ANNALES DE L'I. H. P.

F. POLLACZEK

Réduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone, à la résolution de systèmes d'équations intégrales

Annales de l'I. H. P., tome 11, nº 3 (1949), p. 135-173
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_3_135_0>

Réduction de différents problèmes concernant la probabilité d'attente au téléphone, à la résolution de systèmes d'équations intégrales.

par

F. POLLACZEK.

INTRODUCTION.

Ci-après, nous étudions divers problèmes de Calcul des Probabilités qui se posent pour un groupe de $s \geqq 1$ lignes téléphoniques où les appels arrivent au hasard et sont traités selon leur ordre d'arrivée, sans admettre aucune hypothèse restrictive sur la distribution de deux grandeurs aléatoires (durées de communication et d'orientation) qui interviennent ici.

Nous trouvons ainsi que la construction des différentes fonctions de distribution (f. d. d.) des durées d'attente (à une ou à plusieurs variables) qu'on peut définir ici, se ramène à la résolution d'un ou plusieurs systèmes de s équations intégrales linéaires simultanées.

Tous ces systèmes ont la même structure, c'est-à-dire que les s opérateurs linéaires qui figurent dans les premiers membres sont toujours les mêmes, tandis que les seconds membres de chaque système sont des fonctions données qui dépendent des solutions du précédent système.

C'est en ce sens qu'on peut dire que dans sa partie essentielle, toute la classe de problèmes étudiés ici se ramène à la résolution d'un seul système de s équations intégrales linéaires $L(u) = c$, dont les deuxièmes membres c sont des fonctions données, largement arbitraires à l'intérieur d'une certaine classe de fonctions.

Dans un mémoire antérieur (1) nous avons déjà traité le problème de la construction de la f. d. d. (à une variable) des durées d'attente, sans tenir compte du phénomène de blocage; dans la première partie de ce mémoire, ce problème a été ramené à la résolution de deux systèmes d'équations intégrales linéaires, équivalentes au système L, tandis que dans la seconde partie, des méthodes sont exposées qui permettent, pour deux classes de fonctions $\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, df(t)$ [$f(t)$ étant la f. d. d. des durées de communication], de résoudre ces équations au moyen d'un nombre fini d'opérations (2).

Toutefois, nous n'étions parvenu au résultat de la première partie qu'au moyen de calculs étendus qui ne s'appliqueraient que difficilement à des problèmes plus généraux ou plus compliqués. Pour cette raison, nous avons récemment développé, indépendamment de toute notion de théorie des probabilités, un calcul opérationnel qui s'applique à certaines sommes d'intégrales multiples, elles-mêmes généralisations de l'intégrale classique de Dirichlet.

Ce calcul, que nous considérons comme connu, abrège considérablement les opérations nécessaires pour déterminer les probabilités continues multidimensionnelles dont il est question ici, et facilite le passage aux problèmes plus complexes des troisième et quatrième chapitres.

Dans le premier chapitre, qui est le seul à contenir des considérations de théorie des probabilités, nous ramenons le calcul de la f. d. d. $\rho(t)$ des durées d'attente à la construction d'une certaine fonction analytique de trois variables complexes $\Phi(p, z; q)$. Ensuite (Chap. II), les formules du Mémoire A nous permettent de réduire en quelques pages le calcul de Φ à un problème de théorie des équations intégrales linéaires; on suppose dans ce chapitre que chaque communication commence au moment où la ligne à laquelle elle a droit sera devenue libre.

Dans le troisième chapitre, nous généralisons nos hypothèses en supposant, pour $s \geqq 2$, que chaque appel bloque pendant une certaine « période d'orientation θ » (répartie suivant une loi de probabilité

(1) *Math. Zeitschr.*, 38, 1934, p. 492-537.

(2) Voir *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 10, 1946, p. 1-55 (2e Partie), où ces méthodes ont été appliquées à la fonction $\varepsilon(z) = a e^{hz} + (1 - a) e^{2hz}$ $(0 \leqq a \leqq 1;\ h = 2 - a)$.

(3) Application d'opérateurs intégro-combinatoires dans la théorie des intégrales multiples de Dirichlet, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. XI, 1949, p. 113. Ce Mémoire sera désigné, dans ce qui suit, par la lettre A.

donnée) toutes les lignes libres du groupe; ceci revient à admettre qu'une communication commencera dès qu'une ligne à laquelle elle a droit sera devenue libre et qu'en outre le blocage du groupe dû à l'appel précédent aura pris fin. Comme précédemment, le calcul de la f. d. d. $\rho(t)$ se ramène à la résolution d'un système de s équations intégrales linéaires non homogènes, généralisation du système du Chapitre II où, cette fois, figurent en même temps des intégrales doubles et des intégrales simples.

Dans les hypothèses du premier chapitre, nous ramenons ensuite (Chap. IV) la construction de la fonction génératrice d'une suite de f. d. d. à deux variables au système d'équations intégrales trouvé dans le Chapitre II, et établissons cette fonction dans le cas le plus simple. Les développements de ce chapitre s'appliquent sans modification aux problèmes analogues à un nombre quelconque de variables.

Finalement, les équations intégrales du système avec blocage sont résolues (Chap. V) pour la f. d. d. des durées de communication $f(t) = 1 - e^{-t}$, la f. d. d. $g(\theta)$ des périodes d'orientation étant arbitraire.

Les problèmes que notre méthode permet de traiter directement, sont du type Bernoullien, en ce sens qu'on étudie des probabilités concernant un nombre fini n d'appels qui arrivent pendant un intervalle de temps fini $\mathfrak{T}$. Afin d'embrasser aussi le problème important du type de Poisson où n et $\mathfrak{T}$ sont infinis, la densité moyenne d'appels par unité de temps étant donnée, nous devons faire tendre n vers l'infini dans la formule de $\rho(t) = \rho\left(t; \frac{n}{\mathfrak{T}}\right)$, dans l'hypothèse que $\frac{n}{\mathfrak{T}} = \text{const.} = c$.

Dans tous les cas étudiés, ce passage à la limite revient à remplacer l'expression qui figure, entre crochets, dans les équations (15), (43), (70), (86), par

$$[(p - z)\Phi(p, z; q)]_{p=z=c};$$

commme, toutefois, la démonstration de cette formule nécessite des développements supplémentaires, nous la renvoyons à un autre article.

1. Résumé de la théorie de l'auteur et déduction d'une formule générale pour la f. d. d. des durées d'attente. — Selon le schéma que nous utilisons pour traiter des problèmes de probabilités qui se posent en téléphonie, nous admettons que, pendant un intervalle de temps $(0, \mathfrak{T})$, n appels arrivent au hasard à un groupe de $s \geqq 1$ lignes; par hypothèse, ces appels seront traités selon leur ordre d'arrivée dès qu'une des s lignes sera devenue libre. Nous désignons par

$$(1) \qquad 0 \leqq X_1 \leqq \ldots \leqq X_n \leqq \mathfrak{T}$$

les instants d'arrivée, *numérotés en ordre croissant*, de ces appels et par

$$(2) \qquad 0 < T_1 < \infty, \ldots, 0 < T_n < \infty,$$

leurs durées de communication.

En raison de la règle de priorité admise, tous les phénomènes d'attente seront déterminés de manière univoque dès qu'on aura attribué aux variables aléatoires X_ν, T_ν des valeurs particulières x_ν, t_ν selon (1) et (2) et la durée d'attente τ_m du $m^{\text{ième}}$ appel sera une fonction certaine

$$(3) \qquad \tau_m = \tau_m(x_1, \ldots, x_m;\, t_1, \ldots, t_{m-1}), \qquad (0 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_m)$$

des grandeurs $x_\nu (\nu = 1, \ldots, m)$ et $t_\nu (\nu = 1, \ldots, m-1)$ que nous établirons dans ce qui suit.

Afin d'être en mesure de traiter des problèmes de probabilité, nous devons admettre des hypothèses concernant la répartition des variables aléatoires X_ν et T_ν; dans ce qui suit, nous admettrons les hypothèses suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} \text{Prob}\left\{ x_\nu < X_\nu < x_\nu + dX_\nu \right\} = \dfrac{dx_\nu}{\mathfrak{T}}, \\ \text{Prob}\left\{ t_\nu < T_\nu < t_\nu + dt_\nu \right\} = df(t_\nu), \\ \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

$f(t)$ étant une fonction monotone arbitraire, donnée dans l'intervalle $(0, \infty)$, et telle que

$$(5) \qquad f(0) = 0, \qquad f(\infty) = 1, \qquad \text{donc} \quad \int_0^\infty df(t) = 1.$$

Donc, nous supposons que pour chaque appel, chaque instant d'arrivée à l'intérieur de l'intervalle $(0, \mathfrak{T})$ est également probable, tandis que nous admettons pour la f. d. d. $f(t)$ des durées de communication une loi arbitraire (la même pour tous les appels).

Nous prenons la durée moyenne d'une communication pour unité de temps, de sorte que

$$(6) \qquad \int_0^\infty t\, df(t) = 1$$

et désignons par

$$(7a) \qquad \varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, df(t), \qquad [R(z) < c;\ c > 0],$$

la fonction caractéristique de $f(t)$. En raison de (5) et (6), on a

$$(7b) \qquad \varepsilon(0) = 1, \qquad \varepsilon'(0) = 1;$$

pour simplifier nos raisonnements ultérieurs, nous supposons en outre que l'intégrale de Stieltjes (7 a) est convergente pour $R(z) < c$, c étant une constante positive arbitrairement petite.

Avec nos hypothèses (4), la probabilité pour que les instants d'arrivée (1) des n appels ainsi que leurs durées de communication soient respectivement compris entre x_ν et $x_\nu + dx_\nu$, et entre t_ν et $t_\nu + dt_\nu$, sera égale à $\prod_{\nu=1}^{n} \frac{dx_\nu}{\mathfrak{T}} \prod_{\nu=1}^{n} df(t_\nu)$.

Soit maintenant $\mathfrak{F}_m(X_\nu, T_\nu)$ une fonction continue quelconque des variables aléatoires X_ν et T_ν, assujetties aux conditions (1) et (2). La valeur probable $\overline{\mathfrak{F}}_m$ de $\mathfrak{F}_m$ sera égale au quotient des intégrales

$$\int \cdots \int \mathfrak{F}_m \prod_1^n dx_\nu \prod_1^n df(t_\nu) \qquad \text{et} \qquad \int \cdots \int \prod_1^n dx_\nu \prod_1^n df(t_\nu),$$

étendues toutes deux au domaine

$$(8a) \qquad 0 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \mathfrak{T},$$

$$(8b) \qquad 0 < t_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

et en raison des formules

$$\int_0^{\mathfrak{T}} dx_1 \int_{x_1}^{\mathfrak{T}} dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{\mathfrak{T}} dx_n = \frac{\mathfrak{T}^n}{n!}, \qquad \int_0^\infty df(t_\nu) = 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

on aura

$$(9a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{F}}_m = \frac{n!}{\mathfrak{T}^n} \int_0^\infty df(t_1) \ldots \int_0^\infty df(t_n) \\ \times \int_0^{\mathfrak{T}} dx_1 \ldots \int_{x_{n-1}}^{\mathfrak{T}} \mathfrak{F}_m(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_n; \end{aligned} \right.$$

mais si nous regardons $\mathfrak{F}_m$ en outre comme une fonction aléatoire de l'indice m, lequel prend les valeurs $1, \ldots, n$ par hypothèse avec la même probabilité $\frac{1}{n}$, sa valeur probable sera

$$(9\,b) \qquad \overline{\mathcal{F}} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\overline{\mathcal{F}}_m.$$

En désignant par t une variable positive, nous allons déterminer la probabilité $\rho(t)$ pour que l'attente d'un quelconque des n appels soit $\leqq t$; $\rho(t)$ est donc la f. d. d. des durées d'attente à notre groupe de s lignes.

Pour trouver d'abord la probabilité $\rho_m(t)$ pour que l'attente du $m^{\text{ième}}$ appel soit $\leqq t$, considérons la fonction

$$\mathrm{s}(t-\tau_m),$$

qui [*voir* A, équ. $(3\,a)$] est égale à 1 en tous les points (x_ν, t_ν) selon $(8\,a)$, $(8\,b)$ où l'attente du $m^{\text{ième}}$ appel est $< t$, et nulle ailleurs (4). $\rho_m(t)$ est évidemment égal à la valeur probable de $\mathrm{s}(t-\tau_m)$ et en prenant la moyenne des $\rho_m(t)$, on a la probabilité cherchée

$$(9\,c) \qquad \rho(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\rho_m(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\overline{\mathrm{s}(t-\tau_m)};$$

ainsi, on obtient $\rho(t)$ en posant, dans $(9\,a)$, $(9\,b)$, $\mathcal{F}_m = \mathrm{s}(t-\tau_m)$ (5).

