ANNALES DE L'I. H. P.

W. PAULI

Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac

Annales de l'I. H. P., tome 6, nº 2 (1936), p. 109-136

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1936__6_2_109_0>

Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac

PAR

W. PAULI, Zürich

§ 1. Introduction

Nous entendons par matrices de Dirac des matrices qui satisfont aux relations

$$(1) \qquad \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \delta_{\mu\nu}$$

$$(\delta_{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu, \delta_{\nu\nu} = 1\,;\, \mu,\nu = 1,2,3,4).$$

Pour simplifier, nous supposerons toujours qu'il s'agit de matrices comprenant quatre lignes et quatre colonnes. On sait que toutes les propriétés importantes de ces matrices sont indépendantes de leur spécialisation numérique et découlent uniquement des relations (1) et du fait qu'elles ont quatre lignes et quatre colonnes. Pour cette raison, nous éviterons soigneusement dans ce qui suit toute spécialisation numérique des matrices utilisées.

Il existe pourtant certains théorèmes dont les seules démonstrations connues jusqu'à présent font précisément appel à cette spécialisation numérique, par exemple, le théorème fondamental suivant :

Théorème fondamental. — Si γ^μ et γ'^μ *sont deux systèmes de matrices à quatre lignes et quatre colonnes qui satisfont tous les deux aux mêmes relations*

$$(1') \qquad \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \delta_{\mu\nu}, \quad \frac{1}{2}(\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu) = \delta_{\mu\nu}$$

il existe une matrice S *non singulière* (c'est-à-dire telle que le déterminant de S ne soit pas nul et que par conséquent la réciproque S^{-1} de S existe) *satisfaisant à la relation*

$$\gamma'^{\mu} = S\gamma^{\mu}S^{-1}. \tag{1}$$

On rencontre ce théorème à plusieurs reprises en particulier dans le livre de M. B. L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik,* Berlin 1932. Cependant la démonstration donnée dans cet ouvrage est basée sur la théorie générale des groupes et le théorème en question apparaît comme un cas particulier des théorèmes généraux sur la représentation des groupes finis à l'aide des matrices. Il nous a semblé utile d'en donner une démonstration élémentaire à l'usage des physiciens, et nous avons trouvé qu'une méthode de M. J. SCHUR (1) permet de le faire très facilement.

Dans ce qui suit (§ 3), nous exposerons cette démonstration en détail. Nous développerons ensuite quelques conséquences du théorème fondamental, relatives à la façon dont se comportent les fonctions d'ondes de Dirac pour une transformation de Lorentz, ainsi qu'à l'existence d'une correspondance entre les fonctions d'ondes à énergie positive et celles à énergie négative, une correspondance qui est univoque et aussi invariante par rapport aux transformations de Lorentz. L'existence de cette correspondance est bien connue et M. L. DE BROGLIE (2) l'utilise dans ses travaux sur la nature de la lumière. Nous établirons cette correspondance, (et ceci est nouveau) sans recourir à une spécialisation numérique des matrices de Dirac.

Enfin, nous démontrerons, sous cette même condition, quelques identités quadratiques entre les quantités covariantes de Lorentz, identités connues mais qui ont toujours été jusqu'à présent vérifiées numériquement et non pas déduites algébriquement (3). Nous utiliserons dans la démonstration, d'une part, une identité obtenue au cours de la démonstration du théorème fondamental (voir, éq. (II)), et d'autre part le fait de l'existence d'une certaine matrice obtenue au

(1) Berliner Sitzungsberichte, Math. phys. Klasse, 1905, S. 406.
(2) L. DE BROGLIE, *Une nouvelle conception de la lumière,* Paris, 1934.
(3) L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique,* Paris, 1934, voir en part. p. 161, éq. (14) ; p. 189, éq. (14) ; p. 220, éq. (24) ; p. 221, éq. (28).

cours des considérations sur les applications du groupe des transformations de Lorentz § 4, (éq. (15)).

§ 2. Quelques énoncés préliminaires

Considérons les 16 éléments

$$
(2) \qquad \begin{array}{llllll}
I & & & & & \\
\gamma^1, & \gamma^2, & \gamma^3, & \gamma^4 & & \\
i\gamma^2\gamma^3, & i\gamma^3\gamma^1, & i\gamma^1\gamma^2\,; & i\gamma^1\gamma^4, & i\gamma^2\gamma^4, & i\gamma^3\gamma^4 \\
i\gamma^1\gamma^2\gamma^3, & i\gamma^1\gamma^2\gamma^4, & i\gamma^3\gamma^1\gamma^4, & i\gamma^2\gamma^3\gamma^4 & & \\
\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 & & & & &
\end{array}
$$

qui forment un système de nombres hypercomplexes. Nous désignerons les différentes lignes du tableau précédent, par

$$
(2') \qquad I,\ \gamma^{\mu},\ \gamma^{[\mu\nu]},\ \gamma^{[\lambda\mu\nu]},\ \gamma^5
$$

où les crochets indiquent l'antisymétrie des quantités γ par rapport aux indices compris entre ces crochets ; les facteurs i doivent être compris dans la définition des $\gamma^{[\mu\nu]}$ et $\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$. Ces facteurs sont choisis de telle manière que le carré de chaque quantité γ^A soit égal à la matrice unité :

$$
(3) \qquad (\gamma^A)^2 = I\,;
$$

(nous utilisons comme indices des capitales latines A, B,... lorsque l'indice parcourt tout le système hypercomplexe de 1 à 16).

Lemme 1. — *Le produit de deux éléments γ^A et γ^B est toujours égal à un troisième élément γ^C, à un facteur numérique près* ε_{AB}, qui peut avoir les valeurs ± 1, $\pm i$:

$$
(4) \qquad \gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C.
$$

Cet énoncé est une conséquence immédiate des relations (1).

Lemme 2. — *Si dans le produit $\gamma^A\,\gamma^B$, γ^A est fixe et γ^B parcourt tout le système des* 16 *éléments, γ^C, défini par l'équation* (4) *parcourt aussi tout le système des* 16 *éléments.*

En effet, de $\gamma^A\,\gamma^B = \gamma^A\,\gamma^D$ il résulte $\gamma^B = \gamma^D$ de sorte qu'ayant choisi γ^A les 16 éléments $\gamma^A\,\gamma^B$ sont différents l'un de l'autre.

Représentons maintenant γ^μ — et par conséquent aussi γ^A — par des matrices à 4 lignes et 4 colonnes.

Lemme 3. — *La somme des éléments diagonaux* (que nous appelons pour abréger « la somme diagonale » et que nous désignons par D) *de tous les éléments γ^A est nulle sauf si γ^A est la matrice unité* :

$$D(\gamma^A) = 0 \quad \text{pour} \quad \gamma^A \neq I.$$

Ceci est une conséquence des relations (1) et du fait que la somme diagonale d'un produit de deux matrices est indépendante de l'ordre des facteurs

$$D(AB) = D(BA).$$

On a par exemple pour $\mu \neq \nu$

$$\frac{1}{2}[-\gamma^\nu\cdot(\gamma^\mu\gamma^\nu) + (\gamma^\mu\gamma^\nu)\cdot\gamma^\nu] = \gamma^\mu$$

et pour cette raison

$$D(\gamma^\mu) = 0,$$

Ce raisonnement est aussi valable pour $\mu = 5$ $(\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)$. donc :

$$D(\gamma^5) = 0.$$

D'autre part, on a pour $\mu \neq \nu$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$$

d'où il résulte

$$D(\gamma^{[\mu\nu]}) = 0$$

valable également pour $\mu = 5$, d'où

$$D(\gamma^5\gamma^\nu) = D(\gamma^{[\lambda\mu\nu]}) = 0, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Il en résulte que les 15 quantités qui ne sont pas identiques à I, ne peuvent pas non plus être représentées par la matrice unité.

