ANNALES DE L'I. H. P.

GARRETT BIRKHOFF

Théorie et applications des treillis

Annales de l'I. H. P., tome 11, nº 5 (1949), p. 227-240
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_5_227_0>

Théorie et applications des treillis (1)

par

Garrett BIRKHOFF.

Ce premier article présente un résumé d'une branche nouvelle de l'algèbre moderne : la théorie des treillis. Dans un second article nous esquisserons la théorie des treillis avec opérations auxiliaires. Définissons tout d'abord les systèmes abstraits que nous allons étudier.

1. Systèmes partiellement ordonnés. — Soit P un ensemble d'éléments quelconques, liés par une relation binaire quelconque $x \geqq y$ (ou $y \leqq x$), qui satisfasse aux conditions suivantes :

P 1 Pour tout x, $x \geqq x$;

P 2 Si $x \geqq y$ et $y \geqq x$, alors $x = y$;

P 3 Si $x \geqq y$ et $y \geqq z$, alors $x \geqq z$;

P s'appelle *système partiellement ordonné*.

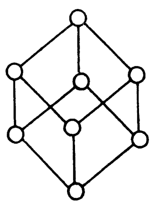
On rencontre partout des systèmes partiellement ordonnés (s. p. o.). En effet, soit I une classe, et Φ une famille de sous-ensembles de I; si $S \geqq T$ signifie que S contient T comme sous-ensemble, Φ devient un s. p. o. De même, soit P la famille de toutes les décompositions (équivalences) d'une classe C, et supposons que $\pi \geqq \pi^*$ dans P signifie que π^* est une subdivision de π; P est alors un s. p. o. Soit, encore Γ une configuration, ou un complexe topologique dans le sens de Poincaré, ou une géométrie projective abstraite dans le sens de Veblen et Young. Si parmi les éléments α, β, γ, ... de Γ, $\alpha \leqq \beta$ signifie que α, β sont incidents et que la dimension de α est au plus celle de β, alors Γ devient un s. p. o.

(1) Conférence faite à l'Institut Henri Poincaré, et aussi (en anglais) à la London Mathematical Society.

L'intérêt des systèmes partiellement ordonnés est limité, non pas par leur généralité, mais par la pauvreté des théorèmes qu'on peut démontrer sur les s. p. o.

Il existe d'abord un Principe de Dualité. Si la relation $x \geqq y$ satisfait aux conditions P 1-P 3, la relation $x \leqq y$ (définie par $y \geqq x$) les satisfera aussi. Par conséquent, si T est un théorème, qui peut être déduit de de P 1-P 3, le théorème dual T' sera également vrai.

Les s.p.o. à un petit nombre d'éléments peuvent se représenter facilement par des réseaux spéciaux appelés *diagrammes*, et ressemblants aux treillis ordinaires, non mathématiques. La figure ci-dessous indique le s. p. o. de tous les sous-ensembles d'un ensemble de trois éléments.



La condition pour que $x \geqq y$ est qu'il existe une chaîne descendante de x jusqu'à y.

Dans certains s. p. o. il existe des éléments particuliers o ou 1 tels que

$$(1) \qquad o \leqq x \quad \text{pour tout } x, \qquad x \leqq 1 \quad \text{pour tout } x.$$

S'il y a un $o \in P$, tout élément $p \in P$ satisfaisant à (1) $p > o$ (c'est-à-dire $p \geqq o$ mais $p \neq o$), (2) $p > x > o$ pour tout x, s'appelle *atome* ou *point* de P.

