Annales de l'I. H. P.

Vito Volterra

Équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions

Annales de l'I. H. P., tome 4, nº 3 (1933), p. 273-352
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1933__4_3_273_0>

Équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions

PAR

VITO VOLTERRA (1)

CHAPITRE I

SECTION I

La linéarisation du laplacien

1. — Avant d'aborder les problèmes qui constituent l'objet de ces leçons, qui est l'étude de quelques généralisations de la théorie des fonctions et des équations aux dérivées partielles qui s'y rattachent, nous commencerons par faire quelques remarques sur les équations aux dérivées partielles et sur les systèmes obtenus par leur linéarisation.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

(1) La publication de ces conférences, dont M. GR. MOISIL s'était chargé au début, a subi un retard considérable et a dû être ensuite complètement abandonnée. M. J. PÉRÈS a bien voulu la reprendre et la mener à bonne fin. Je dois à la précieuse collaboration de ce savant la forme définitive sous laquelle ces leçons, tenues en 1931, paraissent aujourd'hui. Je dois aussi remercier Mademoiselle H. FREDA de l'aide efficace qu'elle m'a apportée.

Cet te équation est intimement liée au binôme algébrique

$$x^2 - y^2. \tag{2}$$

La décomposition du binôme (2) en deux facteurs algébriques $(x + y)$ $(x - y)$ conduit à la décomposition de (1) en deux facteurs fonctionnels

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0,$$

et l'étude de (1) se ramène à l'étude des deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v \\ &\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

De cette manière on a *linéarisé* l'équation (1) en ce sens qu'on l'a remplacée par le système (3) d'équations du 1er ordre.

Si, au lieu de l'équation (1), on avait considéré l'équation du type elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4}$$

on aurait pu envisager sa linéarisation de la façon suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0;$$

mais, dans ce cas, il convient de considérer u comme complexe

$$u = \mathrm{P} + i\mathrm{Q};$$

on obtient alors successivement l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\mathrm{U} + i\mathrm{V}) = 0,$$

qui n'est que le système d'équations de CAUCHY pour les fonctions monogènes

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

puis l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) = \mathrm{U} + i\mathrm{V},$$

qui introduit la dérivée ordinaire de la fonction monogène $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$

$$\mathrm{U} + i\mathrm{V} = 2\,\frac{d(\mathrm{P} + i\mathrm{Q})}{dz}. \tag{6}$$

Le système de CAUCHY (5) linéarise l'équation de LAPLACE (4) parce que de (5) on tire la conclusion que U, V sont harmoniques.

On entrevoit déjà les relations entre la linéarisation et la théorie des fonctions.

2. — Le procédé ci-dessus conduit d'une équation du deuxième ordre à un système d'équations du premier ordre. La marche inverse présente aussi un grand intérêt. Considérons par exemple les équations de l'électrodynamique dans un milieu anisotrope. Elles ont la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} &= c^2\,\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} - b^2\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} &= a^2\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - c^2\,\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} &= b^2\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - a^2\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}. \end{aligned}\right. \tag{7'}$$

Par un calcul facile, on conclut qu'en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{\partial^2 \mathrm{F}_1}{\partial t^2} - a^2\Delta \mathrm{F}_1 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}, \\ \mathrm{V} &= \frac{\partial^2 \mathrm{F}_2}{\partial t^2} - b^2\Delta \mathrm{F}_2 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}. \\ \mathrm{W} &= \frac{\partial^2 \mathrm{F}_3}{\partial t^2} - c^2\Delta \mathrm{F}_3 + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}, \end{aligned}$$

avec

$$P = a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

et en introduisant des fonctions f_1, f_2, f_3 telles que

$$F_1 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y}, \qquad F_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}, \qquad F_3 = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

on obtient des intégrales de (7) et (7′) si f_1, f_2, f_3 satisfont à l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_4^4} + 2A_1\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2}\right) + 2A_2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_1^2}\right)$$
$$+ 2A_3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\right) = 0.$$