Lemme 4. — *Les matrices γ^A sont linéairement indépendantes.*

De

$$\sum_{A=1}^{16} C_A\gamma^A = 0$$

où c_A sont des nombres ordinaires, il résulte

$$C_A = 0 \qquad \text{pour tout A.}$$

Pour voir en effet que le coefficient c_B d'un certain γ^B arbitrairement fixé, est nul, il suffit de multiplier l'équation

$$\sum_A c_A \gamma^A = 0$$

par γ^B :

$$\sum_{\substack{A \\ (A \neq B)}}{}' C_A \gamma^A \gamma^B + c_B = 0$$

Les $\gamma^A \gamma^B$ pour $A \neq B$ sont différents de l'unité, par conséquent, si nous formons la somme diagonale, il résulte du lemme 3 que $C_B = 0$.

Le lemme 4 est très important, parce qu'il permet de conclure qu'il n'est pas possible de satisfaire aux relations (1) avec des matrices, dont le nombre de lignes et de colonnes est inférieur à 4 ; en effet, on ne peut pas avoir 16 matrices linéairement indépendantes, si le nombre des lignes et colonnes de ces matrices est inférieur à 4. Inversement, il existe exactement 16 matrices de quatre lignes et quatre colonnes linéairement indépendantes, parce que 16 est également le nombre des éléments de ces matrices. De là résulte le

Lemme 5. — *On peut représenter chaque matrice arbitraire* X *à quatre lignes et quatre colonnes sous la forme*

$$X = \sum_A x_A \gamma^A,$$

en choisissant convenablement les nombres x_A, les γ^A étant des matrices quelconques du système (2).

Lemme 6. — *On a toujours pour tout* γ^μ *et tout* γ^A

$$\gamma^\mu \gamma^A \gamma^\mu = \pm \gamma^A,$$

et *à tout* γ^A *donné, on peut faire correspondre un* $\gamma^\varkappa$ *tel que l'on ait au second membre le signe moins* :

$$\gamma^\varkappa \gamma^A \gamma^\varkappa = -\gamma^A \quad \text{pour} \quad \gamma^A \neq I \quad \text{et} \quad \gamma^\varkappa \text{ convenablement choisi.}$$

Le premier énoncé est une conséquence immédiate des relations (1). Quant au second, on voit qu'on peut choisir :

pour $\gamma^A = \gamma^\nu$, $\gamma^\varkappa \neq \gamma^\nu$,
pour $\gamma^A = \gamma^{[\mu\nu]}$, $\gamma^\varkappa = \gamma^\mu$,
pour $\gamma^A = \gamma^{[\lambda\mu\nu]}$, $\varkappa$ différent de λ, μ et ν,
pour $\gamma^A = \gamma^5$, tout γ^μ.

On en déduit le Lemme suivant, qui est très important :

Lemme 7. — Si une matrice X à quatre lignes et quatre colonnes est commutable avec chaque γ^μ (et par conséquent aussi avec chaque γ^A), elle est un multiple de la matrice unité I :

De $X\gamma^\mu = \gamma^\mu X$ pour tous les γ^μ il résulte $X = c.I$ où c est un nombre ordinaire.

Le lemme 5 nous permet de mettre X sous la forme :

$$X = \sum_A x_A \gamma^A.$$

Soit $\gamma^B \neq I$ arbitrairement choisi ; prenons $\gamma^\varkappa$ d'après le lemme 6 de manière, que $\gamma^\varkappa \gamma^B \gamma^\varkappa = -\gamma^B$. Formons

$$\gamma^\varkappa X \gamma^\varkappa = -x_B \gamma^B + \sum_{\substack{A \\ (\gamma^A \neq \gamma^B)}}' \pm X_A \gamma^A.$$

D'autre part, on a

$$X = + x_B \gamma^B + \sum_{\substack{A \\ (\gamma^A \neq \gamma^B)}}' x_A \gamma^A.$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$\gamma^\varkappa X \gamma^\varkappa = X$$

et cela n'est possible que si $x_B = 0$. Or, γ^B est l'un quelconque des 15 éléments $\gamma^A \neq I$; il en résulte que le coefficient de I dans la somme $\Sigma\, x_A \gamma^A$ est le seul, qui ne soit pas nul, c. q. f. d.

§ 3. Démonstration du théorème fondamental

Avant d'aborder le théorème fondamental, remarquons que la relation (4)

$$\gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C \tag{4}$$

fournit, en tenant compte de (3)

$$\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^A\gamma^C$$

et en prenant la réciproque selon l'équation (3)

$$\gamma^B = \frac{1}{\varepsilon_{AB}}\gamma^C\gamma^A,$$

d'où

$$\gamma^C\gamma^A = \gamma^B\varepsilon_{AB}. \tag{5}$$

Si nous considérons maintenant un deuxième système de matrices, γ'^μ satisfaisant aux équations

$$\frac{1}{2}(\gamma'^\mu\gamma'^\nu + \gamma'^\nu\gamma'^\mu) = \delta_{\mu\nu},$$

on a également pour ce système avec le même coefficient ε_{AB}

$$\gamma'^A\gamma'^B = \varepsilon_{AB}\gamma'^C, \tag{4'}$$

puisque ces relations sont simplement des conséquences des relations (1').

En suivant la méthode de M. J. SCHUR formons d'abord avec une matrice arbitraire à quatre lignes et quatre colonnes, désignée par F, l'expression

$$\sum_{B=1}^{16} \gamma'^B F \gamma^B = S. \tag{6}$$

L'équation (4') nous donne

$$\gamma'^A S = \sum_{B=1}^{16} \varepsilon_{AB}\gamma'^C F \gamma^B.$$

Mais, si A étant fixe, B parcourt tout le système des γ, C parcourt également tout le système et prend exactement une fois chaque valeur. Donc nous ne changeons que les notations en écrivant

$$\gamma'^{A}S = \sum_{C=1}^{16} \varepsilon_{AB}\gamma'^{C}F\gamma^{B}.$$

D'autre part, formons avec

$$S = \sum_{C=1}^{16} \gamma'^{C}F\gamma^{C},$$

l'expression $S\gamma^{A}$, qui devient en tenant compte de (5)

$$S\gamma^{A} = \sum_{C=1}^{16} \gamma'^{C}F\gamma^{B}\varepsilon_{AB}.$$

En comparant on trouve

$$\gamma'^{A}S = S\gamma^{A}. \tag{7}$$

Ce serait déjà l'énoncé du théorème fondamental, si, quelle que soit F, nous avions exclu la possibilité que la matrice S et son déterminant fussent nuls.

Il s'agit de démontrer qu'il est toujours possible avec des matrices F convenablement choisies, d'éviter cette singularité de S.

D'abord, il est facile de voir qu'il est toujours possible d'obtenir une matrice S différente de zéro. En effet, si S, définie par (6), était égale à zéro pour tout F, on aurait

$$\sum_{A} \gamma'^{A}_{\rho\sigma}\gamma^{A}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 0,$$

pour tous les ρ, σ, $\bar{\rho}$, $\bar{\sigma}$ — les $\gamma^{A}_{\rho\sigma}$ (ρ, σ prenant les valeurs de 1 à 4) étant les éléments de la matrice γ^{A}. Mais cela est en contradiction avec le fait que les γ^{A} sont linéairement indépendantes. (Lemme 4 du § précédent). Nous pouvons donc dans ce qui suit, admettre que F est telle que $S \neq 0$.