La théorie des chaînes, qui joue un rôle important dans la théorie des idéaux [1], peut s'étendre aux s. p. o. arbitraires. Donnons ici seulement la définition d'une chaîne. Une *chaîne* est un s. p. o. C dans laquelle

$$P\,4 \qquad \text{si } x, y \in C \quad \text{on aura} \quad x \geqq y \quad \text{ou} \quad y \geqq x.$$

De même, presque toute l'arithmétique transfinie peut s'étendre

(1) *Voir* B. L. van der WAERDEN, *Moderne Algebra*, Chap. XI. Pour les démonstrations et détails de tous les résultats *voir* G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, dont la seconde édition vient de paraître.

aux s. p. o. Pour deux s. p. o. P, Q, arbitraires, on peut définir la somme cardinale $P+Q$, la somme ordinale $P \oplus Q$, le produit cardinal PQ, le produit ordinal $P \circ Q$, la puissance cardinale Q^P, et la puissance ordinale ${}^PQ$. En exceptant peut-être la puissance ordinale, toutes ces définitions sont univoques, et aussi simples que dans le cas usuel de l'arithmétique transfinie. De plus, elles satisfont à toutes les identités de l'arithmétique transfinie usuelle.

On peut même démontrer dans des circonstances très générales, *l'unicité d'une décomposition en facteurs premiers*, pour la multiplication cardinale. En effet, soit P un s. p. o. avec O et I, et soit $P = Q_1 \ldots Q_m = R_1 \ldots R_n$. Dans ce cas il y a des s. p. o. T_{ij} tels que

$$Q_i = T_{i1} \ldots T_{in} \quad \text{et} \quad R_j = T_{1j} \ldots T_{mj} \quad \text{pour tout } i, j.$$

2. **Treillis.** — Dans chaque s. p. o. P, on peut définir la relation $x = \cup S$ entre éléments $x \in P$ et des sous-ensembles $S \leq P$, comme équivalente aux deux conditions : (1) $x \geq s$ pour tout $s \in S$, (2) si $u \geq s$ pour tout $s \in S$, alors $u \geq x$. La relation duale $x = \cap S$ se définit par dualité.

Si $x = \cup S$, on dit que x est le *supremum* de S; si $x = \cap S$ on dit que x est l'*infimum* de S. Si $S = \{a, b\}$ consiste en deux éléments a, b, on écrira

(2) $$\cup S = \cup \{a, b\} = a \cup b \quad \text{et} \quad \cap S = \cap \{a, b\} = a \cap b.$$

Dans beaucoup de s. p. o. P, les suprema et les infima n'existent pas; mais s'ils existent, ils sont uniques.

Définition. — Un système partiellement ordonné L, dans lequel $a \cap b$ et $a \cup b$ existent pour chaque a, $b \in L$, s'appelle un *treillis*.

On démontre aisément les identités fondamentales suivantes :

L1 $$a \cap a = a \quad \text{et} \quad a \cup a = a,$$
L2 $$a \cap b = b \cap a \quad \text{et} \quad a \cup b = b \cup a,$$
L3 $$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c \quad \text{et} \quad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c,$$
L4 $$a \cap (a \cup b) = a \cap (a \cap b) = a.$$

Réciproquement, soit A un système algébrique avec deux opérations binaires $\cap$, $\cup$ satisfaisant aux conditions L1-L4. Si nous posons $x \geq y$ dans A lorsque $x \cap y = y$, alors A sera un treillis avec

$$a \cap b = \cap \{a, b\} \quad \text{et} \quad a \cup b = \cup \{a, b\}.$$

Dans un treillis, on trouve facilement que

(3) $\cup\{a, b, c\}=(a\cup b)\cup c, \qquad \cup\{a, b, c, d\}=[(a\cup b)\cup c]\cup d, \quad \ldots$

de sorte que *chaque sous-ensemble fini d'un treillis a un supremum et un infimum.*

Les treillis existent partout dans l'algèbre. Convenons d'appeler *algèbre abstraite* n'importe quelle classe A d'éléments, combinés par des opérations unaires, binaires, ternaires, etc. Cette idée utile contient comme cas spéciaux les groupes, les anneaux, les treillis eux-mêmes, etc. Appelons *sous-algèbres* de A, les sous-ensembles de A qui contiennent chaque combinaison algébrique de leurs éléments. Cette définition contient comme cas particuliers les définitions usuelles de sous-groupe, sous-anneau, etc., et sert comme définition de *sous-treillis. Les sous-algèbres d'une algèbre abstraite quelconque forment un treillis.* Réciproquement, chaque treillis fini est isomorphe au système de sous-algèbres d'une algèbre abstraite convenable.

