FÉLIX POLLACZEK

Sur l'application de la théorie des fonctions au calcul de certaines probabilités continues utilisées dans la théorie des réseaux téléphoniques

Annales de l'I. H. P., tome 10, nº 1 (1946), p. 1-55

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1946__10_1_1_0>

Sur l'application de la théorie des fonctions au calcul de certaines probabilités continues utilisées dans la théorie des réseaux téléphoniques

par

Félix POLLACZEK.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DES MÉTHODES DE CALCUL.

1. **Introduction; travaux antérieurs.** — Dans ce qui suit, nous exposerons les méthodes de calcul empruntées à la théorie des fonctions, que nous avons introduites pour déterminer effectivement certaines probabilités continues qui jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'encombrement des réseaux téléphoniques.

Cependant, avant d'entrer dans le détail de ces raisonnements, nous avons cru utile de donner un bref exposé de la manière, bien différente de la nôtre, dont ces questions ont été traitées jusqu'à présent.

Rappelons tout d'abord que, pour des raisons d'économie, le nombre des éléments de jonction employés pour acheminer, par exemple entre deux centraux, un trafic téléphonique donné, est déterminé d'après des raisonnements de probabilité. Depuis une quarantaine d'années environ, les problèmes de théorie des probabilités qui se sont ainsi posés ont été étudiés par les techniciens; en premier lieu, il faut citer dans ce domaine A. K. Erlang, ingénieur danois, qui a publié de nombreux articles sur l'application du calcul des probabilités à des problèmes de trafic téléphonique [1]. Du point de vue qui nous intéresse ici, il faut distinguer deux catégories de systèmes téléphoniques entre lesquels existent des différences fondamentales : 1° les systèmes sans attente possible refusant tous les appels qui ne trouvent pas immédiatement des jonctions libres; 2° les systèmes à délai d'attente, dans lesquels les appels n'aboutissant pas immédiatement faute de jonctions libres, peuvent attendre jusqu'au moment où ils pourront être acheminés.

Erlang a étudié les deux sortes de systèmes, mais c'est aux systèmes de la première catégorie, ceux sans attente, qu'ont trait les formules qui portent son nom et dont j'indiquerai ici la démonstration afin de donner une idée du genre de raisonnements employés par Erlang et ses successeurs.

Supposons donc deux points connectés par un faisceau de s lignes téléphoniques qui soient toutes également accessibles aux appels provenant au hasard d'un grand nombre de sources téléphoniques. Soit y le nombre moyen d'appels par unité de temps, et admettons pour simplifier que ceux de ces appels qui ne sont pas refusés faute de lignes libres donnent lieu à des communications de durée 1. Erlang admet que dans ces conditions, il s'établit un « équilibre statistique » de sorte que les probabilités $P_0, P_1, \ldots, P_s$ pour que $\nu = 0, 1, \ldots, s$ lignes soient occupées, sont uniquement déterminées par l'intensité de trafic y, et ne dépendent pas du temps t, c'est-à-dire de l'instant t auquel on examine le système (le faisceau de lignes.)

En imaginant un grand nombre de systèmes identiques se trouvant dans les conditions décrites, on peut interpréter $P_0, P_1, \ldots, P_s$ comme les nombres relatifs de ceux des systèmes dans lesquels, $0, 1, \ldots, s$ lignes sont occupées à une époque donnée. Calculons maintenant les variations que les nombres relatifs P_ν subissent pendant un intervalle de temps dt en vertu des lois élémentaires de la théorie des probabilités, en négligeant toutefois toutes les variations d'ordre dt^2. Or, la probabilité d'un nouvel appel pendant l'intervalle dt est $y\,dt$, et pour un système à ν lignes occupées, νdt représente la probabilité pour que, parmi les ν communications en cours et de durée 1, une seule soit terminée pendant cet intervalle; donc, le nombre relatif P_ν décroîtra pour ces deux raisons, de $P_\nu(y\,dt + \nu dt)$ pendant notre intervalle. Par contre, P_ν augmentera pendant cet intervalle de $P_{\nu-1}y\,dt$ et de $P_{\nu+1}(\nu + 1)dt$, ces expressions représentant respectivement la diminution des nombres relatifs des systèmes à $\nu - 1$ et à $\nu + 1$ lignes occupées par suite de nouveaux appels et de la fin de communications en cours.

Comme la variation totale de P_ν pendant l'intervalle considéré est nulle en vertu de l'hypothèse de l'équilibre statistique, on obtient

$$P_\nu(y\,dt + \nu\,dt) - P_{\nu-1}y\,dt - P_{\nu+1}(\nu+1)\,dt = 0,$$

donc

$$(y+\nu)P_\nu = yP_{\nu-1} + (\nu+1)P_{\nu+1} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ s;\quad P_{-1} = P_{s+1} = 0). \tag{1}$$

En ajoutant à ces formules l'équation

$$P_0 + P_1 + \ldots + P_s = 1, \tag{2}$$

qui exprime le fait que la somme de toutes les probabilités est égale à l'unité, on trouve, par un calcul élémentaire,

$$P_\nu = \frac{\dfrac{y^\nu}{\nu!}}{1 + y + \dfrac{y^2}{2!} + \ldots + \dfrac{y^s}{s!}} \qquad [\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ s \quad \text{(formules d'Erlang)}]. \tag{3}$$

Identifions maintenant la probabilité pour que ν lignes exactement soient occupées avec la fraction de temps pendant laquelle ν lignes en moyenne sont effectivement occupées. En particulier P_s devient alors identique à la fraction des appels qui n'aboutissent pas à une communication, donc qui sont perdus, et yP_s donne le nombre des appels perdus par unité de temps. La grandeur la plus importante de cette théorie est la probabilité de perte P_s et en pratique, quelles que soient les particularités du système téléphonique envisagé, on s'efforce d'obtenir un P_s de l'ordre de grandeur de 10^{-3}.

A l'aide de la méthode dont nous venons de donner un exemple, Erlang a traité divers problèmes relatifs à des systèmes sans attente. En ce qui concerne les systèmes à délai d'attente, il a aussi traité d'une manière complète le cas d'un faisceau de s lignes également accessibles, dans l'hypothèse d'une répartition exponentielle des durées de communication, c'est-à-dire en admettant que la probabilité d'une durée de communication comprise entre t et $t + dt$ est égale à $e^{-t}dt$. Enfin, il a étudié le même système dans l'hypothèse, bien plus difficile à traiter, d'une durée constante des communications et a établi diverses formules, d'allure très compliquée, valables pour des faisceaux à $s = 1,\ 2,\ 3$ lignes.

Quoique ses résultats aient été exposés d'une manière à en rendre l'accès et l'utilisation plutôt difficiles, Erlang a eu un nombre considérable de successeurs qui, s'appuyant surtout sur le principe de l'équilibre statistique et, en outre, sur la formule de Poisson $\left(P = \frac{(\gamma t)^\nu}{\nu\,!}e^{-\gamma t}\right)$, simplifièrent ses raisonnements et s'efforcèrent de les étendre aux systèmes sans attente, de structure assez compliquée, qu'on utilise en pratique. Sans prétendre à une énumération complète, citons parmi les publications les plus récentes sur ce sujet celles de MM. E. C. Molina [2], Th. C. Fry [3], A. E. Vaulot [4] et C. W. Crommelin, [5] dont la manière de traiter ce sujet est en partie considérablement influencée par les écrits de Erlang. Finalement il y a lieu de mentionner un article de M. A. Kolmogoroff [6] dans lequel l'auteur emploie la méthode exposée par lui dans les *Math. Annalen* (t. 104, 1931, p. 415-458) pour traiter le problème du faisceau de s lignes dans l'hypothèse d'une distribution exponentielle des durées d'opération et de l'équilibre statistique. M. Kolmogoroff y retrouve essentiellement la solution donnée par Erlang pour ce problème (*).

2. **Explication de la méthode de l'auteur à l'aide d'un exemple élémentaire.** — Je passe maintenant à mes propres recherches en cette matière, dans lesquelles j'ai suivi des voies foncièrement différentes de celles des auteurs précités. J'ai tâché d'aborder les problèmes dont il s'agit ici en descendant jusqu'aux détails élémentaires des phénomènes, c'est-à-dire en introduisant directement les n moments d'arrivée et les n durées de communication d'un nombre quelconque n de personnes ou d'appels. En formulant ensuite les problèmes de probabilité auxquels on s'intéresse ici à peu près de la même manière que les problèmes classiques de probabilités continues, on obtient pour les probabilités cherchées des intégrales définies $(2n-1)$-uples d'allure plutôt compliquée, étendues à des fonctions réelles de $2n-1$ variables.

Toutefois, grâce aux moyens que fournit l'analyse du domaine complexe, et surtout à l'aide d'une généralisation de l'intégrale classique de Dirichlet, on parvient à surmonter les difficultés qui proviennent de ce qu'on s'occupe des n personnes séparément ou, pour ainsi dire, des

(*) *Note ajoutée le 25 janvier 1945.* Entre temps, l'attente à un guichet a été traitée par M. E. Borel [7] de manière élégante à l'aide du théorème de Bernoulli.

détails de phénomènes dont seules les lois macroscopiques nous intéressent. En revanche, cette méthode permet de traiter des problèmes bien plus généraux que ceux qu'on a su aborder jusqu'à présent. Dans mes développements, le cas de l'équilibre statistique, quoique de loin le plus important du point de vue de la pratique, ne se distingue pas, en principe, d'une infinité d'autres cas également possibles, et c'est en démontrant rigoureusement que, sous certaines conditions, on peut passer dans nos formules à la limite $n = \infty$, et qu'alors nos probabilités ne dépendent plus du temps qu'on établit les lois de ce cas particulièrement intéressant. On reconnaît aussi au cours de ces recherches que les difficultés inhérentes aux problèmes à délai d'attente ne peuvent pas être allégées en employant *a priori* l'hypothèse de l'équilibre statistique.

Pour exposer ma méthode, je parlerai, en changeant d'image, d'un groupe de s guichets, par exemple d'un bureau de poste, fréquenté par n personnes arrivant au hasard pendant l'intervalle de temps o...T. Admettons que toutes ces personnes aient besoin de durées d'opération égales $t_1 = 1$ et proposons-nous de calculer les diverses probabilités et espérances mathématiques de délai d'attente qu'on peut définir ici.

Pour illustrer les circonstances qui se présentent ici, nous poserons d'abord $s = 1$, $n = 2$; nous supposerons donc que deux personnes arrivent au hasard pendant l'intervalle o...T devant un guichet, et soient x_1 et x_2 les moments de leurs arrivées. On obtient alors la figure 1 où tout point du carré représente un cas possible d'arrivée de deux personnes devant un guichet, et l'on voit qu'il n'y a pas de délai d'attente sauf si

$$\text{ou} \quad x_1 \leqq x_2 < x_1 + t_1, \qquad \text{ou} \quad x_2 \leqq x_1 < x_2 + t_1,$$

de manière que les parties hachurées du carré, bornées respectivement par les droites $x_2 = x_1 + t_1$ et $x_1 = x_2 + t_1$, représentent les cas de délai d'attente. (On voit d'ailleurs que le problème particulier de la figure 1 est identique à un problème élémentaire de la théorie des probabilités continues, à savoir celui qui consiste à trouver la probabilité pour que deux points pris au hasard sur un segment de droite, de longueur T, soient séparés par une distance inférieure à t_1.)

La figure 1 étant symétrique par rapport à la diagonale $x_2 = x_1$, on peut se contenter d'envisager le seul triangle supérieur; donc, nous admettrons dorénavant

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \mathrm{T}. \tag{4}$$

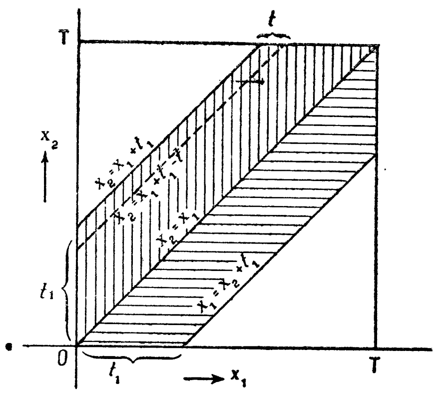

Fig. 1.

Durées d'attente pour $n = 2$, $s = 1$.

x étant un nombre réel quelconque différent de zéro, nous emploirons dans la suite les notations

$$x^+ = \frac{x + |x|}{2}, \qquad \mathbf{s}(x) = \frac{\operatorname{sign} x + 1}{2} \qquad (\textit{voir fig. 2}). \tag{5}$$

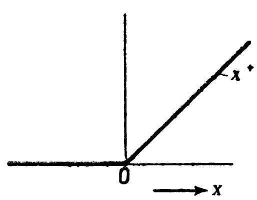

Fig. 2 *a*.

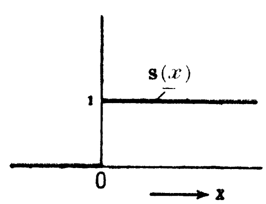

Fig. 2 *b*.

Les fonctions x^+ et $\mathbf{s}(x)$.

afin d'écrire plus commodément les formules dont nous aurons besoin. Avec ces notations, on trouve pour le délai d'attente τ_2 de la deuxième personne

$$\tau_2 = (x_1 + t_1 - x_2)^+, \tag{6}$$

et la condition pour que ce délai τ_2 soit inférieur à un nombre quelconque donné $t \geqq 0$, est

$$(x_1 + t_1 - x_2) < t, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad x_1 + t_1 - x_2 < t,$$

ou encore

$$\mathrm{s}(t + x_2 - x_1 - t_1) = 1.$$

Pour trouver maintenant la probabilité $\rho_2(t)$ pour que le délai d'attente de la deuxième personne soit $< t$, il faut intégrer la fonction $\mathrm{s}(t+x_2-x_1-t_1)$ qui est égale à 1 en dehors du trapèze borné par les droites $x_2 = x_1$ et $x_2 = x_1 + t_1 - t$, dans le triangle supérieur de la figure 1 et diviser par l'aire de ce triangle,

$$(7) \qquad \rho_2(t) = \frac{2}{\mathrm{T}^2}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1 \int_{x_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{s}(t + x_2 - x_1 - t_1)\, dx_2;$$

on obtient immédiatement d'après la figure 1

$$(8) \qquad \rho_2(t) = \rho_2(t; t_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{T} - t_1 + t}{\mathrm{T}}\right)^2 & (0 \leqq t \leqq t_1), \\ 1 & (t_1 < t). \end{cases}$$

Il y a lieu d'indiquer qu'ici, nous avons admis tacitement que la probabilité élémentaire pour qu'une personne arrive pendant l'intervalle $x \ldots x + dx$ est égale à $\frac{dx}{\mathrm{T}}$; nous avons donc admis que toutes les arrivées pendant l'intervalle $0 \ldots \mathrm{T}$ sont également probables; on pourrait remplacer cette hypothèse par une supposition plus générale, qui entraînerait toutefois des difficultés analytiques considérables.

Si, au lieu de supposer une seule durée d'opération pour la première personne, on admet plusieurs durées $t'_1, t''_1, \ldots$, ayant respectivement les probabilités $p', p'', \ldots$, $\rho_2(t)$ sera évidemment égal à

$$\rho_2(t) = p'\rho_2(t; t'_1) + p''\rho_2(t; t''_1) + \ldots.$$

Admettons enfin toute une gamme de durées d'opération t', de fonction de répartition $f(t')$, de manière que $df(t')$ soit la probabilité d'une durée d'opération comprise entre t' et $t' + dt'$; on trouve

$$(9) \qquad \rho_2(t) = \int_0^{\infty} \rho_2(t; t')\, df(t'),$$

où, la fonction non décroissante $f(t')$ n'étant en général pas continue, l'intégration doit être conçue dans le sens de Stieltjes. De plus, on a en vertu de l'inégalité $x_2 \geqq x_1$ [*voir* (4)], respectivement pour la durée d'attente τ_1 et la probabilité $\rho_1(t)$ d'une attente $< t$ de la première personne

$$\tau_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho_1(t) = 1;$$

donc, en désignant par $\rho(t)$ la probabilité pour que le délai d'attente de l'une quelconque des deux personnes soit $< t$, on obtient

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\rho_1(t) + \frac{1}{2}\rho_2(t) = \frac{1+\rho_2(t)}{2}. \tag{10}$$

Enfin, l'espérance mathématique d'un délai d'attente sera

$$\Theta = \int_0^{\infty} t\,d\rho(t), \tag{11}$$

et en particulier dans notre exemple, avec l'hypothèse d'une seule durée d'opération t_1, on obtient par un calcul élémentaire

$$\Theta = t_1\left(\frac{t_1}{T} - \frac{t_1^2}{3T^2}\right).$$

3. **Généralisation formelle à un nombre quelconque n de personnes; introduction d'intégrales de Dirichlet.** — Il s'agit maintenant d'étendre l'analyse de l'exemple $n = 2$, $s = 1$, au cas général de n personnes arrivant au hasard devant un groupe de s guichets et ayant toutes besoin de la même durée d'opération t_0. Nous prendrons cette durée comme unité de temps, et nous poserons donc de prime abord $t_0 = 1$, quoique, en conservant t_0 on puisse obtenir des formules plus homogènes.

Les moments d'arrivée $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de ces n personnes peuvent être représentés par les points d'un cube à n dimensions, d'arête T, et pour des raisons de symétrie nous pouvons nous contenter, comme dans le cas $n = 2$, de supposer

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq T, \tag{12}$$

c'est-à-dire d'envisager seulement un simplex à n dimensions, de volume $\frac{T^n}{n!}$, comme domaine de variation des x_ν; autrement dit, nous numérotons, dans chaque cas particulier, les n personnes suivant l'ordre de leur arrivée. En fixant comme loi de priorité que chaque personne soit servie suivant son ordre d'arrivée, calculons maintenant le délai d'attente de la $m^{\text{ième}}$ personne pour $m = 1, 2, \ldots, n$.