Pour démontrer que le déterminant est différent de zéro, on pourrait utiliser un lemme de SCHUR [1]. Soit S une matrice, qui satisfait aux équations (7) et dont le déterminant est zéro sans que la matrice elle-même soit nulle. Ce lemme permet de construire avec S des matrices γ^A, ayant un nombre de lignes et de colonnes inférieur à 4, et qui satisfont aussi aux relations (1). Or, le lemme 4 montre que cela est impossible, de sorte que dans notre cas le fait que le déterminant de S est différent de zéro est déjà une conséquence de $S \neq 0$.

Sans utiliser le lemme cité de SCHUR, on peut procéder de la manière suivante : En permutant les rôles de γ^A et γ'^A construisons, avec une matrice G convenablement choisie, la matrice

$$T = \sum_B \gamma^B G \gamma'^B,$$

dont on démontre, comme pour S, qu'elle satisfait à la relation :

$$\gamma^A T = T \gamma'^A. \tag{7'}$$

De (7) et (7') il résulte que

$$\gamma^A TS = TS \gamma^A,$$

d'où en utilisant le lemme 7

$$TS = c \cdot I, \tag{8}$$

c étant un nombre ordinaire.

Il est facile maintenant de démontrer, que $T \neq 0$ étant fixe, on peut toujours choisir F dans (7) de manière que

$$TS \neq 0.$$

En effet, dans le cas contraire, les relations

$$\sum_B \left(T\gamma'^B\right)_{\rho\sigma} \gamma^B_{\bar\rho\bar\sigma} = 0,$$

devraient être valables pour tous les ρ, σ, $\bar\rho$, $\bar\sigma$. Mais cela est en contradiction avec le lemme 4, puisque les $(T\gamma'^B)_{\rho\sigma}$ qui contiennent les $T_{\rho\sigma}$ eux-mêmes pour $\gamma'^B = I$, ne sont pas tous égaux à zéro.

Nous savons maintenant que

$$TS = c \cdot I \qquad \text{et} \qquad TS \neq 0,$$

(1) Voir B. L. VAN DER WAERDEN, l. c., p. 55.

d'où il résulte que $c \neq 0$; nous en concluons donc que

$$Det.\ S \neq 0, \qquad S^{-1} = \frac{1}{c}T,$$

$$\gamma'^{A} = S\gamma^{A}S^{-1}. \tag{9}$$

Le théorème fondamental se trouve ainsi démontré.

Particularisons enfin le résultat (6) et (7) pour le cas $\gamma'^A = \gamma^A$. On a alors, pour tout F tel que

$$\sum_B \gamma^B F \gamma^B = S,$$

la relation

$$\gamma^A S = S\gamma^A,$$

d'où, en utilisant le lemme 7 :

$$S = \sum_B \gamma^B F \gamma^B = c \cdot I.$$

Or, cette relation doit être valable pour tout F ; nous en déduisons

$$\sum_A \gamma^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\bar\rho\bar\sigma} = c_{\sigma\bar\rho}\,\delta_{\rho\bar\sigma}.$$

Pour déterminer les $c_{\sigma\bar\rho}$ posons $\rho = \bar\sigma$ et faisons la somme par rapport à cet indice. Nous obtenons

$$\sum_A \sum_{\rho=1}^{4} \gamma^A_{\bar\rho\rho}\gamma^A_{\rho\sigma} = \sum_A \left(\gamma^A\right)^2_{\bar\rho\sigma} = 4c_{\sigma\bar\rho}.$$

Mais, d'après (3), on a

$$\left(\gamma^A\right)^2_{\bar\rho\sigma} = \delta_{\bar\rho\sigma}\,;$$

il vient donc :

$$16\,\delta_{\bar\rho\sigma} = 4c_{\sigma\bar\rho}, \qquad c_{\sigma\bar\rho} = 4\delta_{\bar\rho\sigma},$$

d'où résultent les identités

$$\sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{\sigma\rho}\gamma^A_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\delta_{\bar\rho\sigma}\,\delta_{\rho\bar\sigma}, \tag{II}$$

qui nous seront très utiles par la suite.

Passons maintenant aux applications du théorème fondamental.

§ 4. La définition des matrices A et B

Dans les applications physiques on suppose que les matrices γ^μ sont hermitiques c'est-à-dire que $\gamma^\mu_{\sigma\rho}$ est égal au complexe conjugué, $\gamma^{\mu *}_{\rho\sigma}$, de $\gamma^\mu_{\rho\sigma}$. Pour mettre en évidence le fait que plusieurs de nos énoncés sur les γ^μ sont indépendants de ce caractère d'hermiticité, nous n'introduisons pas ici *a priori* une telle supposition.

En général, nous désignerons par $\gamma^{+\mu}$ les matrices conjuguées hermitiques (transposées et conjuguées) des γ^μ (c'est-à-dire telles que $\gamma^{+\mu}_{\rho\sigma} = \gamma^{*\mu}_{\rho\sigma}$). Remarquons qu'il résulte de (1) que les $\gamma^{+\mu}$ satisfont aussi aux relations

$$\frac{1}{2}(\gamma^{+\mu}\gamma^{+\nu} + \gamma^{+\nu}\gamma^{+\mu}) = \delta_{\mu\nu} \tag{9}$$

(car $\gamma^{+\mu}\,\gamma^{+\nu}$ est la conjuguée hermitique de $\gamma^\nu\,\gamma^\mu$).

Cela étant, il résulte du théorème I qu'il existe une matrice A telle que

$$\gamma^{+\mu} = A\gamma^\mu A^{-1} \quad (\text{où} \quad \gamma^{+\mu}A = A\gamma^\mu). \tag{10}$$

Le lemme 7 nous dit que si les γ^μ sont données, cette matrice A est déterminée à un facteur numérique c près.

En formant les conjugués hermitiques des deux membres de (10), on obtient d'ailleurs

$$A^+\gamma^\mu = \gamma^{+\mu}A^+$$

d'où

$$A^{-1}A^+\gamma^\mu = \gamma^\mu A^{-1}A^+$$

et en vertu du lemme 7

$$A^{-1}A^+ = c\cdot I, \qquad A^+ = cA.$$

En normalisant le facteur indéterminé, on peut toujours avoir

$$A^+ = A, \tag{11}$$

c'est-à-dire que la matrice A soit elle même hermitique (un facteur réel reste encore indéterminé dans A). En substituant (11) dans (10), on trouve

$$\gamma^{+\mu}A^{+} = (A\gamma^{\mu})^{+} = A\gamma^{\mu}$$

où, en d'autres termes, *les matrices* $A\gamma^{\mu}$ *sont hermitiques*. On vérifiera enfin facilement, que pour tous les γ^{A}

(12) $$A\gamma^{A} \quad \text{est hermitique}$$

quand les γ^{A} sont définies comme plus haut (avec des facteurs i convenablement choisis) de manière que $(\gamma^{A})^{2} = I$.

Remarquons encore que dans une transformation

$$\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S$$

il faut poser

(13) $$A' = S^{+}AS$$

pour obtenir

$$\gamma^{+'\mu} = A'\gamma^{+\mu}A'^{-1}.$$

Il est vrai, que pour toutes les applications physiques on peut admettre que les γ^{μ} sont hermitiques et par conséquent $A = I$. Je veux non seulement mettre en évidence le fait que certains théorèmes sont indépendants de cette hypothèse, mais aussi souligner l'analogie de cette matrice A avec une autre matrice B définie de la manière suivante [1] : On considère les matrices $\bar{\gamma}^{\mu}$ qu'on obtient à partir de γ^{μ} en permutant les lignes et les colonnes, et que nous appellerons les matrices *transposées* de γ^{μ}. On a alors évidemment $\bar{\gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} = \gamma^{\mu}_{\sigma\rho}$ — notation que nous réservons pour toutes matrices a et $\bar{a}$, telles que $\bar{a}_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}$ Nous appelons une matrice *a symétrique*, si $\bar{a} = a$, et *gauche*, si $\bar{a} = -a$ De plus, on a $\overline{(ab)} = \bar{b}\,\bar{a}$ de sorte que l'opération $a \rightarrow \bar{a}$ est analogue à l'opération $a \rightarrow a^{+}$; d'autre part la notion de complexe conjugué n'est pas nécessaire pour définir la première, ce qui peut intéresser les algébristes.

