

$$\sqrt{\mathfrak{N}(X, a)^2} \leq \sqrt{\mathfrak{N}(X, a_n)^2} + (a, a_n) < \frac{1}{n} + (a, a_n)$$

quel que soit  $n$ . Donc

$$\mathfrak{N}(X, a)^2 = 0;$$

la distance  $(X, a)$  est presque certainement nulle : *quand la fluctuation de  $X$  est nulle,  $X$  se réduit à un élément presque certain de  $\mathcal{O}$ . La réciproque est d'ailleurs évidente. Nous voyons bien maintenant la raison et l'importance de la stipulation d'une fluctuation non nulle dans la définition qui va suivre.*

Pour généraliser la définition descriptive qui a été donnée plus haut (p. 7) et l'étendre à des éléments aléatoires  $X, Y$  de nature quelconque, il faut pouvoir donner un sens aux symboles  $X + Y, X - Y$ , c'est ce qu'on pourra faire en supposant non seulement que  $X, Y$  appartiennent à un espace distancié complet, mais même que cet espace est « vectoriel » autrement dit que  $X, Y$  appartiennent à un espace de Banach-Wiener.

**Extension de la loi de Laplace à des éléments aléatoires de nature quelconque.** — Soit  $X$  un élément aléatoire *de nature quelconque* pris au hasard dans un espace de Banach-Wiener (1).

---

(1) La définition qui suit peut être étendue à des espaces plus généraux encore. En effet, observons que la condition 2° garderait un sens dans le cas plus général où

Nous dirons que  $X$  obéit à une loi de Laplace étendue à B. W. si

1° sa fluctuation est finie;

2° il existe un autre élément aléatoire  $Y$  indépendant de  $X$ , pris au hasard dans le même espace B. W. que  $X$  et tel que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendants (2°).

[Dans le cas où  $X$  a une fluctuation nulle,  $X$  est presque certainement égal à un élément certain de B. W. et alors il suffit de prendre pour  $Y$  n'importe quel élément certain  $b$  de B. W. pour que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendants. De sorte que dans ce cas la condition 2° se trouve nécessairement vérifiée. On considérera dans ce cas la loi de probabilité de  $X$  comme une loi de Laplace (généralisée) singulière.]

**Application aux vecteurs aléatoires à  $r$  dimensions.** — Considérons le cas où l'espace B. W. est un espace cartésien  $C_r$ , à un nombre entier  $r$  de dimensions, c'est-à-dire où deux éléments  $X, Y$  de cet espace sont caractérisés chacun par une suite ordonnée de  $r$  nombres réels  $X_1, \dots, X_r; Y_1, \dots, Y_r$ , appelés leurs coordonnées, où la distance de ces deux éléments est

$$(X, Y) = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + \dots + (X_r - Y_r)^2}$$

et où,  $k$  étant un nombre certain réel,  $kX$  et  $X + Y$  ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{c} kX_1, \dots, kX_r, \\ X_1 + Y_1, \dots, X_r + Y_r. \end{array}$$

Les fonctions caractéristiques de  $X, Y$ , et du couple  $U, V$  sont par définition

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathfrak{N} e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_r X_r)}, \\ \varphi_Y(t') &= \mathfrak{N} e^{i(t'_1 Y_1 + \dots + t'_r Y_r)}, \\ \varphi_{U, V}(t, t') &= \mathfrak{N} e^{i[(t_1 U_1 + \dots + t_r U_r) + (t'_1 V_1 + \dots + t'_r V_r)]}, \end{aligned}$$

---

l'espace B. W. serait remplacé par un groupe (où la composition de deux éléments  $X, Y$  serait représentée symboliquement sous la forme de l'addition). Pour adjoindre la condition 1°, il suffirait de supposer que les éléments de ce groupe forment un espace distancié complet.