Tout d'abord l'on a

$$(13)\qquad \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_s = 0,$$

puisque par hypothèse, les s guichets sont inoccupés au début. Quant à τ_{s+1}, sa valeur sera $(x_1 + 1 - x_{s+1})^+$ [*voir* l'équation (6)], car, grâce à l'hypothèse des durées d'opération identiques, le premier guichet sera toujours libre avant les autres. Pour des raisons analogues, on trouve

$$\tau_{s+2} = (x_2 + 1 - x_{s+2})^+, \qquad \ldots, \qquad \tau_{2s} = (x_s + 1 - x_{2s})^+,$$

et il est clair qu'avec nos hypothèses, la $(s+1)^{\text{ième}}$, $(2s+1)^{\text{ième}}$ etc. personne attendra devant le premier guichet, s'il y a toutefois encombrement; une règle analogue vaut pour les autres guichets.

Posons

$$(14)\qquad m = \mu s + a, \qquad \text{où} \qquad 1 \leqq a \leqq s;$$

comme la $(\mu s + a)^{\text{ième}}$ personne sera toujours servie devant le $a^{\text{ième}}$ guichet et y passera immédiatement après la sortie de la $(\mu s + a - s)^{\text{ième}}$ personne, on obtient pour son délai d'attente la formule

$$(15)\qquad \tau_m = (x_{m-s} + \tau_{m-s} + 1 - x_m)^+,$$

qui, associée aux équations (13), permet de calculer les τ_m par récurrence. On peut d'ailleurs établir la formule explicite

$$(16)\quad \begin{cases} \tau_m = \mathrm{Max}^+[x_a + \mu - x_m,\ x_{a+s} + (\mu - 1) - x_m,\ \ldots,\ x_{a+(\mu-1)s} + 1 - x_m] \\ \qquad\qquad (m = \mu s + a), \end{cases}$$

où nous avons écrit $\mathrm{Max}^+(\ldots)$ à la place de $[\mathrm{Max}(\ldots)]^+$; pour démontrer cette formule par récurrence, on n'a qu'à l'introduire pour τ_{m-s} dans le deuxième membre de l'équation (15) et à effectuer quelques opérations élémentaires. On peut également démontrer la formule (16) d'une autre manière. Admettons que le dernier encombrement devant le $a^{\text{ième}}$ guichet ait commencé depuis l'accès de la $(\mu' s + a)^{\text{ième}}$ personne; avec cette supposition, τ_m est égal à $x_{\mu' s + a} + (\mu - \mu') - x_m$, et l'on voit presque immédiatement qu'alors ce nombre est plus grand que les autres expressions qui figurent dans le deuxième membre de l'équation (16).

La probabilité $\rho_m(t)$ d'un délai d'attente $\tau_m < t$ est égale au rapport de la partie du simplex (12) où $\tau_m < t$, au volume $\frac{T^n}{n!}$ de ce simplex.

Comme, avec la notation (5), $\mathbf{s}(t-\tau_m)$ sera égal à 1 dans cette partie et à 0 dans le reste du simplex (en négligeant la multiplicité à $n-1$ dimensions où $t-\tau_m=0$), on a

$$(17)\qquad \rho_m(t)=\frac{n!}{\mathrm{T}^n}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1\int_{x_1}^{\mathrm{T}} dx_2\ldots\int_{x_{n-1}}^{\mathrm{T}} \mathbf{s}(t-\tau_m)\,dx_n.$$

Ici, on peut immédiatement effectuer les $n-m$ intégrations intérieures par rapport à $dx_n,\ \ldots,\ dx_{m+1}$, car τ_m et $\mathbf{s}(t-\tau_m)$ ne dépendent que de $x_1,\ldots,x_m$, et l'on obtient

$$(18)\qquad \rho_m(t)=\frac{n!}{\mathrm{T}^n}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1\int_{x_1}^{\mathrm{T}} dx_2\ldots\int_{x_{m-1}}^{\mathrm{T}} \frac{(\mathrm{T}-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,\mathbf{s}(t-\tau_m)\,dx_m.$$

Grâce à l'équation (16), on peut transformer l'expression $\mathbf{s}(t-\tau_m)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(t-\tau_m)&=\mathbf{s}[t-\mathrm{Max}^+(a_1,\ \ldots,\ a_\mu)]=\mathbf{s}[t-\mathrm{Max}(a_1,\ \ldots,\ a_\mu)]\\&=\mathbf{s}[t+\mathrm{Min}(-a_1,\ \ldots,\ -a_\mu)]=\mathbf{s}\,\mathrm{Min}\,(t-a_1,\ \ldots,\ t-a_\mu),\end{aligned}$$

donc,

$$(19)\qquad \mathbf{s}(t-\tau_m)=\mathbf{s}\underset{\nu=0,1,\ldots,\mu-1}{\mathrm{Min}}(t+x_m-x_{a+\nu s}-(\mu-\nu)]\qquad (m=\mu s+a).$$

Avant d'introduire cette expression dans l'équation (18), nous représenterons la fonction $\mathbf{s}\,\mathrm{Min}(a_0,\ \ldots,\ a_{n-1})$ où $a_0,\ \ldots,\ a_{n-1}$ désignent des nombres réels différents de zéro, par une intégrale de Fourier.

Tout d'abord, on a évidemment

$$(20)\qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}(a_0,\ \ldots,\ a_{n-1})=\mathbf{s}(a_0)\,\mathbf{s}(a_1)\ldots\mathbf{s}(a_{n-1}),$$

car, dans les deux hypothèses possibles, à savoir valeur positive ou négative du plus petit des nombres a_ν, les deux membres de l'équation (20) ont la même valeur.

Prenons comme point de départ la formule classique

$$(21)\qquad \mathbf{s}(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}}\frac{e^{ap}}{p}\,dp,$$

où C, ainsi que par la suite $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_p, \mathrm{C}_q, \mathrm{C}_\xi$ désigne une parallèle à droite de l'axe vertical du plan des p et où, pour $a=0$, $\int_{\mathrm{C}}$ signifie $\lim\limits_{\mathrm{N}\to\infty}\int_{\varepsilon-i\mathrm{N}}^{\varepsilon+i\mathrm{N}}$ (*valeur principale*).

On en déduit

$$(22)\quad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \mathbf{s}(a_\nu) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} \frac{e^{a_\nu p_\nu}}{p_\nu}\,dp_\nu$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{n-1}} \frac{e^{\sum_0^{n-1} a_\nu p_\nu}}{\prod_0^{n-1} p_\nu}\,dp_0 \ldots dp_{n-1},$$

où, le cas échéant, on doit définir une valeur principale appropriée dans l'intégrale multiple. Représentons d'une manière analogue à (21) le premier facteur de l'intégrale (18), à savoir

$$(23)\quad \frac{(\mathrm{T}-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{p(\mathrm{T}-x_m)}}{p^{n-m+1}}\,dp, \qquad \text{où } \mathrm{T}-x_m > 0,$$

et introduisons les deux dernières expressions, compte tenu de l'équation (19), dans la formule (18) de $\rho_m(t)$; on obtient

$$(24)\quad \rho_m(t) \doteq \frac{n!}{\mathrm{T}^n}\int_0^{\mathrm{T}} dx_1 \ldots \int_{x_{m-1}}^{\mathrm{T}} dx_m$$

$$\times \frac{1}{(2\pi i)^{\mu+1}}\int_{C_p}\int_{C_0}\int_{C_1}\cdots\int_{C_{\mu-1}} \frac{e^{\sum_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu[t+x_m-x_{a+\nu_s}-(\mu-\nu)]+p(\mathrm{T}-x_m)}}{\prod_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu \cdot p^{n-m+1}}$$

$$\times\, dp\, dp_0\, dp_1 \ldots dp_{\mu-1}.$$

4. Réduction d'un problème d'intégration réelle multi-dimensionnelle à la solution d'une équation intégrale. — Ici, il est loisible d'intégrer par rapport à dx_m sous le signe d'intégration $\int_{C_p}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{\mu-1}}$; en n'écrivant que les facteurs qui dépendent de x_m et de p, et en déplaçant la droite d'intégration C_p parallèlement à elle-même vers la droite de manière que

$$(25)\quad \mathrm{R}\left(p - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu\right) > 0 \qquad (\mathrm{R} \equiv \text{partie réelle}),$$

on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} dp \int_{x_{m-1}}^{T} \frac{e^{x_m \sum_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu + p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}}\, dx_m$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} dp \left[- \frac{e^{x_m \sum_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu + p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}\left(p - \sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)} \right]_{x_{m-1}}^{T}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{x_{m-1}\sum_0^{\mu-1} p_\nu + p(T-x_{m-1})} - e^{T\sum_0^{\mu-1} p_\nu}}{p^{n-m+1}\left(p - \sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)}\, dp;$$

la partie correspondant à $e^{T\sum_0^{\mu-1} p_\nu}$ de la dernière intégrale est nulle, ce qu'on établit en déplaçant, grâce à l'inégalité (25), C_p vers l'infini du demi-plan droit des p.

En intégrant dans l'équation (24) de la même manière par rapport à dx_{m-1}, ..., dx_{m-s+1}, on trouve que le facteur $e^{\sum_0^{\mu-1} p_\nu(x_m - x_a - \nu s) + p(T-x_m)}$ doit être remplacé par

$$\frac{e^{\sum_0^{\mu-1} p_\nu(x_{m-s} - x_a - \nu s) + p(T-x_{m-s})}}{\left(p - \sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)^s} = \frac{e^{\sum_0^{\mu-2} p_\nu(x_{a+(\mu-1)s} - x_a - \nu s) + p(T-x_{a+(\mu-1)s})}}{\left(p - \sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)^s}.$$

Les $(\mu - 1)s$ intégrations suivantes par rapport à $dx_{a+(\mu-1)s}$, ..., dx_{a+1} transforment ce facteur en

$$\frac{e^{p(T-x_a)}}{\left(p - \sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)^s \left(p - \sum_0^{\mu-2} p_\nu\right)^s \cdots (p - p_0)^s}$$

et les a dernières intégrations par rapport à dx_a, ..., dx_1 remplacent le facteur $e^{p(T-x_a)}$ par $\frac{e^{pT}}{p^a}$, de sorte que finalement on déduit de l'équation (24)

$$(26)\quad \rho_m(t) = \frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-1}}\int_{C_p}\int_{C_0}\cdots\int_{C_{\mu-1}} \frac{e^{pT+\sum_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu[t-(\mu-\nu)]}\,dp\,dp_0\ldots dp_{\mu-1}}{\prod_{\nu=0}^{\mu-1} p_\nu . p^{n-m-\alpha-1}\left(p-\sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)^s\left(p-\sum_0^{\mu-2} p_\nu\right)^s\ldots(p-p_0)^s},$$

où, en vertu de l'inégalité (25),

$$(27^a)\quad \mathrm{R}\left(p-\sum_0^{\mu-1} p_\nu\right) > 0,\quad \mathrm{R}\left(p-\sum_0^{\mu-2} p_\nu\right) > 0,\quad \ldots,\quad \mathrm{R}(p-p_0) > 0.$$

On a ainsi réussi à effectuer toutes les intégrations réelles indiquées dans l'équation (24). Pour faciliter les transformations qui suivent, nous ajouterons dans le deuxième membre de l'équation (26) un facteur $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\mu}\frac{e^{p_\mu t}}{p_\mu}dp_\mu$ qui est égal à 1 pour $t > 0$ (*) et nous situerons C_μ de manière que

$$(27^b)\quad \mathrm{R}\left(p-\sum_0^{\mu} p_\nu\right) > 0.$$

On obtient alors, compte tenu de l'équation (14),

$$(28)\quad \rho_m(t) = \frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^{\mu-2}}\int_{C_p}\int_{C_0}\cdots\int_{C_\mu} \frac{e^{pT+\sum_0^{\mu} p_\nu[t-(\mu-\nu)]}\,dp\,dp_0\ldots dp_\mu}{\prod_0^{\mu} p_\nu . p^{n-\mu s-1}\left(p-\sum_0^{\mu-1} p_\nu\right)^s\ldots(p-p_0)^s}$$

$$(m = \mu s + \alpha).$$

Remplaçons les variables d'intégration $p_0, \ldots, p_\mu$ par de nouvelles variables $q_0, \ldots, q_\mu$ en posant

$$(29)\quad p-\sum_0^{\mu} p_\nu = q_0,\quad p-\sum_0^{\mu-1} p_\nu = q_1,\quad \ldots,\quad p-\sum_0^{\mu-\varkappa} p_\nu = q_\varkappa,\quad \ldots,\quad p-p_0 = q_\mu;$$

grâce aux inégalités (27) on reconnaît aisément que les domaines

(*) Comme ce facteur qui est égal à $\frac{1}{2}$ pour $t = 0$, tend vers 1 lorsque t tend vers 0 par des valeurs positives, nous obtiendrons $\rho(0)$ ou $\mathrm{P}(0)$ à partir de ce qui précède en passant à la limite $t \to +0$ dans les deuxièmes membres des équations de $\rho(t)$ et $\mathrm{P}(t)$.

d'intégration des nouvelles variables sont encore des parallèles à droite de l'axe imaginaire.

En résolvant les dernières équations par rapport aux p_ν, on a

$$p_0 = p - q_\mu; \qquad p_\nu = q_{\mu-\nu+1} - q_{\mu-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{30}$$

et de là pour l'exposant dans l'équation (28),

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} p_\nu[t - (\mu - \nu)] = (p - q_0)t - \mu p + \sum_{1}^{\mu} q_\nu = p(t - \mu) - q_0 t + \sum_{1}^{\mu} q_\nu. \tag{31}$$

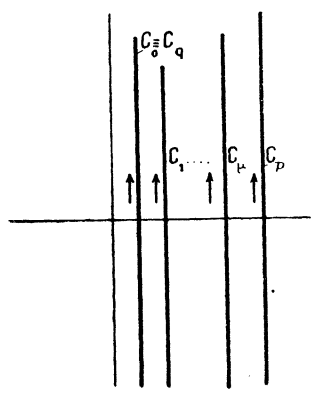

Fig. 3.

Les chemins d'intégration des intégrales I., (32) et I., (33).

Avec les expressions (29) et (31). la formule (28) prend la forme

$$\rho_m(t) = \frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_0}\frac{e^{p(T+t-\mu)-q_0 t}}{p^{n-\mu s+1}} f_\mu(p, q_0)\,dp\,dq_0, \tag{32}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} f_\mu(p, q) = \dfrac{1}{(2\pi i)^\mu}\displaystyle\int_{C_1}\cdots\int_{C_\mu}\frac{e^{\sum_{\nu=1}^{\mu} q_\nu}\,dq_1\ldots\,dq_\mu}{q_1^s\cdots q_\mu^s(q_1 - q)(q_2 - q_1)(q_3 - q_2)\cdots(p - q_\mu)} \\ \left[\mu = 1, \ldots;\ f_0 = \dfrac{1}{p - q}\right]. \end{cases} \tag{33}$$

Des équations (30) où $R(p_\nu) > 0$, on déduit

$$R(q_1 - q) > 0, \qquad R(q_2 - q_1) > 0, \qquad \ldots, \qquad R(p - q_\mu) > 0,$$

de sorte que dans les équations (32) et (33), les courbes d'intégration C_p, $C_0 \equiv C_q$, C_1, ..., C_μ sont situées selon la figure 3.

Avant de nous occuper du calcul des expressions (33), constatons qu'elles satisfont à la formule de récurrence

$$(34^a) \qquad f_{\mu+1}(p,\, q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\xi} \frac{e^\xi}{\xi^s(\xi - q)} f_\mu(p,\, \xi)\, d\xi \qquad [R(\xi - q) > 0],$$

où C_ξ est une parallèle à l'axe imaginaire des ξ, à droite de cet axe et du point q, mais à gauche du point p (*voir* la figure 4). Admettons qu'on ait démontré que $|f_\mu(p,\, q)|$ est uniformément bornée pour

$$(34^b) \qquad R(p) > c > 0, \qquad R(q) < c' < c, \qquad \text{où } c' > 0,$$

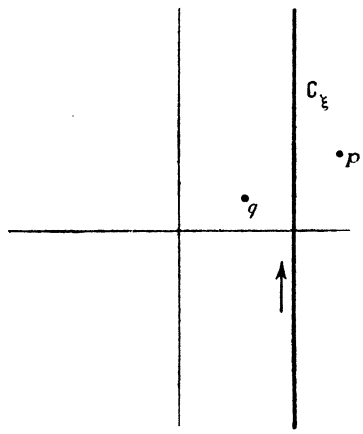

Fig. 4.