Appelons encore, équivalence régulière sur A, chaque relation d'équivalence [1] θ dans A qui possède la propriété de substitution suivante :

(4) Si $a\theta a^\star$, on aura $a'\theta(a^\star)'$ pour chaque opération unaire de A, $(a\circ b)\theta(a^\star\circ b)$ et $(c\circ a)\theta(c\circ a^\star)$ pour chaque opération binaire de A, et aussi $(a, b, c)\theta(a^\star, b, c)$, $(b, a, c)\theta(b, a^\star, c)$, et $(b, c, a)\theta(b, c, a^\star)$ pour chaque opération ternaire de A, etc.

Posons $\theta \leqq \theta^\star$ lorsque $a\theta a^\star$ implique $a\theta' a^\star$; alors les *équivalences régulières sur une algèbre abstraite quelconque forment un treillis.*

Dans le cas des groupes, les équivalences régulières correspondent biunivoquement aux sous-groupes invariants et elles satisfont à la *loi modulaire*

L5 Si $a \geqq c$, alors $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup c.$

Les équivalences régulières sur un treillis satisfont même à la *loi distributive*, plus forte :

L6 $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c).$

Ces cas sont cependant des cas bien particuliers ; il semble qu'il

[1] C'est-à-dire, relation réflexive, symétrique et transitive. *Voir* pour une discussion plus complète, P. Dubreil, *Algèbre.*

n'existe aucune identité générale satisfaite par les équivalences régulières dans une algèbre abstraite arbitraire.

Si nous considérons les opérations $\cap$ et $\cup$ comme analogues à la multiplication et l'addition ordinaire (par exemple, dans le produit et la somme de deux ensembles), on arrive à définir un *idéal* dans un treillis L comme un sous-ensemble H de L tel que (1) $x \in \mathrm{H}$ et $a \in \mathrm{L}$ impliquent $a \cap x \in \mathrm{H}$, et (2) $x, y \in \mathrm{H}$ implique $x \cup y \in \mathrm{H}$. Dans le cas des treillis finis, chaque idéal H est *principal*, c'est-à-dire qu'il équivaut à l'ensemble $a \cap \mathrm{L} = a \cap \mathrm{H}$ des éléments $a \cap x$ [a fixe, $x \in \mathrm{L}$ arbitraire]. Dans un treillis L avec o, les éléments $x \theta \mathrm{o}$ modulo une équivalence régulière θ, forment toujours un idéal. Mais cet idéal ne détermine pas θ en général, à moins que L ne satisfasse à la condition

(5) Si $x \leqq a$ dans L, alors il existe un élément $y \in \mathrm{L}$ tel que $x \cap y = \mathrm{o}$ et $x \cup y = a$.

Des recherches intéressantes ont été entreprises sur les *treillis libres*. Lorsqu'on combine deux symboles a et b, assujettis aux seules conditions L1-L4, on arrive simplement au treillis de quatre éléments (le carré $\mathbf{2}.\mathbf{2} = \mathbf{2}^2$ de la chaîne de deux éléments), mais si l'on combine trois symboles a, b, c assujettis aux mêmes conditions, on arrive à un treillis infini avec des chaînes infinies.

Définissons TL(n) (en d'autres termes le treillis libre avec n générateurs) comme le treillis formé par des combinaisons de symboles au moyen de deux opérations $\cap$ et $\cup$, assujetties à L1-L4 seulement. TL(3) contient alors TL(n) pour tout n fini ou dénombrable, comme sous-treillis. Ce résultat est analogue aux faits connus pour les groupes libres.

Il est intéressant (et très utile pour l'algèbre) de remarquer que si l'on ajoute la loi modulaire L5, on obtient seulement 28 combinaisons de trois symboles, tandis que le treillis modulaire libre avec quatre générateurs est infini.