Mais nous pouvons aussi bien remplacer $\mathcal{F}_m$ par la fonction

$$\mathrm{s}(\mathcal{C}-x_n)\,\mathrm{s}(t-\tau_m),$$

qui coïncide avec $\mathrm{s}(t-\tau_m)$ dans tous les points $(x_1, \ldots, x_n)$ du simplex $(8\,a)$, domaine d'intégration des x_ν dans l'équation $(9\,a)$, et qui

---

(4) Nous n'avons pas à tenir compte des multiplicités où $\tau_m = t > 0$ car, leur volume $(2n-1)$ dimensionnel [voir (10)] dans l'espace des x_ν et t_ν étant 0, elles ne contribuent pas aux probabilités en question.

(5) $\mathrm{s}(t-\tau_m)$ présente des discontinuités, mais la fonction

$$\int_{x_{m-1}}^{\mathcal{C}} dx_m \ldots \int_{x_{n-1}}^{\mathcal{C}} \mathrm{s}(t-\tau_m)\,dx_n$$

est continue en $t_1, \ldots, t_{m-1}$ ce qui permet d'utiliser, sans convention supplémentaire, la formule $(9\,a)$ où figurent des intégrales de Stieltjes.

s'annule à l'extérieur de ce simplex, car ceci nous permet de remplacer le côté $\mathfrak{T}$ du simplex par ∞. Ainsi, il vient

$$(10)\quad \begin{cases} \rho(t) = \dfrac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \int_0^\infty df(t_1)\ldots\int_0^\infty df(t_{n-1}) \\ \qquad \times \displaystyle\int_0^\infty dx_1\ldots\int_{x_{n-1}}^\infty \mathrm{s}(\mathfrak{T}-x_n)\,\mathrm{s}(t-\tau_m)\,dx_n \\ \qquad\qquad (t>0), \end{cases}$$

où l'opération $\int_0^\infty \ldots df(t_n)$ a été supprimée puisque [*voir* (3)] τ_m ($m=1, \ldots, n$) ne dépend pas de t_n.

Posons maintenant [*voir* A (1)]

$$(11)\qquad \mathrm{s}(\mathfrak{T}-x_n)\,\mathrm{s}(t-\tau_m) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} e^{p(\mathfrak{T}-x_n)}\frac{dp}{p}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_q} e^{q(t-\tau_m)}\frac{dq}{q},$$

où les droites C_p et C_q, situées à droite de l'axe imaginaire, seront parcourues de bas en haut. Substituons cette expression dans (10) et intervertissons l'ordre des intégrations réelles et complexes; alors l'opération

$$\int_0^\infty df(t_m)\ldots\int_0^\infty df(t_{n-1})\int_{x_m}^\infty dx_{m+1}\ldots\int_{x_{n-1}}^\infty \ldots dx_n,$$

dont les variables ne figurent pas dans τ_m [équ. (3)] peut être effectuée immédiatement à l'aide de la formule

$$\int_{x_{\nu-1}}^\infty e^{-px_\nu}\,dx_\nu = \frac{1}{p}e^{-px_{\nu-1}} \qquad [\mathrm{R}(p)>0]$$

et l'on obtient ainsi

$$(12)\quad \begin{cases} \rho(t) = \dfrac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n}\,\dfrac{1}{(2\pi i)^2}\displaystyle\int_{C_p}\int_{C_q} e^{p\mathfrak{T}+qt} \\ \qquad \times \left[\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\int_0^\infty df(t_1)\ldots\int_0^\infty df(t_{m-1})\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\displaystyle\int_0^\infty dx_1\ldots\int_{x_{m-1}}^\infty e^{-px_n-q\tau_m}\,dx_m\right]\dfrac{dp\,dq}{p^{n-m+1}q} \\ \qquad\qquad (t>0). \end{cases}$$

Désignons maintenant par z une variable complexe et introduisons la série de Taylor

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi(p, z; q) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} \int_0^{\infty} df(t_1)\ldots \\ \qquad \times \displaystyle\int_0^{\infty} df(t_{m-1}) \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_{x_{m-1}}^{\infty} e^{-px_m - q\tau_m} dx_m \\ \qquad [R(p) > 0,\ R(q) > 0], \end{cases}$$

qui converge pour $|z| < R(p)$; car en raison de l'inégalité

$$|e^{-px_m - q\tau_m}| \leqq e^{-x_m R(p)} \qquad [R(p),\ R(q) \geqq 0],$$

le module du terme général de (13) s'avère comme $\leqq \frac{|z|^{m-1}}{[R(p)]^m}$, de sorte qu'on a

$$(14)\quad |\Phi(p, z; q)| \leqq \frac{1}{R(p) - |z|} \qquad [\text{pour } |z| < R(p);\ R(q) \geqq 0].$$

En exprimant le $m^{\text{ième}}$ coefficient de la série (13) sous forme d'une intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_z} \Phi(p, z; q) \frac{dz}{z^m},$$

où K_z désigne un cercle, arbitrairement petit et parcouru dans le sens positif, autour du point $z = 0$, on obtient pour la fonction (12)

$$\rho(t) = \frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{C_q} \int_{K_z} e^{p\mathfrak{T} + qt} \Phi(p, z, q) \left[\frac{1}{p^n z} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{p}{z} \right)^{m-1} \right] \frac{1}{q} dp\, dq\, dz.$$

Or, dans l'expression

$$\frac{1}{p^n z} \sum_{1}^{n} \left(\frac{p}{z} \right)^{m-1} = \frac{1}{p^n z^n} \frac{p^n - z^n}{p - z} = \frac{1}{z^n (p - z)} - \frac{1}{p^n} \frac{1}{p - z},$$

le dernier terme peut être supprimé, car la partie correspondante de la fonction à intégrer, qui est holomorphe en $z = 0$, est annulée par l'opération $\int_{K_z} \ldots dz$. On obtient ainsi la formule

$$(15)\quad \begin{cases} \rho(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_q} e^{qt} \left[\dfrac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \dfrac{1}{(2\pi i)^2} \right. \\ \qquad \left. \times \displaystyle\int_{C_p} \int_{K_z} \dfrac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^n (p - z)} \Phi(p, z; q)\, dp\, dz \right] \dfrac{dq}{q} \\ \qquad (t > 0), \end{cases}$$

qui est valable dans l'hypothèse que τ_m [équ. (3)] ne dépende que des variables jusqu'à x_m et t_{m-1} inclus. Cette formule où les trois grandeurs t, $\mathfrak{T}$, n qui entrent dans la définition de $\rho(t)$, figurent de manière simple, réduit notre problème au calcul d'une fonction analytique de trois variables complexes $\Phi(p, z; q)$.

2. Attente à un groupe de lignes sans blocage. — Nous devons maintenant construire la fonction $\tau_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_{m-1})$ qui entre dans la définition de $\Phi(p, z; q)$ [équ. (13)]. Constatons dans ce but que le $m^{\text{ième}}$ appel aura droit à une ligne dès que $m-s$ parmi les $m-1$ appels précédents auront pris fin. Comme l'instant d'arrivée, la durée d'attente, la durée de communication du $\nu^{\text{ième}}$ appel sont respectivement égaux à x_ν, τ_ν, t_ν, cet appel prend fin à l'instant

$$x_\nu + \tau_\nu + t_\nu. \tag{16}$$

Donc, à partir de l'instant [*voir* pour les notations **A** (4), (5*a*), (5*b*)]

$$\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} (x_\nu + \tau_\nu + t_\nu), \tag{17}$$

où seuls $s-1$ parmi les $m-1$ précédents appels n'étant pas encore terminés, une ligne sera devenue libre, la communication du $m^{\text{ième}}$ appel commencera, pourvu qu'il soit déjà arrivé [c'est-à-dire, pourvu que x_m soit plus petit que l'expression (17)]; par conséquent, on a

$$\tau_m = [\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} (x_\nu + \tau_\nu + t_\nu) - x_m]^+$$

ou

$$\tau_m = \max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)+} (x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_m) \qquad (m = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Nous convenons de poser le symbole $\max\limits_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)+}$ pour $1 \leqq m \leqq s$ égal à zéro, ce qui revient à admettre que

$$\tau_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, s). \tag{19}$$

A l'aide de la formule (18) qui définit τ_m par récurrence pour tous les m, nous pourrons déterminer les coefficients de la série (13). Introduisons à ce dessein les expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{J}_{m,0} = e^{-px_m - q\tau_m}, \\ &\mathfrak{J}_{m,i} = \int_0^\infty df(t_1) \ldots \int_0^\infty df(t_{m-i}) \\ &\qquad \times \int_{x_{m-i}}^\infty dx_{m-i+1} \ldots \int_{x_{m-1}}^\infty e^{-px_m - q\tau_m} dx_m \\ &\qquad (i = 1, \ldots, m-1;\ m = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

qui seront calculées par récurrence à l'aide de la relation

$$(21)\qquad \mathfrak{J}_{m,i} = \int_0^\infty df(t_{m-i}) \int_{x_{m-i}}^\infty \mathfrak{J}_{m,i-1}\,dx_{m-i+1} \qquad (i = 1, \ldots, m-1)$$

et dont nous tirons pour Φ [équ. (13)], la formule

$$(22)\qquad \Phi(p, z\,;\, q) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} \int_0^\infty \mathfrak{J}_{m,m-1}\,dx_1.$$

D'abord, nous obtenons pour $\mathfrak{J}_{m,0}$ [équ. (20)] à l'aide de (18) et de la formule A (15) (pour $\mu = s-1$, $n = m-1$), l'expression

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{J}_{m,0} = S_{m-1}^{s-1}\, e^{-px_m - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_m)} \frac{q}{q - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu} \\ &\qquad \left[R\left(q - \sum_1^{m-1} z_\nu \right) > 0 \right]. \end{aligned} \right.$$

En choisissant suffisamment voisins de l'axe imaginaire les chemins d'intégration des intégrales $(m-1)$-uples dont S_{m-1}^{s-1} se compose, on a en outre $R\left(p - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu\right) > 0$, de sorte que l'opération $\int_{x_{m-1}}^\infty \ldots dx_m$ peut être effectuée sous le signe S_{m-1}^{s-1} ; à l'aide de (21) et de la notation (7 a), on obtient ainsi

$$\mathfrak{J}_{m,1} = S_{m-1}^{s-1} \exp\left[-px_{m-1} - \sum_1^{m-2} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_{m-1}) \right] \times \frac{q\,\varepsilon(-z_{m-1})}{\left(q - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu\right)\left(p - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu\right)} e^{-z_{m-1}\tau_{m-1}}.$$

En remplaçant ensuite τ_{m-1} par l'expression (18) et en utilisant l'identité $S_{m-1}^{s-1} = T_{m-1}^{0,s-1}$ [A (24 a)], cette formule prend la forme

$$(24)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}_{m,1} = T_{m-1}^{0,s-1} \exp\Bigg[&-px_{m-1} - \sum_1^{m-2} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_{m-1}) \\ &- z_{m-1} \max_{\nu=1,\ldots,m-2}{}^{(s)+} (x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_{m-1}) \Bigg] \\ &\times \frac{q\,\varepsilon(-z_{m-1})}{\left(q - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu\right)\left(p - \sum\limits_1^{m-1} z_\nu\right)}. \end{aligned}$$

Or, grâce à la formule A (49), où μ, n, x_ν seront remplacés par $s-1$, $m-2$, $x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_{m-1}$, le deuxième membre de (24) peut être transformé en une somme d'intégrales de Fourier du type $T_{m-2}^{\lambda,s-1}$, et relatives aux $m-2$ variables réelles $x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_{m-1}$.