où l'on désigne par  $t, t'$  les suites ordonnées de nombres certains  $t_1, \dots, t_r; t'_1, \dots, t'_r$ . On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_{U,V}(t, t') &= \mathfrak{N} e^{i[(t_1+t'_1)X_1+\dots+(t_r+t'_r)X_r]+i[(t_1-t'_1)Y_1+\dots+(t_r-t'_r)Y_r]} \\ &= \varphi_X(t+t') \varphi_Y(t-t').\end{aligned}$$

Mais d'autre part si U et V sont indépendants, on a

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \varphi_U(t) \varphi_V(t'),$$

et puisque X, Y sont indépendants

$$\varphi_U(t) = \mathfrak{N} e^{i[t_1(X_1+Y_1)+\dots]} = \mathfrak{N} e^{i[t_1X_1+\dots]} \mathfrak{N} e^{i[t_1Y_1+\dots]} = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

et de même

$$\varphi_V(t') = \varphi_X(t') \varphi_Y(-t'),$$

d'où

$$(19) \quad \varphi_X(t+t') \varphi_Y(t-t') = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \varphi_X(t') \varphi_Y(-t').$$

En particulier pour  $t \equiv t'$  et pour  $t' = -t$ , on a respectivement

$$\begin{aligned}\varphi_X(2t) &= [\varphi_X(t)]^2 \varphi_Y(t) \varphi_Y(-t), \\ \varphi_Y(2t) &= [\varphi_Y(t)]^2 \varphi_X(t) \varphi_X(-t).\end{aligned}$$

On a les mêmes équations que plus haut [formules (1), (7)], sauf qu'ici  $t$  désigne un ensemble de  $r$  nombres  $t_1, \dots, t_r$ .

On voit encore, comme plus haut, que  $\varphi_X(t), \varphi_Y(t)$  ne peuvent s'annuler et qu'on peut, par suite, prendre leurs logarithmes  $\Psi(t), \Psi'(t)$ . En employant d'abord les mêmes notations, on a

$$I(2t) = 2I(t)$$

qu'on peut écrire

$$I(2t_1, \dots, 2t_r) = 2I(t_1, \dots, t_r).$$

De même

$$i(2t) = 2i(t); \quad p(2t) = 4p(t).$$

De sorte que

$$(20) \quad \psi(2^{\sigma}t) = p(2^{\sigma}t) + i(2^{\sigma}t) + I(2^{\sigma}t) = 2^{2\sigma}p(t) + 2^{\sigma}i(t) + 2^{\sigma}I(t).$$

Avant de tirer partie de cette relation, étudions la fluctuation.

La fluctuation  $\sigma^2$  de X est la borne inférieure de

$$\mathfrak{N}(X, a)^2 = \mathfrak{N} \Sigma (X_k - a_k)^2 = \sum_k \mathfrak{N}(X_k - a_k)^2,$$

où  $a_1, \dots, a_r$  sont les coordonnées d'un point certain  $\alpha$  de  $C_r$ . Pour qu'elle soit finie, il faut qu'il en soit de même des bornes inférieures  $\sigma_k^2$  des  $\mathfrak{N}(X_k - a_k)^2$ . Dans ce cas chacun des  $X_k$  a une valeur moyenne  $\bar{X}_k$  et l'on a

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 &= \mathfrak{N}(X_k - \bar{X}_k)^2, \\ \sigma^2 &= \sum_k \sigma_k^2.\end{aligned}$$

Pour que  $\sigma^2$  soit  $\neq 0$ , il faut que l'une au moins des fluctuations  $\sigma_k$  soit  $\neq 0$ .