3. **Treillis complets.** — Nous avons déjà vu que chaque sous-ensemble *fini* d'un treillis a un supremum et un infimum. Un système partiellement ordonné dans lequel chaque sous-ensemble S a un supremum et un infimum, s'appelle un *treillis complet*. Il est évident que chaque treillis fini est un treillis complet; il en est de même pour les treillis qui satisfont à une condition de chaîne.

Il est curieux du point de vue logique de noter que si E représente l'ensemble vide, $\cap E = I$ et $\cup E = 0$. D'ailleurs l'existence des infima (et de I) implique celle des suprema.

La plupart des treillis sont complets; je signale d'abord l'intervalle fermé infini $[-\infty, +\infty]$. M. Mac Neille a généralisé la célèbre construction des nombres irrationnels par coupure de Dedekind, et a montré que *chaque système partiellement ordonné est isomorphe à un sous-ensemble d'un treillis complet,* avec une isomorphie très simple et naturelle.

Les treillis proviennent ordinairement des opérations de fermeture, de la manière suivante. Convenons d'appeler *opération de fermeture* sur les sous-ensembles S, T, ... d'un ensemble I, chaque opération unaire et univoque $S \to \overline{S}$, $T \to \overline{T}$, ... telle que

$$(6) \qquad \overline{S} \geqq S, \quad \overline{\overline{S}} = \overline{S}, \quad \text{et} \quad S \geqq T \quad \text{implique} \quad \overline{S} \geqq \overline{T}.$$

Par exemple, les opérations de fermeture topologique, et celle qui consiste à former l'ensemble de toutes les combinaisons algébriques d'éléments donnés (sous-algèbre engendrée par S), satisfont à ces conditions (6).

Si $S \to \overline{S}$ est une opération de fermeture, nous dirons que S est fermé lorsque $S = \overline{S}$; *les sous-ensembles fermés de* I *forment toujours un treillis complet.* Dans ce treillis, $S \cap T$ est la partie commune à S et T, tandis que $S \cup T$ est la fermeture de leur union.

Toute une classe d'opérations de fermeture proviennent des relations binaires. Soient I, J deux ensembles, et soit $x\rho y$ une relation binaire définie entre les éléments $x \in I$ et les éléments $y \in J$. Bien entendu, nous n'avons $x\rho y$ que pour *certaines* paires d'éléments x, y. Pour chaque sous-ensemble X de I, définissons X^* comme la totalité des $y \in J$ tels que $x\rho y$ soit vrai pour *tout* $x \in X$; réciproquement, définissons pour chaque sous-ensemble Y de J, la totalité $Y^\dagger$ des $x \in I$ tels que $x\rho y$ soit vrai pour tout $y \in Y$. Les opérations $X \to (X^*)^\dagger$ et $Y \to (Y^\dagger)^*$ sont alors des opérations de fermeture, et en effet $[(X^*)^\dagger]^* = X^*$. Cette construction abstraite, se retrouve au fond de la Théorie de Galois comme de beaucoup d'autres théories mathématiques [1]. Dans le cas de Galois,

---

[1] *Voir* à ce propos, M. KRASNER, *Journ. de Math.*, 17, 1938, p. 367-84.

I est un corps algébrique; J un groupe d'automorphies α, β, ... de I; et $x \rho \alpha$ signifie que $\alpha(x) = x$.

Les treillis complets satisfont à un théorème intéressant sur les *points fixes*. Soit T un treillis complet, et $f(t)$ une fonction univoque de T en T telle que

$$\text{(7)} \qquad \text{Si } x \geqq y, \quad \text{alors } f(x) \geqq f(y).$$

Il existe alors au moins un élément $a \in T$ tel que $f(a) = a$.

Dans chaque treillis complet T, et par conséquent dans chaque s. p. o., on peut définir une *topologie intrinsèque*. Pour une suite infinie ordinaire, $\{x_k\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$, on peut poser

$$\text{(8)} \qquad \underline{\mathrm{Lim}}\{x_k\} = \operatorname*{Sup}_n \{\operatorname*{Inf}_{k \geqq n} x_k\}$$

et dualement

$$\overline{\mathrm{Lim}}\{x_k\} = \operatorname*{Inf}_n \{\operatorname*{Sup}_{k \geqq n} x_k\}.$$

On a toujours $\underline{\mathrm{Lim}}\{x_k\} \leqq \overline{\mathrm{Lim}}\{x_k\}$; dans le cas d'égalité, on dit que $\{x_k\}$ converge vers cette limite commune.