Pour cette raison, nous admettons que pour un $i \geqq 1$, la formule

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{J}_{m,i-1} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} T_{m-i}^{\lambda,s-1}\pi_{m-i}\left(p-\sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) \\ &\left[\mathrm{R}\left(p-\sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) > 0, \quad \mathrm{R}\left(q-\sum_{1}^{m-i} z_\nu\right) > 0\right] \end{aligned}\right.$$

ait déjà été démontrée; nous avons posé ici

$$(26)\quad \pi_n = \exp\left[-px_{n+1} - \sum_{1}^{n} z_\nu(x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_{n+1})\right] \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

et désigné par

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} f_{i-1,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = -\frac{f_{i-1,0;\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda)}{q-y} \\ +\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{(p-y)^{k+1}} f_{i-1,k;\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda) \\ (\lambda = 0, \ldots, s-1;\ i = 1, 2, \ldots;\ p \neq q), \end{aligned}\right.$$

une forme linéaire en $\frac{1}{q-y}$ et $\frac{1}{(p-y)^{k+1}}$ $(k=0, \ldots, i-1)$ dont les coefficients sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$ et holomorphes et bornés dans le domaine

$$(28)\quad \mathrm{R}(z_\nu) \leqq \frac{1}{s-1}\min[\mathrm{R}(p), \mathrm{R}(q)] - c \qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda),$$

c étant une constante positive arbitrairement petite.

En comparant les formules (24) et (25), on trouve pour les $f_{0,\lambda}$ les expressions suivantes :

$$(29)\quad f_{0,0}(y) = \frac{q}{(p-y)(q-y)}, \qquad f_{0,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = 0 \quad (\lambda = 1, \ldots, s-1.)$$

Pour démontrer maintenant (25) par récurrence pour $i = 2, \ldots, m-1$, effectuons-y les opérations indiquées dans (21); le facteur π_{m-i}

[équ. (26)] qui seul contient les variables x_ν et t_ν, se transforme alors en

$$\text{(30)}\qquad \int_0^\infty df(t_{m-i})\int_{x_{m-i}}^\infty \pi_{m-i}\,dx_{m-i+1} = \pi_{m-i-1}\frac{\varepsilon(-z_{m-i})}{p-\sum\limits_1^{m-i} z_\nu}e^{-z_{m-i}\tau_{m-i}},$$

de sorte qu'on obtient

$$\text{(31)}\qquad \mathfrak{J}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i}^{\lambda,s-1}\exp\left[-px_{m-i} - \sum_1^{m-i-1} z_\nu(x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_{m-i}) - z_{m-i}\max_{\nu=1,\ldots,m-i-1}{}^{(s)+}(x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_{m-i})\right]$$
$$\times\,\varepsilon(-z_{m-i})f_{i-1;\lambda}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_1^{m-i} z_\nu\right).$$

Appliquant ensuite la formule A (49) (en remplaçant n, μ, f_λ respectivement par $m-i-1$, $s-1$, $f_{i-1,\lambda}$), on a, à l'aide de (26), la relation

$$\text{(32)}\qquad \mathfrak{J}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1}\mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}\pi_{m-i-1}$$
$$\times\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{\varepsilon(-\zeta)}{\sum\limits_1^{m-i-1} z_\nu - \sum\limits_{1'}^{\lambda'} z_\nu - \zeta}\right.$$
$$\times\left[\left(\sum_1^{m-i-1} z_\nu - \sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu\right)\right.$$
$$\times f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'},\zeta;\sum_1^{m-i-1} z_\nu\right)$$
$$\left.-\,\zeta f_{i-1,\lambda+1}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'},\zeta;\sum_{1'}^{\lambda'} z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$\left.+\,f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};\sum_1^{m-i-1} z_\nu\right)\right];$$

où $f_{i-1,s}$ est donné, en vertu de A (31), par l'équation

$$\text{(33)}\qquad f_{i-1,s}(z_1,\ldots,z_s;y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} f_{i-1,\lambda}(z_{1'},\ldots z_{\lambda'};y)\qquad (i=1,2,\ldots).$$

Par conséquent, $\mathcal{J}_{m,i}$ peut aussi être exprimé sous la forme (25), $f_{i,\lambda}$ étant donné par la formule

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &(p-y)f_{i,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y) \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{\varepsilon(-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta} \\ &\qquad \times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)f_{i-1,\lambda+1}(z_1,\ldots,z_\lambda,\zeta;y)\right. \\ &\qquad\qquad \left.-\zeta f_{i-1,\lambda+1}\left(z_1,\ldots,z_\lambda,\zeta;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\qquad + f_{i-1,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y) \\ &\qquad\qquad (\lambda = 0,\ldots,s-1). \end{aligned}\right.$$

En introduisant ici les expressions (27) et (33) des $f_{i-1,\lambda}$, on reconnaît que les $f_{i,\lambda}$ sont des formes linéaires en $\frac{1}{q-y}$ et $\frac{1}{(p-y)^{k+1}}$ $(k = 0, \ldots, i)$ dont les coefficients $f_{i,k,\lambda}$ sont symétriques en $z_1, \ldots, z_\lambda$, ainsi qu'holomorphes et bornés dans le domaine (28). En outre, les formules de récurrence qu'on obtient ainsi pour ces coefficients, permettent de les évaluer dans le domaine (28) par une inégalité de la forme

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &|f_{i,k;\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda)| < C^i \\ &[k = 0,\ldots,i;\ \lambda = 0,\ldots,s;\ i = 1,2,\ldots;\ C = C(R(p),R(q),c)]. \end{aligned}\right.$$

Donc, les formules (25), (27) sont encore valables pour $\mathcal{J}_{m,i}$; par conséquent, elles valent aussi pour $i = m$, ce qui nous donne [*voir* A (23)] la relation

$$(36)\quad \mathcal{J}_{m,m-1} = p\, e^{-px_1} f_{m-1,0}(0).$$

En substituant cette expression dans (22), on obtient pour la fonction cherchée Φ

$$(37)\quad \Phi(p,z;q) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i f_{i,0}(0).$$

Nous introduisons maintenant les séries

$$\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y) = \mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y,p,q,z)$$

par les équations

$$(38)\quad \mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i f_{i,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y) \qquad (\lambda = 0,1,\ldots,s).$$

Les séries en z et $\frac{1}{p-y}$ qu'on obtient en substituant ici les expressions (27), convergent, uniformément par rapport à tous les z_ν du domaine (28), dans le domaine

$$(39)\qquad |z| < c_1, \quad \left|\frac{z}{p-y}\right| < c_1; \qquad c_1 = c_1[\mathrm{R}(p), \mathrm{R}(q), c],$$

à l'exclusion d'un voisinage du point $y = q$ qui est un pôle simple; on démontre ceci à l'aide de l'inégalité (35). En outre, les formules (27) et (33) montrent que

$$(40)\qquad \mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|y|^2}\right), \qquad \text{pour } y \to \infty \qquad (\lambda = 0, \ldots, s).$$

En effectuant, dans les équations (33) et (34), l'opération $\sum_{i=1}^{\infty} \ldots z^i$, on obtient pour les $\mathcal{F}_\lambda$, à l'aide de (29), les équations intégrales

$$(41\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &(p - z - y)\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y) + \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon(-\zeta)}{y - \sum_1^\lambda z_\nu - \zeta} \\ &\qquad \times\left[\left(y - \sum_1^\lambda z_\nu\right)\mathcal{F}_{\lambda+1}(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta; y)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \zeta\mathcal{F}_{\lambda+1}\left(z_1, \ldots, z_\lambda, \zeta; \sum_1^\lambda z_\nu + \zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} = \delta_\lambda^0 \frac{q}{q-y} \\ &\qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1), \end{aligned}\right.$$

$$(41\,b)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1', \ldots, \lambda'=1}^{s} \mathcal{F}_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y) = 0,$$

δ_λ^0 étant le symbole de Kronecker.

Grâce à l'équation

$$(42)\qquad \Phi(p, z; q) = \mathcal{F}_0(0) = \mathcal{F}_0(0; p, q, z),$$

qui résulte de (37) et (38), la formule (15) prend la forme

$$(43)\qquad \begin{aligned} \rho(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_q} e^{qt}\left[\frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathrm{C}_p}\int_{\mathrm{K}_z}\right. \\ \left.\times\frac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^n(p-z)}\mathcal{F}_0(0; p, q, z)\,dp\,dz\right]\frac{dq}{q}; \end{aligned}$$

ainsi, le calcul de $\rho(t)$ est ramené à la résolution des équations intégrales ($41a$), ($41b$) qui déterminent les fonctions $\mathcal{F}_\lambda$, dans un voisinage suffisamment restreint du point $z=0$, de manière univoque (⁶).

3. Étude d'un système avec blocage temporaire des lignes libres. — Nous reprenons maintenant le problème qui vient d'être traité, en admettant, comme précédemment, qu'à un groupe de $s \geqq 2$ lignes, tous les appels soient traités selon leur ordre d'arrivée. Mais tandis qu'aupa-

---

[6] On peut généraliser la notion de durée d'attente en définissant des durées d'attente virtuelles $\tau_{m,a}$ du $m^{\text{ième}}$ appel jusqu'aux instants $\max\limits_{\nu=1,\ldots,m-1}^{(a+1)}(x_\nu+\tau_\nu+t_\nu)$ où seules, $a=0, \ldots, s-1$ parmi les $m-1$ premières communications restent en cours. On trouve

$$(18') \qquad \tau_{m,a} = \max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(a+1)+}(x_\nu+\tau_\nu+t_\nu-x_m) \qquad (0 \leqq a \leqq s-1,\ \tau_{m,s-1}\equiv\tau_m)$$

et pour le calcul des f. d. d. correspondantes

$$(9'c) \qquad \rho^{(a)}(t) = \frac{1}{n}\sum_1^n \overline{s(t-\tau_{m,a})} \qquad [\rho^{(s-1)}(t)\equiv\rho(t)],$$

toutes les formules de ce chapitre restent valables, sauf (23), (29), ($41a$).

Au lieu de (23), nous avons maintenant [A (15), ($24a$)] la relation

$$(23') \qquad \mathfrak{I}_{m,a} = \mathrm{T}_{m-1}^{0,a}\,\pi_{m-1}\frac{q}{q-\sum\limits_1^{m-1} z_\nu}$$

qui prend, à l'aide de A ($26b$), la forme

$$(23'') \qquad \mathfrak{I}_{m,0} = \left[\mathrm{T}_{m-1}^{0,s-1} + \sum_{\lambda=a+1}^{s-1}(-1)^{\lambda-a}\mathrm{C}_{\lambda-1}^{a}\mathrm{T}_{m-1}^{\lambda,s-1}\right]\pi_{m-1}\frac{q}{q-\sum\limits_1^{m-1} z_\nu}.$$

Par conséquent, les valeurs initiales des $f_{i\lambda}$ seront données, au lieu de (29), par

$$(29') \quad f_{0,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = (\delta_\lambda^0 + (-1)^{\lambda-a}\mathrm{C}_{\lambda-1}^{a})\frac{q}{(p-y)(q-y)} \qquad (\lambda=0, \ldots, s-1),$$

de sorte que dans le second membre de ($41a$), qui est égal à $(p-y)f_{0\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ il faut ajouter maintenant le terme $(-1)^{\lambda-a}\mathrm{C}_{\lambda-1}^{a}\dfrac{q}{q-y}$, et c'est au moyen des équations ($41a$), ($41b$) modifiées ainsi, et de (43) qu'on obtient $\rho^{(a)}(t)$.

Les fonctions $\rho^{(a)}(t)-\rho^{(a-1)}(t)$ [$a=0, \ldots, s-1$; $\rho^{(-1)}(t)\equiv 0$], qui se calculent au moyen d'un système ($41a$) à second membre $(-1)^{\lambda-a}\mathrm{C}_\lambda^a\dfrac{q}{q-y}$, sont positives et, à l'exclusion de la première, décroissantes; en particulier

$$\rho^{(a)}(+0)-\rho^{(a-1)}(+0) \qquad (a=0, \ldots, s-1)$$

est la probabilité pour qu'un appel quelconque trouve exactement a lignes occupées.

ravant, il avait été admis que chaque communication commence au moment où la ligne à laquelle elle a droit sera devenue libre, nous supposons maintenant que chaque appel bloque pendant un certain temps θ, appelé période d'orientation, toutes les lignes libres du groupe, y compris celle qu'il occupera.