Dans (8) on a posé

$$A_1 = \frac{b^2 + c^2}{2bc} \qquad A_2 = \frac{c^2 + a^2}{2ca} \qquad A_3 = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

et on a utilisé les variables

$$t = i\, x_4,$$

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{bc}} \qquad x_2 = \frac{y}{\sqrt{ca}} \qquad x_3 = \frac{z}{\sqrt{ab}}.$$

Le système d'équations du premier ordre (7) et (7′) est remplacé par l'équation du quatrième ordre (8). L'équation (8) jouit de l'invariance relativiste.

L'équation du quatrième ordre (8) est intimement liée à l'équation algébrique du quatrième degré

$$(9) \qquad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2A_1(x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 2A_2(x_2^2 x_4^2 + x_1^2 x_3^2)$$
$$+ 2A_3(x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^2) = 0,$$

qui est l'équation de la surface d'onde.

Le parallélisme entre les propriétés algébriques de l'équation (9) et les propriétés fonctionnelles de l'équation (8), est intéressant à poursuivre. Bornons-nous à remarquer que si le polynôme (9) se décompose en deux facteurs quadratiques, l'équation (8) se réduit à des équations du deuxième ordre. Un exemple nous est fourni par les systèmes monoaxiques ($b = c$) : le polynôme (9) se décompose en deux facteurs

$$\left[x_1^2 + x_4^2 + \frac{a}{b}(x_2^2 + x_3^2)\right]\left[x_1^2 + x_4^2 + \frac{b}{a}(x_2^2 + x_3^2)\right],$$

et l'équation (8) se décompose en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} + \frac{a}{b}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4^2} + \frac{b}{a}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}\right) = f_1.$$

Pour les systèmes isotropes le polynôme (9) est

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2,$$

et l'équation (8)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)^2 u = 0.$$

Enfin, si l'une des variables (x_1 par exemple) est nulle, on obtient une décomposition des ondes cylindriques et une décomposition analogue de l'équation aux dérivées partielles.

3. — M. DIRAC a considéré le système d'expressions

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_3}{\partial t} + i\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial y} + i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_4}{\partial t} + i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} - i\dfrac{\partial\psi_4}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} - i\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} - i\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} \\[2ex]
\dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} - i\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + i\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}
\end{array}\right.$$

qu'on écrit symboliquement

$$\mathrm{F}\psi$$

et qui est tel que

$$\mathrm{FF}\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi\,;$$

symboliquement

$$\mathrm{F}^2 = \Delta.$$

C'est l'ensemble des quatre formes différentielles (10) qui constitue le correspondant de $\sqrt{\Delta}$.

Un exemple plus immédiat nous est fourni par le système

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=0 \end{aligned}\right.$$

d'où on conclut que

$$\Delta u=\Delta v=\Delta w=0,$$

Or, il suffit de poser

$$\begin{aligned}\varphi_1&=iu\\ \varphi_2&=v+iw,\end{aligned}$$

pour écrire le système (11) sous la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+i\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}&=0\\ -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-i\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}&=0 \end{aligned}\right.$$

ou, symboliquement,

$$\mathcal{F}\varphi=0,$$

et l'on vérifie facilement que l'expression $\mathcal{F}$ est la racine carrée du laplacien à trois variables

$$\mathcal{F}^2=\Delta.$$

Mais, si dans (12) nous écrivons

$$\begin{aligned}\varphi_1&=-s+iu\\ \varphi_2&=v+iw,\end{aligned}$$

nous obtenons le système

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=0. \end{aligned}\right.$$

Nous retrouverons les systèmes (11) et (13) dans les recherches sur les fonctions conjuguées.

Au point de vue formel, les expressions F, $\mathcal{F}$ et les autres systèmes analogues correspondent à $\sqrt{\Delta}$.