Posons maintenant

$$Z_t = t_1 X_1 + \dots + t_n X_n.$$

Ce nombre aléatoire a une moyenne

$$\bar{Z}_t = t_1 \bar{X}_1 + \dots + t_n \bar{X}_n.$$

Pour tout nombre certain  $c$ , on a

$$\mathfrak{N}(Z_t - c)^2 = \mathfrak{N}(Z_t - \bar{Z}_t)^2 + (\bar{Z}_t - c)^2.$$

Or

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(Z_t - \bar{Z}_t)^2 &= \mathfrak{N}[\sum t_k (X_k - \bar{X}_k)]^2 \\ &= \sum t_k^2 \mathfrak{N}(X_k - \bar{X}_k)^2 + 2 \sum t_k t_j \mathfrak{N}(X_k - \bar{X}_k)(X_j - \bar{X}_j) \\ &= \sum t_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum t_k t_j r_{kj} \sigma_k \sigma_j,\end{aligned}$$

où  $r_{kj}$  est le coefficient de corrélation linéaire de  $X_k, X_j$ . Puisque  $|r_{kj}| \leq 1$  et que les  $\sigma_k$  sont finis, on voit que  $\mathfrak{N}(Z_t - \bar{Z}_t)^2$  est fini et égal à la borne inférieure quand  $c$  varie de  $\mathfrak{N}(Z_t - c)^2$ . Ainsi quand la fluctuation  $\sigma^2$  de  $X$  est finie, il en est de même (pour tout système  $t$  de valeurs des  $t_k$ ) pour la fluctuation de  $Z_t$ . Appelons cette dernière

$$s^2(t) = \mathfrak{N}(Z_t - \bar{Z}_t)^2.$$

Elle ne pourrait être nulle que si  $Z_t$  était presque certainement égale à  $\bar{Z}_t$ , c'est-à-dire s'il y avait entre les  $X_k$  au moins une relation linéaire à coefficients certains  $t_k$

$$\sum t_k X_k = \text{const.} = \sum t_k \bar{X}_k,$$

ce qu'on peut exprimer en disant que  $s^2(t)$  ne peut être nul que si le point  $X$  restait dans un espace cartésien à un nombre de dimensions  $< r$  et si les  $t_k$  avaient certains systèmes de valeurs correspondantes.

On a vu que, la fluctuation de  $Z_t$  étant finie,

$$\varphi_{Z_t}(\rho) = \mathfrak{M} e^{i\rho Z_t}$$

est de la forme

$$(21) \quad \varphi_{Z_t}(\rho) = e^{i\bar{Z}_t \rho - \frac{\rho^2 s^2(t)}{2} + \rho^2 \varepsilon(t, \rho)}, \quad \text{où } \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(t, \rho) = 0$$

D'où pour  $\rho = e^q$

$$i\bar{Z}_t 2^q + 2^{2q} \left[ -\frac{s^2(t)}{2} + \varepsilon(t, 2^q) \right] = 2^q [i(t) + I(t)] + 2^{2q} p(t).$$

En divisant par  $2^q$  et faisant tendre  $q$  vers  $-\infty$  par valeurs entières négatives, on trouve

$$i(t) + I(t) = i\bar{Z}_t = i(t_1 \bar{X}_1 + \dots + t_r \bar{X}_r).$$

Il reste en divisant encore par  $2^q$

$$-\frac{s^2(t)}{2} + \varepsilon(t, 2^q) = p(t)$$

et quand  $2^q \rightarrow 0$

$$p(t) = -\frac{s^2(t)}{2}.$$

D'où finalement d'après (13)

$$\begin{aligned} \log \varphi_X(t) &= \psi(t) = i(t) + I(t) + p(t) = i\bar{Z}_t - \frac{s^2(t)}{2}, \\ \varphi_X(t) &= e^{i\bar{Z}_t - s^2(t)} = e^{(t_1 \bar{X}_1 + \dots + t_r \bar{X}_r) - \frac{1}{2} [\sum t_k^2 \sigma_k^2 + 2t_k t_j r_{kj} \sigma_k \sigma_j]} \end{aligned}$$

D'ailleurs comme  $\Psi(t) = p(t) + i(t) - I(t)$ , on aura

$$\varphi_X(t) = e^{i(t_1 \bar{X}_1 + \dots + t_r \bar{X}_r) - \frac{1}{2} [\sum t_k^2 \sigma_k^2 + 2t_k t_j r_{kj} \sigma_k \sigma_j]}$$

D'après son origine, comme fluctuation de  $Z_t$ , la forme quadratique en  $t_1, \dots, t_r$

$$s^2(t) = \sum t_k^2 \sigma_k^2 + 2t_k t_j r_{kj} \sigma_k \sigma_j$$

n'est jamais négative, et puisque les  $\sigma_k$  ne sont pas tous nuls, elle n'est pas identiquement nulle : c'est une forme semi-définie positive.