Pour cette raison, nous attribuons maintenant à chaque appel, en généralisant le schéma du paragraphe 1, un instant d'arrivée X_ν, une durée de communication T_ν et une période d'orientation Θ_ν; ces variables aléatoires seront numérotées comme précédemment, si bien que l'on a

$$(44)\qquad 0 \leqq X_1 \leqq \ldots \leqq X_n \leqq \mathfrak{T}; \qquad 0 < T_\nu < \infty, \qquad 0 < \Theta_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1).$$

Désignons par $f(t, \theta)$ une fonction monotone arbitraire, donnée dans le premier quadrant et telle que

$$(45)\qquad f(0,0) = 0, \qquad f(\infty,\infty) = 1, \qquad \text{donc} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty d^{(2)} f(t, \theta) = 1,$$

et soit

$$(46)\qquad \varepsilon(z_1, z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{z_1 t + z_2 \theta} d^{(2)} f(t, \theta),$$

sa fonction caractéristique; nous admettons que la dernière intégrale converge pour $R(z_1) < c$, $R(z_2) < c$, $(c > 0)$. Quant à la répartition des variables aléatoires, nous supposons que

$$(47)\qquad \begin{cases} \text{Prob}\left\{x_\nu < X_\nu < x_\nu + dx_\nu\right\} = \dfrac{dx_\nu}{\mathfrak{T}}, \\ \text{Prob}\left\{t_\nu < T_\nu < t_\nu + dt_\nu;\ \theta_\nu < \Theta_\nu < \theta_\nu + d\theta_\nu\right\} = d^{(2)} f(t_\nu, \theta_\nu) \\ \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Les conclusions du chapitre I qui aboutissaient aux formules (13) de $\Phi(p, z; q)$ et (15) de $\rho(t)$ restent valables à condition de remplacer $\int_0^\infty \ldots df(t_\nu)$ par $\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots d^{(2)} f(t, \theta)$, et $\tau_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_{m-1})$ par une nouvelle fonction

$$(48)\qquad \tau_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_{m-1}; \theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$$

que nous allons maintenant construire.

Donnons aux variables aléatoires (44) des valeurs particulières x_ν, t_ν, θ_ν; dans le cas présent, la $\nu^{\text{ième}}$ communication sera terminée à l'instant

$$x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu,$$

de sorte que le $m^{\text{ième}}$ appel aura droit à la ligne qui deviendra libre à l'instant

$$\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} (x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu). \tag{49}$$

Mais dans l'hypothèse présente, cette ligne ne sera accessible que dès que le blocage dû au $(m-1)^{\text{ième}}$ appel aura pris fin, c'est-à-dire, à partir de l'instant

$$x_{m-1} + \tau_{m-1} + \theta_{m-1}. \tag{50}$$

La communication du $m^{\text{ième}}$ appel commencera donc à l'instant

$$t' = \max\left[\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)} (x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu);\ x_{m-1} + \tau_{m-1} + \theta_{m-1}\right],$$

pourvu que cet appel soit déjà arrivé, et par conséquent, sa durée d'attente sera [*voir* A (5 *a*), (5 *b*)] $\tau_m = (t' - x_m)^+$ ou

$$\left\{\begin{aligned} \tau_m = \max{}^+\Big[&\max_{\nu=1,\ldots,m-1}{}^{(s)+} (x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu - x_m);\\ &x_{m-1} + \tau_{m-1} + \theta_{m-1} - x_m\Big]\\ &(m = 1, 2, \ldots); \end{aligned}\right. \tag{51}$$

cette formule définit τ_m par récurrence, en fonction des variables $x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1};\ \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$.

Notons qu'en utilisant (51) aussi pour $m = 1$, on admet, en raison de nos conventions sur le symbole $\max^{(\mu)+}$, que

$$\tau_1 = 0. \tag{52}$$

Pour la fonction Φ nous obtenons maintenant la formule

$$\begin{aligned} \Phi(p, z; q) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} &\int_0^\infty \int_0^\infty d^{(2)} f(t_1, \theta_1) \ldots \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty d^{(2)} f(t_{m-1}, \theta_{m-1}) \int_0^\infty dx_1 \ldots \\ &\times \int_{x_{m-1}}^\infty e^{-px_m - q\tau_m} dx_m \end{aligned} \tag{53}$$

et de manière analogue à (20), (21), nous posons ici

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{I}_{m,0} &= e^{-px_m - q\tau_m},\\ \mathfrak{I}_{m,i} &= \int_0^\infty \int_0^\infty d^{(2)} f(t_{m-i}, \theta_{m-i}) \int_{x_{m-i}}^\infty \mathfrak{I}_{m,i-1}\, dx_{m-i+1}\\ &(i = 1, \ldots, m-1;\ m = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right. \tag{54}$$

de sorte que pour le calcul de Φ, l'équation (22) reste valable.

Grâce à la formule A (17 *b*) ($n = m - 1$, $\mu = s - 1$, $n' = 1$, $\mu' = 0$), $e^{-q\tau_m}$ [*voir* (51)] peut être exprimé sous la forme

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} e^{-q\tau_m} = S_{m-1}^{s-1}(z)\, C_{\zeta_{m-1}} \exp\Bigg[& -\sum_1^{m-1} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu - x_m) \\ & - \zeta_{m-1}(x_{m-1} + \tau_{m-1} + \theta_{m-1} - x_m)\Bigg] \\ & \times \frac{q}{q - \sum_1^{m-1} z_\nu - \zeta_{m-1}} \\ & \left[R\left(q - \sum_1^{m-1} z_\nu - \zeta_{m-1}\right) > 0\right]. \end{aligned}\right.$$

Substituant ceci dans (54), et posant

$$(56\,a)\quad \pi_n = \exp\Bigg[-px_{n+1} - \sum_1^{n} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu - x_{n+1}) - \zeta_n(x_n + \tau_n + \theta_n - x_{n+1})\Bigg],$$

$$(56\,b)\quad \pi_n^{\star} = \exp\Bigg[-px_{n+1} - \sum_1^{n} z_\nu(x_\nu + \tau_\nu + \theta_\nu + t_\nu - x_{n+1})\Bigg],$$

nous obtenons, à l'aide de A (24 *a*), la formule

$$(57)\quad \mathfrak{J}_{m,0} = T_{m-1}^{0,s-1}\, C_{\zeta_{m-1}}\, \pi_{m-1} \frac{q}{q - \sum_1^{m-1} z_\nu - \zeta_{m-1}},$$

où $T_{m-1}^{0,s-1}$ se rapporte aux variables d'intégration $z_1, \ldots, z_{m-1}$.

Par conséquent, nous pouvons admettre que pour un $i \geq 1$, $\mathfrak{J}_{m,i-1}$ peut être représenté sous la forme

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{J}_{m,i-1} = & \sum_{\lambda=0}^{s-1} T_{m-i}^{\lambda,s-1} C_{\zeta_{m-i}} \pi_{m-i}\left(p - \sum_1^{m-i} z_\nu - \zeta_{m-i}\right) \\ & \times f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'};\ \sum_1^{m-i} z_\nu + \zeta_{m-i}\right) \\ & (1 \leq i \leq m), \\ & \left[R\left(p - \sum_1^{m-i} z_\nu - \zeta_{m-i}\right) > 0,\ R\left(q - \sum_1^{m-i} z_\nu - \zeta_{m-i}\right) > 0\right]. \end{aligned}\right.$$

les $f_{i-1,\lambda}$ étant de la forme (27) et ayant les propriétés énoncées dans le précédent chapitre; pour $i=1$, on retrouve alors les équations (29).

A l'aide des équations (56 *a*), (56 *b*) et (46), on établit la relation

$$(59)\qquad \int_0^\infty \int_0^\infty df(t_{m-i}, \theta_{m-i}) \int_{x_{m-i}}^\infty \pi_{m-i}\, dx_{m-i+1} = \pi^\star_{m-i-1} \frac{\varepsilon(-z_{m-i}, -z_{m-i}-\zeta_{m-i})}{p - \sum\limits_1^{m-i} z_\nu - \zeta_{m-i}} e^{-(z_{m-i}+\zeta_{m-i})\tau_{m-i}},$$

grâce à laquelle nous obtenons pour $\mathcal{J}_{m,i}$ [équ. (54)]

$$(60)\qquad \mathcal{J}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}^{\lambda, s-1}_{m-i} \mathrm{C}_{\zeta_{m-i}} \pi^\star_{m-i-1}\, \varepsilon(-z_{m-i}, -z_{m-i}-\zeta_{m-i}) \times f_{i-1,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-i} z_\nu + \zeta_{m-i}\right) e^{-(z_{m-i}+\zeta_{m-i})\tau_{m-i}}.$$

En vue de la signification de $\pi^\star_{m-i-1}$ et τ_{m-i} [équ. (51) et (56 *b*)], nous pouvons utiliser ici la formule A (58), où

$$n, \quad \mu, \quad \varphi(\xi, \zeta), \quad f_\lambda, \quad x_\nu, \quad y_n$$

seront respectivement remplacés par

$$m-i-1, \quad s-1, \quad \varepsilon(-\xi, -\zeta), \quad f_{i-1,\lambda},$$
$$x_\nu + \tau_\nu + t_\nu + \theta_\nu - x_{m-i}, \quad x_{m-i-1} + \tau_{m-i-1} + \theta_{m-i-1} - x_{m-i}.$$

En tenant compte de ce qu'en vertu de (56 *a*), (56 *b*),

$$\pi^\star_{m-i-1} \exp[-\zeta_{m-i-1}(x_{m-i-1} + \tau_{m-i-1} + \theta_{m-i-1} - x_{m-i})] = \pi_{m-i-1},$$

on obtient ainsi

$$(61)\qquad \mathcal{J}_{m,i} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}^{\lambda, s-1}_{m-i-1} \mathrm{C}_{\zeta_{m-i-1}} \pi_{m-i-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} d\zeta \left[\mathrm{K}_\xi + \mathrm{C}'_\xi(\lambda : \lambda+1; \xi)\right] \times \frac{\varepsilon(-\xi, -\zeta)}{\zeta - \xi} \left[f^{[\zeta]}_{i-1,\lambda}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y+\zeta)\right]_{y=\sum\limits_1^{m-i-1} z_\nu + \zeta_{m-i-1}}.$$

Selon A (43 *b*), on posera ici

$$(62)\quad f^{[\zeta]}_{i-1,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y+\zeta)=\frac{y-\sum_1^\lambda z_\nu}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}f_{i-1,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y)$$
$$-\frac{\zeta}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}f_{i-1,\lambda}\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right),$$

les symboles K_ξ et $(\lambda:\lambda+1;\xi)$ [A (34), (35)] étant expliqués par

$$(63)\quad \begin{cases} K_\xi f(\xi)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint f(\xi)\dfrac{d\xi}{\xi}=f(0), \\ (\lambda:\lambda+1;\xi)f_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)=f_{\lambda+1}(z_1,\ldots,z_\lambda,\xi;y) \end{cases}$$

et $f_{i-1,s}$ étant défini, en vertu de A (48), par l'équation (33).

Donc, $\mathfrak{J}_{m,i}$ peut aussi être représenté sous la forme (58); pour les $f_{i\lambda}$, nous obtenons ainsi les formules

$$(64)\quad \begin{cases} (p-y)f_{i,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y) \\ \quad =[K_\xi+C'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)]\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\dfrac{d\zeta}{\zeta-\xi}\,\dfrac{\varepsilon(-\xi,-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta} \\ \quad\times\left[\left(y-\displaystyle\sum_1^\lambda z_\nu\right)f_{i-1,\lambda}(z_1,\ldots,z_\lambda;y)\right. \\ \quad\quad\left.-\zeta f_{i-1,\lambda}\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\displaystyle\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right] \\ \quad\quad(\lambda=0,\ldots,s-1), \end{cases}$$

qui montrent que ces fonctions ont toutes les propriétés admises pour les $f_{i-1,\lambda}$.

Pour $i=m$, (58) se transforme [*voir* (56 *a*) et A (23)] en

$$(65)\quad \mathfrak{J}_{m,m-1}=C_{\zeta_0}\,e^{-px_1+\zeta_0x_1}(p-\zeta_0)f_{m-1,0}(\zeta_0);$$

comme $x_1\geqq 0$ et qu'en vertu de (27), $f_{m-1,0}(y)$ est holomorphe et borné dans le demi-plan gauche, cette expression se réduit au résidu en ζ_0, si bien qu'on a à nouveau

$$\mathfrak{J}_{m,m-1}=p\,e^{-px_1}f_{m-1,0}(0).$$

En introduisant cette expression dans (22) et en définissant les fonctions génératrices des $f_{i,\lambda}$ à nouveau par (38), on voit qu'en outre, les équations (37), (42) et (43) restent valables.