Au point de vue des applications on connaît le rôle joué par l'opérateur de M. DIRAC dans la mécanique ondulatoire de l'électron magnétique.

M. Gr. MOISIL (1) a étudié l'intégration des systèmes qui linéarisent l'équation de LAPLACE, leurs applications et relations avec la théorie des nombres complexes et avec celle des fonctions conjuguées. On a pu y étendre quelques-unes des propriétés des fonctions monogènes : théorème de CAUCHY, intégrale de CAUCHY, théorème de MORERA (2).

SECTION II

Quelques théories connexes à la linéarisation

1 — On peut trouver d'autres opérateurs qui réalisent la décomposition en facteurs du laplacien. Ces idées sont liées à une autre branche de l'Analyse fonctionnelle : la théorie des fonctions permutables et les équations intégrales. C'est ABEL qui fut le premier a étudier une équation intégrale à limites variables et à noyau singulier. Plus tard, LIOUVILLE et autres géomètres y ont rattaché une théorie des dérivées d'ordre fractionnaire que nous allons utiliser.

Considérons l'opération fonctionnelle

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(s) - f(0)}{\sqrt{x-s}}\, ds.$$

Nous voulons montrer que, par itération, on obtient la dérivée

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{FF}f(x) = \frac{df}{dx}.$$

(1) Pour la théorie des systèmes généraux de Dirac du type elliptique, voir *Gr. C. Moisil* (7) (11) ; pour l'emploi des nombres hyper-complexes, voir *Gr. C. Moisil* (9) (10).

(2) Pour le théorème de Morera généralisé, voir *N. Théodoresco* (18).

En effet, en intégrant par parties

$$\mathrm{F}f(x) = \frac{d}{dx}\left| -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x-s}[f(s)-f(0)]\right|_0^x + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{x-s}f'(s)ds,$$

la partie intégrée est nulle, donc

$$\mathrm{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f'(s)ds}{\sqrt{x-s}},$$

et

$$\mathrm{FF}f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{x-s}}\int_0^s \frac{f'(t)dt}{\sqrt{s-t}},$$

ou, en changeant l'ordre des intégrations

$$\mathrm{FF}f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x f'(t)dt\int_t^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-t)}};$$

la seconde intégrale est une intégrale eulérienne ayant pour valeur π et la formule (15) est démontrée.

5. — Appelons F_ζ l'opération précédente F ou x a été remplacé par la variable ζ. On voit que l'opération

$$\Phi = \mathrm{F}_\xi \mathrm{F}_\eta$$

est telle que

$$\Phi^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Or, par le changement de variables

$$x + y = 2\xi$$
$$x - y = 2\eta$$

on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Si nous posons

$$\Phi_{xy} = \mathrm{F}_\xi \mathrm{F}_\eta,$$

nous concluons que

$$\Phi_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

de sorte que Φ_{xy} peut être considéré comme $\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$.

Considérons alors le laplacien hyperbolique à trois variables

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il est égal à

$$\Phi^2_{xy} - \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et peut être décomposé en deux facteurs

$$\left(\Phi_{xy} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\Phi_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

De même, dans le cas de quatre variables,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2},$$

est

$$(\Phi_{xy} - \Phi_{zu})(\Phi_{xy} + \Phi_{zu}).$$

Les opérations intégro-différentielles de ce type sont très semblables aux opérations employées par M. E. Schrödinger dans sa modification de la théorie de M. Dirac.

CHAPITRE II

LES FONCTIONS CONJUGUÉES DANS L'ESPACE (1)

Section I

Les fonctions de lignes fermées.

1. — Envisageons l'ensemble des lignes L de l'espace, fermées, rectifiables, intérieures à une certaine région R, n'ayant ni nœuds ni points singuliers. Fixons sur chacune de ces lignes un sens de parcours.

(1) Pour ce chapitre, voir *V. Volterra* (A).