Ainsi quand un point aléatoire  $X$  dans un espace cartésien à  $r$  dimensions est un point aléatoire laplacien selon notre définition, alors sa fluctuation est définie et  $\neq 0$  et sa fonction caractéristique  $\varphi_X(t)$  est de la forme

$$(22) \quad \varphi_X(t) = e^{P(t) + R(t)},$$

où  $P(t)$  et  $R(t)$  sont deux formes en  $(t_1, \dots, t_r)$ , la première linéaire, la seconde quadratique.

Supposons réciproquement que  $\varphi_X(t)$  soit de cette forme et que la fluctuation  $\sigma^2$  de  $X$  soit finie. Alors comme on l'a vu plus haut, il en sera de même des moments du second ordre de  $X$  :

$$\sigma_k^2 = \mathfrak{N}(X_k - \bar{X}_k)^2, \quad r_{jk} \sigma_j \sigma_k = \mathfrak{N}(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)$$

et par suite de la fluctuation de  $Z_b$ , soit

$$s^2(t) = \Sigma t_k^2 \sigma_k^2(t) + 2 \Sigma t_k t_j r_{jk} \sigma_k \sigma_j.$$

On aura donc d'une part

$$\varphi_{Z_t}(\rho) = \mathfrak{N} e^{i\rho(t_1 X_1 + \dots + t_r X_r)} = \varphi_X(\rho t) = e^{P(\rho t) + R(\rho t)} = e^{\rho P(t) + \rho^2 R(t)}$$

et d'autre part, comme plus haut, p. 15,

$$\varphi_{Z_t}(\rho) = e^{i\rho \bar{Z}_t - \frac{1}{2} \rho^2 s^2(t) + \rho^2 \varepsilon(t, \rho)}, \quad \text{avec } \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(t, \rho) = 0.$$

D'où

$$P(t) + \rho R(t) = i\bar{Z}_t - \frac{1}{2} \rho s^2(t) + \rho^2 \varepsilon(t, \rho)$$

et en faisant tendre  $\rho$  vers zéro

$$P(t) = i\bar{Z}_t = i \Sigma t_k X_k.$$

D'où

$$R(t) = -\frac{1}{2} s^2(t) + \varepsilon(t, \rho)$$

et en faisant tendre  $\rho$  vers zéro

$$R(t) = -\frac{1}{2} s^2(t).$$

Ainsi quand  $\varphi_X(t)$  a la forme (22), alors si la fluctuation de  $X$  est finie, on a nécessairement

$$\varphi_X(t) = e^{i \Sigma t_k \bar{X}_k - \frac{1}{2} [\Sigma \sigma_k^2 t_k^2 + 2 \Sigma r_{jk} \sigma_j \sigma_k t_j t_k]}$$

Considérons maintenant un autre point aléatoire  $Y$  de  $C_r$  ayant une fluctuation finie et dont la fonction caractéristique a une forme analogue à (22), soit

$$\varphi_Y(t) = e^{P'(t) + R'(t)},$$



et par suite, d'après ce qui précède, telle que les moments du second ordre de Y soient finis et que

$$\varphi_Y(t) = e^{t \sum t_k \bar{Y}_k - \frac{1}{2} [\sum \sigma_k^2 t_k^2 + 2 \sum r'_{jk} \sigma_k t_j t_k]}$$