Pour les fonctions $\mathcal{F}_\lambda$ [(38)] on tire de (64) et (29) les équations intégrales

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &(p-y)\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)\\ &\quad - z\left[K_\xi + C'_\xi(\lambda:\lambda+1;\xi)\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\frac{\varepsilon(-\xi,-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}\\ &\quad\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)\right.\\ &\qquad\left.-\zeta\mathcal{F}_\lambda\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}=\delta_\lambda^0\frac{q}{q-y}\\ &\qquad\qquad(\lambda=0,\ldots,s-1).\end{aligned}\right.$$

A l'aide de (63), ces équations prennent la forme

$$(67a)\quad \left\{\begin{aligned} &(p-y)\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)\\ &\quad -\frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\frac{\varepsilon(0,-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}\\ &\quad\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\mathcal{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y)\right.\\ &\qquad\left.-\zeta\mathcal{F}_\lambda\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &\quad+\frac{z}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{d\xi}{\xi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\varepsilon(-\xi,-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}\\ &\quad\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\mathcal{F}_{\lambda+1}(z_1,\ldots,z_\lambda,\xi;y)\right.\\ &\qquad\left.-\zeta\mathcal{F}_{\lambda+1}\left(z_1,\ldots,z_\lambda,\xi;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-\xi}=\delta_\lambda^0\frac{q}{q-y}\\ &\qquad\qquad(\lambda=0,\ldots,s-1);\end{aligned}\right.$$

en outre, on déduit de (33) l'équation

$$\sum_{\lambda=0}^{s} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} \mathcal{F}_\lambda(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y) = 0, \tag{67 b}$$

qui définit $\mathcal{F}_s$.

Ainsi, le calcul de $\rho(t)$ [équ. (43)] se ramène, dans les hypothèses de ce chapitre, à la résolution du système d'équations intégrales (67 a), (67 b); on vérifie aisément que dans le cas où toutes les périodes d'orientation Θ_ν sont nulles, donc où $\varepsilon(z_1, z_2) = \varepsilon(z_1, 0) = \varepsilon(z_1)$, ces équations se confondent avec les équations (41 a), (41 b) du groupe de s lignes sans blocage.

4. Construction de fonctions de distribution à deux variables. — La méthode dont nous nous sommes servi permet aussi de construire des f. d. d. à plusieurs variables. Considérons par exemple la probabilité pour que, à un groupe de s lignes sans blocage, les durées d'attente du $m^{\text{ième}}$ et du $(m-j)^{\text{ième}}$ appel ($j \geqq 0$) soient respectivement $\leqq t_1$ et $\leqq t_2$. Cette probabilité est égale à la valeur probable de la fonction

$$\mathrm{s}(t_1 - \tau_m)\,\mathrm{s}(t_2 - \tau_{m-j}) \tag{68}$$

et la probabilité pour que les durées d'attente d'un appel quelconque et du $j^{\text{ième}}$ appel précédent soient respectivement $\leqq t_1$ et $\leqq t_2$ est [*voir* (9 a), (9 b)]

$$\rho^{(j)}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{m=j+1}^{n} \overline{\mathrm{s}(t_1 - \tau_m)\,\mathrm{s}(t_2 - \tau_{m-j})}; \tag{69}$$

en particulier, on a ainsi [*voir* (9 c)]

$$\rho^{(0)}(t_1, t_2) = \rho[\min(t_1, t_2)].$$

Au lieu de la formule (15), on a maintenant

$$\left\{\begin{aligned} &\rho^{(j)}(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1}\int_{C_2} e^{q_1 t_1 + q_2 t_2} \\ &\qquad \times \left[\frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p}\int_{K_z} \frac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^{n-j}(p-z)} \Phi^{(j)}(p, z; q_1, q_2)\, dp\, dz\right] \frac{dq_1\, dq_2}{q_1 q_2} \\ &\qquad (C_1 = C_{q_1},\ C_2 = C_{q_2}), \end{aligned}\right. \tag{70}$$

où il a été posé

$$(71)\qquad \Phi^{(j)}(p, z; q_1, q_2) = \sum_{m=j+1}^{\infty} z^{m-j-1}\,\overline{e^{-px_m-q_1\tau_m-q_2\tau_{m-j}}}.$$

Afin de calculer ces coefficients par récurrence, posons

$$(72)\qquad \begin{cases} \mathcal{J}_{m,0}^{(j)} = e^{-px_m-q_1\tau_m-q_2\tau_{m-j}}, \\ \mathcal{J}_{m,i}^{(j)} = \int_0^{\infty} df(t_{m-i})\int_{x_{m-i}}^{\infty} \mathcal{J}_{m,i-1}^{(j)}\,dx_{m-i+1} \\ \qquad (i = 1, \ldots, m-1); \end{cases}$$

comme le facteur $e^{-q_2}\,\tau_{m-j}$ ne dépend pas, pour $0 \leqq i \leqq j$, des variables d'intégration x_{m-i+1} et t_{m-i}, nous obtenons

$$(73)\qquad \mathcal{J}_{m,i}^{(j)} = \mathcal{J}_{m,i}\,e^{-q_2\tau_{m-j}} \qquad (i = 0, \ldots, j),$$

$\mathcal{J}_{m,i}$ étant donné par l'expression (25), formée avec q_1 au lieu de q. Pour $i = j$ nous avons ainsi, à l'aide de (25),

$$(74)\qquad \mathcal{J}_{m,j}^{(j)} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-j-1}^{\lambda,s-1}\,\pi_{m-j-1} \times\left(p - \sum_1^{m-j-1} z_\nu\right) f_{j,\lambda}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-j-1} z_\nu\right) e^{-q_2\tau_{m-j}}.$$

En appliquant ensuite la formule A (43 *a*), (43 *b*), où n, μ, f_λ, ζ seront remplacés respectivement par $m-j-1$, $s-1$, $\left(p - \sum_1^{m-j-1} z_\nu\right) f_{j,\lambda}$, q_2, on a

$$(75)\qquad \mathcal{J}_{m,j}^{(j)} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-j-1}^{\lambda,s-1}\,\pi_{m-j-1} \times\left[(p-y) f_{j,\lambda}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y)\right]^{[q_2]}_{y=\sum_1^{m-i-1} z_\nu}.$$

Posons maintenant, tout comme dans (25) et (33),

$$(76\,a)\qquad \mathcal{J}_{m,i}^{(j)} = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathrm{T}_{m-i-1}^{\lambda,s-1}\,\pi_{m-i-1}\left(p - \sum_1^{m-i-1} z_\nu\right) f_{i-j,\lambda}^{(j)}\left(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; \sum_1^{m-i-1} z_\nu\right)$$

$$(76\,b)\qquad f_{i-j,s}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = -\sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s} f_{i-j,\lambda}^{(j)}(z_{1'}, \ldots, z_{\lambda'}; y)$$
$$(i = j, \ldots, m-1).$$

En vertu de (75), on a pour les $f_{0,\lambda}^{(j)} = f_{0,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; p, q_1, q_2)$ les formules

$$(77)\quad \left\{ \begin{array}{l} (p-y) f_{0,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = [(p-y) f_{j,\lambda}(z_1, \ldots, z_\lambda; y)]^{[q_1]} \\ \qquad\qquad (\lambda = 0, \ldots, s-1); \end{array} \right.$$

par contre, pour $i > 0$, les $f_{i,\lambda}^{(j)} [\lambda = 0, \ldots, s-1]$ se déduisent des $f_{i-1,\lambda}^{(j)}$ au moyen des formules (34).

Pour $i = m-1$, on tire de (76 a) la relation

$$\mathfrak{I}_{m,m-1}^{(j)} = p\, e^{-px_1} f_{m-1-j,0}^{(j)}(0)$$

et de là [*voir* (71), (72), (79)]

$$(78)\quad \Phi^{(j)}(p; z; q_1, q_2) = \sum_{m=j+1}^{\infty} z^{m-j-1} \int_0^\infty \mathfrak{I}_{m,m-1}^{(j)}\, dx_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_{\nu,0}^{(j)}(0)$$
$$= \mathfrak{F}_0^{(j)}(0; p, q_1, q_2; z).$$

Pour les fonctions génératrices des $f_{\nu,\lambda}^{(j)}$, à savoir les séries

$$(79)\quad \mathfrak{F}_\lambda^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; p, q_1, q_2; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu f_{\nu,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

on obtient à nouveau les équations intégrales (41 a), (41 b), le terme non homogène $\delta_\lambda^0 \dfrac{q}{q-y}$ étant remplacé par

$$(80)\qquad (p-y) f_{0,\lambda}^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y; p, q_1, q_2),$$

et c'est à la résolution de ces équations qu'en vertu de (70) et (78), la construction de $\rho^{(j)}(t_1, t_2)$ se ramène.

Introduisons, à l'aide d'une nouvelle variable complexe z', les séries

$$(81)\quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{F}}_\lambda^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y) = \tilde{\mathfrak{F}}_\lambda^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y, p, q_1, q_2, z, z') \\ \qquad = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} z'^j \mathfrak{F}_\lambda^{(j)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y, p, q_1, q_2, z) \\ \qquad (\lambda = 0, \ldots, s); \end{array} \right.$$

ces fonctions satisfont, tout comme les $\mathfrak{F}_\lambda^{(j)}$, aux équations (41 a), (41 b), le deuxième membre (80) devant être remplacé [*voir* (77) et (38)] par

$$(82)\qquad (p-y) \sum_{j=0}^{\infty} z'^j f_{0,\lambda}^{(j)} = [(p-y)\, \mathfrak{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y, z')]^{[q_2]}.$$

Nous obtenons donc pour les $\tilde{\mathfrak{F}}_\lambda^{(1)}$ les équations

$$(83\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &(p-z-y)\,\tilde{\mathfrak{F}}_\lambda^{(1)}(z_1,\ldots,z_\lambda;y)+\frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0}\frac{\varepsilon(-\zeta)}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-\zeta}\\ &\times\left[\left(y-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda+1}^{(1)}(z_1,\ldots,z_\lambda,\zeta;y)\right.\\ &\qquad\left.-\zeta\tilde{\mathfrak{F}}_{\lambda+1}^{(1)}\left(z_1,\ldots,z_\lambda,\zeta;\sum_1^\lambda z_\nu+\zeta\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\\ &=[(p-y)\,\mathfrak{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y,z')]^{[q_2]}\\ &\qquad\qquad(\lambda=0,\ldots,s-1),\end{aligned}\right.$$

$$(83\,b)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s}\ \sum_{1',\ldots,\lambda'=1}^{s}\tilde{\mathfrak{F}}_\lambda^{(1)}(z_{1'},\ldots,z_{\lambda'};y)=0,$$

où il faut poser, en vertu de A (43 *b*),

$$(84)\quad [(p-y)\,\mathfrak{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y,z')]^{[q_2]}$$
$$=\frac{y-\sum_1^\lambda z_\nu}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-q_2}(p-y+q_2)\,\mathfrak{F}_\lambda(z_1,\ldots,z_\lambda;y-q_2,p,q_1,z')$$
$$-\frac{q_2}{y-\sum_1^\lambda z_\nu-q_2}\left(p-\sum_1^\lambda z_\nu\right)\mathfrak{F}_\lambda\left(z_1,\ldots,z_\lambda;\sum_1^\lambda z_\nu;p,q_1,z'\right).$$

Des équations (78) et (81), on tire la relation

$$(85)\qquad \sum_{j=0}^{\infty}(zz')^j\,\Phi^{(j)}(p,z;q_1,q_2)=\tilde{\mathfrak{F}}_0^{(1)}(0;p,q_1,q_2,z,zz'),$$

grâce à laquelle on obtient pour la fonction génératrice des $\rho^{(j)}(t_1,t_2)$ [(70)] la formule

$$(86)\quad \sum_{j=0}^{\infty}z'^j\rho^{(j)}(t_1,t_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}e^{q_1t_1+q_2t_2}$$
$$\times\left[\frac{(n-1)!}{\mathfrak{T}^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{K_z}\frac{e^{p\mathfrak{T}}}{z^n(p-z)}\right.$$
$$\left.\times\,\tilde{\mathfrak{F}}_0^{(1)}(0;p,q_1,q_2,z,zz')\,dp\,dz\right]\frac{dq_1\,dq_2}{q_1q_2};$$

ainsi, le calcul de cette fonction est ramené à la résolution des systèmes d'équations intégrales (41 a), (41 b) et (83 a), (83 b).