Faisons correspondre à chacune d'elles une quantité F. Nous dirons que F est une *fonction de ligne*, $F\,|\,[L]\,|$ (1).

Cette idée est familière aux physiciens. Considérons un champ magnétique et supposons que la courbe L soit parcourue par un courant électrique d'intensité 1. L'énergie potentielle W du courant a une valeur qui dépend de la forme et de la position du circuit ainsi que du sens dans lequel il est parcouru. A chaque courbe L parcourue dans un certain sens correspond une valeur de l'énergie potentielle W. L'énergie potentielle est donc une fonction des lignes L ; nous écrivons

$$W = F\,|\,[L]\,|$$

2. — La notion de fonction de ligne n'est qu'un cas particulier de la notion de *fonctionnelle*. Si on exprime les trois coordonnées x, y, z des points de la courbe L en fonction d'un paramètre t

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \qquad\qquad a \leqslant t \leqslant b \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

la fonction de ligne $F\,|\,[L]\,|$ peut être envisagée comme une *expression qui dépend de toutes les valeurs des fonctions* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (2) et l'on peut écrire

$$F\,|\,[L]\,| = \Phi\,|\,[x(t),\, y(t),\, z(t)]\,|,$$

mais ce n'est pas la fonctionnelle la plus générale dépendant de trois fonctions d'une variable, ce que nous montrerons plus tard (§ 5).

3. — Nous définirons la *continuité* des fonctions de lignes de la manière suivante : entourons la courbe L d'un tube T qui a un diamètre δ. Considérons les lignes L' intérieures au tube T et qui par déformation continue, sans sortir de T, peuvent être réduites à L. L'ensemble de toutes les courbes L' constitue le *voisinage* de la courbe L.

(1) Voir *V. Volterra* (19), (29) et *M. Fréchet*, (3).

(2) Voir pour la théorie des fonctionnelles V. VOLTERRA (C), (D), ainsi que V. VOLTERRA : Leçons sur les fonctions de lignes (Paris, Gauthier-Villars 1913, et V. VOLTERRA : Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles (Paris, Gauthier-Villars).

J'avais donné d'abord aux fonctionnelles le nom de *fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction* et, après, je leur avais donné le nom de *fonctions de lignes*. La dénomination de *fonctionnelle* a été introduite plus tard par M. HADAMARD et maintenant elle est généralement adoptée. J'ai réservé le nom de *fonctions de lignes* aux fonctionnelles particulières, considérées ci-dessus.

Nous dirons que $F|[L]|$ est continue, si, pour chaque ε donné. on peut trouver un voisinage T de L tel que pour toute courbe L′ de T on ait

$$|F|[L']| - F|[L]|| < \varepsilon. \tag{1}$$

En dehors de la continuité, nous supposerons que $F|[L]|$ jouisse d'une propriété analogue à la condition de LIPSCHITZ. Soit MM′ une déformation de L qui déplace chaque point M de L en un point M′ de L′. Appelons σ l'aire de la surface engendrée par les segments MM′. Nous supposerons que si $\sigma < \sigma_0$, il existe un nombre m tel que

$$\frac{|F|[L']| - F|[L]||}{\sigma} < m. \tag{2}$$

Nous considérons en dehors des fonctions de lignes des *fonctions de lignes et de points*. La définition de la continuité de ces fonctions découle de la définition ci-dessus. Soit une fonction $F|[L, m]|$ de la ligne L et du point m. Nous l'appelons continue si, pour chaque ligne L′ du tube T et pour chaque point m' d'une sphère s ayant pour centre m et le rayon ρ, on a

$$|F|[L', m']| - F|[L, m]|| < \varepsilon$$

dès que $\delta < \delta_0$ et $\rho < \rho_0$.

4. — Considérons sur la ligne L un petit arc $a\ b$ de longueur l. Déplaçons tous les points m de l en m' d'une quantité Δx, parallèlement à Ox ; a sera déplacé en a', b en b'. Soit L′ la ligne formée par L — l, aa', l', $b'b$ (1).