Chemin d'intégration et paramètres de l'intégrale I., (34^a).

ce qui est certainement le cas pour $f_0(p,\, q) = \frac{1}{p - q}$. On déduit alors de l'équation ($34\,a$), en admettant aussi $R(\xi) < c'$,

$$f_{\mu+1}(p,\, q) < \max |f_\mu(p,\, \xi)| \frac{e^{R(\xi)}}{2\pi} \int_{C_\xi} \frac{|d\xi|}{|\xi|^s\, |\xi - q|},$$

et comme la dernière intégrale est finie, ce qu'on vérifie sans difficulté, l'on parvient, par récurrence, à l'inégalité suivante, valable dans le domaine ($34\,b$),

$$|f_\mu(p,\, q)| < c_1 c_2^\mu.$$

Introduisons maintenant la fonction génératrice

$$(35) \qquad \mathcal{F}(p, q, z) = (p-q)\sum_{\mu=0}^{\infty} z^{\mu s} f_\mu(p, q)$$

laquelle, en vertu de la dernière inégalité, est analytique et uniformément bornée pour

$$\mathrm{R}(p) > c > 0, \qquad \mathrm{R}(q) < c' < c, \qquad |z| < r(c, c').$$

En vue d'établir une équation intégrale pour $\mathcal{F}(p, q, z)$, remplaçons q par ξ dans les deux membres de l'équation (35), et effectuons l'opération

$$\frac{z^s}{2\pi i}\int_{C_\xi} \frac{e^\xi(p-q)}{\xi^s(p-\xi)(\xi-q)} \ldots d\xi;$$

on obtient, en vertu de l'équation (34 a), et en décomposant

$$\frac{p-q}{(p-\xi)(\xi-q)} = \frac{1}{p-\xi} + \frac{1}{\xi-q},$$

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\frac{z^s}{2\pi i}\int_{C_\xi} \frac{e^\xi \mathcal{F}(p, \xi, z)}{\xi^s}\left(\frac{1}{p-\xi} + \frac{1}{\xi-q}\right) d\xi \\ &= (p-q)\sum_{\mu=0}^{\infty} z^{(\mu+1)s} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\xi} \frac{e^\xi}{\xi^s(\xi-q)} f_\mu(p, \xi)\, d\xi \\ &= (p-q)\sum_{\mu=0}^{\infty} z^{(\mu+1)s} f_{\mu+1}(p, q) \\ &= \mathcal{F}(p, q, z) - 1. \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{F}(p, \xi, z)$ étant bornée à gauche de C_ξ, on peut déplacer, dans la première intégrale de (36), la courbe d'intégration vers l'infini du demi-plan gauche des ξ, de sorte que $\int_{C_\xi}$ se réduit aux résidus aux pôles, respectivement d'ordres 1 et s, $\xi = q$ et $\xi = 0$. Notons que dans le voisinage de $\xi = 0$, $\frac{1}{\xi^s(\xi-q)}$ peut être remplacé par

$$-\frac{1}{q\xi^s}\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{\xi^\nu}{q^\nu} = -\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{1}{\xi^{s-\nu}q^{\nu+1}};$$

donc, le résidu de la première intégrale de (36) au pôle $\xi = 0$ est de la forme $\sum_{\nu=0}^{s}\frac{a_\nu(p, z)}{q^\nu}$ en tant que fonction de q.

Par conséquent, on déduit de l'équation (36)

$$\frac{z^s e^q \mathfrak{F}(p, q, z)}{q^s} + \sum_{\nu=0}^{s} \frac{a_\nu(p, z)}{q^\nu} = \mathfrak{F}(p, q, z) - 1$$

ou

$$\mathfrak{F}(p, q, z) = \frac{\sum_{\nu=0}^{s} q^\nu a_{s-\nu}(p, z) + q^s}{q^s - z^s e^q}. \tag{37}$$

Or, $\mathfrak{F}(p, q, z)$ étant régulière dans le voisinage de $q=0$, $z=0$, le numérateur du deuxième membre de (37) doit s'annuler pour

$$q = w_\nu(z) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, s-1),$$

où les $w_\nu(z)$ sont les s racines de l'équation

$$w^s - z^s e^w = 0 \tag{38}$$

dans le voisinage de $w=0$, $z=0$. Par conséquent, $\mathfrak{F}(p, q, z)$ est de la forme

$$\mathfrak{F}(p, q, z) = a(p, z) \frac{\prod_{\nu=0}^{s-1} [q - w_\nu(z)]}{q^s - z^s e^q}, \tag{39}$$

où le facteur $a(p, z)$ ne dépend plus de q. Pour calculer ce facteur, déplaçons dans le premier membre de (36) la droite d'intégration et amenons-la à gauche du point q (*voir* la figure 4), en la laissant toutefois à droite de l'axe imaginaire, et posons ensuite $q=p$, ce qui est désormais loisible puisque l'on a maintenant $\mathrm{R}(q-\xi) > 0$. L'intégrale ainsi modifiée s'annulant pour $q=p$, on obtient $z^s \frac{e^p(\mathfrak{F} p, p, z)}{p^s} = \mathfrak{F}(p, p, z) - 1$, ou

$$\mathfrak{F}(p, p, z) = \frac{p^s}{p^s - z^s e^p}$$

et, en posant dans l'équation (39) $q=p$,

$$a(p, z) = \frac{p^s}{\prod_{\nu=0}^{s-1} [p - w_\nu(z)]};$$

donc, finalement,

$$\mathfrak{F}(p, q, z) = \frac{p^s}{q^s - z^s e^q} \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{q - w_\nu(z)}{p - w_\nu(z)}. \tag{40}$$

Exprimons maintenant $f_\mu(p, q)$ [*voir* l'équation (35)] comme résidu de $\frac{\mathcal{F}(p, q, z)}{z^{\mu s+1}}$ au point $z = 0$. K_z désignant un petit cercle autour du point $z = 0$, on a

$$f_\mu(p, q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_z} \frac{\mathcal{F}(p, q, z)}{(p-q)z^{\mu s+1}}\,dz,$$

et en introduisant cette formule dans l'équation (32) et écrivant q, C_q à la place de q_0, C_0, nous obtenons

$$(41)\quad \begin{cases} \rho_m(t) = \dfrac{n!}{T^n}\dfrac{1}{(2\pi i)^3}\displaystyle\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_z}\frac{e^{p(T+t)-qt}}{p^{n+1}(p-q)z}\,\mathcal{F}(p, q, z)\,\frac{e^{-\mu p}p^{\mu s}}{z^{\mu s}}\,dp\,dq\,dz \\ \qquad (m = \mu s + a). \end{cases}$$

5. Établissement de la formule principale (45) et passage à la limite $n \to \infty$. — De cette formule, nous passons à celle de la probabilité $\rho(t)$ pour que le délai d'attente d'une quelconque des n personnes soit $< t$. Conformément à l'équation (10), on a

$$\rho(t) = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n}\rho_m(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\rho_m(t)$$

et de là on obtient, en posant

$$(42)\qquad n = n's + a', \qquad \text{où } 1 \leqq a' \leqq s,$$

et en écrivant, pour abréger,

$$\varepsilon = \frac{e^{-\frac{p}{s}}p}{z},$$

$$(43)\quad \begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{n}\left[\sum_{\mu=0}^{n'-1}\sum_{a=1}^{s}\rho_{\mu s+a}(t) + \sum_{a=1}^{a'}\rho_{n's+a}(t)\right] \\ &= \frac{(n-1)!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{C_p}\int_{C_q}\int_{K_z}\frac{e^{p(T+t)-qt}}{p^{n+1}(p-q)z}\left(s\sum_{\mu=0}^{n'-1}\varepsilon^{\mu s} + a'\varepsilon^{n's}\right) \\ &\quad\times \mathcal{F}(p, q, z)\,dp\,dq\,dz. \end{aligned}$$

Or, en désignant par $\zeta_k = e^{\frac{2\pi i k}{s}}$ les $s^{\text{ièmes}}$ racines de l'unité, on trouve, compte tenu de l'équation (42),

$$\begin{aligned} s\sum_{\mu=0}^{n'-1}\varepsilon^{\mu s} + a'\varepsilon^{n's} &= s\,\frac{\varepsilon^{n's}-1}{\varepsilon^s - 1} + a'\varepsilon^{n's} = s\,\frac{\varepsilon^{n-a'}-1}{\varepsilon^s-1} + a'\varepsilon^{n-a'} \\ &= \frac{(s-a')\varepsilon^{n-a'} + a'\varepsilon^{n+s-a'}}{\varepsilon^s - 1} - \frac{s}{\varepsilon^s-1} \\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\left[\frac{\varepsilon^s - 1}{(\zeta_k\varepsilon - 1)^2}(\zeta_k\varepsilon)^{n-s+1} - \frac{s}{\zeta_k\varepsilon - 1}\right], \end{aligned}$$

et en introduisant cette expression ainsi que la formule (40) dans l'équation (43), on obtient

$$(44)\quad \rho(t)=\frac{(n-1)!}{\mathrm{T}^n}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\mathrm{C}_p}\int_{\mathrm{C}_q}\int_{\mathrm{K}_z}\frac{e^{p(\mathrm{T}+t)-qt}}{p^{n+1}(p-q)}\frac{p^s}{q^s-z^s e^q}\prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{q-w_\nu(z)}{p-w_\nu(z)}$$
$$\times\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}\left[\frac{\dfrac{e^{-p}p^s}{z^s}-1}{\left(\dfrac{e^{-\frac{p}{s}}p}{\zeta_k z}-1\right)^2}\left(\frac{e^{-\frac{p}{s}}p}{\zeta_k z}\right)^{n-s+1}-\frac{s}{\dfrac{e^{-\frac{p}{s}}p}{\zeta_k z}-1}\right]dp\,dq\,\frac{d(\zeta_k z)}{\zeta_k z}.$$

En décomposant l'intégrale par rapport à dz de la manière suivante :

$$\int_{\mathrm{K}_z}\cdots\sum_{k=0}^{s-1}[\ldots]\,dz=\sum_{k=0}^{s-1}\int_{\mathrm{K}_z}\ldots\,dz$$

et en remplaçant dans chaque intégrale z par $z\zeta_k^{-1}$, ces s intégrales deviennent identiques, de sorte que dans l'équation (44), l'expression $\frac{1}{s}\sum_{k=0}^{s-1}[\ldots]$ peut être remplacée par

$$\frac{e^{-p}p^s-z^s}{\left(e^{-\frac{p}{s}}p-z\right)^2}\left(\frac{e^{-\frac{p}{s}}p}{z}\right)^{n-s+1}z^{2-s}-\frac{sz}{e^{-\frac{p}{s}}p-z};$$

ici, on peut encore supprimer le terme $\dfrac{sz}{e^{-\frac{p}{s}}p-z}$ car la partie correspondante de la fonction à intégrer est régulière pour $z=0$. En remplaçant, en outre, les variables d'intégration p, q, z par sp, sq, sze^{-z}, on obtient enfin

$$(45)\quad \rho(t)=\frac{(n-1)!}{\mathrm{T}^n}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\mathrm{C}_p}\int_{\mathrm{C}_q}\int_{\mathrm{K}_z}\frac{e^{np\left(\frac{s\mathrm{T}}{n}-1\right)+st(p-q)+nz}}{z^n(p-q)}$$
$$\times\frac{p^s-z^s e^{s(p-z)}}{(p-ze^{p-z})^2}\,\frac{e^{p-z}(1-z)}{q^s-z^s e^{s(q-z)}}\prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{q-w_\nu(z)}{p-w_\nu(z)}\,dp\,dq\,dz,$$

où maintenant les $w_\nu(z)$ [*voir* aussi l'équation (38)] sont les s racines de l'équation

$$(46)\qquad w^s-z^s e^{s(w-z)}=0$$

dans le voisinage de $w=0$, $z=0$; notons que l'on a, en particulier, $w_0(z)=z$.

L'intégrale (45) doit être transformée différemment selon le signe de l'expression $\frac{sT}{n} - 1$ qui figure dans la fonction exponentielle; or, $\frac{n}{sT} = \frac{n.1}{sT}$ est le rapport entre les durées d'opération demandées par les n personnes et l'intervalle de temps disponible devant les s guichets. En posant

$$(47^a) \qquad \eta = \frac{n}{sT} \quad \text{ou} \quad \frac{sT}{n} = \frac{1}{\eta},$$

η peut être appelé coefficient d'utilisation ou de rendement de notre groupe de guichets, et il est clair que la probabilité d'une durée d'attente quelconque aura une valeur bien différente selon que $\eta < 1$, qui est la condition du trafic ordinaire, ou $\eta \geqq 1$, ce qui signifie : formation de queue. Ici, nous n'étudierons que le cas du trafic ordinaire; nous supposerons donc dorénavant

$$(47^b) \qquad \eta < 1.$$

Dans l'équation (45), l'exposant $\frac{sT}{n} - 1 = \frac{1}{\eta} - 1$ est alors positif; donc, nous pourrons déplacer la droite C_p vers l'infini du demi-plan gauche où la fonction à intégrer s'annule exponentiellement. L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_C \ldots dp$ se réduit ainsi à la somme des résidus aux deux pôles qui sont situés à gauche de C_p, à savoir les pôles $p = q$ et $p = w_0(z) \equiv z$ (zéro du binome $p - ze^{p-z}$) qui sont respectivement du premier et du deuxième ordre. Notons ici que, grâce au facteur $p^s - z^s e^{s(p-z)}$ qui s'annule pour $p = w_0(z)$, ..., $w_{s-1}(z)$, les facteurs $p - w_1$, ..., $p - w_{s-1}$ qui figurent dans le dénominateur de la fonction à intégrer, ne donnent pas lieu à des pôles.

Le résidu de $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \ldots dp$ au pôle $p = q$ est

$$\begin{aligned}
&\frac{(n-1)!}{(sT)^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q}\int_{K_z} \frac{e^{q(sT-n)+nz}}{z^n} \frac{e^{q-z}(1-z)}{(q-z\,e^{q-z})^2}\,dq\,dz \\
&= \frac{(n-1)!}{(sT)^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q}\int_{K_z} \frac{e^{q(sT-n+1)}}{(ze^{-z})^n} \frac{dq\,d(z\,e^{-z})}{(q-z\,e^{q-z})^2} \\
&= \frac{(n-1)!}{(sT)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \frac{e^{q(sT-n+1)}}{q^2} n\left(\frac{e^q}{q}\right)^{n-1} dq = \frac{n!}{(sT)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \frac{e^{qsT}}{q^{n+1}}\,dq = 1.
\end{aligned}$$

Pour obtenir le résidu au pôle $p = z$, développons la fonction à intégrer qui est de la forme $\frac{\mathcal{F}(p)}{(p-z)(p-ze^{p-z})}$, suivant les puissances de $p - z$ et prenons le coefficient de $\frac{1}{p-z}$; on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{F}(p)}{(p-z)(p-z\,e^{p-z})}\\
&= \frac{1}{p-z}[\mathcal{F}(z)+(p-z)\mathcal{F}'(z)+\ldots]\\
&\quad\times\left\{(p-z)\left[\frac{\partial(p-z\,e^{p-z})}{\partial p}\right]_{p=z}+\frac{(p-z)^2}{2}\left[\frac{\partial^2(p-z\,e^{p-z})}{\partial p^2}\right]_{p=z}+\ldots\right\}^{-1}\\
&= \frac{1}{(p-z)^2}\,\frac{\mathcal{F}(z)+(p-z)\mathcal{F}'(z)+\ldots}{1-z-(p-z)\frac{z}{2}+\ldots}\\
&= \ldots+\frac{1}{p-z}\left[\frac{\mathcal{F}'(z)}{1-z}+\frac{z}{2(1-z)^2}\mathcal{F}(z)\right]+\ldots.
\end{aligned}$$

En effectuant ce calcul dans l'équation (45) et en remplaçant T selon l'équation (47 a) par η, on obtient

$$\tag{48} \begin{aligned}\rho(t) = 1 - \frac{s(n-1)!\,\eta^n}{n^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_q}\int_{K_z}\frac{e^{\frac{nz}{\eta}+st(z-q)}}{z^{n+1-s}}\prod_{\nu=1}^{s-1}\frac{q-w_\nu(z)}{z-w_\nu(z)}\\
\times\left[n\left(\frac{1}{\eta}-1\right)+st+\frac{s}{2}+\frac{1}{q-z}-\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{1}{z-w_\nu(z)}+\frac{s-1}{2z}+\frac{1}{2(1-z)}\right]\frac{dq\,dz}{q^s-z^s e^{s(q-z)}},\end{aligned}$$

où les $w_\nu(z)$ sont les $s-1$ racines différentes de z de l'équation (46) dans le voisinage de $w=0$, $z=0$.

Pour n fini, le calcul de la dernière intégrale double ne présente pas de difficultés et est simple surtout pour $s=1$; contentons-nous de mentionner ici que l'on obtient toujours un polynome en t et η, différent selon l'intervalle $a < t \leqq a+1$ (a désignant un nombre entier), dans lequel t est situé.

Par contre, nous montrerons que pour les grandes valeurs de n, l'expression (48) peut être développée en une série « asymptotique », en faisant toutefois une hypothèse sur le comportement du coefficient η pour n tendant vers l'infini. Ici, nous admettrons que η ne varie pas avec n,

$$\tag{49} \eta = \text{const.} < 1,$$

ce qui correspond à l'hypothèse mentionnée plus haut de l'équilibre statistique.

L'équation (48), où nous ajoutons sous le signe d'intégration $\int_{K_z}$ le facteur e^{-n}, est de la forme

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} &\rho(t) = 1 - \frac{n!\,e^n}{n^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{K_z}\left(\frac{e^{z\eta^{-1}-1}}{z\eta^{-1}}\right)^n \mathcal{F}\left(z;\frac{1}{n}\right)\frac{dz}{z}, \\ &\text{où } \mathcal{F}\left(z;\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_q}\dots dq, \end{aligned} \right.$$

et dans l'hypothèse (49), cette expression peut être développée pour n tendant vers l'infini, en une série asymptotiquement convergente (au sens de Poincaré). Pour cela remarquons que l'expression

$$(51)\qquad \left|\frac{e^{z\eta^{-1}-1}}{z\eta^{-1}}\right|,$$

égale à 1 sur la courbe C_η indiquée sur la figure 5, est supérieure à 1 à l'intérieur et à droite du lacet de C_η, et <1 dans le reste du plan.

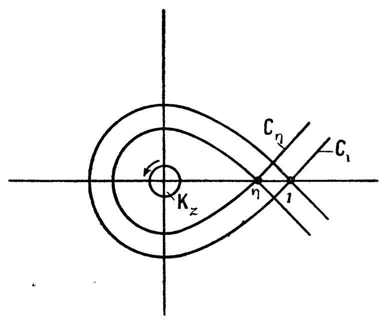

Fig. 5.