En posant

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \mathcal{N} e^{i(t, U_1 + \dots) + t' V_1 + \dots},$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi_{U,V}(t, t') &= \varphi_X(t + t') \varphi_Y(t - t') = e^{P(t+t') + R(t+t') + P'(t-t') + R'(t-t')}, \\ \varphi_U(t) &= \varphi_X(t) \varphi_Y(t) = e^{P(t) + R(t) + P'(t) + R'(t)}, \\ \varphi_V(t') &= \varphi_X(t') \varphi_Y(-t') = e^{P(t') + R(t') - P'(t') - R'(t')}, \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi_U(t) \varphi_V(t') = e^{(P(t) + P'(t') + P'(t) - P'(t')) + R(t) + R'(t) + R(t') + R'(t')}.$$

D'ailleurs P et P' étant linéaires

$$P(t + t') + P'(t - t') = P(t) + P(t') + P'(t) - P'(t').$$

Donc

$$\varphi_{U,V}(t, t') = \varphi_U(t) \varphi_V(t') e^{K(t, t')},$$

où

$$\begin{aligned} K(t, t') &= R(t + t') + R'(t - t') - R(t) - R'(t) - R(t') - R'(t') \\ &= -\frac{1}{2} \{ 2 \sum (\sigma_k^2 - \sigma_k'^2) t_k t_k' + 2 \sum (r_{jk} \sigma_j \sigma_k - r'_{jk} \sigma_j' \sigma_k') (t_j t_k + t_j t_k') \}. \end{aligned}$$

Pour que U et V soient indépendants, il faut et il suffit <sup>(1)</sup> que  $e^{K(t, t')} = 1$  quels que soient t et t'.

En prenant  $t_j = t_j' = 0$  sauf pour  $j = k$ , on voit que l'on doit avoir  $\sigma_k^2 = \sigma_k'^2$ ; alors il faut que

$$\sum (r_{jk} - r'_{jk}) \sigma_j \sigma_k (t_j t_k' + t_k t_j') = 0;$$

en prenant  $t_h = 0$  sauf pour  $h = k$  et  $t_h' = 0$  sauf pour  $h = j$  on aura

$$(r_{jk} - r'_{jk}) \sigma_j \sigma_k = 0.$$

Il faudra donc que  $r_{jk} = r'_{jk}$  pour  $\sigma_j \sigma_k \neq 0$ , ou plus simplement que pour tout couple  $j \neq k$

$$r_{jk} \sigma_j \sigma_k = r'_{jk} \sigma_j' \sigma_k',$$

c'est-à-dire que les moments du second ordre de X et de Y soient les mêmes. Quand cette condition est réalisée, U et V sont indépendants.

(1) Voir p. 29.

Or on peut toujours la réaliser en prenant par exemple, pour  $Y$  un point aléatoire indépendant de  $X$ , mais ayant la même loi de probabilité. La réciproque est donc démontrée, à la fois pour notre définition descriptive et pour la généralisation à  $C_r$  du théorème de S. Bernstein. Dans celle-ci, la condition que  $X$  et  $Y$  aient la même fluctuation est généralisée en ce sens qu'ils aient mêmes moments du second ordre.

*Remarque.* — Quand  $s(t)$  peut s'annuler pour un système non nul de valeurs de  $t$ , alors on peut supposer, sans changer la loi de probabilité de  $X$ , que l'on a toujours pour ce système de valeurs  $\tau_1, \dots, \tau_r$  de valeurs de  $t$

$$\tau_1 X_1 + \dots + \tau_r X_r = \bar{Z}_\tau.$$

Si, par exemple,  $\tau_r \neq 0$ , on aura une relation de la forme

$$\begin{aligned} X_r &= c_1 X_1 + \dots + c_{r-1} X_{r-1} + c_0, \\ Z_t &= t_1 X_1 + \dots + t_{r-1} X_{r-1} + t_r (c_1 X_1 + \dots + c_{r-1} X_{r-1} + c_0), \\ Z_t - \bar{Z}_t &= \lambda_1 (X_1 - \bar{X}_1) + \dots + \lambda_{r-1} (X_{r-1} - \bar{X}_{r-1}) = D_\lambda. \end{aligned}$$