De la même façon, on obtient la fonction génératrice des probabilités

$$
(87)\quad \begin{cases} \rho^{(j_1,j_2)}(t_1, t_2, t_3) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{m=j_1+j_2+1}^{\infty} \overline{s(t_1-\tau_m)\,s(t_2-\tau_{m-j_1})\,s(t_3-\tau_{m-j_1-j_2})} \\ \qquad\qquad (j_1, j_2 \geq 0), \end{cases}
$$

à savoir, la série

$$
(88)\qquad \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} z''^{j_1} z'^{j_2} \rho^{(j_1,j_2)}(t_1, t_2, t_3),
$$

en ajoutant dans le second membre de (86) l'opération

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{+\infty+0} e^{q_3 t_3}\ldots\frac{dq_3}{q_3}
$$

et en y remplaçant $\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}$ par $\tilde{\mathcal{F}}_0^{(2)}(0; p, q_1, q_2, q_3, z, zz', zz'')$; les $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda^{(2)}$ satisfont aux équations (41 a), (41 b) avec, pour deuxième membre,

$$
\left[(p-y)\tilde{\mathcal{F}}_\lambda^{(1)}(z_1, \ldots, z_\lambda; y, p, q_1, q_2, z', z'')\right]^{[q_3]}.
$$

Ces formules s'étendent sans modification aux fonctions génératrices des $\rho^{(j_1,\ldots,j_{\nu-1})}(t_1, \ldots, t_\nu)\,(\nu = 1, \ldots)$; de même, on peut démontrer qu'elles restent valables pour les groupes de lignes avec blocage temporaire, à condition de remplacer les s opérateurs linéaires qui figurent dans les premiers membres des systèmes (41 a), (83 a), etc., par ceux de (67 a).

Exemples. — Dans différentes hypothèses sur la fonction caractéristique $\varepsilon(z)$, la fonction $\mathcal{F}_0(0; p, q, z)$ [7] a été calculée précédemment [*loc. cit.* [1] (2e Partie)]; pour cette raison, nous nous bornons ici à construire, à titre d'exemple, les fonctions $\mathcal{F}_0(y)$ et $\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(y)$ pour $s = 1$ et $\varepsilon(z)$ arbitraire.

---

[7] Par exemple, on a pour $t_1 = \ldots = t_n = 1$, donc pour $\varepsilon(z) = e^z$,

$$
\mathcal{F}_0(0; p, q, z) = \frac{1}{(p-q)^s - z^s e^{-q}}\,\frac{p^s - z^s}{p - z}\prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{y_\nu}{y_\nu - q},
$$

où $y_0, \ldots, y_{s-1}$ désignent les s racines de l'équation $(p-y)^s = z^s e^{-y}$ qui sont de la forme $p + O(|z|)$ pour $z \to 0$ [*loc. cit.* [1], équ. (83), (84)].

Pour $s = 1$, (41 *b*) et (41 *a*) donnent respectivement

$$\mathcal{F}_1(y) = -\mathcal{F}_0(y)$$

et

$$(89)\quad \begin{cases} (p - z - y)\mathcal{F}_0(y) - \dfrac{z}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon(-\zeta)}{y-\zeta}[y\mathcal{F}_0(y) - \zeta\mathcal{F}_0(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta} = \dfrac{q}{q-y} \\ \qquad [\mathrm{R}(p),\ \mathrm{R}(q) > 0]. \end{cases}$$

Selon (27) et (33), $\mathcal{F}_0(y)$ est, pour $|z|$ suffisamment petit, holomorphe et borné (à un pôle de premier ordre en $y = q$ près) à l'intérieur du cercle $|p - y| = \frac{|z|}{c_1}$. Prenons maintenant pour $y (\neq q)$ un point situé dans le demi-plan droit et en dehors de ce cercle; comme

$$(90)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{y\,\varepsilon(-\zeta)}{\zeta(y-\zeta)}\,d\zeta = \varepsilon(-y) - 1 \qquad [\text{pour } \mathrm{R}(y) > 0],$$

(89) prend alors la forme

$$(91)\quad \begin{cases} \big(p - y - z\,\varepsilon(-y)\big)\mathcal{F}_0(y) = -\dfrac{z}{2\pi i}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \varepsilon(-\zeta)\mathcal{F}_0(\zeta)\frac{d\zeta}{y-\zeta} + \dfrac{q}{q-y} \\ \qquad [\mathrm{R}(y - \zeta) > 0]. \end{cases}$$

Or, le deuxième membre de cette équation est holomorphe dans le

---

Pour $\varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}$, on a

$$\mathcal{F}_0(0;\, p,\, q,\, z) = \frac{1}{p-z} + \frac{q}{p-z}\,\frac{q(p-y_0) + sp - sz - sy_0}{(p-q)(q+s) - sz}$$
$$\times \frac{1}{s}\left[\sum_{\mu=0}^{s-1} z^{-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(p - z + \nu)\left(\mathrm{C}_{s-1}^{\mu} - \frac{p-y_0}{z}\,\frac{s-1}{s}\,\mathrm{C}_{s-2}^{\mu}\right)\right]^{-1},$$

où

$$y_0 = \frac{p-s}{2} + \sqrt{\left(\frac{p+s}{2}\right)^2 - sz} = p - \frac{s}{p+s}z + \dots$$

[*loc. cit.* (1), équ. (94)].

Notons qu'entre les $\mathcal{F}_\lambda$ et les fonctions $\mathrm{B}_{\lambda,0}$ et B_λ utilisées *loc. cit.* (1) [par exemple équ. (57) et (59)], la relation suivante a lieu

$$\mathcal{F}_\lambda(z_1, \dots, z_\lambda;\, y,\, p,\, q,\, z) = (-1)^\lambda \frac{q}{s}\left[\frac{1}{q-y}\mathrm{B}_{\lambda,0}\left(\frac{z_1}{s}, \dots, \frac{z_\lambda}{s};\, \frac{p}{s},\, \frac{p-q}{s};\, \frac{z}{s}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{z}\mathrm{B}_\lambda\left(\frac{z_1}{s}, \dots, \frac{z_\lambda}{s};\, \frac{p-y}{s};\, \frac{p}{s},\, \frac{p-q}{s},\, \frac{z}{s}\right)\right].$$
$$(\lambda = 0, \dots, s).$$

demi-plan droit (sauf en $y = q$), donc holomorphe à l'intérieur du cercle mentionné de centre p.

Nous en concluons que dans ce cercle, $\mathcal{F}_0(y)$ a comme seule singularité un pôle de premier ordre en $y = y_0(p, z)$, où $y_0(p, z)$ désigne la seule racine de l'équation

$$p - y - z\,\varepsilon(-y) = 0, \tag{92 a}$$

telle que

$$y_0(p, z) = p + O(|z|) \quad \text{pour} \quad z \to 0. \tag{92 b}$$

La fonction $\mathcal{F}_0(y)$ est donc holomorphe dans le plan fermé, à l'exclusion de pôles de premier ordre en y_0 et q, et à l'infini elle s'annule [*voir* (40)] comme $\frac{1}{y^2}$; par conséquent, c'est une fonction rationnelle de la forme $c\left(\frac{1}{q-y} - \frac{1}{y_0 - y}\right)$.

Cette expression doit satisfaire, identiquement en y, à l'équation (91), ce qui permet de déterminer la constante c; on obtient ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}_0(y) = \mathcal{F}_0(y; p, q, z) = \frac{q}{p - q - z\,\varepsilon(-q)}\left(\frac{1}{q-y} - \frac{1}{y_0(p, z) - y}\right)\\ &\qquad [s = 1;\ R(p),\ R(q) > 0]. \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Passons maintenant au calcul de $\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(y)$; pour $s = 1$, les équations (83 b), (83 a), (84), (93) donnent respectivement

$$\tilde{\mathcal{F}}_1^{(1)}(y) = -\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(y)$$

et

$$\begin{aligned} (p - z - y)\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(y) - \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty-0}^{i\infty-0} \frac{\varepsilon(-\zeta)}{y-\zeta}\left[y\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(y) - \zeta\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ = \frac{y}{y - q_2}(p - y + q_2)\mathcal{F}_0(y - q_2; p, q_1, z') - \frac{q_2}{y - q_2}p\,\mathcal{F}_0(0; p, q_1, z') \\ = \frac{1}{p - q_1 - z'\,\varepsilon(-q_1)}\left[\frac{(p - q_1)(q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 - y}\right. \\ \left. - \frac{q_1}{y_0}\,\frac{(p - y_0)(y_0 + q_2)}{y_0 + q_2 - y}\right] \\ \big(y_0 = y_0(p, z')\big). \end{aligned} \tag{94}$$

Le dernier membre de cette équation est une fonction rationnelle de y dont les pôles $q_1 + q_2$ et $y_0(z') + q_2$ sont situés dans le demi-plan droit; donc sa solution se déduit immédiatement de celle [(93)] de l'équation (89) et l'on obtient ainsi

$$(95)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{F}_0^{(1)}(y;p,q_1,q_2,z,z') \\ &= \frac{1}{p-q_1-z'\varepsilon(-q_1)} \\ &\times\left[\frac{(p-q_1)(q_1+q_2)}{p-q_1-q_2-z\varepsilon(-q_1-q_2)}\left(\frac{1}{q_1+q_2-y}-\frac{1}{y_0(z)-y}\right)\right. \\ &\quad -\frac{q_1}{y_0(z')}\,\frac{\big(p-y_0(z')\big)\big(y_0(z')+q_2\big)}{p-y_0(z')-q_2-z\varepsilon\big(-y_0(z')-q_2\big)} \\ &\quad\left.\times\left(\frac{1}{y_0(z')+q_2-y}-\frac{1}{y_0(z)-y}\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans les dernières formules figure la racine $y_0(p, z)$ de l'équation ($92\,a$). Pour $p=z$, cette équation possède évidemment la racine $y=0$, et d'autre part, $y_0(z, z)$ est la seule racine de ($92\,a$) qui a la propriété ($92\,b$), donc qui est $O(|z|)$ pour $z\to 0$; par conséquent, on a, pour $|z|$ suffisamment petit, la relation

$$(96)\qquad y_0(z, z)=0.$$

Afin de trouver les limites de validité de (96), formons l'intersection de la variété de ramification des racines de ($92\,a$) avec la variété $p=z$, $y(z, z)=0$; cette intersection est donnée par l'équation

$$(97)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\big(p-y-z\varepsilon(-y)\big)\right]_{p=z,\,y=0}=-1+z\varepsilon'(0)=0,$$

dont la racine [*voir* ($7\,b$)] est $z=1$.

Donc, pour $0\leqq z\leqq 1$, le prolongement analytique de $y_0(p, z)$ satisfait à (96); en outre, on tire de ($92\,a$) et (96) le développement

$$(98)\qquad y_0(p,z)=\frac{1}{1-z}(p-z)+a_2(z)(p-z)^2+\ldots\qquad (0\leqq z<1),$$

qui montre que pour $0\leqq z<1$, $\mathfrak{F}_0(0)$ et $\mathfrak{F}_0^{(1)}(0)$, considérés en tant que fonctions de p, ont des pôles de premier ordre en $p=z$.

Désignons maintenant de manière générale par

$$(99)\qquad \eta=n\int_0^\infty t\,df(t)\times\frac{1}{s\mathfrak{T}}=\frac{n}{s\mathfrak{T}}$$

le degré d'occupation du groupe de s lignes, et par

$$(100)\qquad \varphi_{-1}(q, \eta) = \lim_{p=\eta} (p-\eta)\mathcal{F}_0(0; p, q, \eta),$$

$$(101)\qquad \varphi_{-1}^{(1)}(q_1, q_2; \eta, z) = \lim_{p=\eta} (p-\eta)\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(0; p, q_1, q_2, \eta, \eta z),$$

les résidus de $\mathcal{F}_0(0)$ et $\tilde{\mathcal{F}}_0^{(1)}(0)$ pour $p=\eta$, où $0 \leqq \eta < 1$.

On montre (*voir* l'Introduction) que dans le cas présent, où $s=1$, les expressions (15) et (86) tendent, dans l'hypothèse $\frac{n}{\mathcal{E}} = \text{const} < 1$, pour $n \to \infty$ respectivement vers

$$(102)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt}\varphi_{-1}(q, \eta)\frac{dq}{q} \qquad (0 \leqq \eta < 1),$$

et

$$(103)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{q_1t_1+q_2t_2}\varphi_{-1}^{(1)}(q_1, q_2; \eta, z)\frac{dq_1\,dq_2}{q_1 q_2} \qquad (0 \leqq \eta < 1);$$

par contre, pour $\eta \geqq 1$, (15) et (86) tendent vers zéro.