(1) J'ai introduit cette matrice autrefois dans un travail sur la théorie des spineurs à cinq dimensions (V. *Ann. de Phys.* **18**, 337, 1933). J'ai constaté plus tard que cette matrice B permet aussi des applications physiques plus immédiates.

Nous voyons, que les $\bar{\gamma}^\mu$ vérifient également les équations

$$\frac{1}{2}(\bar{\gamma}^\mu\bar{\gamma}^\nu + \bar{\gamma}^\nu\bar{\gamma}^\mu) = \delta_{\mu\nu}. \tag{14}$$

A l'aide du théorème I on déduit de ces relations, comme précédemment pour les $\gamma^{+\mu}$, l'existence d'une matrice B, satisfaisant aux relations

$$\bar{\gamma}^\mu = B\gamma^\mu B^{-1} \qquad (\text{où} \qquad \bar{\gamma}^\mu B = B\gamma^\mu). \tag{15}$$

En transposant cette équation on trouve aussi que $B^{-1}\bar{B}$ est commutable avec toutes les γ^μ et, par conséquent, en vertu du lemme 7

$$\bar{B} = cB.$$

On en déduit $B = c\,\bar{B}$ et, par conséquent, $c^2 = 1$, $c = \pm 1$ avec les deux possibilités

$$\bar{B} = B \qquad \text{ou} \qquad \bar{B} = -B.$$

Pour distinguer entre ces deux possibilités il faut — conformément à une méthode, que je dois à M. HAANTJES — considérer les conclusions relatives aux matrices $B\gamma^\mu$, $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ et $B\gamma^5 = B\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$. En remarquant que les permutations $(12) \to (21)$, $(123) \to (321)$ sont impaires, tandis que la permutation $(1234) \to (4321)$ est paire, on voit que de la première possibilité $\bar{B} = B$ résulte que

B, $B\gamma^\mu$, $B\gamma^5$ sont symétriques ; $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ sont gauches ; inversement, de la seconde possibilité $\bar{B} = -B$ il résulte que

(16) B, $B\gamma^\mu$, $B\gamma^5$ sont gauches ; $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ sont symétriques.

Or, nous pouvons maintenant exclure la première possibilité par un simple dénombrement. Les 10 matrices $B\gamma^{[\mu\nu]}$, $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ sont linéairement indépendantes comme les 10 matrices $\gamma^{[\mu\nu]}$, $\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ puisque la réciproque B^{-1} de B existe (et les 6 matrices B, $B\gamma^\mu$, $B\gamma^5$ sont également linéairement indépendantes). Mais une matrice gauche avec 4 lignes et 4 colonnes a seulement 6 éléments indépendants et par conséquent il existe seulement 6 matrices gauches linéairement indépendantes avec 4 lignes et 4 colonnes (d'autre part il existe 10 matrices symétriques indépendantes du même type). Il est donc impossible que les 10 matrices $B\gamma^{[\mu\nu]}$ $B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}$ soient toutes *gauches et la deuxième possibilité seule peut être réalisée.*

Les énoncés (16) sont valables et l'on a

(16 *bis*). $$\bar{B} = -B,$$

(17) $$\overline{\gamma^{[\mu\nu]}} = -B\gamma^{[\mu\nu]}B^{-1}, \quad \overline{\gamma^{[\lambda\mu\nu]}} = -B\gamma^{[\lambda\mu\nu]}B^{-1}, \quad \bar{\gamma}^5 = +B\gamma^5 B^{-1},$$

Dans une transformation

$$\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S$$

on a

(18) $$B' = \bar{S}BS$$

pour que

$$\overline{\gamma^{\mu\prime}} = B'\gamma'^{\mu}B'^{-1}$$

soit valable. Un facteur numérique est encore indéterminé dans la définition de B.

Il faut remarquer que les équations

$$\bar{\gamma}^{\mu}B = B\gamma^{\mu}$$

sont très commodes pour déterminer B numériquement, lorsque les valeurs numériques des éléments des γ^{μ} sont donnés. D'autre part, la matrice B, différente de A, en vertu de (18), n'est pas invariante dans les transformations unitaires des γ^{μ}.

Enfin, on peut établir une relation entre A et B, si on tient compte du fait que les opérations $\gamma^{\mu} \rightarrow \bar{\gamma}^{\mu}$ et $\gamma^{\mu} \rightarrow \gamma^{+\mu}$ sont commutables c'est-à-dire que

$$\overline{(\gamma^{\mu+})} = (\bar{\gamma}^{\mu})^{+} (= \gamma^{*\mu}).$$

On a

$$\overline{(\gamma^{\mu})}^{+} = (B\gamma^{\mu}B^{-1})^{+} = B^{+-1}\gamma^{\mu+}B^{+} = B^{+-1}A\gamma^{\mu}A^{-1}B^{+}$$

et

$$\overline{(\gamma^{\mu+})} = \overline{(A\gamma^{\mu}A^{-1})} = \bar{A}^{-1}\bar{\gamma}^{\mu}\bar{A} = \bar{A}^{-1}B\gamma^{\mu}B^{-1}\bar{A};$$

il en résulte

$$\bar{A}^{-1}B = cB^{+-1}A \qquad \text{et} \qquad A^{-1}B^{+} = cB^{-1}\bar{A}$$

où

$$B^{+} = cAB^{-1}\bar{A}.$$

On peut normaliser le facteur contenu dans la définition de B de sorte que c soit égal à l'unité, et qu'on ait

$$B^+ = AB^{-1}\bar{A}. \tag{19}$$

Dans le cas particulier où les γ^μ sont hermitiques et $A = I$, on a simplement

$$B^+ = B^{-1}, \tag{19 bis}$$

c'est-à-dire que B est unitaire.

§ 5. La transformation de Lorentz des fonctions d'ondes de Dirac Les covariants quadratiques

Introduisons comme d'habitude des coordonnés réelles x_k pour l'espace (1) et la coordonnée imaginaire $x_4 = ict$ pour le temps et considérons les transformations des coordonnées de Lorentz

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu \tag{20}$$

avec les conditions connues d'orthogonalité

$$\sum_\mu a_{\mu\rho} a_{\mu\sigma} = \sum_\mu a_{\rho\mu} a_{\sigma\mu} = \delta_{\rho\sigma} \tag{21}$$

où les coefficients a_{ik}, a_{44} sont réels, tandis que les a_{4i} sont purement imaginaires. Dans ce qui suit, il faut distinguer d'une part les transformations Lorentz au sens restreint pour lesquelles on a

$$\text{Det} \mid a_{\mu\nu} \mid = +1$$

et qu'on obtient à partir de l'unité par une variation *continue*, et d'autre part, les réflexions avec

$$\text{Det} \mid a_{\mu\nu} \mid = -1,$$

qu'on peut obtenir des premières par adjonction de la réflexion

$$x_k' = -x_k, \qquad x_4' = +x_4 \tag{20a}$$

(1) Nous utilisons les indices latins i, k... parcourant les valeurs de 1 à 3 pour l'espace, tandis que les indices grecs μ, ν... prennent les valeurs de 1 à 4.

et

(20 *b*) $$x_k' = + x_k, \qquad x'_4 = - x_4.$$

Écrivons de plus les équations d'ondes de Dirac sous la forme

(22) $$\sum_\mu \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{h} \psi = 0$$

où les γ^μ satisfont encore aux relations (1), $\gamma^\mu \psi$ étant une abréviation de $\sum_\sigma \gamma^\mu_{\rho\sigma} \psi_\sigma$ et h la constante de Planck divisée par 2π.