Alors

$$s^2(t) = S^2(\lambda) = \mathfrak{N} D_\lambda^2 = \sum_{k < r} \lambda_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{\substack{k < r \\ j < r}} \lambda_k \lambda_j r_{kj} \sigma_k \sigma_j.$$

La forme quadratique à  $r$  variables  $s^2(t)$ , sera remplacée par une forme quadratique  $s^2(\lambda)$  à  $r-1$  variables  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ . Celle-ci sera semi-définie positive. Si elle n'est pas définie positive elle pourra être remplacée par une forme semi-définie positive à  $r-2$  variables, etc.

D'ailleurs, puisque  $s^2(t)$  n'est pas identiquement nulle, on voit qu'on finira toujours par exprimer  $s^2(t)$  par une forme définie positive par rapport à un nombre de variables  $\leq r$ .

En résumé, pour que  $X$  soit au sens de la définition de la p. 19, un point laplacien choisi au hasard dans un espace cartésien  $C_r$  à  $r$  dimensions il faut et il suffit que sa fluctuation soit finie et que sa fonction caractéristique soit de la forme

$$\varphi_X(t) = \mathfrak{N} e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_r X_r)} = e^{P(t) + R(t)},$$

où  $P(t)$  et  $R(t)$  sont deux formes en  $t_1, \dots, t_r$  la première linéaire, la seconde quadratique (qui alors sera nécessairement semi-définie négative).

*Remarque.* — La forme  $R(t)$  sera même définie négative sauf dans le cas où  $X$  est presque certainement dans un espace cartésien à un nombre de dimensions inférieur à  $r$ . Et si  $r'$  est le plus petit nombre de dimensions possible de ce second espace et si  $X'_1, \dots, X'_{r'}$  sont les coordonnées de  $X$  dans cet espace  $C_{r'}$ , la fonction caractéristique correspondante

$$\varphi_X(t') = \mathcal{N} e^{i(t'_1 X'_1 + \dots + t'_{r'} X'_{r'})}$$

sera de la forme précédente

$$\varphi_X(t') = e^{P'(t') + R'(t')};$$

mais  $R'(t)$  sera définie positive si  $X$  n'est pas presque certainement constant.

*Remarque.* — Nous venons de prouver que notre définition descriptive de la loi de Laplace est équivalente à la définition constructive classique, celle de Laplace-Bravais, dans le cas des éléments aléatoires appartenant à un espace cartésien à  $r$  dimensions.

Elle est aussi équivalente dans ce même cas à la définition nouvelle donnée p. 7. Ce sont là deux faits qui peuvent être considérés comme fournissant une justification simultanée de ces trois définitions obtenue chacune en étendant à ce cas trois propriétés distinctes des nombres aléatoires laplaciens.

### COMPARAISON DES DEUX DÉFINITIONS DES ÉLÉMENTS LAPLACIENS DANS LE CAS GÉNÉRAL.

Nous venons de voir que les deux définitions données p. 7 et p. 19 d'un élément aléatoire laplacien sont équivalentes entre elles et équivalentes à la définition classique, non seulement lorsque cet élément est un nombre aléatoire, mais aussi dans le cas où il est pris dans un espace euclidien à un nombre fini de dimensions. Quand cet élément appartient à un espace vectoriel distancié quelconque, nos définitions sont-elles équivalentes ?

Considérons d'abord le cas où un élément aléatoire  $X$  pris dans un espace vectoriel distancié  $B. W.$ , serait laplacien au sens de notre seconde définition.