Pour les résidus (100) et (101) on obtient de (93) et (95), à l'aide de (98), les formules

$$(104)\qquad \varphi_{-1}(q, \eta) = (1-\eta)\frac{q}{q-\eta+\eta\,\varepsilon(-q)};$$

$$(105)\qquad \varphi_{-1}^{(1)}(q_1, q_2; \eta, z) = \frac{1-\eta}{q_1-\eta+\eta z\,\varepsilon(-q_1)}\left[\frac{(\eta-q_1)(q_1+q_2)}{\eta-q_1-q_2-\eta\,\varepsilon(-q_1-q_2)} - \frac{q_1}{y_0}\,\frac{(\eta-y_0)(y_0+q_2)}{\eta-y_0-q_2-\eta\,\varepsilon(-y_0-q_2)}\right],$$
$$[y_0 = y_0(\eta, \eta z)].$$

Admettons par exemple comme f. d. d. des durées de communication la fonction

$$(106)\qquad f(t) = 1 - e^{-t},$$

qui est normée selon (6) et dont la fonction caractéristique [(7 a)] est

$$(107)\qquad \varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Pour cette valeur de $\varepsilon(z)$, on tire de (104) et (105) les expressions

$$(108)\qquad \varphi_{-1}(q, \eta) = \frac{(1-\eta)(1+q)}{1+q-\eta},$$

$$(109\,a)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_{-1}^{(1)}(q_1, q_2, \eta, z) &= \frac{(1-\eta)(1+q_1)}{(q_1-\eta)(1+q_1)+\eta z} \\ &\quad\times\left[\frac{(q_1-\eta)(1+q_1+q_2)}{1+q_1+q_2-\eta} - \frac{q_1}{y_0}\,\frac{(y_0-\eta)(1+y_0+q_2)}{1+y_0+q_2-\eta}\right], \\ y_0 &= \frac{\eta-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta+1}{2}\right)^2 - \eta z}, \end{aligned}\right.$$

que l'on substituera dans (102) et (103).

En calculant ces intégrales au moyen du théorème de Cauchy, on obtient les formules

$$(109\,b)\qquad \lim_{n=\infty} \rho(t;\,\eta;\,n) = 1 - \eta\, e^{-(1-\eta)t} \qquad (s=1)$$

et

$$(110\,a)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{L}(t_1, t_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \lim_{n=\infty} \rho^{(j)}(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{1-z}\Bigg[1 - \eta\, e^{-(1-\eta)t_2} - \frac{(1-\eta)\eta z}{d(z)} \\ &\qquad \times \exp\left[-\frac{1-\eta}{2}(t_1+t_2) - \frac{d(z)}{2}(t_1-t_2)\right] \\ &\qquad + \frac{1-\eta}{4\,d(z)}\big(1+\eta-d(z)\big)^2 \\ &\qquad\qquad \times \exp\left[-\frac{1-\eta+d(z)}{2}(t_1+t_2)\right]\Bigg] \\ &\qquad \text{pour} \quad t_1 \geqq t_2, \end{aligned}\right.$$

$$(110\,b)\qquad \mathcal{L}(t_2, t_1) = \mathcal{L}(t_1, t_2) \qquad (|z|<1,\ s=1);$$

pour abréger, on a posé ici

$$(110\,c)\qquad d(z) = \sqrt{(1+\eta)^2 - 4\eta z} = 1 + \eta - 2\eta z + \ldots.$$

5. Résolution des équations intégrales du groupe avec blocage pour

$$\varepsilon(z_1, z_2) = \frac{1}{1-z_1}\,\delta(z_2).$$

— Dans le cas où, pour un système avec blocage, la répartition des Θ_ν est indépendante de celle des T_ν, la f. d. d. $f(t, \theta)$ sera égale au produit de la f. d. d. $f(t)$ des durées de communication et de la f. d. d. $g(\theta)$ des périodes d'orientation, donc

$$(111)\qquad f(t, \theta) = f(t)\, g(\theta),$$

et pour sa fonction caractéristique $\varepsilon(z_1, z_2)$ [équ. (46)] on aura par conséquent

$$(112)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon(z_1, z_2) = \varepsilon(z_1)\,\delta(z_2) \\ &\text{où}\quad \varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,df(t), \qquad \delta(z) = \int_0^\infty e^{z\theta}\,dg(\theta). \end{aligned} \right.$$

Pour tout $\varepsilon(z)$ rationnel, $\delta(z)$ étant fixé de manière arbitraire, les solutions des équations (67 *a*), (67 *b*) peuvent être exprimées sous forme finie en adjoignant certaines solutions d'une équation transcendante.

Nous montrerons ceci sur l'exemple de la f. d. d.

$$(113)\qquad f(t, \theta) = (1 - e^{-t})\,g(\theta),$$

dont la fonction caractéristique est

$$(114)\qquad \varepsilon(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - z_1}\int_0^\infty e^{z_2\theta}\,dg(\theta) = \frac{1}{1 - z_1}\,\delta(z_2).$$

Introduisons donc la fonction $\varepsilon(-\xi, -\zeta) = \frac{1}{1+\xi}\,\delta(-\zeta)$ dans (67 *a*); comme $\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ est holomorphe et borné pour $R(z_1) \leqq 0, \ldots, R(z_\lambda) \leqq 0$ $\left[\text{de même que les } f_{i,\lambda}\ [\text{équ. } (27), (28)]\right]$, l'intégrale $\int \ldots d\xi$ qui figure dans (67 *a*) se réduit alors au résidu en $\xi = -1$. En y substituant en outre $z_1 = \ldots = z_{s-1} = -1$ et en posant

$$(115)\qquad \mathcal{F}_\lambda(-1, \ldots, -1; y) = f_\lambda(y) \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

nous obtenons

$$(116)\quad \begin{aligned} (p-y)f_\lambda(y) &- \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}\left[(y+\lambda)f_\lambda(y) - \zeta f_\lambda(\zeta-\lambda)\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &- \frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}\left[(y+\lambda)f_{\lambda+1}(y) - \zeta f_{\lambda+1}(\zeta-\lambda)\right]\frac{d\zeta}{\zeta+1} \\ &= \delta_\lambda^0\,\frac{q}{q-y}. \end{aligned}$$

Pour obtenir maintenant le prolongement analytique des $f_\lambda(y)$ dans le voisinage du point $y = p$, prenons pour y un nombre différent de p et q, de partie réelle positive, $|z|$ étant pris suffisamment petit [*voir* (39)] pour que les séries (38) convergent. On a alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} \frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{\delta(-y-\lambda)}{y+\lambda} \qquad [R(y+\lambda-\zeta) > 0],$$

de sorte que les dernières équations prennent la forme

$$(117\,a)\qquad \bigl(p-y-z\,\delta(-y-\lambda)\bigr)f_\lambda(y)-z\,\delta(-y-\lambda)\frac{y+\lambda}{y+\lambda+1}f_{\lambda+1}(y)$$
$$=-\frac{z}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}$$
$$\times\left[f_\lambda(\zeta-\lambda)+\frac{\zeta}{\zeta+1}f_{\lambda+1}(\zeta-\lambda)\right]d\zeta+\delta_\lambda^0\,\frac{q}{q-y}$$
$$(\lambda=0,\ \ldots,\ s-1),$$

et en outre, on tire de ($67\,b$) à l'aide de la notation (115) l'équation

$$(117\,b)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s}C_s^\lambda f_\lambda(y)=0.$$

Les coefficients des formes linéaires en $f_\lambda(y)$ qui figurent dans les premiers membres de ces $s+1$ équations et dont le déterminant est égal à

$$(118)\qquad D(y)=D_s(y;\,p,\,z)$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{s}C_s^\lambda(y+\lambda)\prod_{\nu=0}^{\lambda-1}\left(\frac{p-y}{z}-\delta(-y-\nu)\right)\prod_{\nu=\lambda}^{s-1}\delta(-y-\nu),$$

sont holomorphes pour $R(y)>0$, et le même vaut pour les deuxièmes membres (à l'exclusion du pôle de premier ordre $y=q$).

Par conséquent, les produits

$$(119)\qquad D(y)f_\lambda(y)\qquad(\lambda=0,\ \ldots,\ s),$$

sont eux aussi holomorphes pour $R(y)>0$, sauf au pôle $y=q$.

L'expression (118) met en évidence que l'équation

$$(120)\qquad D_s(y;\,p,\,z)=0$$

possède exactement s racines (en général simples)

$$(121)\qquad y_\nu(p,\,z)\qquad(\nu=0,\ \ldots,\ s-1)$$

qui sont, pour $|z|\to 0$, de la forme $p+O(|z|)$.

Donc, les seules singularités possibles des $f_\lambda(y)$ dans le cercle de rayon $\frac{|z|}{c_1}$ [équ. (39)] autour du point p sont des pôles simples en $y_0(p,\,z),\ \ldots,\ y_{s-1}(p,\,z)$. Comme d'autre part, la seule singularité des fonctions f_λ, à l'extérieur de ce cercle, est le pôle de premier ordre q et qu'elles s'annulent à l'infini comme $\frac{1}{y^2}$ [équ. (40)], on a nécessairement

$$f_\lambda(y)=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{c_{\lambda\nu}(p,\,z;\,q)}{y_\nu(p,\,z)-y}\qquad(\lambda=0,\,\ldots,\,s),\tag{122}$$

avec

$$\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda\nu}=0\qquad(\lambda=0,\,\ldots,\,s);\tag{123}$$

nous avons posé ici pour le moment

$$q=y_s.\tag{124}$$

Détermination des coefficients $c_{\lambda\nu}$. — Portons les expressions (122) dans les équations (116); les deux intégrales qui y figurent se réduisent alors aux résidus en $\zeta=y_\nu+\lambda$, à savoir

$$\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0}\frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}\left(\frac{y+\lambda}{y_\nu-y}-\frac{\zeta}{y_\nu+\lambda-\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda\nu}\frac{\delta(-y_\nu-\lambda)}{y_\nu-y}$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda+1,\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\delta(-\zeta)}{y+\lambda-\zeta}\left(\frac{y+\lambda}{y_\nu-y}-\frac{\zeta}{y_\nu+\lambda-\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta+1}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda+1,\nu}\frac{\delta(-y_\nu-\lambda)}{y_\nu-y}\,\frac{y_\nu+\lambda}{y_\nu+\lambda+1},$$

et les équations (116), (117 *b*) prennent ainsi la forme

$$(125\,a)\quad\left\{\begin{aligned}&(p-y)\sum_{\nu=0}^{s}\frac{c_{\lambda\nu}}{y_\nu-y}-z\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda\nu}\frac{\delta(-z_\nu-\lambda)}{y_\nu-y}\\&\qquad-z\sum_{\nu=0}^{s}c_{\lambda+1,\nu}\frac{\delta(-y_\nu-\lambda)}{y_\nu-y}\,\frac{y_\nu+\lambda}{y_\nu+\lambda+1}=\delta_\lambda^0\,\frac{q}{q-y}\\&\qquad(\lambda=0,\,\ldots,\,s-1),\end{aligned}\right.$$

$$\sum_{\nu=0}^{s}\frac{1}{y_\nu-y}\sum_{\lambda=0}^{s}C_s^\lambda c_{\lambda\nu}=0.\tag{125 b}$$

En égalant, dans les deux membres de ces identités en y, les résidus en $y = y_\nu$, on obtient les équations

$$(126\,a)\quad \begin{cases} \left(p - y_\nu - z\,\delta(-y_\nu - \lambda)\right)c_{\lambda\nu} - z\,\delta(-y_\nu - \lambda)\dfrac{y_\nu + \lambda}{y_\nu + \lambda + 1}c_{\lambda+1,\nu} = \delta_\lambda^0\,\delta_\nu^s\,q \\ (\nu = 0, \ldots, s;\ \lambda = 0, \ldots, s-1) \end{cases}$$

et

$$(126\,b)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s} C_s^\lambda c_{\lambda\nu} = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, s).$$