Pour la transformation de Lorentz des ψ posons

(23) $$\psi'_\rho = \sum_\sigma \Lambda_{\rho\sigma} \psi_\sigma \qquad \text{(pour abréger } \psi' = \Lambda\psi\text{)}$$

et postulons que dans le système des coordonnées x'^μ avec les mêmes γ^μ, l'équation

(22') $$\sum_\mu \gamma^\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\mu} + \frac{mc}{h} \psi' = 0$$

est satisfaite. La condition pour que ces équations soient une conséquence des anciennes équations (22), est

(24) $$\Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda = \sum_\nu a_{\mu\nu} \gamma^\nu.$$

Remarquons que la démonstration directe de l'existence d'une telle matrice Λ est très compliquée ; tandis qu'elle se déduit immédiatement des considérations précédentes comme un simple cas particulier de notre théorème I. En effet, il est facile de voir que les matrices

$$\gamma'^\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} \gamma^\nu$$

satisfont également aux relations

$$\frac{1}{2} (\gamma'^\mu \gamma'^\nu + \gamma'^\nu \gamma'^\mu) = \delta_{\mu\nu}$$

à cause des conditions d'orthogonalité (21), ce qui justifie l'application du théorème invoqué.

Nous examinerons maintenant plus en détail les matrices Λ, qui satisfont aux équations (24) et dépendent des $a_{\mu\nu}$, et en particulier nous établirons les conditions qui les distinguent des matrices S générales. En premier lieu, un facteur numérique dans la définition de Λ reste arbitraire ; nous pouvons le normaliser en exigeant que le déterminant de Λ soit égal à l'unité :

(25) $$\text{Det. } \Lambda = 1.$$

En second lieu, considérons les conséquences du caractère de réalité des $a_{\mu\nu}$, mentionné plus haut. On voit que les coefficients des transformations qui relient les

$$\gamma'^k, \quad i\gamma'^4 \quad \text{aux} \quad \gamma^k, \quad i\gamma^4$$

sont réels. Or, si nous définissons

$$\beta = A\gamma^4$$

(dans le cas particulier où les γ^μ sont hermitiques et $A = I$, on a alors $\beta = \gamma^4$), les matrices

$$i\beta\gamma^k, \quad \beta\gamma^4 = A$$

sont hermitiques et l'on a, en vertu de (10) et (1) :

$$(\gamma^k)^+ = -\beta\gamma^k\beta^{-1}, \quad (i\gamma^4)^+ = -\beta(i\gamma^4)\beta^{-1}$$

parce que $\beta^{-1} = \gamma^4 A^{-1}$. On conclut de la réalité des coefficients de transformation

$$(\gamma^k, \quad i\gamma^4) \rightarrow (\gamma'^k, \quad i\gamma'^4)$$

qu'on a également

$$(\gamma'^k)^+ = -\beta\gamma'^k\beta^{-1}, \quad (i\gamma'^4)^+ = -\beta(i\gamma'^4)\beta^{-1}.$$

D'autre part, on conclut de (24), — comme plus haut pour l'équation (13), — que

$$\beta' = \Lambda^+\beta\Lambda$$

remplit aussi les conditions

$$(\gamma'^k)^+ = -\beta'\gamma'^k\beta'^{-1}, \quad (i\gamma'^4)^+ = -\beta'(i\gamma'^4)\beta'^{-1},$$

d'où l'on déduit

$$\beta' = \Lambda^+\beta\Lambda = c\beta.$$

Quant au facteur c, on conclut de (24) que $c^4 = 1$. Pour des raisons de continuité il résulte qu'on a $c = 1$ pour les transformations de Lorentz au sens restreint. Par conséquent,

(26) $$\Lambda^+\beta\Lambda = \beta \quad (\text{où } \Lambda^+A\gamma^4\Lambda = A\gamma^4).$$

La marche du raisonnement dans le cas de la matrice B est encore plus simple parce qu'ici le caractère de réalité de la transformation de Lorentz n'intervient pas. De

(15) $$\bar{\gamma}^\mu = \mathrm{B}\gamma^\mu \mathrm{B}^{-1}$$

il résulte immédiatement pour les $\gamma'^\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma^\nu$ avec le même B

$$\bar{\gamma}'^\mu = \mathrm{B}\gamma'^\mu \mathrm{B}^{-1};$$

d'autre part, de (23) et (18) pour

$$\mathrm{B}' = \bar{\Lambda}\mathrm{B}\Lambda$$

$$\overline{\gamma'^\mu} = \mathrm{B}'\gamma'^\mu \mathrm{B}'^{-1}$$

et on conclut

$$\mathrm{B}' = \bar{\Lambda}\mathrm{B}\Lambda = c\mathrm{B}$$

et de (24) encore $c^4 = 1$. On a toujours, pour des raisons de continuité, $c = 1$ pour les transformations de Lorentz au sens restreint :

(27) $$\bar{\Lambda}\mathrm{B}\Lambda = \mathrm{B}.$$

Quant aux réflexions nous pouvons poser

(28 *a*) pour $x_k' = - x_k, \quad x_4' = + x_4, \quad \Lambda = \gamma^4$

(28 *b*) pour $x_k' = + x_k, \quad x_4' = - x_4, \quad \Lambda = \gamma^5\gamma^4 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3.$

On voit que (27) est également valable pour des réflexions, mais que (26) n'est plus valable que pour $x'_k = - x_k$, $x'_4 = + x_4$; et qu'enfin on a l'exception

(26′) $$\Lambda^+\beta\Lambda = -\beta \quad \text{pour} \quad x_4' = - x_4.$$

Dans la suite nous exclurons ces dernières transformations pour simplifier.

Nous obtiendrons une dernière condition pour Λ en posant

$$\gamma'^5 = \gamma'^1\gamma'^2\gamma'^3\gamma'^4 = \mathrm{Det.}\,|\,a_{\mu\nu}\,|\cdot\gamma^5$$

d'où il résulte que

(28) $$\Lambda\gamma^5 = \pm\,\gamma^5\Lambda$$

où le signe + est valable pour les transformations au sens restreint, le signe — pour les réflexions.

Les conditions (24), (26), (27), (28) pour Λ sont complètes, en ce sens que chaque matrice Λ satisfaisant à ces conditions fournit un

$$\gamma'^{\mu} = \Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda$$

qui satisfait à l'équation

$$\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$$

avec des coefficients $a_{\mu\nu}$ d'une transformation de Lorentz.

Esquissons simplement la démonstration. On peut écrire

$$\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda = \sum_{A} c_{\mu,A}\gamma^{A}.$$

La somme diagonale de γ'^{μ} étant la même que celle de γ^{μ} et cette dernière étant nulle, le coefficient de l'unité doit disparaître. De (27) on déduit que $B\gamma'^{\mu}$ est gauche comme $B\gamma^{\mu}$, et il en résulte que les coefficients de $\gamma^{[\varkappa\lambda]}$ et $\gamma^{[\varkappa\lambda\nu]}$ doivent disparaître eux aussi. De (28) on déduit que $\gamma'^{\mu}\gamma^{5} = -\gamma^{5}\gamma'^{\mu}$ et par conséquent le coefficient $c_{\mu,5}$ de γ^{5} est égal à zéro. On a donc

$$\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu} a_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$$

et de (26) (ou 26') on déduit que a_{ik}, a_{14} et $i\,a_{k4}$ sont réels. Enfin de

$$\frac{1}{2}(\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu}) = \delta_{\mu\nu}$$

il résulte que les $a_{\mu\nu}$ satisfont aux conditions d'orthogonalité (21).