$X$  a dans  $B. W.$  une fluctuation  $\sigma^2$  finie, c'est dire que pour tout  $\alpha$  de

B. W.,  $\mathfrak{N} \|X - a\|^2$  est fini, or pour toute fonctionnelle linéaire,  $\mathcal{L}X$ , il existe, comme on sait un nombre fixe  $l$  tel que

$$|\mathcal{L}X| \leq l \|X\|.$$

On a donc

$$\mathfrak{N}(\mathcal{L}X - \mathcal{L}a)^2 \leq l^2 \mathfrak{N} \|X - a\|^2.$$

Donc  $\mathcal{L}X$  a aussi une fluctuation finie.

D'autre part, il existe par hypothèse un élément aléatoire  $Y$ , indépendant de  $X$ , tel que  $X + Y$  et  $X - Y$  soient indépendants. Alors  $\mathcal{L}X$  et  $\mathcal{L}Y$  sont indépendants et tels que  $\mathcal{L}(X + Y)$  et  $\mathcal{L}(X - Y)$  soient aussi indépendants. Or ce sont aussi  $\mathcal{L}X + \mathcal{L}Y$  et  $\mathcal{L}X - \mathcal{L}Y$ . Donc le nombre aléatoire  $\mathcal{L}X$  est laplacien (mais il se peut qu'il se réduise à une constante presque certainement). Par conséquent  $X$  est laplacien au sens de la première définition.

Se peut-il que  $\mathcal{L}X$  soit presque certainement une constante et ceci quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$  sans que  $X$  soit lui-même presque certainement constant (quand  $\sigma^2 \neq 0$ ). Déjà au moins dans le cas très général où B. W. possède une « base », cette circonstance exceptionnelle ne pourra se produire.

En effet, on sait que dans ce cas, l'on a  $X = \sum X_k e_k$  pour tout  $X$  de B. W., et que la fonctionnelle

$$\mathcal{L}X = X_k$$

est linéaire. Pour cette fonctionnelle linéaire,  $X_k$  serait un nombre constant  $a_k$ , sauf un cas  $E_k$  de probabilité nulle. Alors l'événement

$$E \equiv (E_1 \text{ ou } E_2 \text{ ou } \dots)$$

sera aussi de probabilité nulle et s'il ne se produit pas, on aura

$$X = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k + \dots = a,$$

de sorte que, contrairement à l'hypothèse,  $X$  serait un élément presque certain.

Nous venons de voir que si  $X$ , appartenant à un espace vectoriel distancié, est laplacien au sens de notre seconde définition, il est aussi laplacien au sens de la première.

Inversement, supposons que  $X$ , choisi encore au hasard dans un espace vectoriel distancié B. W. soit laplacien au sens de notre première définition.

Alors  $\mathcal{L}X$  est un nombre laplacien quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}X$ . Soit alors  $Y$  un élément aléatoire de B. W. ayant la même

loi de probabilité que  $X$  mais indépendant de  $X$ . Alors  $\mathcal{L}'Y$  sera aussi un nombre laplacien quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}'Y$ .

Posons

$$\begin{aligned}\varphi_{U,V}[\mathcal{L}, \mathcal{L}'] &= \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}U + \mathcal{L}'V)} = \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}X + \mathcal{L}Y + \mathcal{L}'X - \mathcal{L}'Y)} = \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}X + \mathcal{L}'X)} \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}Y - \mathcal{L}'Y)}, \\ \varphi_U[\mathcal{L}] \varphi_V[\mathcal{L}'] &= \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}X + \mathcal{L}Y)} \mathcal{N} e^{i(\mathcal{L}'X - \mathcal{L}'Y)}.\end{aligned}$$

Les nombres aléatoires  $Z = \mathcal{L}X$ ,  $T = \mathcal{L}Y$ ;  $Z' = \mathcal{L}'X$ ,  $T' = \mathcal{L}'Y$  sont des nombres laplaciens et l'on a

$$(23) \quad \begin{cases} \varphi_{U,V}[\mathcal{L}, \mathcal{L}'] = \varphi_{Z+Z'}(1) \varphi_{T-T'}(1), \\ \varphi_U[\mathcal{L}] \varphi_V[\mathcal{L}'] = \varphi_Z(1) \varphi_T(1) \varphi_{Z'}(1) \varphi_{T'}(-1). \end{cases}$$