On peut aussi définir d'autres topologies sur T; par exemple, on peut prendre les intervalles fermés $[a, b]$ (ensemble de x tels que $a \leqq x \leqq b$) comme *sous-base* d'ensembles fermés. Dans cette dernière topologie, T est compact si, et seulement si T est complet en tant que treillis. La place manque pour entrer dans les détails; je me bornerai à signaler qu'on n'a pas encore trouvé une définition simple et directe d'un ensemble ouvert.

4. Treillis modulaires. — Un treillis s'appelle modulaire s'il satisfait à la loi modulaire

$$\text{L5} \qquad \text{Si } a \geqq c, \quad \text{alors } a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c.$$

C'est un fait fondamental que les sous-groupes invariants d'un groupe G quelconque, avec ou sans opérateurs, forment un treillis modulaire ([1]). A partir de ce lemme fondamental, et d'une condition de chaîne, on

([1]) On a récemment trouvé tous les groupes finis dont les sous-groupes arbitraires forment un treillis modulaire.

peut démontrer la plupart des théorèmes de structure connus de l'algèbre abstraite.

En effet, soit A une algèbre abstraite satisfaisant aux conditions suivantes : (1) les équivalences régulières sur A sont *associables* dans le sens de M. L. et P. Dubreil, (2) A contient une sous-algèbre d'un seul élément, (3) dans le treillis (modulaire) des équivalences régulières sur A, il n'y a pas de chaîne infinie. A possède alors une décomposition

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{9}$$

en facteurs directs indécomposable, *unique* à l'ordre des facteurs près (généralisation du Théorème de Wedderburn-Remak).

Suivant Kurosh, on peut démontrer pour les treillis modulaires une généralisation du théorème suivant de E. Noether. Soit

$$J = H_1 \cap \ldots \cap H_r, \tag{10}$$

une représentation de l'idéal J comme intersection des idéaux irréductibles $H_1, \ldots, H_r$ dans laquelle aucun H_k n'est superflu. $\nu(J)$ est alors une fonction univalente de J.

On peut aussi, suivant M. Dubreil et Mme Dubreil-Jacotin, démontrer une généralisation du théorème de Jordan-Hölder; en particulier, toutes les chaînes sans lacune dans un treillis modulaire de longueur finie, ont la même longueur. En suivant cette idée, on est amené à définir le *rang* $r[x]$ d'un élément d'un treillis T, comme le nombre de chaînons dans la chaîne la plus longue entre o et x. On a alors évidemment

$$\text{Si } x > y, \quad \text{alors } r[x] > r[y], \tag{11}$$

et l'on peut démontrer

$$r[x \cap y] + r[x \cup y] = r[x] + r[y], \tag{11'}$$

identité qui joue un rôle fondamental dans la théorie des probabilités et dans la géométrie projective.

On appelle *treillis métrique* chaque treillis T avec une fonction $r[x]$ définie sur T, avec valeurs réelles et satisfaisant aux conditions (11), (11'). T est nécessairement un treillis modulaire et aussi d'ailleurs un *espace métrique* si l'on pose

$$\delta[x, y] = r[x \cup y] - r[x \cap y]. \tag{12}$$

Les deux opérations algébriques $\cap$ et $\cup$ sont uniformément continues dans la métrique $\delta[x, y]$; en effet, on a

$$\delta[a \cup x, a \cup y] + \delta[a \cap x, a \cap y] \leqq \delta[x, y].$$

Il s'ensuit que l'on peut *compléter métriquement* chaque treillis métrique M par la construction de Cantor-Fréchet. Pourtant la construction produit un treillis qui, quoique complet dans le sens du paragraphe 3, n'est pas en général isomorphe au treillis obtenu de M par la construction de Dedekind-Mac Neille.