Les courbes $\left|\dfrac{e^{z\eta^{-1}-1}}{z\eta^{-1}-1}\right| = 1$ et $\left|\dfrac{e^{z-1}}{z}\right| = 1$.

Comme pour les grandes valeurs de n, la valeur de l'intégrale (50) est déterminée essentiellement par la fonction (51), il convient de remplacer notre chemin d'intégration K_z (*voir* la figure 5) par une courbe K'_z qui appartient en général à cette dernière région, à l'exception toutefois du point double $z=\eta$ où la fonction (51) prend la valeur 1. Ce choix est permis, car les seuls points de ramification de la fonction à intégrer, ceux des $w_\nu(z)$, sont situés sur la courbe $\left|\frac{e^{z-1}}{z}\right| = 1$ (C_1 dans la *fig.* 5) comme on le vérifie aisément, et l'on évite un pôle possible au point $z = q$ en fixant préalablement $R(C_q) > \eta$. On voit alors que pour n grand, seul l'élément de K'_z qui passe par le point $z = \eta$, contribue d'une manière essentielle à la valeur de l'intégrale (50); au moyen de calculs élémentaires que nous renonçons à reproduire ici, on trouve qu'il suffit, pour établir le développement asymptotique de la formule (48) ou (50), d'y remplacer z par une nouvelle variable d'intégration x selon la formule

$$\frac{z}{\eta} = 1 + x\sqrt{\frac{2}{n}}, \tag{52}$$

puis de développer la fonction à intégrer en série de Taylor suivant les puissances de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et d'intégrer ensuite terme à terme depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. En utilisant en outre la formule de Stirling

$$\frac{n!\, e^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right),$$

on déduit de l'équation (50)

$$\rho(t) = 1 - \mathcal{F}(\eta; 0) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{53^a}$$

donc de l'équation (48),

$$\rho(t) = 1 - s(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{C_q} e^{st(\eta - q)} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{q - w_\nu(\eta)}{\eta - w_\nu(\eta)} \frac{\eta^{s-1}\, dq}{q^s - \eta^s e^{s(q-\eta)}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{53^b}$$
$$(R(C_q) > \eta),$$

où $O\left(\frac{1}{n}\right)$ désigne une série divergente de la forme

$$\frac{a_1(t)}{n} + \frac{a_2(t)}{n^2} + \ldots$$

et où, comme dans la plupart de nos formules, $\int_{C_q}$ signifie la valeur principale. Passons ici à la limite $n = \infty$ et remplaçons q par ηq, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} P(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(t) = 1 - s(1-\eta)\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_q} e^{s\eta t(1-q)} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{q - z_\nu(\eta)}{1 - z_\nu(\eta)} \frac{dq}{q^s - e^{s\eta(q-1)}} \\ \qquad\qquad [R(C_q) = 1 + 0;\ \eta < 1], \end{array}\right. \tag{54}$$

où l'on a posé $z_\nu(\eta) = \frac{w_\nu(\eta)}{\eta}$, $\nu = 1, \ldots, s-1$, [*voir* l'équation (46)], de sorte que les $z_\nu(\eta)$ satisfont à l'équation

$$z^s - e^{s\eta(z-1)} = 0 \tag{55}$$

et en outre à la condition

$$|z_\nu(\eta)| < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{56}$$

Pour démontrer la dernière inégalité, remarquons que pour $0 < \eta \ll 1$, les modules des racines $w_\nu(\eta)$ de l'équation (46) qui nous intéressent sont approximativement donnés par $|w_\nu(\eta)| \approx \eta\left(1 - 2\eta \sin^2 \frac{\pi\nu}{s}\right)$, d'où

$$|z_\nu(\eta)| = \left|\frac{w_\nu(\eta)}{\eta}\right| \approx 1 - 2\eta \sin^2 \frac{\pi\nu}{s} < 1, \qquad \text{pour } 0 < \eta \ll 1;$$

en prolongeant $z_\nu(\eta)$ analytiquement le long du demi-axe positif des η, l'inégalité (56) subsiste car, hormis $z = 1$, le module d'une racine de l'équation (55) ne peut évidemment pas prendre la valeur 1. Comme, d'autre part, l'équation (55) possède exactement $s - 1$ racines à l'intérieur du cercle d'unité, ce qu'on vérifie aisément à l'aide du théorème de Rouché (pour la démonstration *voir* par exemple *loc. cit.* [8[a]], p. 76), les $z_\nu(\eta)$ sont déterminés d'une manière univoque par l'inégalité (56).

6. **Cas particuliers de la formule** (54). — La formule limite (54) correspond à l'hypothèse de l'équilibre statistique; il y a lieu d'indiquer toutefois que, pour l'utiliser en pratique, la condition supplémentaire

$$n(1-\eta)^2 \gg 1 \tag{57}$$

doit être satisfaite, car les termes $a_\nu(t)$ du développement asymptotique de l'équation (53) comportent un facteur $\frac{1}{(1-\eta)^{2\nu}}$. Par contre, si le premier membre de l'inégalité (57) n'est pas grand par rapport à l'unité, ce qui a lieu par exemple pour $\eta = 1$, le développement asymptotique de l'équation (48), ou encore le passage à la limite $\eta = \infty$, ne devront plus être faits sous la condition (49), mais en supposant que le premier membre de l'inégalité (57) est une grandeur constante, c'est-à-dire indépendante de n. On posera donc ici par exemple $n(1-\eta)^2 = 2c^2$, ou

$$\eta = 1 - c\sqrt{\frac{2}{n}}. \tag{58}$$

Dans ce dernier cas c'est plutôt l'espérance mathématique de durée d'attente θ [*voir* l'équation (11)] qui nous intéresse, et l'on trouve alors (*voir* par exemple *loc. cit.* [8a], p. 80) $\theta = O(\sqrt{n})$; en examinant, dans l'hypothèse (58), la probabilité $\rho(t)$, on posera

$$(59)\qquad \tau = st\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{\tau}{s}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

et l'on développera $\rho(t)$ pour les grands n en supposant τ constante, ce qui revient à mesurer les délais d'attente à une échelle $\frac{1}{s}\sqrt{\frac{n}{2}}$ fois plus grande que les durées d'opération. Nous nous contentons d'indiquer dans cet ordre d'idées, à titre d'exemple, la formule

$$(60)\qquad \rho(t) = 1 - e^{-2c\tau-\tau^2} + \tau\int_{\tau}^{\infty} e^{-x^2-2cx}\,dx + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \text{où } c \geqq 0$$

(*voir* pour la démonstration loc. cit. [8a], p. 742).

Par la suite, nous nous occuperons exclusivement de la formule limite (54), valable dans l'hypothèse (49), et nous l'étudierons tout d'abord dans le cas particulier d'un seul guichet ($s = 1$) où elle donne, en écrivant z à la place de q,

$$(61)\qquad \left\{\begin{array}{l} P(t) = 1 - (1-\eta)\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_z} e^{\eta t(1-z)}\frac{dz}{z - e^{\eta(z-1)}}, \qquad R(C_z) = 1 + 0 \\ \qquad\qquad (s = 1,\ \eta < 1,\ t > 0). \end{array}\right.$$

Le calcul de cette intégrale dépendant essentiellement du dénominateur $z - e^{\eta(z-1)}$, remarquons que les racines de l'équation

$$(62)\qquad z - e^{\eta(z-1)} = 0,$$

autres que $z = 1$, ont des parties réelles supérieures à l'unité, ce qu'on démontre par exemple en appliquant le théorème de Rouché au premier membre de cette équation pour le demi-plan $R(z) < 1$. Nous désignerons ici par z_0 la racine réelle différente de 1 de l'équation (62) et par z_ν, $\overline{z_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), les paires de racines imaginaires conjuguées numérotées suivant la grandeur des parties réelles. En déplaçant la droite d'intégration C_z vers l'infini du demi-plan droit, on trouve

$$(63)\qquad \left\{\begin{array}{l} P(t) = 1 - (1-\eta)\left[\dfrac{e^{-\eta t(z_0-1)}}{\eta z_0 - 1} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-\eta t(z_\nu-1)}}{\eta z_\nu - 1} + \frac{e^{-\eta t(\overline{z_\nu}-1)}}{\eta\overline{z_\nu} - 1}\right)\right] \\ \qquad\qquad (s = 1,\ \eta < 1,\ t > 0); \end{array}\right.$$

on a donc décomposé ainsi la probabilité $P(t)$ en la somme d'un terme apériodique et d'une infinité d'oscillations amorties.

Pour établir une autre formule, déplaçons dans l'équation (61) la courbe d'intégration dans le demi-plan gauche; alors on obtient, en tenant compte du résidu par rapport au pôle $z=1$ qui est égal à -1,

$$P(t) = -(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{R(z)=-0}\frac{e^{\eta t(1-z)}}{z}\frac{dz}{1-\dfrac{e^{\eta(z-1)}}{z}}$$

ou, en développant le dénominateur en série trigonométrique,

$$(64)\quad P(t) = -(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{R(z)=-0}\frac{e^{\eta t(1-z)}}{z}\left[\sum_{\nu=0}^{[t]}\frac{e^{\eta\nu(z-1)}}{z^{\nu}} + \frac{\dfrac{e^{\eta(z-1)([t]+1)}}{z^{[t]+1}}}{1-\dfrac{e^{\eta(z-1)}}{z}}\right]dz;$$

ici, $[t]$ désigne, comme d'habitude, le plus grand entier $\leqq t$. Dans la formule (64), la partie correspondant au deuxième terme s'annule, grâce au facteur $e^{\eta(z-1)([t]+1-t)}$, en déplaçant le chemin d'intégration vers l'infini du demi-plan gauche; par contre, les intégrales correspondant à la somme $\sum\limits_{\nu=0}^{[t]}$ peuvent être obtenues, en déplaçant le chemin d'intégration vers l'infini du demi-plan droit, comme résidus au pôle $z=0$, de sorte qu'on a enfin

$$(65)\qquad P(t) = (1-\eta)\sum_{\nu=0}^{[t]}\frac{\eta^{\nu}(\nu-t)^{\nu}}{\nu!}e^{\eta(t-\nu)}\qquad (s=1,\ \eta<1,\ t\geqq 0).$$

Par exemple, on a

$$(66)\qquad P(t) = \begin{cases}(1-\eta)\,e^{\eta t}, & \text{pour } 0\leqq t\leqq 1,\\ (1-\eta)\,e^{\eta t}-(1-\eta)\,\eta(t-1)\,e^{\eta(t-1)}, & \text{pour } 1\leqq t\leqq 2;\end{cases}$$

donc, $P(t)$ a un point anguleux pour $t=1$.

Revenant au cas d'un s quelconque, faisons une dernière application de l'équation (54) au calcul de $P(0)$, ce qui nécessite [*voir* la note (*)] le passage $t\to+0$ dans le deuxième membre. A ce dessein, nous amenons, comme dans l'exemple précédent, la droite d'intégration C_q dans le demi-plan $R(q)<0$, en tenant compte du résidu -1 par rapport au pôle $q=1$, pôle unique de la fonction à intégrer dans le demi-plan $R(q)\leqq 1$. En décomposant ensuite

$$\frac{1}{q^s-e^{s\eta(q-1)}} = \frac{1}{q^s}+\frac{e^{s\eta(q-1)}}{q^s[q^s-e^{s\eta(q-1)}]},$$

on trouve que, pour $t \to +0$, la partie de l'intégrale (54) correspondant au deuxième terme disparaît, tandis que la partie correspondant à $\frac{1}{q^s}$ donne

$$\mathrm{P}(0) = \frac{s(1-\eta)}{\prod_{\nu=1}^{s-1} [1 - z_\nu(\eta)]}, \tag{67}$$

où les $z_\nu(\eta)$ satisfont aux conditions (55) et (56).

La probabilité P(o), et surtout la probabilité contraire $1 - \mathrm{P}(0)$ qui est l'analogue de la probabilité de perte mentionnée au début de cet article dans les systèmes sans attente, ont une grande importance pour la pratique. Mais comme il est difficile d'évaluer numériquement la formule (67), surtout pour des valeurs élevées de s et pour des coefficients de rendement η voisins de l'unité, il s'est avéré indispensable d'ajouter à la théorie dont nous venons de donner un abrégé, un chapitre qui traite de la transformation de la formule (67), et d'une formule analogue pour les durées d'attente moyennes, en des expressions susceptibles d'être évaluées numériquement sans trop de difficultés. Or, on a

$$\begin{aligned}\log \mathrm{P}(0) &= \log s(1-\eta) - \sum_{\nu=1}^{s-1} \log[1 - z_\nu(\eta)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{K}_{|z|=1+0}} \log \frac{z^s - e^{s\eta(z-1)}}{(z-1)\prod_{\nu=1}^{s-1}[z - z_\nu(\eta)]} \frac{dz}{z-1},\end{aligned}$$

la dernière intégrale étant égale au résidu au point $z = 1$, puisque la fonction log... est régulière à l'intérieur et sur la frontière du cercle unité. En y ajoutant membre à membre l'égalité

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{K}_{|z|=1+0}} \log \frac{(z-1)\prod_{1}^{s-1}[z - z_\nu(\eta)]}{z^s} \frac{dz}{z-1},$$

qui est vérifiée par le fait que la fonction à intégrer est régulière et de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{z^2}$ dans le voisinage du point $z = \infty$, on obtient la formule

$$\log \mathrm{P}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1+0} \log\left(1 - \frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}\right) \frac{dz}{z-1} \tag{68}$$

qui sert de point de départ pour les développements ultérieurs. Comme

$$\left|\frac{e^{s\eta(z-1)}}{z^s}\right| < 1, \qquad \text{pour } 1 < |z| < \frac{1}{\eta},$$

on peut tout d'abord développer $\log(\ldots)$ en série et intégrer terme à terme, en raison de la convergence uniforme, ce qui donne la formule

$$\log P(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[e^{-s\eta k}\sum_{\mu=0}^{sk-1}\frac{(s\eta k)^{\mu}}{\mu!} - 1\right], \tag{69}$$

qui n'exige plus le calcul des racines d'une équation transcendante.

Pour trouver ensuite une valeur approchée de $P(0)$, valable pour les grandes valeurs de s, on n'a qu'à traiter la première intégrale de la série dont nous venons de parler, d'après les principes indiqués lors de l'étude de l'équation (50). En supposant que $\eta < 1$ est une constante, on obtient

$$\log P(0) = -\frac{1}{1-\eta}\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{\sqrt{2\pi s}}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], \tag{70}$$

donc, à une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{s}$ près,

$$1 - P(0) \approx \frac{1}{1-\eta}\frac{(\eta e^{1-\eta})^s}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Cette formule approximative devient inutilisable dans le cas le plus important où, le nombre s des lignes parallèles étant grand, le coefficient de rendement η tend vers l'unité, c'est-à-dire où, pour un grand faisceau de lignes, l'on tend à approcher de l'état idéal d'une utilisation parfaite. Pour couvrir ce cas, nous avons posé

$$\eta = 1 - b\sqrt{\frac{2}{s}} \tag{71}$$

et supposant b constante, nous avons développé en série asymptotique suivant $\frac{1}{\sqrt{s}}$ l'intégrale (68) et l'intégrale analogue qu'on obtient dans notre théorie pour le délai moyen d'attente $\Theta = \int_0^{\infty} t\, dP(t)$.

Pour $\log P(0)$, on obtient ainsi en première approximation une fonction qui ne dépend plus que de b, à savoir

$$\log P(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_z} \log(1 - e^{z^2-2bz})\frac{dz}{z} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right), \qquad \text{où } R(C_z) = +0, \tag{72}$$

et la dernière intégrale, qui se rapporte à la théorie de la fonction ζ de Riemann, peut aisément être développée de diverses manières en série suivant de simples fonctions de b. C'est ce paramètre b qui, pour les grandes valeurs de s, évalue dans quelle mesure l'utilisation d'un groupe de guichets, ou d'un faisceau de lignes mises en parallèle, s'approche du cas idéal $\eta = 1$.

Rappelons encore que la formule (72) a été déduite dans l'hypothèse de l'existence d'un équilibre statistique ($n = \infty$) et de durées égales d'opération; pour les détails du calcul nous renvoyons à nos publications qui contiennent aussi des graphiques des probabilités en question. Des difficultés analytiques très ardues devraient être surmontées pour établir l'analogue de la dernière formule pour le cas d'une fonction de répartition plus générale.

7. Sommaire des articles antérieurs de l'auteur concernant les problèmes qui se présentent dans la théorie de l'encombrement des réseaux téléphoniques. — Nos méthodes de calcul ayant été illustrées par les développements précédents, nous terminerons ce chapitre en traitant sommairement de nos diverses contributions à cette partie du Calcul des Probabilités. Tout d'abord, nous avons traité [8^a] le cas d'une durée d'opération constante, $t_0 = 1$, en prescrivant, comme loi de priorité, que chaque visiteur soit servi selon l'ordre de son arrivée. Les n visiteurs se distribuent alors, comme nous l'avons vu, selon leur ordre d'arrivée sur les s guichets, et l'on obtient pour la durée d'attente de la $m^{\text{ième}}$ personne la formule (16), donc une fonction relativement simple des variables x_ν.