Si le rapport

$$\frac{F|[L']| - F|[L]|}{l\cdot\Delta x}$$

a une limite pour $l = 0$, $\Delta x = 0$, indépendante de la manière dont l, Δx tendent vers o, nous appellerons cette limite

$$F'_x|[L, m]| = \lim_{\substack{l=0\\ \Delta x = 0}} \frac{F|[L']| - F|[L]|}{l\cdot\Delta x} \tag{3}$$

la *dérivée* de $F|[L]|$ suivant Ox, en m. De là même manière on définit $F'_y|[L, m]|$ et $F'_z|[L, m]|$.

(1) L — l étant la ligne L à laquelle on a retranché l'arc l.

Nous admettrons que le rapport (3) tende uniformément vers sa limite, tant par rapport aux lignes que par rapport aux points, et que les dérivées fonctionnelles F'_x, F'_y, F'_z sont continues.

Soit alors L' une ligne voisine de L et soient $\delta x(s)$, $\delta y(s)$, $\delta z(s)$ les composantes du déplacement mm', du point m d'abcisse curviligne s, suivant Ox, Oy, Oz. $F\,|[L]|$ varie d'une quantité $F\,|[L']| - F\,|[L]|$, qui, aux infiniments petits du second ordre près, est

$$\delta F\,|[L]| = \int_L [F'_x \delta x + F'_y \delta y + F'_z \delta z] ds. \tag{4}$$

L'expression ci-dessus est la *différentielle* ou la *variation* de $F\,|[L]|$. On peut montrer facilement que si on pose

$$\delta x(s) = \varepsilon\xi(s) \qquad \delta y(s) = \varepsilon\eta(s) \qquad \delta z(s) = \varepsilon\zeta(s)$$

on a

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{F\,|[L']| - F\,|[L]|}{\varepsilon} = \int_L \{ \xi(s) F'_x\,|[L,s]| + \eta(s) F'_y\,|[L,s]| + \zeta(s) F'_z\,|[L,s]| \} ds.$$

On peut encore dire que

$$\delta F - \{ F\,|[L']| - F\,|[L]| \}$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur à ε.

5. — Supposons que la déformation de la courbe L soit un glissement de L sur elle-même. Dans ce cas

$$\delta x(s) = \alpha K(s) \qquad \delta y(s) = \beta K(s) \qquad \delta z(s) = \gamma K(s)$$

(α, β, γ) étant les cosinus directeurs de la tangente à L, $K(s)$ une fonction arbitraire. $F\,|[L]|$ ne changera pas de valeur ; donc

$$\int_L K(s)[\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z] ds = 0$$

quelle que soit la fonction $K(s)$. On conclut que

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = 0. \tag{5}$$

Les dérivées fonctionnelles d'une fonction de lignes satisfont à la relation (5). (Comparer avec le § 2).

6. — Il est utile de connaître la manière dont se comportent les dérivées de $F\,|[L]|$ pour un *changement d'axes*. Si on change (x, y, z) en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ on voit que ;

$$\begin{aligned} F'_{\bar{x}}\,|[L,m]| &= F'_x \cos(\bar{x},x) + F'_y \cos(\bar{x},y) + F'_z \cos(\bar{x},z) \\ F'_{\bar{y}}\,|[L,m]| &= F'_x \cos(\bar{y},x) + F'_y \cos(\bar{y},y) + F'_z \cos(\bar{y},z) \\ F'_{\bar{z}}\,|[L,m]| &= F'_x \cos(\bar{z},x) + F'_y \cos(\bar{z},y) + F'_z \cos(\bar{z},z) \end{aligned}$$

En particulier, si on prend pour axes la tangente, la normale et la binormale à L en m, en vertu de (5) on a

$$\begin{aligned} F'_t &= 0 \\ F'_n &= \alpha' F'_x + \beta' F'_y + \gamma' F'_z \\ F'_b &= \alpha'' F'_x + \beta'' F'_y + \gamma'' F'_z \end{aligned}$$

où $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, sont les cosinus directeurs de la normale principale n et de la binormale b.