Par exemple, soit $\mathfrak{U} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{2}^{2^n}$ le treillis (algèbre de Boole) dont les éléments A, B, C, ... sont les réunions finies d'intervalles demi-clos $i/2^m \leqq x < (i + 1/2^m)$ ... c'est-à-dire, des ensembles élémentaires dyadiques. Soit $d[A]$ la mesure de A. Compléter $\mathfrak{U}$ par des coupures, équivaut à prendre les ensembles de Borel modulo les ensembles de première catégorie. Tandis que compléter $\mathfrak{U}$ métriquement, équivaut à prendre les ensembles de Borel modulo les ensembles de mesure nulle. Ces deux algèbres-quotients de Boole ne sont pas isomorphes.

5. **Treillis semi-modulaires.** — Disons que, dans un treillis quelconque T, *a couvre b* si (1) $a > b$, et (2) l'inégalité $a > x > b$ n'a pas de solution x. Alors, dans le cas où toutes les chaînes sont de longueur finie, la loi modulaire L5 équivaut aux deux *conditions de recouvrement* suivantes

(13) Si a et b couvrent c, alors $a \cup b$ couvre a et b,

(13′) Si d couvre a et b, alors a et b couvrent $a \cap b$.

Un treillis de longueur finie dans lequel (13) seule est satisfaite s'appelle *treillis semi-modulaire*.

Les treillis semi-modulaires se présentent dans des cas nombreux et variés, dont je signale les suivants : les éléments (points, droites, plans, etc.) d'une géométrie projective ou affine; les équivalences sur une classe finie; n'importe quelle configuration géométrique formée par des points et toutes ses unions linéaires; (dualement) les sous-groupes d'un p-groupe, ou groupe d'ordre p^α (p = nombre premier); les sous-corps algébriquement fermés d'un corps algébriquement fermé.

Remarquons que tandis que le dual de chaque treillis (treillis modulaire) est un treillis (ou respectivement treillis modulaire), le dual d'un treillis semi-modulaire n'est pas en général semi-modulaire. Une différence parfaitement analogue existe pour les sous-treillis et les images homomorphes. En effet, M. Dilworth a récemment démontré que chaque treillis fini est isomorphe à un sous-treillis d'un treillis semi-modulaire. De même, M. Whitman a démontré que chaque treillis fini ou infini est isomorphe à un sous-treillis du treillis de toutes les équivalences sur une classe convenable infinie.

Treillis modulaires avec compléments. — Dans un treillis T avec O et I, on dit que les éléments x et y sont des éléments complémentaires, ou compléments, si et seulement si

$$x \cap y = 0 \quad \text{et} \quad x \cup y = 1. \tag{14}$$

Un treillis T s'appelle *complémenté* si, et seulement si

L7 Chaque élément $x \in \mathrm{T}$ possède au moins un complément $y \in \mathrm{T}$.

On peut donner une caractérisation très nette des treillis modulaires M de longueur finie avec compléments. En effet, un tel M est toujours et d'une seule façon, le produit cardinal d'un nombre fini de *géométries projectives abstraites* dans le sens classique de Veblen et Young, et de treillis formés de O et I seulement.

Dans le cas d'une longueur infinie, M. von Neumann a construit des treillis modulaires avec compléments de dimension continue, et M. Frink a représenté tout treillis modulaire comme sous-treillis d'un produit de *géométries projectives* de dimensions discrètes (éventuellement infinies). D'ailleurs, il y a un rapport plausible entre les treillis modulaires avec compléments et la logique de la mécanique des quanta. Nous ne pouvons pas entrer ici dans les détails.

7. **Treillis distributifs.** — Un treillis D qui satisfait à la loi distributive

L6 $\quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ pour tout $a, b, c \in \mathrm{D}$,

s'appelle *treillis distributif*. La loi L6 implique son dual

L6′ $\quad a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$,

de sorte que le dual d'un treillis distributif est distributif.