Afin d'être à même d'étudier aussi le cas général où la répartition des durées d'opération est donnée d'une manière quelconque, nous avons supposé d'abord [8^a] dans le cas général une autre loi de priorité, à savoir que les n personnes sont toujours réparties selon l'ordre de leur arrivée sur les s guichets de manière que la $(\mu s + a)^{\text{ième}}$ personne soit toujours assignée devant le $a^{\text{ième}}$ guichet. Évidemment, cette loi qui se confond avec l'ancienne dans le cas particulier d'une seule durée d'opération, comporte en général des retards supplémentaires puisque, selon elle, une personne est obligée d'attendre jusqu'à ce que son guichet soit devenu libre, même si pendant ce temps un autre guichet est inoccupé; mais avec cette loi, on obtient pour les durées d'attente la formule

$$(73)\qquad \tau_m = \operatorname{Max}^+\begin{pmatrix} x_a + t_a + t_{a+s} + \ldots + t_{m-s} - x_m,\ x_{a+s} + t_{a+s} \\ + t_{a+2s} + \ldots + t_{m-s} - x_m,\ \ldots,\ x_{m-s} + t_{m-s} - x_m \end{pmatrix},$$

où t_ν désigne la durée d'opération de la $\nu^{\text{ième}}$ personne, donc une généralisation simple de l'équation (16).

Grâce à cette formule, toute la théorie peut être établie exactement comme dans le cas d'une seule durée d'opération. Par exemple, on obtient comme fonction de répartition des délais d'attente en équilibre statistique, une généralisation de la formule (54), à savoir,

$$(74)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{P}(t) = \lim_{n \to \infty} \rho(t) = 1 - s(1-\eta)\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_q} e^{s\eta t(1-q)} \prod_{\nu=1}^{s-1} \frac{q - z_\nu(\eta)}{1 - z_\nu(\eta)} \frac{dq}{q^s - \varepsilon[s\eta(q-1)]} \\ & \qquad \mathrm{R}(\mathrm{C}_q) = 1 + 0 \qquad (t > 0); \end{aligned} \right.$$

ici, $\varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt}\, df(t)$ désigne la fonction caractéristique de la fonction de répartition $f(t)$ des durées d'opération, et les $z_\nu(\eta)$ sont les $s-1$ racines de l'équation

$$(75)\qquad z^s - \varepsilon[s\eta(z-1)] = 0,$$

qui sont situées à l'intérieur du cercle unité. Dans les dernières équations, on a naturellement pris, comme unité de temps, la durée moyenne d'opération, de manière que

$$(76)\qquad \int_0^\infty t\, df(t) = 1.$$

Dans le cas d'une seule durée d'opération, on a $f(t) = 0$ pour $0 < t < 1$, et $f(t) = 1$ pour $1 < t < \infty$, donc, $\varepsilon(z) = e^z$, ce qui nous ramène à l'équation (54). Ajoutons encore la fonction caractéristique de $\mathrm{P}(t)$, à savoir,

$$(77)\quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{zt}\, d\mathrm{P}(t) = \frac{s(1-\eta)}{\prod_{\nu=1}^{s-1}[1 - z_\nu(\eta)]} \left[\frac{\prod_{\nu=0}^{s-1}\left[1 + \dfrac{z}{s\eta} - z_\nu(\eta)\right]}{\left(1 + \dfrac{z}{s\eta}\right)^s - \varepsilon(z)} - 1 \right], \\ & \qquad \text{où } z_0(\eta) = 1, \qquad \mathrm{R}(z) \leqq 0. \end{aligned} \right.$$

Cette théorie, valable pour un $f(t)$ quelconque, est riche en énoncés et mène à des formules relativement simples, mais, en raison de la loi

« injuste » de priorité que nous avons prise comme base, elle fournit des résultats numériques trop défavorables (1).

C'est pourquoi nous avons repris ce problème dans toute sa généralité [8c] en partant de nouveau de l'ancienne loi « juste » de priorité. Dans ce cas, on obtient pour τ_m la formule de récurrence suivante

$$(78)\qquad \begin{cases} \tau_m = \underset{\nu=1,2,\ldots,m-1}{\operatorname{Max}^{(s)+}} (x_\nu + \tau_\nu + t_\nu - x_m) \\ (m = s+1, \ldots, n;\ \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_s = 0), \end{cases}$$

où $\underset{\nu=1,\ldots,n}{\operatorname{Max}^{(s)}} a_\nu$ désigne le $s^{\text{ième}}$ nombre dans la suite $a_1, \ldots, a_n$, en partant du haut, et où le signe$^+$ [*voir* l'équation (5)] rappelle que, le cas échéant, ce nombre doit être remplacé par zéro.

Donc, ici τ_m est une fonction très compliquée des variables x_ν et t_ν et dans sa définition, le signe fonctionnel $\operatorname{Max}^{(s)+}$ intervient 2^{m-s-1} fois.

Toutefois, grâce à l'introduction d'intégrales généralisées n-uples de Fourier, on parvient même ici à effectuer les intégrations par rapport aux dx_ν et aux $df(t_\nu)$, du moins d'une manière formelle, et à réduire notre problème à un problème de l'analyse complexe, à savoir, résoudre, dans un domaine complexe, deux systèmes assez particuliers d'équations intégrales linéaires simultanées [les équations (5) et (7) de la deuxième partie de cet article].

On parvient ensuite, sous certaines hypothèses concernant les propriétés analytiques des fonctions de répartition $f(t)$, à écrire les solutions de ces équations intégrales sous forme finie; de cette manière, on peut traiter, du moins théoriquement, tous les cas où les $f(t)$ sont des fonctions en escalier, à marches d'égale largeur, c'est-à-dire satisfaisant à une loi

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i, \qquad \nu h \leqq t < (\nu+1)h \quad (\nu = 0, 1, \ldots, N-1);$$

$$f(t) = \sum_{1}^{N} a_i = 1 \qquad (t \geqq N h),$$

et en outre les cas où les $f(t)$ sont données par des formules de la forme

$$f(t) = 1 - \sum a_\nu e^{-\alpha_\nu t}.$$

(1) Note ajoutée le 13 Avril 1946. — Récemment (*voir* [4b] et [8h]) les délais d'attente ont été étudiés en adoptant la loi du hasard comme loi de priorité, et en supposant une répartition exponentielle des durées de communication.

Dans un autre article [8b], nous avons traité au moyen de notre méthode le système à s guichets sans attente possible, en supposant une répartition arbitraire des durées virtuelles d'opération. Il y a lieu dans ce cas de définir une fonction $\mathbf{s}_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_{m-1})$ égale à 1 ou à 0 selon que la $m^{\text{ième}}$ personne est servie ou non. Pour $\mathbf{s}_m$, on obtient

$$(79)\quad \begin{cases} \mathbf{s}_m = \mathbf{s} \underset{\nu=1,\ldots,m-1}{\operatorname{Min}^{(s)}} (x_m - x_\nu - s_\nu t_\nu) \qquad (m = s+1, \ldots, n); \\ \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \ldots = \mathbf{s}_s = 1, \end{cases}$$

donc une formule de récurrence assez compliquée. Dans cette théorie, on cherche surtout les probabilités P_ν (*voir* l'introduction) pour que ν guichets soient occupés, et en premier lieu c'est la probabilité de perte P_s (en téléphonie : perte de communications ou loss of talks) qui nous intéresse. P_s s'exprime à l'aide des fonctions (79) de la manière suivante

$$(80)\quad \begin{cases} P_s = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \bar{\mathbf{s}}_m, \\ \text{où } \bar{\mathbf{s}}_m = \dfrac{n!}{T^n}\displaystyle\int_0^T dx_1 \ldots \int_{x_{n-1}}^T dx_n \int_0^\infty df(t_1) \ldots \int_0^\infty df(t_{n-1})\,\mathbf{s}_m(x_1, \ldots, t_{m-1}). \end{cases}$$

En effectuant ici les intégrations et développant le résultat asymptotiquement pour les grandes valeurs de n, on obtient en première approximation les formules d'Erlang dont nous avons parlé au début et qui ne dépendent pas de $f(t)$. Par contre, les termes suivants $\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots$ des développements des diverses probabilités dépendent de $f(t)$ par l'intermédiaire des solutions d'un certain système de s équations intégrales linéaires simultanées déterminé uniquement par $f(t)$; ce système est difficile à traiter même dans le cas d'une seule durée d'opération.

En outre, nous avons traité suivant une méthode légèrement modifiée [8e] divers autres problèmes de probabilités qui se posent pour un système à attente et à une seule durée d'opération, et les principaux résultats des publications [8a] ont été résumés dans un article [8g] écrit surtout à l'intention des techniciens. Les développements, convergents et asymptotiques, de la perte de communication et du délai moyen d'attente ont été traités dans [8d]; des abaques calculés d'après les formules des articles [8d] se trouvent dans [8f].

DEUXIÈME PARTIE.

TRAITEMENT D'UN PROBLÈME A DEUX DURÉES D'OPÉRATION POSSIBLES.

---

1. Récapitulation de la théorie générale; résolution des équations intégrales (5). — Nous passons maintenant à la IIe partie de nos développements qui a pour but de traiter un exemple de la théorie générale établie dans notre article [8e]. Dans cet article, où l'on a admis une répartition quelconque $f(t)$ des durées d'opération, nous avons ramené le problème de trouver la probabilité $\rho(t)$ d'un délai d'attente $\leqq t$ devant un groupe de s guichets, à un certain problème d'analyse complexe qui, moyennant certaines hypothèses sur la nature analytique de $f(t)$, peut être résolu sous forme finie. Aux deux exemples que nous y avons traités, à savoir celui d'une répartition exponentielle, $f(t) = 1 - e^{-t}$, et celui d'une seule durée d'opération, nous ajouterons ici le cas où seules deux durées d'opération, h et $2h$, respectivement de probabilités

$$a_1 \quad \text{et} \quad a_2 = 1 - a_1 \qquad (0 < a_1 < 1),$$

sont supposées possibles.

Dans ce cas, on a comme fonction de répartition

$$(1) \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t < h), \\ a_1 & (h \leqq t < 2h), \\ 1 & (2h \leqq t < \infty); \end{cases}$$

il s'agit donc d'une fonction en escalier qui saute de 0 à a_1 pour $t = h$ et de a_1 à $a_1 + a_2 = 1$ pour $t = 2h$. Prenant la durée moyenne d'opération pour unité de temps, nous avons $\int_0^\infty t\,df(t) = 1$, ce qui donne pour la fonction (1)

$$(2) \qquad ha_1 + 2ha_2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{1}{a_1 + 2a_2},$$

et l'on obtient pour la fonction caractéristique

$$(3) \quad \varepsilon(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,df(t) = a_1 e^{hz} + a_2 e^{2hz} \qquad \left(a_1 + a_2 = 1,\ h = \frac{1}{a_1 + 2a_2}\right),$$

donc un polynome du second degré en e^{hz}, ce qui rend l'application de notre théorie relativement aisée.

Dans [8^c], page 519, nous avons établi pour $\rho(t)$ la formule suivante

$$(4)\quad \rho(t) = \frac{(n-1)!}{\mathrm{T}^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\times\int_{\mathrm{C}_p}\int_{\mathrm{C}_q}\int_{\mathrm{K}_z}\frac{e^{s(\mathrm{T}-t)p+stq}}{z^{n+1}(p-z)}\left[\frac{z}{p-q}\,\mathrm{B}_{00}-\mathrm{B}_0(p)\right]dp\,dq\,dz,\qquad (t>0),$$

dont les courbes d'intégration sont représentées figure 6.

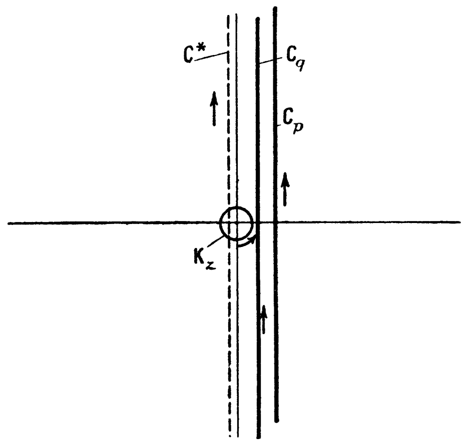

Fig. 6.

Les chemins d'intégration des intégrales II., (4), (5^a), (5^e), (7^a).

$\mathrm{B}_{00}=\mathrm{B}_{00}(p, q, z)$ et $\mathrm{B}_0(y)=\mathrm{B}_0(y; p, q, z)$ sont des fonctions analytiques des variables complexes y; p, q, z, dont le calcul nécessite la résolution de deux systèmes d'équations intégrales linéaires simultanées. B_{00} fait partie d'un ensemble de s fonctions B_{00}, $\mathrm{B}_{10}(p_1)$, $\mathrm{B}_{20}(p_1, p_2)$, ..., $\mathrm{B}_{s-1\,0}(p_1, \ldots, p_{s-1})$ (dont la dépendance de p, q, z ne sera pas indiquée expressément) qui satisfont au système d'équations intégrales

$$(5^a)\quad\left\{\begin{array}{l}(q-z)\,\mathrm{B}_{k0}(p_1, \ldots, p_k)\\ \quad=\dfrac{z}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathrm{C}^*}\varepsilon(-s\xi)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{p-q-\xi-\sum_{\nu=1}^{k}p_\nu}\right)\mathrm{B}_{k+1,0}(p_1,\ldots,p_k,\xi)\,d\xi+\delta_0^k\\ \qquad\qquad (0\leqq k\leqq s-1)\\ \qquad\left[\mathrm{R}(\mathrm{C}^*)=-0,\ \mathrm{R}\left(p-q-\xi-\sum_1^k p_\nu\right)>0\right],\end{array}\right.$$

où l'on a posé, pour obtenir des formules plus simples

$$(5^b) \qquad B_{s,0}(u_1, \ldots, u_s) = \sum_{\rho=0}^{s-1} (-1)^{s-1-\rho} \sum_{1' \ldots \rho'} B_{\rho,0}(u_{1'}, \ldots, u_{\rho'}).$$

Ici, le signe $\sum\limits_{1'\ldots\rho'}$ désigne des sommes étendues à toutes les combinaisons ρ à ρ de s éléments $1, \ldots, s$; comme d'habitude, on a posé $\delta_i^i = 1$; $\delta_i^k = 0$, $i \neq k$.

On cherche les solutions, analytiques en $p_1, \ldots, p_{s-1}$; p, q, z, du système (5) dans le domaine

$$(6) \qquad R\left(p - q - \sum_{\nu=1}^{k} p_\nu\right) > -c' \quad (0 \leqq k \leqq s-1), \qquad R(q) > c'' > 0, \qquad |z| < c_1,$$

où c' est une constante telle que la fonction $\varepsilon(sz)$ soit régulière pour $R(z) < c'$ (c'est évidemment le cas pour tout $c' \leqq 0$); c'' et c_1 sont deux constantes positives dont la dernière, $c_1 = c_1(c', c'')$, est suffisamment petite [1].

---

[1] *Note ajoutée le 25 janvier 1945.* — Entre temps, nous avons obtenu des formules explicites pour les solutions B_{k0} des équations (5^a), (5^b). En supposant, pour simplifier, que

$$|\varepsilon(\xi)| = O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$$

dans l'infini du demi-plan $R(\xi) < \delta$, $(\delta > 0)$, ces formules prennent la forme suivante

$$(5^c) \quad \left\{ \begin{aligned} & B_{k0}(p_1, \ldots, p_k; p, q, z) \\ & \quad = (s-k)(z-q)s - 1 \frac{1}{(2\pi i)^{s-1}} \int_{C_1^\star} \cdots \int_{C_{s-1}^\star} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{1}{q - z\varepsilon(-s\xi_i)} \\ & \qquad \times \left[\frac{1}{q - z\varepsilon\left(-sp + sq + s\sum\limits_{j=1}^{s-1} \xi_j\right)} - \frac{1}{q} \right] \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{s-1}}{(\xi_1 - p_1) \ldots (\xi_k - p_k)\xi_{k+1} \ldots \xi_{s-1}} \\ & \quad + (z-q)^{s-1} \sum_{1' \ldots (k-1)'} \frac{1}{(2\pi i)^{s-1}} \int_{C_1^\star} \cdots \int_{C_{s-1}^\star} \prod_{i=1}^{s-1} \frac{1}{q - z\varepsilon(-s\xi_i)} \\ & \qquad \times \left[\frac{1}{q - z\varepsilon\left(-sp + sq + s\sum\limits_{j=1}^{s-1} \xi_j\right)} - \frac{1}{q} \right] \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_{s-1}}{(\xi_1 - p_{1'}) \ldots (\xi_{k-1} - p_{(k-1)'})\xi_k \ldots \xi_{s-1}} \\ & \quad + \frac{z^{s-k}(z-q)^{k-1}}{q^s} + \frac{\delta_k^0}{q - z} \qquad (0 \leqq k \leqq s-1); \\ & \qquad R(\xi_k - p_k) > 0; \quad R(p_k) < 0; \quad R(p - q) > 0; \quad R(q) > 0. \end{aligned} \right.$$

De même, la fonction $B_0(y)$ appartient à un ensemble de s fonctions $B_0(y)$, $B_1(p_1; y)$, ..., $B_{s-1}(p_1, \ldots, p_{s-1}; y)$, qui satisfont au système d'équations intégrales

$$(7^a)\quad \left\{\begin{aligned} &(y-z)\,B_k(p_1,\ldots,p_k;\,y) - z\,B_{k,0}(p_1,\ldots,p_k) \\ &\quad = \frac{z}{2\pi i}\int_{C^*}\varepsilon(-s\xi)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{p-y-\xi-\sum_{\nu=1}^{k}p_\nu}\right)B_{k+1}(p_1,\ldots,p_k,\xi;\,y)\,d\xi \\ &\quad -\frac{z}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{\varepsilon(-s\xi)}{p-y-\xi-\sum_{\nu=1}^{k}p_\nu}B_{k+1}\left(p_1,\ldots,p_k,\xi;\,p-\xi-\sum_{\nu=1}^{k}p_\nu\right)d\xi \\ &\qquad\qquad (0 \leqq k \leqq s-1); \end{aligned}\right.$$

$$(7^b)\qquad B_s(u_1,\ldots,u_s;\,y) = \sum_{\rho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\rho}\sum_{1'\ldots\rho'}B_\rho(u_{1'},\ldots,u_{\rho'};\,y),$$

dans le domaine (6) pour

$$(8)\qquad \left|\frac{z}{y}\right| < c_2,$$

c_2 désignant une constante positive et suffisamment petite. En raison des procédés qui ont été employés dans [8^c] pour établir ces deux systèmes d'équations, nous sommes sûrs à priori de l'existence, l'analycité et l'unicité des solutions cherchées et du fait qu'elles sont des séries de Taylor en z et $\frac{z}{y}$, de la forme $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{z}{y}\right)^\nu P_\nu(z)$, de sorte que l'on a

$$(9)\qquad B_k(p_1,\ldots,p_k;\,y) = O\left(\frac{1}{y}\right)\quad \text{pour } y\to\infty \qquad (k=0,1,\ldots,s-1).$$

Dans l'article cité, il a été établi entre autres que pour des fonctions caractéristiques $\varepsilon(z)$ qui sont des polynomes en e^{hz}, ces deux systèmes d'équations intégrales peuvent être résolus sans recourir à des processus infinis, et particulièrement les deux fonctions qui seules figurent dans la formule (4) sont alors obtenues, l'une, B_{00}, par la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires, tandis que l'autre, $B_0(y)$, s'avère comme fonction rationnelle de y et d'une partie des racines d'une certaine équation transcendante.