On sait qu'à l'aide des relations (23) et pour une fonction ψ^{+} quelconque, qui satisfait à l'équation d'onde

$$(22^{+})\qquad \frac{\partial\psi^{+}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} - \frac{mc}{h}\psi^{+} = 0$$

et se transforme, par les transformations de Lorentz, suivant la loi

$$(23^{+})\qquad \psi_{\sigma}^{+'} = \sum_{\rho}\psi_{\rho}^{+}\Lambda_{\rho\sigma}^{-1} \qquad \left(\text{abr. } \psi^{+'} = \psi^{+}\Lambda^{-1}\right)$$

on peut construire les covariants suivants :

un invariant

$$(29_1)\qquad \psi^{+}\psi = i\Omega_1\,;$$

un vecteur

$$(29_2) \qquad \psi^+\gamma^\mu\psi = S_\mu;$$

un tenseur aréolaire antisymétrique ;

$$(29_3) \qquad \psi^+\gamma^{[\mu\nu]}\psi = -iM_{[\mu\nu]};$$

un tenseur antisymétrique de volume (dual à un vecteur)

$$(29_4) \qquad \psi^+\gamma^{[\lambda\mu\nu]}\psi = S_{[\lambda\mu\nu]}.$$

et enfin un « pseudoscalaire »

$$(29_5) \qquad \Omega_2 = \psi^+\gamma^5\psi.$$

On obtient un ψ^+ particulier satisfaisant aux conditions (22^+), (23^+) à partir du conjugué complexe ψ^* de ψ, en formant

$$(30) \qquad \psi^+ = i\psi^*\beta = i\psi^*A\gamma^4$$

à cause des relations (26). En effet, on a pour ψ^+ la loi de transformation

$$(23) \qquad \psi^{*\prime} = \psi^*\Lambda^+$$

et l'équation d'onde (ne pas perdre de vue le caractère imaginaire de x_4 !)

$$(22^*) \qquad -\frac{\partial\psi^*}{\partial x^4}\gamma^{4+} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\gamma^{+k} + \frac{mc}{h}\psi^* = 0$$

ou

$$-\frac{\partial\psi^*}{\partial x^4}A\gamma^4 + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}A\gamma^k + \frac{mc}{h}\psi^*A = 0.$$

La dernière équation devient identique à (22^+) après la substitution (30).

Les facteurs i dans (29_1) et (29_3) sont choisis de sorte qu'après la substitution (30) les composantes de toutes les quantités formées soient réelles ou purement imaginaires, suivant qu'un nombre pair ou impair d'indices est égal à 4. Pour la signification physique des quantités définies par (29_1) jusqu'à (29_5) le lecteur se reportera aux publications correspondantes (1).

La matrice B permet de répondre à deux questions. La première qui joue un rôle dans la théorie de la désintégration radioactive β

(1) Voir par exemple L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, Paris, 1934.

de *Fermi*, est la suivante. Soient deux fonctions d'ondes ψ_ρ et φ_ρ qui ont la *même* loi de transformation

$$\psi' = \Lambda\psi, \qquad \varphi' = \Lambda\varphi$$

dans le groupe de Lorentz ; comment est-il possible de former des quantités covariantes (scalaire, vecteur, tenseur, etc.) bilinéaires en ψ et φ [d'une manière analogue à (29_2)-(29_5)] ? Remarquons, que la loi $\varphi' = \Lambda\varphi$ est *identique* à l'autre

$$\overline{(23)} \qquad \varphi' = \varphi\overline{\Lambda}$$

parce que $\varphi' = \varphi\,\overline{\Lambda}$ a la signification $\varphi'_\sigma = \sum_\rho \varphi_\rho \overline{\Lambda}_{\rho\sigma}$ et que $\overline{\Lambda}_{\rho\sigma} = \Lambda_{\sigma\rho}$.

Or, pour chaque matrice F on a d'après (27)

$$\varphi\overline{\Lambda}\mathrm{BF}\psi = \varphi\mathrm{B}\Lambda^{-1}\mathrm{F}\psi$$

d'où

$$\varphi'\mathrm{BF}\psi' = \varphi\mathrm{B}\Lambda^{-1}\mathrm{F}\Lambda\psi.$$

On a, par conséquent, le scalaire

$$(31_1) \qquad i\Omega_1 = \varphi\mathrm{B}\psi,$$

le vecteur

$$(31_2) \qquad \mathrm{S}_\mu = \varphi\mathrm{B}\gamma^\mu\psi,$$

le tenseur aréolaire

$$(31_3) \qquad -i\mathrm{M}_{[\mu\nu]} = \varphi\mathrm{B}\gamma^{[\mu\nu]}\psi.$$

le tenseur de volume

$$(31_4) \qquad \mathrm{S}_{[\lambda\mu\nu]} = \varphi\mathrm{B}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}\psi$$

et le pseudoscalaire

$$(31_5) \qquad \Omega_2 = \varphi\mathrm{B}\gamma^5\psi.$$

Il est permis de particulariser et de poser : $\varphi = \psi$; alors Ω_1, S_μ et Ω_2 s'annulent parce que les matrices correspondantes sont gauches.

La seconde question est la suivante. On sait que les équations d'ondes de Dirac ont des solutions correspondant aux états d'énergie positive et d'autres correspondant aux états d'énergie négative. On cherche à établir une correspondance univoque et invariante du point de vue de la relativité entre une certaine solution à énergie négative et une solution à énergie positive ; et inversement. Le problème sera résolu, si l'on peut trouver une matrice C de telle manière, que, avec la relation

$$\varphi^* = C\psi \qquad \text{ou} \qquad \psi = C^{-1}\varphi^* \tag{32}$$

φ obéisse à la même équation (22) que ψ et, en plus, à la même loi de transformation (23) que ψ, tout au moins dans les transformations au sens restreint. En fait, si ψ ne contient que des états d'énergie positive, il résulte de (32) que ψ contient seulement des états d'énergie négative et inversement.

Pour parvenir à une solution du problème remarquons d'abord que de (22*) appliqué à φ et (32) résulte

$$-\gamma^{*4}\frac{\partial\varphi^*}{c\partial t} + \sum_k \gamma^{*k}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^k} + \frac{mc}{h}\varphi^* = 0.$$

$$-\gamma^{*4}C\frac{\partial\psi}{c\partial t} + \sum_k \gamma^{*k}C\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{mc}{h}C\psi = 0.$$

$$-C^{-1}\gamma^{*4}C\frac{\partial\psi}{c\partial t} + \sum_{k=1}^{3} C^{-1}\gamma^{*k}C\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{mc}{h}\psi = 0.$$

La comparaison avec (22) fournit

$$C^{-1}\gamma^{*4}C = -\gamma^4, \qquad C^{-1}\gamma^{*k}C = \gamma^k$$

où

$$\gamma^{*4} = -C\gamma^4C^{-1}, \qquad \gamma^{*k} = C\gamma^kC^{-1}.$$

Nous avons vu plus haut, que

$$\gamma^{*\mu} = \bar{A}^{-1}B\gamma^\mu B^{-1}\bar{A}\ ;$$

d'autre part la matrice $\gamma^4\gamma^5$ est commutable avec γ_k, mais anticommutable avec γ^4. La solution est par conséquent (à un facteur numérique arbitraire près)

$$C = \bar{A}^{-1}B\gamma^4\gamma^5 = -\bar{A}^{-1}B\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{33}$$

(où $C = B\gamma^4\gamma^5$ pour le cas où les γ^μ son hermitiques et $A = I$)

De (19) résulte en outre que

$$C^*C = I, \qquad C^* = C^{-1}\ ; \tag{33a}$$

par conséquent les relations (32) restent valables si l'on permute ψ et φ :

(32*a*) $$\psi^* = C\varphi \,; \qquad \varphi = C^{-1}\psi^*.$$

Enfin, de (26), (27), (28) il résulte — dans le cas des transformations de Lorentz au sens restreint — que le postulat d'invariance est également rempli.