La formule (4) peut alors être écrite sous la forme intrinsèque

$$\delta F\,|[L]| = \int_L [F'_n \delta n + F'_b \delta b]\,ds.$$

7. — La relation (5) devant être satisfaite, on peut prendre [1]

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} F'_x &= B\gamma - C\beta \\ F'_y &= C\alpha - A\gamma \\ F'_z &= A\beta - B\alpha \end{aligned} \right.$$

Les quantités A, B, C ne sont pas complètement déterminées, car on peut les remplacer par

$$\begin{aligned} A^* &= A + \lambda\alpha \\ B^* &= B + \lambda\beta \\ C^* &= C + \lambda\gamma \end{aligned}$$

λ étant une fonction arbitraire de s. A, B, C comme F'_x, F'_y, F'_z sont des fonctions de la ligne L et du point m.

Avec ces fonctions l'expression (4) devient

$$\delta F\,|[L] = \int_L [(B\gamma - C\beta)\delta x + (C\alpha - A\gamma)\delta y + (A\beta - B\alpha)\delta z]\,ds$$

(1) Voir V. VOLTERRA, (20) et (29).

ou encore

$$\delta F \mid [L] \mid = \int_L [A(dy\delta z - dz\delta y) + B(dz\delta x - dx\delta z) + C(dx\delta y - dy\delta x)].$$

Considérons la surface S engendrée par le segment $m\, m'$. Soient n la normale à S, $d\sigma$ l'élément d'aire de S; on a.

$$\delta F \mid [L] \mid = \iint_S (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma. \tag{7}$$

Supposons qu'on considère deux lignes L_0 et L_1. Déformons L_0 par continuité jusqu'à ce qu'elle devienne L_1. Dans cette déformation, elle engendre une surface S, ayant pour bords L_0 et L_1. Nous dirons que nous avons mené une surface S par L_0 et L_1. La formule (7) donne

$$F \mid [L_1] \mid = F \mid [L_0] \mid + \iint_S (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma. \tag{8}$$

En particulier si L_0 se réduit à un point et si l'on admet que pour une ligne réduite à un point la fonctionnelle soit nulle,

$$F \mid [L] \mid = \iint_\Sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma \tag{8'}$$

Σ ayant un seul bord L.

SECTION II

Les fonctions du premier degré

8. — Les fonctions A, B, C des formules (6) dépendent de la ligne L et du point m. Un cas particulièrement important est celui des fonctions de lignes telles que A, B, C soient indépendantes de la ligne L, et se réduisent donc à des fonctions de points [1]).

Soient L_1, L_2 deux lignes qui ont une partie commune L et les parties différentes L', L''. Choisissons un sens sur L_1 et sur L_2 tel que L considérée comme partie de L_1 et de L_2 soit parcourue en deux sens

(1) Voir V. VOLTERRA (20), (29).

différents. Soient en fin σ_1, σ_2 deux surfaces ayant pour contour L_1 et L_2. D'après la formule précédente

$$F\,|\,[L_1]\,| = \iint_{\sigma_1} (A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)d\sigma$$

$$F\,|\,[L_2]\,| = \iint_{\sigma_2} (A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)d\sigma.$$

Nous appelons la ligne L''' formée par la réunion de L' et L'' la somme de L_1 et L_2

$$L''' = L_1 + L_2.$$

On conclut que si A, B, C sont des fonctions de point

$$F\,|\,[L_1 + L_2]\,| = \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)d\sigma$$

ou

$$F\,|\,[L_1 + L_2]\,| = F\,|\,[L_1]\,| + F\,|\,[L_2]\,| \tag{9}$$

Si (A B C) *sont des fonctions de point*, $F\,|\,[L]\,|$ *est une fonction additive.*

9. — Montrons que réciproquement : *si* $F\,|\,[L]\,|$ *satisfait à* (9), *c'est-à-dire est une fonction additive, on peut choisir* A, B, C *indépendants de* L, et par suite uniquement fonctions de point.