Nous appliquerons maintenant les procédés indiqués dans [8^c], avec toutefois certaines modifications qui permettent d'abréger quelque peu les calculs, au cas de la fonction caractéristique particulière (3). En essayant de résoudre le système (5) par la méthode des approximations successives (en partant par exemple des valeurs approchées $= 0$ des $B_{k,0}$), on reconnaît tout d'abord, que pour $|z|$ suffisamment petit, ce processus converge et que aussi bien les approximations que leurs valeurs limites c'est-à-dire les solutions, sont des séries de Taylor en

$$(10) \qquad e^{\operatorname{sh} p_1}, \quad e^{\operatorname{sh} p_2}, \quad \ldots, \quad e^{\operatorname{sh} p_{s-1}},$$

et enfin que la même propriété subsiste pour les solutions du système (7).

Comme $B_{s,0}(u_1, \ldots, u_s)$ est, en raison de l'équation (5^b), une fonction symétrique des variables u_i, tous les $B_{k,0}(p_1, \ldots, p_k)$ sont, grâce à l'équation (5^a), symétriques en $p_1, \ldots, p_k$; par conséquent, leurs développements, en séries de Taylor par rapport aux $e^{\operatorname{sh} p_\nu}$, commenceront par les fonctions symétriques élémentaires des grandeurs (10). On peut donc poser

$$(11) \qquad B_{k,0}(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{i=0}^{k} b_{ik} \sum_{1' \ldots i'} e^{\operatorname{sh} \sum_{1'}^{i'} p_\nu} + \ldots \qquad (k = 0, 1, \ldots, s),$$

où les termes qui contiennent au moins un facteur quadratique $(e^{\operatorname{sh} p_\nu})^2 = e^{2 \operatorname{sh} p_\nu}$ sont indiqués par des points; les coefficients b_{ik} ne dépendent que des paramètres p, q, z, et les sommes $\sum\limits_{1' \ldots i'}$ doivent être étendues à toutes les combinaisons i à i de k éléments. De la même manière, l'on obtient pour les $B_k(p_1, \ldots, p_k; y)$

$$(12) \qquad B_k(p_1, \ldots, p_k; y) = \sum_{i=0}^{k} \beta_{ik}(y) \sum_{1' \ldots i'} e^{\operatorname{sh} \sum_{1'}^{i'} p_\nu} + \ldots \qquad (k = 0, 1, \ldots, s).$$

En effectuant, selon l'équation (5^a), l'opération

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_*} (a_1 e^{-\operatorname{sh} \xi} + a_2 e^{-2 \operatorname{sh} \xi}) \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p - q - \xi - \sum\limits_{1}^{k} p_\nu} \right) \ldots d\xi$$

dans la série qui résulte de la formule (11) pour $B_{k+1,0}(p_1, \ldots, p_k, \xi)$, à savoir

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & \mathrm{B}_{k+1,0}(p_1,\ldots,p_k,\xi)\\
&=\sum_{i=0}^{k} b_{i,k+1}\sum_{1'\ldots i'} e^{\operatorname{sh}\sum_{1'}^{i'}p_\nu}+e^{\operatorname{sh}\xi}\sum_{i=0}^{k} b_{i+1,k+1}\sum_{1'\ldots i'} e^{\operatorname{sh}\sum_{1'}^{i'}p_\nu}+\ldots\\
&=f(p_1,\ldots,p_k)+e^{\operatorname{sh}\xi}g(p_1,\ldots,p_k)+\ldots,
\end{aligned}
$$

et en déplaçant C^*, selon le signe de l'exposant des termes $e^{\pm\nu\operatorname{sh}\xi}$ en question, vers l'infini des demi-plans droit ou gauche, on obtient

$$
\begin{aligned}
&(q-z)\,\mathrm{B}_{k,0}(p_1,\ldots,p_k)\\
&=z\left(\left\{a_1\left[e^{\operatorname{sh}\left(\sum_1^k p_\nu+q-p\right)}-1\right]+a_2\left[e^{2\operatorname{sh}\left(\sum_1^k p_\nu+q-p\right)}-1\right]\right\}f(p_1,\ldots,p_k)\right.\\
&\qquad\left.+a_2\left[e^{\operatorname{sh}\left(\sum_1^k p_\nu+q-p\right)}-1\right]g(p_1,\ldots,p_k)+\ldots\right)+\delta_0^k,
\end{aligned}
$$

et ici chacun des termes indiqués par des points a au moins un facteur quadratique $e^{2\operatorname{sh}p_\nu}$.

En introduisant dans cette équation que nous divisons encore par z, les expressions résultant des formules (11) et (13), et en égalant les coefficients des expressions

$$
(14)\qquad \sum_{1'\ldots i'} e^{\operatorname{sh}\sum_{1'}^{i'}p_\nu}\qquad (i=0,1,\ldots,k),
$$

nous obtiendrons donc des équations où ne figurent que les coefficients b_{ik} et $b_{i,k+1}$ écrits dans (11) et (13), à savoir

$$
(15)\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{q-z}{z}b_{ik}+b_{i,k+1}+a_2b_{i+1,k+1}-\delta_i^k\Theta(a_1b_{0,k+1}+a_2b_{1,k+1})-\delta_0^k\Theta^2a_2b_{0,k+1}=\dfrac{\delta_0^k}{z}\\
\qquad (i=0,1,\ldots,k;\ k=0,1,\ldots,s-1),
\end{array}\right.
$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$
(16)\qquad \Theta=\Theta(p,q)=e^{\operatorname{sh}(q-p)}.
$$

En introduisant, en outre, les développements (11) dans l'équation (5^b), et égalant les coefficients des expressions (14), on obtient les équations

$$
(17)\qquad b_{is}-\sum_{k=i}^{s-1}(-1)^{s-1-k}C_{s-i}^{s-k}b_{ik}=0\qquad (i=0,1,\ldots,s),
$$

desquelles nous déduisons immédiatement, pour $i = s$, la relation

$$(18) \qquad b_{s,s} = 0.$$

Les formules (15) et (17) constituent un système de $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ équations linéaires non homogènes pour les $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ inconnues b_{ik}. Désignons la matrice des coefficients de ce système par $M(q)$, les mineurs de la première ligne de $M(q)$ par $\mathfrak{M}_{00,ik}(q)$ et le déterminant $|M(q)|$ par $\mathcal{D}(q)$. On reconnaît immédiatement que

$$\mathcal{D}(q) = \mathcal{D}(q; p, z)$$

est un polynome, à coefficients numériques, en $\frac{q}{z}$ et $\Theta = e^{s\mathrm{h}(q-p)}$, donc une fonction entière de q dont certains zéros nous intéresseront plus tard.

La théorie élémentaire des équations linéaires nous fournit les formules de résolution

$$(19^a) \qquad b_{ik} = \frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(q)}{z\,\mathcal{D}(q)} = \frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(q; p, z)}{z\,\mathcal{D}(q; p, z)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s)$$

qui nous donnent en particulier, pour $i = k = 0$, grâce à l'équation (11), la fonction

$$(19^b) \qquad B_{00} = b_{00} = \frac{\mathfrak{M}_{00,00}(q)}{z\,\mathcal{D}(q)}$$

qui figure dans la formule de probabilité (4).

En vue de calculer effectivement $\mathcal{D}(q)$ et de préparer les développements ultérieurs, nous simplifierons le système des équations (15), (17) en y éliminant les $\frac{s(s+1)}{2}$ inconnues b_{ik} $(i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s-1)$. On voit qu'en vertu de la formule (15), les b_{ik} s'expriment par les $b_{i,k+1}$ pourvu que l'on admette que $q \neq z$, hypothèse qui est à la base des transformations suivantes. En itérant cette formule $s-k$ fois, on peut donc exprimer les b_{ik} en fonction des b_{is}; ce calcul donne

$$(20) \qquad b_{ik} = \left(\frac{-z}{q-z}\right)^{s-k} \left[\sum_{\nu=0}^{s-k} C_{s-k}^{\nu} a_2^{\nu} b_{i+\nu,s} - \delta_i^k \Theta \sum_{\nu=0}^{s-k-1} a_2^{s-k-1-\nu} \times \sum_{\rho=0}^{\nu} C_\nu^\rho a_2^\rho (a_1 b_{\rho,s} + a_2 b_{\rho+1,s}) - \delta_0^k \Theta^2 a_2^s b_{0,s} \right] + \frac{\delta_0^k}{q-z}.$$

En simplifiant ici le terme $\sum_{\nu=0}^{s-k-1}\sum_{\rho=0}^{\nu} = \sum_{\rho=0}^{s-k-1}\sum_{\nu=\rho}^{s-k-1}$ et en posant, pour abréger,

$$b_{i,s} = b_i, \tag{21}$$

l'on obtient ensuite

$$\left\{ b_{ik} = \left(\frac{-z}{q-z}\right)^{s-k}\left[\sum_{\nu=0}^{s-k} C_{s-k}^{\nu} a_2^{\nu} b_{i+\nu} - \delta_i^k \Theta\left(\sum_{\rho=0}^{s-k} C_{s-k}^{\rho} a_2^{\rho} b_\rho - a_2^{s-k} b_0\right) - \delta_0^k \Theta^2 a_2^s b_0\right] + \frac{\delta_0^k}{q-z} \right. \tag{22}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s-1).$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (17) et simplifiant, nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{s-i} C_{s-i}^{\nu} a_2^{\nu} \frac{q^{s-i-\nu} z^{\nu}}{(q-z)^{s-i}} b_{i+\nu} \\ &\quad - \left(\frac{z}{q-z}\right)^{s-i} \Theta\left(\sum_{\rho=0}^{s-i} C_{s-i}^{\rho} a_2^{\rho} b_\rho - a_2^{s-i} b_0\right) - \delta_0^i\, \Theta^2 \left(\frac{z}{q-z}\right)^s a_2^s b_0 = \frac{(-1)^{s-1}\delta_0^i}{q-z} \\ &\qquad (i = 0, 1, \ldots, s). \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Multiplions maintenant la $i^{\text{ième}}$ équation (23) par $(-1)^{i-k} C_{s-k}^{i-k} a_2^i \left(\frac{q-z}{z}\right)^{s-i}$, où k signifie un entier $(0 \leqq k \leqq s)$, et sommons de $i = k$ jusqu'à $i = s$. On obtient alors pour la première somme double $\sum_{i=k}^{s}\sum_{\nu=0}^{s-i}$, en posant $i + \nu = \rho$, et introduisant i et ρ comme nouveaux indices de sommation

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{s}\sum_{\nu=0}^{s-i} &= \sum_{i=k}^{s}\sum_{i+\nu=i}^{s} = \sum_{i=k}^{s}\sum_{\rho=i}^{s} \\ &= \sum_{\rho=k}^{s}\sum_{i=k}^{\rho}\left(\frac{q}{z}\right)^{s-\rho} a_2^{\rho} b_\rho (-1)^{i-k} \frac{(s-k)!}{(s-i)!\,(i-k)!}\,\frac{(s-i)!}{(s-\rho)!\,(\rho-i)!} \\ &= \sum_{\rho=k}^{s}\left(\frac{q}{z}\right)^{s-\rho} a_2^{\rho} b_\rho C_{s-k}^{s-\rho} \sum_{i=k}^{\rho} (-1)^{i-k} C_{\rho-k}^{i-k} \\ &= \sum_{\rho=k}^{s}\left(\frac{q}{z}\right)^{s-\rho} a_2^{\rho} b_\rho \delta_\rho^k = \left(\frac{q}{z}\right)^{s-k} a_2^k b_k. \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme double à effectuer, on obtient

$$\sum_{i=k}^{s}\sum_{\rho=0}^{s-i}=\sum_{\rho=0}^{s-k}\sum_{i=k}^{s-\rho} C_{s-k}^{\rho} a_2^{k+\rho} b_\rho (-1)^{i-k} a_2^{i-k} C_{s-\rho-k}^{i-k}$$
$$=\sum_{\rho=0}^{s-k} C_{s-k}^{\rho} a_2^{k+\rho} b_\rho (1-\alpha_2)^{s-k-\rho}$$
$$=\sum_{\rho=0}^{s-k} C_{s-k}^{\rho} a_1^{s-k-\rho} a_2^{k+\rho} b_\rho.$$

Donc, on a finalement,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{q}{z}\right)^{s-k} a_2^k b_k - \Theta\left(\sum_{\rho=0}^{s-k} C_{s-k}^{\rho} a_1^{s-k-\rho} a_2^{k+\rho} b_\rho - \delta_k^s a_2^s b_0\right) - \delta_0^k \Theta^2 a_2^s b_0 \\ &= \frac{(-1)^{s-1}(q-z)^{s-1}}{z^s}\,\delta_0^k \\ &\qquad (k=0,1,\ldots,s). \end{aligned}\right.$$

En résolvant par rapport aux b_k, ce système de $s+1$ équations linéaires non homogènes, dont la dernière [*voir* l'équation (18)] est tout simplement $b_s=0$, on obtient immédiatement, grâce à l'équation (22), tous les b_{ik}, et surtout la grandeur $b_{00}=B_{00}$, en fonction de p, q, z.

On peut d'ailleurs simplifier l'aspect des équations (24) en les multipliant par $a_1^{k-2s}a_2^{s-k}$ et en introduisant les notations suivantes [*voir* aussi les équations (16) et (20)]

$$(25^a)\qquad x_k=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k b_k=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^k b_{k,s}\qquad (k=0,1,\ldots,s),$$

$$(25^b)\qquad x=\frac{a_2}{a_1^2}\,\frac{q}{z},\qquad u=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^s\Theta=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^s e^{s\operatorname{sh}(q-p)}.$$

Les équations (24) prennent alors la forme

$$(26^a)\quad x^{s-k}x_k-u\sum_{\rho=0}^{s-k} C_{s-k}^{\rho} x_\rho-\delta_0^k u^2 x_0=\delta_0^k\frac{a_2^s}{a_1^{2s}}e^{\operatorname{sh}(q-p)}\qquad (k=0,1,\ldots,s-1),$$

$$(26^b)\qquad x_s=0,$$

et le déterminant de leurs coefficients est, au facteur $(a_1^{-2}a_2)^{\frac{s^2+s}{2}}$ près, égal au déterminant $\mathcal{D}(q)$ des coefficients du système (15), (17).

2. Résolution des équations intégrales (7). — En passant au calcul des fonctions $B_k(p_\nu;\, y)$, il nous faut établir d'abord de quelle manière les coefficients $\beta_{ik}(y)$ dans la formule (12) dépendent de la variable y, avant d'être en mesure de copier les procédés employés pour calculer les coefficients de Fourier b_{ik} des $B_{k,0}(p_\nu)$. Car en introduisant les expressions (12) dans les deuxièmes membres des équations (7^a), la deuxième intégrale ne peut pas être évaluée directement.

C'est pourquoi nous constatons d'abord qu'en raison de la formule (9) qui est valable uniformément dans le domaine (6), les seconds termes des deux membres de l'équation (7^a) sont manifestement analytiques et réguliers, comme fonctions de y, pour

$$|y| < c_3,$$

où c_3 est une constante positive convenable, indépendante des variables du domaine (6). On voit donc qu'en faisant abstraction de termes qui sont analytiques pour $|y| < c_3$, et uniformément bornés par rapport au domaine (6), les opérations linéaires effectuées respectivement dans les équations (7^a) sur les $B_k(p_\nu;\, y)$ et dans les équations (5^a) sur les $B_{k,0}(p_\nu)$ sont les mêmes, à la substitution de y à la place de q près. Il s'ensuit que les $\beta_{ik}(y)$, les *coefficients de Fourier* des fonctions $B_k(p_\nu;\, y)$ [*voir* l'équation (12)] satisfont (à des termes près qui sont analytiques pour $|y| < c_3$, $|z| < c_1$) aux équations linéaires (15), (17) des inconnues b_{ik}, modifiées par la substitution de y pour q.