Les conditions L1-L4 et L6 sont surabondantes. Par exemple, il suffit pour avoir un treillis distributif, que les lois suivantes soient satisfaites

$$a \cap a = a \cap \mathrm{I} = \mathrm{I} \cap a = a, \qquad a \cup \mathrm{I} = \mathrm{I} \cup a = \mathrm{I}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}6.$$

En employant l'Axiome du choix, on démontre que chaque treillis distributif est isomorphe à un *anneau d'ensembles* [1]; la réciproque est, naturellement, évidente. D'ailleurs chaque treillis distributif fini T est isomorphe à l'anneau $\mathbf{2}^{\mathrm{P}}$ de tous les sous-ensembles ouverts d'un T_0, espace fini P, et réciproquement. Essentiellement, la même construction donne comme corollaire le résultat connu : chaque variété algébrique peut se représenter univoquement comme union de constituants irréductibles, dont aucun ne contient les autres.

Les *treillis distributifs complets* interviennent dans beaucoup d'applications. Souvent (mais pas toujours) ils satisfont à la loi distributive infinie

$$x \cap \left(\cup \{y_\alpha\}\right) = \cup \{x \cap y_\alpha\} \qquad [y_\alpha \in \mathrm{Y}] \tag{15}$$

Par exemple, (15) est vérifiée dans les cas suivants : (1) l'anneau de tous les ensembles ouverts dans un espace topologique quelconque, (2) tout treillis distributif fini, (3) les logiques de Brouwer-Heyting, (4) le treillis de tous les idéaux dans une *algèbre de Boole*, ou treillis distributif avec compléments.

Soit D un treillis distributif complet, satisfaisant à (15). Définissons pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{D}$, le *quasi-complément* X^*, comme l'union de tous les éléments $y \in \mathrm{D}$ tels que $x \cap y = 0$. Il est évident que

$$x \cap y = 0 \quad \text{équivaut à } y \leq x^*. \tag{16}$$

La correspondance $x \to (x^*)^* = \overline{x}$ est alors une opération de fermeture satisfaisant à [*voir* (6)],

$$\overline{x} \geq x, \qquad \overline{\overline{x}} = \overline{x} \qquad \text{et} \qquad x \geq y \text{ implique } \overline{x} \geq \overline{y}. \tag{16'}$$

De plus, les éléments fermés (les quasi-compléments) forment une algèbre de Boole, C, laquelle n'est cependant pas un sous-treillis de D, et la correspondance $x \to x^*$ est une homomorphie du treillis D sur C.

---

[1] C'est-à-dire, famille de sous-ensembles close par rapport aux opérations binaires d'union et intersection.

8. Algèbres de Boole. — Les treillis les mieux connus sont les *algèbres de Boole*, ou treillis distributifs avec compléments que nous venons de définir. Puisque, dans un treillis distributif, tout élément possède un complément au plus, on peut regarder la formation du complément comme une opération univoque unaire. Il est vrai que les éléments avec compléments dans un treillis distributif forment toujours un sous-treillis et une algèbre de Boole.

Les algèbres de Boole de longueur finie sont tout simplement les puissances $\mathbf{2}^n$ ordinales de $\mathbf{2}$, le nombre ordinal deux; l'algèbre libre de Boole avec n générateurs est $\mathbf{2}^{2^n}$; le treillis distributif libre avec n générateurs et éléments spéciaux O, I est $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^n}$.

Il y a une correspondance remarquable entre les algèbres de Boole et les *anneaux de Boole*, ou anneaux dans lequel $xx = x$. Cette correspondance, signalée par M. Stone, repose sur les identifications suivantes

$$(17)\quad X \cap Y = XY, \qquad X \cup Y = X + Y + XY, \qquad X + Y = (X \cap Y') \cup (X' \cap Y).$$

Elle fait correspondre les idéaux d'un treillis et les idéaux de l'anneau de Boole correspondant.