En vertu de

$$\psi' = \Lambda\psi, \qquad \varphi' = \Lambda\varphi,$$

on déduit de (32)

(32') $$\varphi'^* = C\psi', \qquad \psi' = C^{-1}\varphi'^*.$$

§ 6. Les identités quadratiques entre les covariants

On sait (1) qu'entre les quantités Ω_1, Ω_2, S_μ, $M_{[\mu\nu]}$, $S_{[\lambda\mu\nu]}$ définies par les équations (29_1) à (29_5), il existe des identités quadratiques par rapport aux fonctions d'ondes ψ et ψ^+. Elles ont la forme suivante :

(34_1) $$-\sum_{\mu} S_\mu^2 \equiv S_0^2 - \sum_{k=1}^{3} S_k^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2,$$

(34_2) $$\sum_{[\mu\nu]} M_{[\mu\nu]}^2 \equiv \sum_{ik} M_{[ik]}^2 - \sum_{k} M_{k0}^2 = \Omega_1^2 - \Omega_2^2,$$

(34_3) $$-\sum_{[\lambda\mu\nu]} S_{[\lambda\mu\nu]}^2 \equiv -S_{[123]}^2 + \sum_{[ik]} S_{[ik0]}^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2,$$

(34_4) $$-\frac{i}{2}\sum_{[\varkappa\lambda],[\mu\nu]} M_{[\varkappa\lambda]}, M_{[\mu\nu]} \equiv M_{23}M_{10} + M_{31}M_{20} + M_{12}M_{30} = \Omega_1\Omega_2,$$

(34_5) $$\sum_{\varkappa,[\lambda\mu\nu]} S_\varkappa S_{[\lambda\mu\nu]} = 0.$$

Nous avons toujours posé $a_{\ldots 4} = i\, a_{\ldots 0}$; de plus, dans (34_4) et (34_5) les indices $\varkappa\lambda\mu\nu$ doivent être différents les uns des autres et former une permutation paire des chiffres 1234.

(1) Voir par exemple, L. DE BROGLIE, *L'électron magnétique*, Paris, 1934.

En introduisant les tenseurs duals à $M_{[\mu\nu]}$ et $S_{[\lambda\mu\nu]}$ suivant

(35) $$\hat{M}_{[\varkappa\lambda]} \equiv M_{[\mu\nu]}, \qquad \hat{S}_{\varkappa} \equiv S_{\lambda\mu\nu},$$

on peut aussi mettre (34_4) et (34_5) sous la forme

(34_4) $$-\frac{i}{2}\sum_{[\mu\nu]} \hat{M}_{[\mu\nu]} M_{[\mu\nu]} = \Omega_1 \Omega_2,$$

et

(34_5) $$\sum_{\varkappa} S_{\varkappa}\hat{S}_{\varkappa} = 0.$$

D'une manière analogue à (35), nous pouvons définir les matrices

$$\hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}^{\varkappa} \quad \text{duales à} \quad \gamma^{[\mu\nu]} \quad \text{et} \quad \gamma^{[\lambda\mu\nu]}$$

par

(36a) $$\begin{cases} \hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]} = \gamma^{[\mu\nu]} \left(\hat{\gamma}^{[12]} = \gamma^{[34]}, \quad \hat{\gamma}^{[31]} = \gamma^{[24]}, \quad \hat{\gamma}^{[23]} = \gamma^{[14]}; \right. \\ \qquad \left. \hat{\gamma}^{[34]} = \gamma^{[12]}, \quad \hat{\gamma}^{[24]} = \gamma^{[31]}, \quad \hat{\gamma}^{[14]} = \gamma^{[23]} \right). \end{cases}$$

(36b) $$\begin{cases} \hat{\gamma}^{\varkappa} = \gamma^{[\lambda\mu\nu]} \left(\hat{\gamma}^{1} = \gamma^{[234]}, \quad \hat{\gamma}^{2} = \gamma^{[314]}, \quad \hat{\gamma}^{3} = \gamma^{[124]}; \right. \\ \qquad \left. \hat{\gamma}^{4} = \gamma^{[321]} = -\gamma^{[123]} \right). \end{cases}$$

Notons enfin pour la suite les relations (où comme toujours $\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$)

(37a) $$\hat{\gamma}^{[\varkappa\lambda]} = -\gamma^5\gamma^{[\varkappa\lambda]} = -\gamma^{[\varkappa\lambda]}\gamma^5.$$

(37b) $$\hat{\gamma}^{\varkappa} = -i\gamma^5\gamma^{\varkappa} = +i\gamma^{\varkappa}\gamma^5.$$

Il est important d'accentuer que la validité des identités est indépendante de la supposition que les γ_μ sont hermitiques et de la relation (30) entre ψ^+ et ψ^* ; au contraire, nous supposerons que les ψ et ψ^+ sont des quantités tout à fait arbitraires et indépendantes les unes des autres.

Pour démontrer les identités (34_1) à (34_5) partons de l'identité (II) de la fin du § 3 :

(II) $$\sum_{A=1}^{16} \gamma^A_{\rho\sigma}\gamma^A_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 4\delta_{\rho\bar{\sigma}}\delta_{\bar{\rho}\sigma},$$

où

$$(38)\quad \delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma} + \gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{\lambda\mu\nu}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\delta_{\rho\bar\sigma}\delta_{\bar\rho\sigma}.$$

Après multiplication par $\overset{+}{\varphi}_{\rho}\overset{+}{\psi}_{\bar\rho}\varphi_{\sigma}\psi_{\bar\sigma}$ et sommation par rapport aux indices ρ, $\bar\rho$, σ, $\bar\sigma$ (en accentuant les quantités formées avec φ^+, φ d'une manière analogue à celles formées à partir de ψ^+, ψ) nous obtenons

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &-\Omega'_1\Omega_1 + \Omega'_2\Omega_2 + \sum_{\mu} S'_{\mu}S_{\mu} - \sum_{[\mu\nu]} M'_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} S'_{[\lambda\mu\nu]}S_{[\lambda\mu\nu]} \\ &= 4(\psi^+\varphi)\cdot(\varphi^+\psi), \end{aligned}\right.$$

et pour le cas particulier, où $\varphi^+ = \psi^+$ et $\varphi = \psi$:

$$(39a)\qquad -\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \sum_{\mu} S_{\mu}^2 - \sum_{[\mu\nu]} M^2_{[\mu\nu]} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} S^2_{[\lambda\mu\nu]} = -4\Omega_1^2.$$

On verra que (39*a*) est une conséquence des relations (34), mais que, inversement, (39*a*) n'est pas suffisante pour démontrer les relations (34). Cependant, on peut utiliser l'opération de multiplication (une ou deux fois) avec γ^5 pour déduire de (II) ou (38) de nouvelles identités. Pour la première formons

$$\sum_{A}\gamma^{A}_{\rho\sigma}\left(\gamma^5\gamma^A\gamma^5\right)_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\sigma}.$$

où

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma} + \gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma} - \sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} \\ &\qquad - \sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\sigma}. \end{aligned}\right.$$

ce qui donne, en combinant avec (38)

$$(41)\qquad \delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma} + \gamma^5_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\delta_{\rho\bar\sigma}\delta_{\bar\rho\sigma} + \gamma^5_{\rho\bar\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\right).$$

$$(42)\qquad \sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar\rho\bar\sigma} + \sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\delta_{\rho\bar\sigma}\delta_{\bar\rho\sigma} - \gamma^5_{\rho\bar\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\right).$$