Les coefficients de ces équations linéaires, de déterminant $\mathcal{D}(y)$, étant des fonctions entières de y, nous en concluons que, de même, les expressions

$$\mathcal{D}(y)\, \beta_{ik}(y)$$

sont analytiques pour

$$|y| < c_3, \qquad |z| < c_1.$$

Comme d'ailleurs les $\beta_{ik}(y)$ tout comme les $B_k(p_\nu;\, y)$, sont réguliers pour

$$\left|\frac{z}{y}\right| < c_2, \qquad \text{c'est-à-dire pour} \qquad |y| > \left|\frac{z}{c_2}\right|, \quad |z| < c_1.$$

nous voyons qu'en choisissant $|z|$ suffisamment petit pour que ces deux domaines empiètent, [par exemple $|z| < \mathrm{Min}(c_1, c_2 c_3)$] les $\beta_{ik}(y)$ ne pourront avoir des singularités comme fonctions de y, qu'au voisinage de $y = 0$ où cependant leurs produits par une certaine fonction entière de y, à savoir $\mathcal{D}(y)$, resteront réguliers. Ces singularités sont donc des pôles, de sorte que les $\beta_{ik}(y)$ sont des fonctions rationnelles de y dont les pôles sont les racines particulières de l'équation

$$(27^a) \qquad \mathcal{D}(y) = 0$$

qui, pour $|z|$ suffisamment petit, sont situées dans un domaine arbitrairement petit autour du point $y = 0$.

Or, $\mathcal{D}(y)$ est un polynome du $\left(\frac{s^2+s}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré en $\frac{y}{z}$, dont les coefficients sont des polynomes en $e^{\text{sh}(y-p)}$; donc, il existe exactement $\frac{s^2+s}{2}$ racines de l'équation (27^a) qui sont des $O(z)$ pour z tendant vers zéro, donc qui satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer. Nous désignerons ces racines de l'équation (27^a) par

$$(27^b) \qquad y_1(p, z), \quad \ldots, \quad y_{s'}(p, z), \quad \text{où } s' = \frac{s^2+s}{2};$$

comme fonctions de p et z, elles sont toutes différentes, ce qui résultera presque immédiatement de la décomposition de $\mathcal{D}(y)$ en facteurs que nous donnerons plus tard.

Pour les fonctions rationnelles $\beta_{ik}(y)$, aux pôles simples (27^b), et qui, par suite de la formule (9), sont nulles pour $y = \infty$, on obtient maintenant la décomposition suivante

$$(28) \qquad \beta_{ik}(y) = \sum_{\lambda=1}^{s'} \frac{\beta_{ik}^{(\lambda)}(p, z)}{y - y_\lambda(p, z)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s),$$

où les $\beta_{ik}^{(\lambda)}$, aussi bien que les y_λ, ne dépendent que de p et z.

Afin que ces expressions puissent satisfaire à des termes près bornés pour $|y| < c_3$, aux équations linéaires (15), (17), écrites avec y à la place de q, il faut que les premiers membres de ces équations ne présentent pas des pôles pour $y = y_1, \ldots, y_{s'}$, après substitution des expressions (28) pour les b_{ik}. Il en résulte que chaque système de coefficients

$$\beta_{ik}^{(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s)$$

doit annuler les premiers membres des équations (15), (17), écrites avec $y_\lambda(p, z)$ à la place de q.

Selon la théorie des équations linéaires homogènes, on peut donc poser, avec les notations introduites préalablement, et avec des facteurs ε_λ qui restent encore à déterminer,

$$(29) \qquad \beta_{ik}^{(\lambda)} = \varepsilon_\lambda\, \mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda), \qquad \beta_{ik}(y) = \sum_{\lambda=1}^{s'} \varepsilon_\lambda \frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)}{y - y_\lambda}.$$

Afin de pouvoir écrire ces formules, on a supposé que les mineurs de la première ligne de la matrice $M(y_\lambda)$ ne disparaissent pas tous, et il est visible que les $\mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)$ dépendent explicitement de y_λ, p, z; ce sont donc des fonctions de p et z.

Pour déterminer les ε_λ, portons les représentations (29) des $\beta_{ik}(y)$ dans la formule (12), introduisons l'expression qui en résulte pour $B_k(p_\nu; y)$, ainsi que la formule (11) de $B_{k,0}(p_\nu)$, dans l'équation (7^a), égalons à nouveau les coefficients des fonctions (14) et faisons tendre y vers ∞. Comme le deuxième membre de l'équation (7^a) s'annule pour y tendant vers l'infini, on n'a qu'à s'occuper du premier membre et l'on trouve [*voir* aussi l'équation (19^a)]

$$(30)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{s'} \varepsilon_\lambda\, \mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda) = z\, b_{ik} = \frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(q)}{\mathfrak{D}(q)} \\ (i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s-1), \end{cases}$$

ce qui permet de calculer les $s' = \dfrac{s^2+s}{2}$ inconnues ε_λ.

Désignons pour l'instant la matrice des coeffficients des dernières équations par

$$(31^a)\qquad \mathfrak{M}(p, z) = \{ \mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda) \},$$

où ik figure comme indice des lignes, et λ comme indice des colonnes, et écrivons $m_{\lambda,ik}$ pour les éléments de la matrice inverse

$$(31^b)\qquad \mathfrak{M}^{-1}(p, z) = \{ m_{\lambda,ik}(p, z) \}.$$

On a alors, en résolvant le système (30) pour les ε_λ,

$$(32)\quad \varepsilon_\lambda = z \sum_{ik} m_{\lambda,ik} b_{ik} = \frac{1}{\mathfrak{D}(q)} \sum_{ik} m_{\lambda,ik}\, \mathfrak{M}_{00,ik}(q) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s');$$

en introduisant ces valeurs dans l'équation (29), nous obtenons pour la fonction $B_0(p) = \beta_{00}(p)$ [*voir* l'équation (12), pour $k = 0$] qui figure dans la formule (4),

$$B_0(p) = \beta_{00}(p) = \sum_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda \mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)}{p - y_\lambda(p, z)} = \frac{1}{\mathfrak{D}(q)} \sum_\lambda \sum_{ik} \frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)\, m_{\lambda,ik}\, \mathfrak{M}_{00,ik}(q)}{p - y_\lambda(p, z)}.$$

Ainsi, le facteur principal de la fonction à intégrer dans (4) prend, grâce à l'équation (19 b), la forme

$$(33)\quad \frac{1}{p-z}\left[\frac{z}{p-q}B_{00}-B_0(p)\right]$$
$$=\frac{1}{(p-z)\,\mathcal{D}(q)}\left[\frac{\mathfrak{M}_{00,00}(q)}{p-q}-\sum_{\lambda=1}^{s'}\sum_{ik}\frac{\mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)\,m_{\lambda,ik}\,\mathfrak{M}_{00,ik}(q)}{p-y_\lambda(p,z)}\right],$$

de sorte que notre tâche ultérieure se réduit au calcul de certains mineurs de la matrice M du système des équations linéaires (15) et (17), à la détermination des racines (27^b) de l'équation (27^a), problème essentiel, et à effectuer les intégrations indiquées dans l'équation (4).

Comme nous n'utiliserons cette équation dans la suite que pour $n=\infty$, nous indiquerons brièvement, avant d'étudier l'équation (27^a), les opérations qui permettent de passer, dans (4), à la limite $n=\infty$; nous poserons pour cela, comme auparavant, $s\mathrm{T}=\frac{n}{\eta}$, où le coefficient de rendement

$$0<\eta<1$$

sera supposé indépendant de n.

Admettons sous réserve de le démontrer plus tard, que $\mathcal{D}(y)$ contienne le facteur

$$(34^a)\qquad y-z[a_1\,e^{h(y-p)}+a_2\,e^{2h(y-p)}]=y-z\,\varepsilon(y-p),$$

et soit $y_1(p, z)$ le zéro particulier de cette expression qui appartient à la suite (27^b), c'est-à-dire qui tend vers 0 pour $z\to 0$. Comme l'expression (34^a) s'annule évidemment pour $y=p=z$, on a

$$(34^b)\qquad y_1(z, z)=z;$$

donc, le binome

$$p-y_1(p, z)=\frac{1}{1-z}(p-z)+\alpha_2(z)(p-z)^2+\ldots$$

qui figure dans le dénominateur de la fonction (33), a un zéro simple pour $p=z$, de sorte que l'expression (33), considérée comme fonction de p, possède un pôle double en $p=z$ et, en outre, un pôle simple en $p=q$. Des considérations, pour le détail lesquelles nous renvoyons le lecteur à [8^c] et à nos articles antérieurs, montrent ensuite qu'en amenant dans l'intégrale (4) la courbe C_p dans le demi-plan gauche, l'intégrale $\int_{C_p}$ se réduit aux résidus en $p = z$ et $p = q$, à des termes près qui disparaissent pour n tendant vers l'infini.

Ce dernier résidu est égal à 1, ce qu'on peut démontrer directement grâce à la première équation (5^a) qui fournit pour $p = q$ la valeur $B_{00} = \frac{1}{q - z}$. Par conséquent, $\rho(t)$, considéré comme intégrale $\int_{K_z} \cdots dz$, prend la forme de l'équation (50) de la première partie à des termes près qui s'annulent pour $n = \infty$; grâce à la méthode expliquée sur l'exemple de cette équation, $\rho(t)$ peut donc être développé, pour n tendant vers l'infini, selon la formule ($52\,a$) (1^{re} partie). En effectuant les opérations indiquées, seul le terme $\lambda = 1$ de la somme $\sum_\lambda$ dans la formule (33) sera conservé lors du calcul du résidu au point $p = z\,(=\eta)$, et l'on obtiendra en passant à la limite $n = \infty$, et en remplaçant dans (4) q par ηq,

$$(35^a)\quad \left\{\begin{aligned} P(t) &= \lim_{n=\infty} \rho(t) = 1 - (1-\eta)\,\mathfrak{M}_{00,00}(\eta\,;\,\eta,\,\eta) \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i}\int_{C_q} \frac{e^{s\eta t(1-q)}}{\mathcal{D}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta)}\left[\sum_{ik} m_{1,ik}(\eta,\,\eta)\,\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta)\right] dq \\ &\qquad R(C_q) = 1 + 0 \qquad (t > 0). \end{aligned}\right.$$

Comme selon la formule (31^b), les $m_{1,ik}$ sont les mineurs de la première colonne de la matrice (31^a) divisés par le déterminant de cette matrice, on obtient enfin pour la dernière somme

$$(35^b)\quad \frac{1}{\mathcal{D}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta)} \sum_{ik} m_{1,ik}(\eta,\,\eta)\,\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta)$$

$$= \frac{1}{\mathcal{D}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta)} \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{M}_{00,00}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta) & \mathfrak{M}_{00,00}(\eta z_2) & \ldots & \mathfrak{M}_{00,00}(\eta z_{s'}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{M}_{00,s-1,s-1}(\eta q\,;\,\eta,\,\eta) & \mathfrak{M}_{00,s-1,s-1}(\eta z_2) & \ldots & \mathfrak{M}_{00,s-1,s-1}(\eta z_{s'}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathfrak{M}_{00,00}(\eta z_1) & \ldots & \mathfrak{M}_{00,00}(\eta z_{s'}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{M}_{00,s-1,s-1}(\eta z_1) & \ldots & \mathfrak{M}_{00,s-1,s-1}(\eta z_{s'}) \end{vmatrix}},$$

où nous avons introduit à la place des $y_\lambda(\eta,\,\eta)$, solutions de l'équation (27^a), les grandeurs

$$(35^c)\qquad z_\lambda(\eta,\,\eta) = \frac{y_\lambda(\eta,\,\eta)}{\eta},$$

solutions de l'équation $\mathcal{D}(\eta y;\eta,\eta)=0$ qui sont, nous le verrons, caractérisées par une propriété très simple; en outre, nous avons écrit, pour abréger, $\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)$ à la place de $\mathfrak{M}_{00,ik}[\eta z_\lambda(\eta,\eta);\eta,\eta]$. Remarquons encore que, grâce à l'équation (34^b), l'on a

$$z_1(\eta,\eta)=1.$$

Pour déduire enfin des formules (35) la valeur de P(0), on procédera comme lors du passage de l'équation (54) de la première partie à l'équation (67). On amènera la courbe d'intégration C_q dans le domaine $R(q)<0$, ce qui comporte le résidu -1 au point $q=1$. Puis, l'on décomposera la fonction (35^b) qui est rationnelle en q et $e^{sh\eta q}$, en un terme $\frac{c}{q}$ et un reste qui est $O\left(\frac{1}{q^2}\right)$ pour $R(q)\to-\infty$; en passant ensuite, dans l'intégrale (35^a), à la limite $t\to+0$, la partie correspondant au terme $O\left(\frac{1}{q^2}\right)$ s'annulera, de sorte que seule subsistera la partie correspondant au terme $\frac{c}{q}$, et égale à $c(1-\eta)$. En tirant de (35^b) la valeur de la constante c qui est précisément le mineur de l'élément $\mathfrak{M}_{00,00}(\eta q)$ divisé par le déterminant qui figure au dénominateur, on obtiendra donc

$$(36)\quad P(0)=(1-\eta)\frac{\|\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)\|\quad\left(ik=01;\ldots;s-1,s-1.\ \lambda=2,\ldots,\frac{s^2+s}{2}\right)}{\|\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)\|\quad\left(ik=00;\ldots;s-1,s-1.\ \lambda=1,\ldots,\frac{s^2+s}{2}\right)}.$$

Ici, nous avons utilisé, pour le calcul du résidu au point $q=1$, l'identité

$$\mathcal{D}'(q;\eta,\eta)|_{q=\eta}=(1-\eta)\,\mathfrak{M}_{00,00}(\eta;\eta,\eta)$$

qu'on déduit aisément des équations (15), (17) en y posant $q=z=\eta$ et supprimant le deuxième membre. Pour justifier le déplacement de C_q vers l'infini du demi-plan gauche, il y a lieu d'indiquer que manifestement les zéros $z_2,\ldots,z_{s'}$ de $\mathcal{D}(\eta q)$ ne sont pas des pôles de la fonction à intégrer (35 b), et que la fonction entière $\mathcal{D}(\eta q)$ n'a pas d'autres zéros dans le demi-plan $R(q)<1$, ce que nous démontrerons plus loin.

3. Étude d'un déterminant; formules finales. — Étudions maintenant la matrice M_1 des coefficients du système (26^a) et son déterminant $|M_1| = (a_1^{-2} a_2)^{\frac{s^2+s}{2}} \mathcal{D}(q)$. On a

$$(37)\quad M_1 = \begin{pmatrix} x^s - u - u^2 & -C_s^1 u & -C_s^2 u & \dots & -C_s^{s-1} u \\ -u & x^{s-1} - C_{s-1}^1 u & -C_{s-1}^2 u & \dots & -C_{s-1}^{s-1} u \\ -u & -C_{s-2}^1 u & x^{s-2} - C_{s-2}^2 u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ -u & -C_1^1 u & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

et il s'agit surtout de décomposer $|M_1|$ qui est un polynome en x et u à coefficients entiers, en des facteurs accessibles aux calculs ultérieurs. Posons pour le moment $u = \xi^s$ et soit $\xi = u^{\frac{1}{s}}$ l'une quelconque des racines de cette équation. En multipliant les colonnes de M_1 respectivement par $1, \xi, \dots, \xi^{s-1}$ et sommant, l'on obtient la colonne suivante

$$\begin{pmatrix} x^s - \xi^s(1+\xi)^s \\ x^{s-1}\xi - \xi^s(1+\xi)^{s-1} \\ \dots\dots\dots \\ x\xi^{s-1} - \xi^s(1+\xi) \end{pmatrix},$$

dont tous les éléments sont manifestement divisibles par le trinome

$$x - \xi(1+\xi) = x - \xi - \xi^2 = x - u^{\frac{1}{s}} - u^{\frac{2}{s}}.$$

Donc, $|M_1|$ est divisible par le produit des facteurs algébriquement conjugués de ce trinome,

$$(38)\qquad P_0 = \prod_{k=0}^{s-1}\left(x - u^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2\pi ik}{s}} - u^{\frac{2}{s}} e^{\frac{4\pi ik}{s}}\right)$$
$$= \frac{a_2^s}{a_1^{2s}} \prod_{k=0}^{s-1}\left(\frac{q}{z} - a_1 e^{\frac{2\pi ik}{s}} e^{h(q-p)} - a_2 e^{\frac{4\pi ik}{s}} e^{2h(q-p)}\right)$$

qui est un polynome, à coefficients entiers, en x et u, et dont le premier facteur est précisément l'expression (34^a), fait que nous avons utilisé dans ce qui précède.

En multipliant M_1 à droite et à gauche par des matrices appropriées, on pourrait obtenir une nouvelle matrice similaire à (37), et de déterminant $\frac{|M_1|}{P_0}$, et l'on pourrait répéter ensuite, avec une légère modification, le processus qui nous a permis de conclure que $|M_1|$ est divisible par le produit P_0. On parvient cependant plus vite d'une autre manière aux lois de décomposition de $|M_1|$ en établissant que $|M_1(x, u)|$ s'annule identiquement lorsqu'on y introduit les expressions

$$(39^a) \qquad u = (-1)^{\mu}\xi^{s-\mu}(1+\xi)^{\mu} \qquad \left\{0 \leqq \mu \leqq \left[\frac{s}{2}\right]\right\},$$
$$(39^b) \qquad x = \xi + \xi^2,$$

où μ désigne un entier quelconque entre o et $\left[\frac{s}{2}\right]$. Autrement dit, si ξ_μ désigne l'une quelconque des racines de l'équation (39^a), $|M_1|$ est divisible par l'expression

$$(40) \qquad x - \xi_\mu - \xi_\mu^2.$$

Pour le démontrer, remarquons que les premiers membres des équations linéaires (26^a) s'annulent identiquement si l'on substitue aux inconnues x_k les expressions

$$(41) \qquad x_k = \sum_{\tau=0}^{\mu} (-1)^{\tau} C_k^{\tau} C_{s-k}^{\mu-\tau} \xi^{k-\tau}(1+\xi)^{\tau} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1),$$

et aux u et x dans les coefficients les expressions (39); on le vérifie par un calcul élémentaire dont nous laisserons le soin au lecteur.