M. Newman a démontré un résultat plus surprenant. Soit S un système avec addition et multiplication satisfaisant à

$$(18)\quad \begin{cases} a + 0 = 0 + a = a, & a1 = 1a = a, \\ a(b + c) = ab + ac, & (a + b)c = ac + bc. \end{cases}$$

S est alors l'union directe de la sous-algèbre de Boole A, formée par les éléments a avec $a + a = a$, et du sous-anneau de Boole B, éventuellement non associatif, formé par les éléments b avec $b + b = 0$.

Les algèbres de Boole ont beaucoup de propriétés particulières. D'abord, si l'on complète *par coupures* une algèbre de Boole, le treillis des coupures est lui-même une algèbre de Boole tandis qu'en complétant *par coupures* un treillis distributif sans complément, on peut arriver à un treillis non distributif. Aussi la loi distributive infinie (15) est valable dans toute algèbre de Boole.

Si l'on postule même une loi distributive plus forte, de la forme

$$(19)\quad \bigcap_i \Big(\bigcup_j a_{ij} \Big) = \bigcup_{\phi} \Big\{ \bigcap_i a_{i,\phi(i)} \Big\},$$

on obtient une caractérisation abstraite du treillis de *tous* les sous-ensembles d'un ensemble abstrait, comme l'a démontré M. Tarski. En général, chaque algèbre de Boole est isomorphe à un corps d'ensembles, et réciproquement. Très récemment, M. Loomis a démontré une extension importante de ce résultat fondamental.

Soit A une algèbre de Boole, dans laquelle chaque suite *dénombrable* $\{a_k\}$ d'éléments possède un supremum $\bigcup_{k=1}^{\infty} a_k$ et un infimum $\bigcap_{k=1}^{\infty} a_k$. Il existe alors un σ-corps ([1]) Φ de sous-ensembles d'un ensemble abstrait E, et une *σ-homomorphie* $\Phi \rightarrow A$ de Φ sur A, qui conserve les opérations sur les suites finies et dénombrables. Pour fixer les idées, nous pouvons imaginer Φ comme la famille des ensembles de Borel dans le plan euclidien, et A comme les ensembles de Borel modulo les ensembles de mesure nulle (ou bien de la première catégorie de Baire). Le théorème de Loomis démontre qu'une telle représentation est typique.

Il y a beaucoup d'autres applications des algèbres de Boole à la théorie des ensembles, sans parler des applications classiques que Boole lui-même, a faites à la logique. Mais au lieu de les citer, je préfère poser trois problèmes non résolus de la théorie des treillis.

9. **Problèmes.** — Les treillis jouent dans les mathématiques un rôle très analogue à celui des groupes. Le premier problème est de définir les analogues des groupes finis et continus de Lie.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}, \tag{20}$$

de la propagation des ondes dans l'espace à une dimension. Disons que (x, t) est antérieur à (x_1, t_1) si et seulement si $t_1 - t \geqq |x - x_1|$, comme dans la théorie de la relativité; nous définissons ainsi un treillis dans l'espace-temps. Pour les fonctions suffisamment dérivables, il est remarquable que (20) équivaut à l'identité (11′) de la probabilité et de la dimension projective. Y a-t-il une extension à d'autres équations de type hyperbolique? Voici le deuxième problème. Je crois que la réponse est négative, mais je ne saurais le justifier.

([1]) Dans le sens de Borel-Hausdorff : une famille Φ de sous-ensembles de E, contenant le complément S′ de chaque $S \in \Phi$ et l'union $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ de chaque suite dénombrable $\{S_k\}$ de $S_k \in \Phi$.

Enfin, dans les travaux de Baker et d'autres géomètres, on arrive à beaucoup de *configurations* très symétriques, formées de points, droites, plans, etc. qui sont des treillis. Le troisième problème est de définir ces treillis particuliers par des ensembles minima de générateurs $a, b, c, \ldots$ et des équations décrivant les identifications entre des fonctions comme $[a \cap (b \cup c)] \cap b$, etc. de ces générateurs. Il est possible que ce problème ne possède pas de solution élégante, mais le problème analogue pour les groupes de symétries des configurations a donné des résultats intéressants.