En résolvant ces équations pour $\nu = s$, donc $y_s = q$, on obtient les relations

$$(127)\quad \begin{cases} c_{\lambda s} = \dfrac{q}{p - q - z\,\delta(-q)}\left[\delta_\lambda^0 - \dfrac{q+\lambda}{D(q)}\displaystyle\prod_{\tau=0}^{\lambda-1}\left(\frac{p-q}{z} - \delta(-q-\tau)\right) \times \prod_{\tau=\lambda}^{s-1}\delta(-q-\tau)\right] \\ (\lambda = 0, \ldots, s), \end{cases}$$

qui, avec la notation

$$(128)\quad \begin{cases} d_\lambda(y) = (y+\lambda)\displaystyle\prod_{\tau=0}^{\lambda-1}\left(\frac{p-y}{z} - \delta(-y-\tau)\right)\prod_{\tau=\lambda}^{s-1}\delta(-y-\tau) \\ (\lambda = 0, \ldots, s), \end{cases}$$

prennent la forme

$$(129)\qquad c_{\lambda s} = \frac{q}{p - q - z\,\delta(-q)}\left[\delta_\lambda^0 - \frac{d_\lambda(q)}{D(q)}\right] \qquad (\lambda = 0, \ldots, s).$$

Pour chacune des valeurs $\nu = 0, \ldots, s-1$, le déterminant $D(y_\nu)$ des équations (126 a), (126 b) s'annule; on a alors, en désignant par x_ν un facteur commun des $c_{\lambda\nu}$,

$$(130)\qquad c_{\lambda\nu} = d_\lambda(y_\nu)x_\nu \qquad (\lambda = 0, \ldots, s;\ \nu = 0, \ldots, s-1).$$

En substituant ces expressions dans (123), on obtient les $s+1$ équations

$$(131)\qquad \sum_{\nu=0}^{s-1} d_\lambda(y_\nu)x_\nu + \frac{q}{p - q - z\,\delta(-q)}\left[\delta_\lambda^0 - \frac{d_\lambda(q)}{D(q)}\right] = 0 \qquad (\lambda = 0, \ldots, s),$$

dont les s premières permettent de calculer les x_ν; en ajoutant toutes ces équations, multipliées respectivement par C_s^λ, et tenant compte de l'identité $\sum_{\lambda=0}^{s} d_\lambda(y) = D(y)$ [équ. (118) et (128)], on a $0 = 0$, ce qui montre que la dernière de ces équations est une suite des autres.

Calcul de $\Phi(p, z; q)$. — Pour la fonction $\mathcal{F}_0(0; p, q, z)$ qui figure dans la formule (43) de $\rho(t)$, on obtient [équ. (122), (124), (129), (130)]

$$\begin{aligned}(132)\qquad \mathcal{F}_0(0) = f_0(0) &= \sum_{\nu=0}^{s} \frac{c_{0\nu}}{y_\nu}\\ &= \sum_{\nu=0}^{s-1} \frac{d_0(y_\nu)}{y_\nu} x_\nu + \frac{1}{p - q - z\,\delta(-q)}\left[1 - \frac{d_0(q)}{D(q)}\right].\end{aligned}$$

Or,

$$(133)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

désignant un système de n équations linéaires, on peut exprimer une fonction linéaire des x_ν

$$(134)\qquad c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu,$$

de la manière suivante

$$(135)\qquad \left\{\begin{aligned} &c_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu = \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_2},\\ &\text{où}\quad \mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ b_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{D}_2 = |a_{\mu\nu}|_{\mu,\nu=1,\ldots,n}. \end{aligned}\right.$$

Grâce à cette formule, nous tirons des équations (131) pour la fonction (132) l'expression

$$(136)\qquad \Phi(p, z; q) = \mathcal{F}_0(0; p, q, z) = \frac{1}{p - q - z\,\delta(-q)}\,\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_2} \quad (^8),$$

---

(8) La fonction $\mathcal{F}_0(y)$ étant ainsi déterminée, on obtiendra $\mathcal{F}_1(z_1; y)$, dans l'hypothèse (114), en posant dans les équations (67 a), (67 b) $z_2 = \ldots = z_{s-1} = -1$. En procédant comme ci-dessus, on voit d'abord que les produits [*voir* (118)]

$$D_s(y; p, z)\, D_{s-1}(y - z_1; p - z_1, z)\, \mathcal{F}_\lambda(z_1, -1, \ldots, -1; y) \qquad (\lambda = 1, \ldots, s)$$

où l'on a posé

$$(137)\quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{d_0(q)}{D(q)} & \dfrac{d_0(y_0)}{y_0} & \cdots & \dfrac{d_0(y_{s-1})}{y_{s-1}} \\ q - q\dfrac{d_0(q)}{D(q)} & d_0(y_0) & \cdots & d_0(y_{s-1}) \\ -q\dfrac{d_1(q)}{D(q)} & d_1(y_0) & \cdots & d_1(y_{s-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -q\dfrac{d_{s-1}(q)}{D(q)} & d_{s-1}(y_0) & \cdots & d_{s-1}(y_{s-1}) \end{vmatrix}, \\ \mathcal{D}_2 = | d_\mu(y_\nu) |_{\mu,\nu=0,\ldots,s-1}. \end{cases}$$

Généralisations. — La méthode utilisée pour trouver $\Phi(p, z; q)$ dans l'hypothèse (114), s'étend aisément au cas où $\varepsilon(z)$ [équ. 112)] est une fonction rationnelle à $n > 1$ pôles simples, donc

$$\varepsilon(z_1, z_2) = \varepsilon(z_1)\delta(z_2) = \delta(z_2)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{\alpha_\nu - z} \qquad \left(\sum_{1}^{n}\frac{A_\nu}{\alpha_\nu} = 1\,;\ R(\alpha_1),\ \ldots,\ R(\alpha_n) > 0\right).$$

En substituant alors dans la $\lambda^{\text{ième}}$ équation ($67a$) pour $z_1, \ldots, z_\lambda$ toutes les $C^\lambda_{n+\lambda-1}$ combinaisons λ à λ avec répétition $-\alpha_{1*}, \ldots, -\alpha_{\lambda*}$, des quantités $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$, on obtiendra $\sum_{\lambda=0}^{s-1} C^\lambda_{n+\lambda-1} = C^{s-1}_{n+s-1}$ équations pour les fonctions $\mathcal{F}_\lambda(-\alpha_{1*}, \ldots, -\alpha_{\lambda*})$ $(\lambda = 0, \ldots, s-1)$.

Ce sont des fonctions rationnelles de y qui ont pour pôles, outre q, les C^{s-1}_{n+s-1} zéros particuliers d'un déterminant $D_s\big(y;\ \varepsilon(z)\big)$, généralisation de $D_s(y)$ qui sont de la forme $p + O(|z|)$ pour $z \to 0$; elles s'obtiennent de la même manière que dans notre exemple, de sorte que, comme précédemment, Φ peut être exprimé au moyen des zéros mentionnés. Des formules qu'on trouve ainsi, celles qui sont valables dans le cas où $\varepsilon(z)$ a des pôles multiples, se déduisent par un passage à la limite.

---

sont holomorphes dans le cercle $|p - y| < \dfrac{z}{c_1}$ [équ. (39)]. Donc, les fonctions $\mathcal{F}_\lambda(z_1, -1, \ldots, -1; y)$, et en particulier $\mathcal{F}_1(z_1; y)$, sont rationnelles en y; comme pôles elles ont, outre q, les zéros particuliers de $D_s(y)$ et de $D_{s-1}(y - z_1; p - z_1, z)$ qui sont, pour $z \to 0$, de la forme $p + O(|z|)$, et leurs résidus se calculent comme les $c_{\lambda\mu}$. En continuant ainsi, on obtient tous les $\mathcal{F}_\lambda(z_1, \ldots, z_\lambda; y)$ sous forme de fonctions rationnelles de y.

Passage à $n = \infty$ (état d'équilibre statistique). — On voit aisément que pour $p = z$, $y = 0$, la fonction $D(y)$ [équ. (118)] s'annule, identiquement en z; donc, parmi les s racines (121) de l'équation (120), il en est une, $y_0(p, z)$, qui satisfait, pour $|z|$ suffisamment petit, à l'équation

$$y_0(z, z) = 0. \tag{138}$$

L'intersection de la variété de ramification des racines de (120) avec la variété $p = z$, $y_0(z, z) = 0$ est déterminée par l'équation

$$D_y(0; z, z) = 0, \tag{139}$$

où

$$\begin{aligned} D_y(0; z, z) &= \left[\frac{\partial D_s(y; z, z)}{\partial y}\right]_{y=0} \\ &= s\left(-\frac{1}{z} + \delta'(0)\right)\sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda}\prod_{\nu=1}^{\lambda}\big(1-\delta(-\nu)\big)\prod_{\nu=\lambda+1}^{s-1}\delta(-\nu) \\ &\quad + \prod_{\nu=1}^{s-1}\delta(-\nu). \end{aligned} \tag{140}$$

Pour la racine de (139) que nous désignons par $C_s[\delta(z)]$, on obtient

$$\begin{aligned} C_s[\delta(z)] &= s\sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda}\prod_{\nu=1}^{\lambda}\big(1-\delta(-\nu)\big)\prod_{\nu=\lambda+1}^{s-1}\delta(-\nu) \\ &\times\left[s\,\delta'(0)\sum_{\lambda=0}^{s-1} C_{s-1}^{\lambda}\prod_{\nu=1}^{\lambda}\big(1-\delta(-\nu)\big)\prod_{\nu=\lambda+1}^{s-1}\delta(-\nu) + \prod_{\nu=1}^{s-1}\delta(-\nu)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{141}$$

Donc, pour $0 \leqq z \leqq C_s$ ainsi que dans un certain voisinage du segment $0 \leqq z < C_s$, le prolongement analytique de $y_0(p, z)$ satisfait à (138); mais pour $z > C_s$, cette équation n'est plus valable.

Pour $0 \leqq z < C_s$, $p = z$, les éléments $d_\mu(y_0)$ de la première colonne du déterminant $\mathcal{D}_2$ (137) s'annulent, en vertu de (138), de sorte que $\Phi(p, z; q)$, considéré en tant que fonction de p, a un pôle en $p = z$.

Pour obtenir le résidu

$$\varphi_{-1}(q, z) = [(p - z)\Phi(p, z; q)]_{p=z} \quad (0 \leqq z < C_s) \tag{142}$$

on remplacera, dans le dénominateur $\mathcal{D}_2$ de Φ [équ. (136), (137)],

$d_\mu(y_0)$ par $\left[\frac{\partial}{\partial p} d_\mu[y_0(p, z)]\right]_{p=z}$ et posera partout ailleurs $p = z$; ainsi, il vient

$$\varphi_{-1}(q, z) = \frac{qz\,D_y(0; z, z)}{z - q - z\,\delta(-q)}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{143}$$

où $D_y(0; z, z)$ est donné par (140) et où nous avons posé

$$\tag{144} \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 &= \left| -\delta_\mu^0 + \frac{d_\mu(q)}{D(q)},\ d_\mu[y_1(z, z)],\ \ldots,\ d_\mu[y_{s-1}(z, z)] \right|_{\mu=0,\ldots,s-1}, \\ \Delta_2 &= \left| \quad c_\mu, \qquad d_\mu[y_1(z, z)],\ \ldots,\ d_\mu[y_{s-1}(z, z)] \right|_{\mu=0,\ldots,s-1}, \\ c_\mu &= -\delta_\mu^0 s \sum_{\nu=0}^{s-1} C_{s-1}^\nu \prod_{\nu=1}^{\lambda}\big(1 - \delta(-\nu)\big) \prod_{\nu=\lambda+1}^{s-1} \delta(-\nu) \\ &\quad + \mu \prod_{\nu=1}^{\lambda-1}\big(1 - \delta(-\nu)\big) \prod_{\nu=\lambda}^{s-1} \delta(-\nu) \\ &\qquad (\mu = 0, \ldots, s-1). \end{aligned} \right.$$

Pour $\frac{n}{\mathfrak{T}} = s\eta =$ const., (43) prend à la limite la forme

$$\tag{145} \begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \rho(t; \eta, n) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-i\infty+0}^{i\infty+0} e^{qt} \varphi_{-1}(q, s\eta)\,\frac{dq}{q} & \big(\text{pour } 0 \leqq s\eta \leqq C_s[\delta(z)]\big), \\ 0 & \big(\text{pour } \quad s\eta \geqq C_s[\delta(z)]\big). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cette formule sera démontrée ailleurs; elle montre qu'en état d'équilibre statistique, le degré d'occupation η d'un groupe de s lignes avec blocage temporaire ne peut dépasser une limite de saturation

$$\frac{1}{s} C_s[\delta(z)] < 1$$

qui, dans l'hypothèse (113), est donnée par l'expression (141), divisée par s.