D'ailleurs  $Z + Z' = \mathcal{L}X + \mathcal{L}'X = \mathcal{L}''X$ , où  $\mathcal{L}''$  est aussi une fonctionnelle linéaire. Donc  $Z + Z'$  est laplacien et de même pour  $T - T'$ . Dès lors, les seconds membres de (23) sont

$$e^\alpha \quad \text{et} \quad e^\beta$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= i(\bar{Z} + \bar{Z}') - \frac{1}{2} \mathcal{N}(Z + Z' - \bar{Z} - \bar{Z}')^2 + i(\bar{T} - \bar{T}') - \frac{1}{2} \mathcal{N}(T - T' - \bar{T} + \bar{T}')^2 \\ &= i(\bar{Z} + \bar{T} + \bar{Z}' - \bar{T}') - \frac{1}{2} \mathcal{N} \{ [Z - \bar{Z} + Z' - \bar{Z}']^2 + [T - \bar{T} - T' + \bar{T}']^2 \}, \\ \beta &= i\bar{Z} - \frac{1}{2} \mathcal{N}(Z - \bar{Z})^2 + i\bar{T} - \frac{1}{2} \mathcal{N}(T - \bar{T})^2 \\ &\quad + i\bar{Z}' - \frac{1}{2} \mathcal{N}(Z' - \bar{Z}')^2 - i\bar{T}' - \frac{1}{2} \mathcal{N}(T' - \bar{T}')^2, \\ \beta - \alpha &= \mathcal{N}(Z - \bar{Z})(Z' - \bar{Z}') - \mathcal{N}(T - \bar{T})(T' - \bar{T}').\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est nulle puisque  $X$  et  $Y$  ayant la même loi de probabilité, le couple  $Z = \mathcal{L}X$ ,  $Z' = \mathcal{L}'X$  aura la même loi de probabilité que le couple

$$T = \mathcal{L}Y, \quad T' = \mathcal{L}'Y.$$

On a donc

$$(23 \text{ bis}) \quad \varphi_{U,V}[\mathcal{L}, \mathcal{L}'] = \varphi_U[\mathcal{L}] \varphi_V[\mathcal{L}'],$$

quelle que soit la fonctionnelle linéaire  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}'$ . Si l'on pouvait en conclure, quel que soit l'espace vectoriel distancié  $B. W.$ , que  $U$  et  $V$  sont indépendants, on aurait bien prouvé que  $X$  est aussi laplacien au sens de la seconde définition.

Nous allons montrer que cela est vrai au moins dans le cas où l'espace B. W. a une base, de sorte que

$$U = \Sigma U_k e_k, \quad V = \Sigma V_k e_k.$$

On sait qu'alors en appelant  $t, t'$  deux nombres certains quelconques,  $\mathcal{L}U = tU_k$  et  $\mathcal{L}'V = t'V_j$  sont des fonctionnelles linéaires. Pour ces fonctionnelles particulières, la relation (23) devient :

$$\varphi_{U_k, V_j}(t, t') = \varphi_{U_k}(t) \varphi_{V_j}(t'),$$

d'où l'on déduit que  $U_k$  et  $V_j$  sont indépendants. Ceci ayant lieu quels que soient  $k$  et  $j$ , on en conclut que  $U$  et  $V$  sont indépendants.

On voit donc que *nos deux nouvelles définitions des éléments aléatoires laplaciens sont équivalentes*, au moins quand ces éléments sont pris dans un espace vectoriel distancié possédant une base. Or on sait que tels sont la plupart des espaces les plus utilisés en Analyse : les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions, l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions continues sur un intervalle fixe I, avec  $\|f\| = \text{maximum de } |f(x)| \text{ sur I, etc.}$