De ces relations, et en les traitant comme les relations (39), on déduit les identités

$$(43)\qquad -\Omega_1'\Omega_1 + \Omega_2'\Omega_2 - \sum_{[\mu\nu]} M'_{[\mu\nu]}M_{[\mu\nu]} = 2[(\psi^+\varphi)(\varphi^+\psi) + (\psi^+\gamma^5\varphi)(\varphi^+\gamma^5\psi)]$$

$$(44)\qquad \sum_{\mu} S'_{\mu}S_{\mu} + \sum_{[\lambda\mu\nu]} S'_{[\lambda\mu\nu]}S_{[\lambda\mu\nu]} = 2[(\psi^+\varphi)(\varphi^+\psi) - (\psi^+\gamma^5\varphi)(\varphi^+\gamma^5\psi)]$$

et pour le cas particulier, où $\varphi^+ = \psi^+$ et $\varphi = \psi$

$$(43\,a)\qquad -\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \sum_{[\mu\nu]} M^2_{[\mu\nu]} = 2(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2)$$

expression identique à (34_2), et

$$(44\,a)\qquad -\sum_{\mu} S^2_{\mu} - \sum_{[\lambda\mu\nu]} S^2_{[\lambda\mu\nu]} = 2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2).$$

On voit que la dernière relation est exactement la somme de (34_1) et (34_3).

Formons maintenant

$$\sum_{A} \gamma^{A}_{\rho\sigma} \frac{1}{2}\left(\gamma^5\gamma^A + \gamma^A\gamma^5\right)_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma} + \delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\right);$$

et

$$\sum_{A} \gamma^{A}_{\rho\sigma} \frac{1}{2}\left(\gamma^5\gamma^A - \gamma^A\gamma^5\right)_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma} - \delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\right)$$

obtenons en tenant compte de (37*a*) et (37*b*)

$$(45)\qquad \delta_{\rho\sigma}\gamma^5_{\bar\rho\bar\sigma} + \gamma^5_{\rho\sigma}\delta_{\bar\rho\bar\sigma} - \sum_{[\mu\nu]} \gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\hat\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma} + \delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\right)$$

et

$$(46)\qquad i\sum_{\mu} \gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\hat\gamma^{\mu}_{\bar\rho\bar\sigma} - i\sum_{\mu} \hat\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar\rho\bar\sigma} = 2\left(\gamma^5_{\bar\rho\sigma}\delta_{\rho\bar\sigma} - \delta_{\bar\rho\sigma}\gamma^5_{\rho\bar\sigma}\right)$$

d'où

$$(47)\qquad i\Omega_1'\Omega_2 + i\Omega_2'\Omega_1 + \sum_{[\mu\nu]} M'_{[\mu\nu]}\hat M_{[\mu\nu]} = 2[(\psi^+\gamma^5\varphi)(\varphi^+\psi) + (\psi^+\varphi)(\varphi^+\gamma^5\psi)]$$

et

$$(48) \qquad i\sum_{\mu} S'_{\mu}\hat{S}_{\mu} - i\sum_{\mu}\hat{S}'_{\mu}S_{\mu} = 2[(\psi^{+}\gamma^{5}\varphi)(\varphi^{+}\psi) - (\psi^{+}\varphi)(\varphi^{+}\gamma^{5}\psi)].$$

Pour le cas particulier $\psi^{+} = \varphi^{+}$ et $\psi = \varphi$, il résulte de (47) que

$$(47a) \qquad 2i\Omega_{1}\Omega_{2} + \sum_{[\mu\nu]} M_{[\mu\nu]}\hat{\hat{M}}_{[\mu\nu]} = 4i\Omega_{1}\Omega_{2}$$

expression identique à (34_4). La relation (48) aurait donné pour $\psi^{+} = \varphi^{+}$ et $\psi = \varphi$ simplement $0 = 0$.

Je signale que je n'ai rencontré dans aucune publication les identités plus générales (43), (44), (47), (48).

Il reste à déduire maintenant une des deux relations (34_1) ou (34_3) et la relation (34_5). J'ai constaté qu'on ne pouvait le faire qu'en introduisant la matrice B, définie au § 3. En effet, en tenant compte des relations § 3, (15) et (17) dont les signes sont d'une importance décisive pour les conclusions suivantes, nous trouvons

$$\sum_{A}\gamma^{A}_{\rho\sigma}\left(B\gamma^{A}B^{-1}\right)_{\bar{\sigma}\bar{\rho}} = 4B_{\bar{\sigma}\sigma}B^{-1}_{\rho\bar{\rho}},$$

$$(49) \qquad \left\{\begin{aligned} &\delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} + \gamma^{5}_{\rho\sigma}\gamma^{5}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} + \sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} - \sum_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \\ &\quad - \sum_{[\lambda\mu\nu]}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\rho\sigma}\gamma^{[\lambda\mu\nu]}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 4B_{\bar{\sigma}\sigma}B^{-1}_{\rho\bar{\rho}}, \end{aligned}\right.$$

laquelle combinée avec (38), donne

$$(50) \qquad \delta_{\rho\sigma}\delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} + \gamma^{5}_{\rho\sigma}\gamma^{5}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} + \sum_{\mu}\gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\gamma^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 2\left(\delta_{\bar{\rho}\sigma}\delta_{\rho\bar{\sigma}} + B_{\bar{\sigma}\sigma}B^{-1}_{\rho\bar{\rho}}\right).$$

En multipliant par $\overset{+}{\psi}_{\rho}\overset{+}{\psi}_{\bar{\rho}}\psi_{\sigma}\psi_{\bar{\sigma}}$ et en formant la somme par rapport aux indices ρ, $\bar{\rho}$, σ, $\bar{\sigma}$, *les termes du second membre qui contiennent* B *disparaîtront* parce que B est gauche et que nous avons posé *a priori* $\psi^{+} = \varphi^{+}$, $\psi = \varphi$. Il vient alors

$$(51) \qquad -\Omega_{1}^{2} + \Omega_{2}^{2} + \sum_{\mu} S_{\mu}^{2} = -2\Omega_{1}^{2}$$

qui est identique à (34_1). De (51) et (44*a*) résulte (34_3).

Pour obtenir enfin la dernière relation (34_5) partons de (46) :

$$i \sum_{\mu} \gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \left(B \hat{\gamma}^{\mu} B^{-1} \right)_{\bar{\sigma}\bar{\rho}} - i \sum_{\mu} \hat{\gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} \left(B \gamma^{\mu} B^{-1} \right)_{\bar{\sigma}\bar{\rho}}$$

$$= 2 \left[\left(B\gamma^5 \right)_{\bar{\sigma}\sigma} B^{-1}_{\rho\bar{\rho}} - B_{\bar{\sigma}\sigma} \left(B\gamma^5 \right)^{-1}_{\rho\bar{\rho}} \right]$$

ou, en tenant compte des signes d'après (17)

$$- i \sum_{\mu} \gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \hat{\gamma}^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} - i \sum_{\mu} \hat{\gamma}^{\mu}_{\rho\sigma} \gamma^{\mu}_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} = 2 \left[\left(B\gamma^5 \right)_{\sigma\bar{\sigma}} B^{-1}_{\rho\bar{\rho}} - B_{\bar{\sigma}\sigma} \left(B\gamma^5 \right)^{-1}_{\rho\bar{\rho}} \right]. \tag{52}$$

Les matrices $B\gamma^5 B$ et leurs réciproques étant gauches, on obtient immédiatement (34_5) en multipliant la dernière relation par $\overset{+}{\psi}_{\rho} \overset{+}{\psi}_{\bar{\rho}} \psi_{\sigma} \psi_{\bar{\sigma}}$ et en sommant par rapport aux indices $\rho, \bar{\rho}, \sigma, \bar{\sigma}$.

Les identités déduites plus haut sont les seules du type considéré qui contiennent des expressions invariantes du point de vue de la relativité.