Les expressions (41) des inconnues x_k n'étant pas identiquement nulles, le déterminant $|M_1|$ des équations linéaires homogènes en question doit s'annuler, identiquement en ξ, pour les valeurs (39) de u et x; $|M_1(x, u)|$ est donc algébriquement divisible par le trinome (40).

Le déterminant des équations (26^a) est un polynome du $\left(\frac{s^2+s}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré en x, et de premier coefficient 1; on a, par conséquent,

$$(42) \qquad |M_1| = \prod_{\mu=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \prod_{\xi_\mu} (x - \xi_\mu - \xi_\mu^2).$$

Ici, pour s impair, le produit intérieur sera étendu pour tout entier $0 \leqq \mu \leqq \frac{s-1}{2}$ aux s racines ξ_μ de l'équation correspondante (39^a), ce qui donne $s\frac{s+1}{2} = \frac{s^2+s}{2}$ facteurs linéaires. Cependant, pour s pair, dans le cas $\mu = \frac{s}{2}$ où chaque paire de racines $\xi_{\frac{s}{2}}$ et $\xi'_{\frac{s}{2}} = -1 - \xi_{\frac{s}{2}}$ conduit au même facteur (40), $\prod\limits_{\xi_\mu}$ doit être étendu seulement aux $\frac{s}{2}$ racines de l'équation (39^a) qui produisent des trinomes (40) différents, de sorte qu'on a de nouveau $s\frac{s}{2}+\frac{s}{2}=\frac{s^2+s}{2}$ facteurs linéaires.

Il est facile d'exprimer les P_μ sous forme de polynomes en x et u. Soient pour le moment

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x},\qquad \alpha_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x}=-1-\alpha_1\qquad (\alpha_1\alpha_2=-x),$$

les deux racines de l'équation (39^b); on a pour $\mu\neq\frac{s}{2}$, grâce à l'équation (39^b),

$$(43^a)\left\{\begin{aligned} P_\mu &= \prod_{\xi_\mu}(x-\xi_\mu-\xi_\mu^2)=(-1)^s\prod_{\xi_\mu}(\xi_\mu-\alpha_1)(\xi_\mu-\alpha_2)\\ &=(-1)^s\left[\alpha_1^{s-\mu}(1+\alpha_1)^\mu-(-1)^\mu u\right]\left[\alpha_2^{s-\mu}(1+\alpha_2)^\mu-(-1)^\mu u\right]\\ &=(-1)^s(\alpha_1^{s-\mu}\alpha_2^\mu-u)(\alpha_2^{s-\mu}\alpha_1^\mu-u)\\ &=x^s-(-1)^\mu u x^\mu\left[\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x}\right)^{s-2\mu}+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x}\right)^{s-2\mu}\right]+(-1)^s u^2\\ &=x^s-(-1)^\mu u x^\mu\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]-\mu}\frac{s-2\mu}{s-2\mu-\nu}C^\nu_{s-2\mu-\nu}x^\nu+(-1)^s u^2\\ &\qquad\left\{\mu=0,1,\ldots,\left[\frac{s-1}{2}\right]\right\},\end{aligned}\right.$$

tandis que pour $\mu=\frac{s}{2}$, P_μ est la racine carrée de cette expression, à savoir

$$(43^b)\qquad P_{\frac{s}{2}}=x^{\frac{s}{2}}-(-1)^{\frac{s}{2}}u=\left(\frac{a_2}{a_1^2}\right)^{\frac{s}{2}}\left[q^{\frac{s}{2}}-(-a_2)^{\frac{s}{2}}e^{s\eta h(q-1)}\right].$$

Par l'intermédiaire des formules (25^b), ces polynomes deviennent des fonctions entières de q, $P_\mu(q, p, z)$, et ce sont leurs zéros $y_\lambda(p, z)$ tels que les quotients $\frac{y_\lambda(p, z)}{z}$ sont bornés pour $z\to 0$, qui figurent dans nos formules (27) à (34).

Les grandeurs $z_\lambda(\eta)=\frac{y_\lambda(\eta, \eta)}{\eta}$ qui figurent dans les équations (35) et (36) sont donc les racines particulières des fonctions entières $P_\mu(\eta q; \eta, \eta)$ qui sont bornées dans le voisinage de $\eta=0$ et que l'on prolongera ensuite analytiquement pour toutes les valeurs $0<\eta<1$.

Cependant, les $z_\lambda(\eta)$ autres que $z_\lambda(\eta) = 1$ peuvent être caractérisés d'une manière plus simple comme les seuls zéros des fonctions $P_\mu(\eta q)$ situés à l'intérieur du cercle unité $|q| \leqq 1$; on trouve en outre qu'il n'y a pas d'autres zéros dans le demi-plan $R(q) < 1$.

Afin de le démontrer, substituons dans les équations (39) à x et u les expressions (25^b), en y remplaçant q par ηq et en posant $p = z = \eta$; substituons en outre à ξ la grandeur

$$v = \frac{a_1 \xi}{a_2}. \tag{44}$$

Les $z_\lambda(\eta)$ sont alors les solutions q du système suivant

$$q - a_1 v - a_2 v^2 = 0, \qquad e^{\operatorname{sh}\eta(q-1)} - v^{s-\mu}\left(-v - \frac{a_1}{a_2}\right)^\mu = 0 \qquad (\operatorname{sh}\eta > 0), \tag{45}$$

dont on déduit pour $\mu \neq \frac{s}{2}$,

$$v^{s-2\mu} = (-a_2)^\mu \frac{e^{\operatorname{sh}\eta(q-1)}}{q^\mu}.$$

Par conséquent, aucune racine $z_\lambda(\eta)$ ne peut être située ni sur le cercle d'unité $|q| = 1$ ni sur la droite $R(q) = 1$, car dans chacune de ces hypothèses l'on obtiendrait de la dernière équation

$$|v| < a_2^{\frac{\mu}{s-2\mu}} < 1, \qquad |q| = |a_1 v + a_2 v^2| \leqq a_1 |v| + a_2 |v|^2 < a_1 + a_2 = 1,$$

ce qui serait en contradiction avec nos hypothèses. D'autre part, on obtient par un calcul élémentaire comme seules solutions des équations (45) bornées pour de petites valeurs positives de a_1 et η, les s grandeurs suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} q \approx \zeta_\nu^2\left[1 + a_1\left(\frac{s-2\mu}{s}\zeta_\nu^{-1} - 1\right) + 2\eta h(\zeta_\nu^2 - 1)\right], \qquad \zeta_\nu = e^{\frac{2\pi i(\mu+2\nu)}{2s}} \\ \qquad (0 < a_1 \ll 1,\ 0 < \eta \ll 1;\ \nu = 0, 1, \ldots, s-1), \end{array}\right. \tag{46}$$

et l'on voit aisément que pour a_1 et η suffisamment petits, la partie réelle de $q\zeta_\nu^{-2}$, et par conséquent le module de q, sont inférieurs à 1; de même, il est clair que pour η suffisamment petit, toutes les autres solutions de (45) sont situées dans le demi-plan $R(q) > 1$. Dans le cas exclu $\mu = \frac{s}{2}$, on parvient aux mêmes résultats en partant directement de l'expression (43^b).

Ne pouvant atteindre ni le cercle $|q| = 1$ ni la droite $R(q) = 1$, toutes les racines restent, pour des raisons de continuité, dans leurs domaines primitifs pour toutes les valeurs de a_1 et η; on a donc particulièrement pour les racines aux valeurs initiales approchées (46)

$$|z_\lambda(\eta)| < 1 \qquad \left(\lambda = 2, \ldots, \frac{s^2+s}{2}\right), \tag{47}$$

et ce sont là les seules racines situées dans le demi-plan $R(q) < 1$, fait que nous avons utilisé lors du passage à la limite $t = +0$ dans l'équation (35^a).

Les $z_\lambda(\eta)$ étant déterminés, du moins théoriquement, par ce qui précède, il nous reste encore à calculer les mineurs $\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)$ qui figurent dans les formules (35) et (36). Selon l'équation (29), les $\mathfrak{M}_{00,ik}(y_\lambda)$ sont proportionnels aux solutions $\beta_{ik}^{(\lambda)}$ des équations linéaires homogènes qui résultent de (15) et (17), si l'on y supprime le deuxième membre $\frac{\delta_0^k}{z}$ et pose $q = y_\lambda(p, z)$. Mais nous avons précédemment réduit ces équations, dans l'hypothèse $q \neq z$, au système (24) ou (26) dont les solutions, dans le cas homogène, sont données par les expressions (41) et (26^b); pour obtenir un système de grandeurs proportionnelles aux $\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)$, on n'a donc qu'à introduire les expressions (41), ($26b$), compte tenu des équations (25) et (39), utilisées pour $p = z = \eta$, dans les formules (22) des b_{ik} et y supprimer le terme non homogène $\frac{\delta_0^k}{q-z}$.

En remplaçant, en outre, la grandeur ξ par v selon l'équation (44), la fraction $\frac{-z}{q-z}$, contenue dans (22), se transformera en

$$\left[1 - \left(\frac{a_1^2 x}{a_2}\right)\right]^{-1} = \frac{a_2}{a_2 - (\xi^2 + \xi)\, a_1^2} = \frac{1}{1 - a_2 v^2 - a_1 v} = \frac{1}{(a_2 v + 1)(1 - v)},$$

et l'on obtient les expressions suivantes, valables pour tous les $z_\lambda(\eta)$, à l'exception de la racine $z_1(\eta) = 1$ qui correspond précisément au cas $q = z$,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda) \sim{} & \frac{1}{(a_2 v + 1)^{s-k}(1-v)^{s-k}} \\ & \times \Bigg[\sum_{\nu=0}^{s-k} C_{s-k}^{\nu} a_2^{\nu} \sum_{\tau=0}^{\mu} (-1)^{\tau} C_{i+\nu}^{\tau} C_{s-i-\nu}^{\mu-\tau} v^{i+\nu-\tau}\left(v + \frac{a_1}{a_2}\right)^{\tau} \\ & \qquad - \delta_i^k v^{s-\mu}\left(-v - \frac{a_1}{a_2}\right)^{\mu} \sum_{\nu=0}^{s-k} C_{s-k}^{\nu} a_2^{\nu} \sum_{\tau=0}^{\mu} (-1)^{\tau} C_{\nu}^{\tau} C_{s-\nu}^{\mu-\tau} v^{\nu-\tau}\left(v + \frac{a_1}{a_2}\right)^{\tau}\Bigg] \\ & \left(i = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, s-1;\ \lambda = 2, \ldots, \frac{s^2+s}{2}\right). \end{aligned}\right. \tag{48^a}$$

Pour obtenir enfin des grandeurs proportionnelles aux $\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_1)$, on résoudra directement les équations homogènes correspondant à (15), (17), pour $p=q=z=\eta$, ce qui donne

$$(48^b)\quad \mathfrak{M}_{00,00}(\eta)\sim s,\qquad \mathfrak{M}_{00,01}(\eta)\sim 1;\qquad \mathfrak{M}_{00,ik}(\eta)=0,\quad \text{pour } (ik)\neq 00,01.$$

On obtient des formules plus simples que (48) pour les grandeurs

$$(49^a)\quad m'_{ik,\lambda}=\left(v+\frac{1}{a_2}\right)^{\mu}(1-v)^{s-\mu}\sum_{j=0}^{i} C_i^j\, a_2^{j-i}\,\mathfrak{M}_{00,jk}(\eta z_\lambda)\qquad \left(\lambda=2,\ldots,\frac{s^2+s}{2}\right),$$

par lesquelles les $\mathfrak{M}_{00,ik}(\eta z_\lambda)$ contenus dans la formule (36) peuvent manifestement être remplacés à condition de poser, pour $\lambda=1$,

$$(49^b)\quad m'_{00,1}=s,\qquad m'_{01,1}=1,\qquad m'_{11,1}=a_2^{-1};\qquad m'_{ik,1}=0,\quad \text{pour } k>1.$$

En posant

$$(50)\qquad v+\frac{1}{a_2}=A,\qquad 1-v=B,\qquad f_{k,\mu}(x)=\sum_{\tau=0}^{\mu} C_k^{\tau} C_{s-k}^{\mu-\tau} x^{\tau},$$

l'on déduit des formules (48^a) et (49^a)

$$(51)\quad \begin{aligned} m'_{ik,\lambda}={}&A_\mu^i B_\mu^k f_{k-i,\mu}(A_\mu B_\mu^{-1})\\ &-\delta_i^k v_\mu^{s-\mu}\left(-v_\mu-\frac{a_1}{a_2}\right)^{\mu} B_\mu^k f_{k,\mu}(A_\mu B_\mu^{-1}),\quad \lambda=2,\ldots,\frac{s^2+s}{2}.\end{aligned}$$

Pour mettre en relation ici les indices λ et μ, posons

$$(52)\qquad \begin{cases} \lambda=\mu s+\nu, \text{ où } 1\leqq\nu\leqq s, & \text{pour } \mu\neq\frac{s}{2};\\ \lambda=\frac{s}{2}s+\nu, \text{ où } 1\leqq\nu\leqq\frac{s}{2}, & \text{pour } \mu=\frac{s}{2}.\end{cases}$$

Les $v=v_{\mu,\nu}$ sont alors les s $\left(\text{ou } \frac{s}{2}, \text{ dans le cas } \mu=\frac{s}{2}; \text{ ou } s-1, \text{ dans le cas } \mu=0\right)$ racines différentes des équations (45) correspondant à des $|q|<1$.

Des dernières formules, il résulte que les déterminants qui figurent dans le deuxième membre de l'équation (36) sont tous deux divisibles par le produit de tous les Vandermondiens $\prod_{\substack{\nu,\nu'=1\\ \nu'<\nu}}^{s}(v_{\mu,\nu}-v_{\mu,\nu'})$, de sorte que la fraction (36) pourrait être simplifiée; en outre, le dénominateur est divisible par les produits

$$\prod_{\nu=2}^{s}{}' (1 - v_{0,\nu}) \quad \text{et} \quad \prod_{\nu=1}^{s} (1 - v_{1,\nu}).$$

En multipliant par contre les matrices qui figurent dans (36) d'une manière appropriée par toutes les matrices de Vandermonde $\{v_{\mu,\nu}^{\rho}\}_{\substack{\nu=1,\ldots,s \\ \rho=0,\ldots,s-1}}$, on obtient une représentation de $P(0)$ comme quotient de deux déterminants dont les éléments de la $(\lambda = \mu s + \rho)^{\text{ième}}$ colonne sont de la forme $\sum_{\nu=1}^{s} v_{\mu,\nu}^{\rho-1} m'_{ik,\lambda}(v_{\mu,\nu})$. Par conséquent, ces éléments peuvent être écrits, en vertu de principes bien connus, sous la forme

$$(53)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{K_{|q|=1\pm 0}} v^{\rho-1}\, m_{ik,\lambda}(v)\, d \log\left[e^{\operatorname{sh}\eta(q-1)} - v^{s-\mu}\left(-v - \dfrac{a_1}{a_2}\right)^{\mu}\right] \\ \left(a_1 v + a_2 v^2 = q, \text{ donc } v = -\dfrac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\dfrac{a_1^2}{4a_2^2} + \dfrac{q}{a_2}} \right), \end{array} \right.$$

où $K_{|q|=1}$ désigne le cercle unité doublement recouvert du plan Riemannien des q, et ces intégrales où ne figurent, outre la variable d'intégration q, que les grandeurs données η, s, a_2, peuvent être développées en séries infinies suivant des fonctions élémentaires de ces grandeurs.

De cette manière, on éviterait l'emploi des racines d'équations transcendantes; mais afin de parvenir, pour les grandes valeurs de s, à des formules susceptibles d'être évaluées numériquement sans trop de labeur, il faudrait, tout comme dans le cas d'une seule durée d'opération, étudier particulièrement l'expression (36), dans l'hypothèse

$$\eta = 1 - b\sqrt{\frac{2}{s}},$$

pour s tendant vers l'infini.

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1940).

BIBLIOGRAPHIE.

1. A. K. ERLANG (publications parues en langue française) :

   Revue Générale de l'Électricité, t. XVIII, 1924, p. 305-309 et t. XX, 1926, p. 270-278.

   Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones, t. 14, 1925, p. 617-644 et t. 17, 1928, p. 743-764.

2. E. C. MOLINA, *Bell System Technical Journal*, t. 6, 1927. p. 461-494.

3. TH. C. FRY, *Probability and its Engineering Uses*, New York (Macmillan), 1928.

4. A. E. VAULOT :

   a. *Revue Générale de l'Électricité*, t. XVI, 1924, p. 411-418 et t. XXII, 1927, p. 1164-1171.

   b. *C. R. Acad. Sc.*, 222, 1946, p. 268-270.

5. C. W. CROMMELIN, *Post Office Electrical Engineers Journal*, t. 25, 1932, p. 41-50 et t. 26, 1934, p. 266-274.

6. A. KOLMOGOROFF, *Recueil des Mathématiques*, Moscou 1931, fasc. 1, 2 : p. 101-106.

7. E. BOREL, *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 452-456.

8. F. POLLACZEK :

   a. *Math. Zeitschr.*, t. 32, 1930, p. 64-100 et p. 729-750.
   b. *Math. Zeitschr.*, t. 35, 1932, p. 230-278.
   c. *Math. Zeitschr.*, t. 38, 1934, p. 492-537.
   d. *Elektrische Nachrichtentechnik*, t. 8, 1931, p. 256-268 et p. 279-289.
   e. *Elektrische Nachrichtentechnik*, t. 9, 1932, p. 434-454.
   f. *Elektrische Nachrichtentechnik*, t. 11, 1934, p. 396-399 (réimprimé dans les *Ann. des P. T. T.*, t. 24, 1935, p. 997-1001).
   g. *Telegraphen-u. Fernsprechtechnik*, t. 19, 1930, p. 71-78.
   h. *C. R. Acad. Sc.*, 222, 1946, p. 353-355.