Nous employons un tétraèdre infinitésimal de Cauchy dont trois faces sont parallèles aux plans coordonnés, la quatrième face abc ayant une orientation quelconque. Soient ma, mb, mc les arêtes respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, n la normale au plan (abc), σ_x, σ_y, σ_z, σ les aires des triangles (mbc), $mca)$, (mab), (abc). Soient A_x, A_y, A_z les quantités (A, B, C) pour la ligne (mbc)

$$F\,|\,[mbc]\,| = A_x\sigma_x$$

de même soient (B_x, B_y, B_z), $(C_x\ C_y\ C_z)$ les mêmes quantités pour les lignes (mca), (mbc)

$$F\,|\,[mca]\,| = B_y\sigma_y$$
$$F\,|\,[mab]\,| = C_z\sigma_z,$$

où il est clair que A_x, B_y, C_z ne dépendent que du point m.

Pour la ligne (abc) on a

$$(A\cos nx + B\cos ny + C\cos nz)\sigma = A_x\sigma_x + B_y\sigma_y + C_z\sigma_z.$$

Or $\sigma_x = \sigma \cos nx$, $\sigma_y = \sigma \cos ny$, $\sigma_z = \sigma \cos nz$, donc pour la ligne (abc) qui est un triangle infiniment petit, on peut prendre pour A, B, C les fonctions de point A_x, B_y, C_z. On voit que cette affirmation est vraie pour toute ligne L, en menant par L une surface S et en divisant S en triangles infiniment petits.

10. — Nous allons donner une autre démonstration de cette proposition. Soient L_1 et L_2 deux lignes dont les éléments d'arc ds_1, ds_2 ont un point commun m. Donnons aux points de ds_1 des déplacements parallèles et égaux à ds_2 ; F | [L] | varie de δ_1F. Déplaçons ds_2 par une translation égale et parallèle à ds_1, F | [L] | varie de δ_2 F et on a, à cause de l'additivité

$$\delta_2 F = \delta_1 F,$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ respectivement les cosinus directeurs de ds_1 et ds_2 ; on aura

$$\begin{aligned}(10) \qquad & F'_x|[L_2]|\alpha_1 + F'_y|[L_2]|\beta_1 + F'_z|[L_2]|\gamma_1 \\ & = F'_x|[L_1]|\alpha_2 + F'_y|[L_1]|\beta_2 + F'_z|[L_1]|\gamma_2,\end{aligned}$$

d'où, les indices de A, B, C étant ceux des lignes auxquelles elles correspondent,

$$(A_1 - A_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0,$$

ou encore, si on appelle n la normale aux deux éléments ds_1 ds_2

$$(A_1 - A_2)\cos nx + (B_1 - B_2)\cos ny + (C_1 - C_2)\cos nz = 0.$$

Si nous prenons trois lignes L_1, L_2, L_3 ayant au point m les tangentes parallèles à Ox, Oy, Oz, il vient trois relations déduites de la relation ci-dessus et qui entrainent

$$A_2 = A_3$$
$$B_3 = B_1$$
$$C_1 = C_2$$

Désignons ces valeurs par A, B, C et soit L_0 une ligne quelconque passant par le point m et $(\alpha_0\beta_0\gamma_0)$ les cosinus directeurs de sa tangente. On aura

$$\frac{A - A_0}{\alpha_0} = \frac{B - B_0}{\beta_0} = \frac{C - C_0}{\gamma_0}$$

d'où l'on conclut

$$A_0 = A + \lambda\alpha_0$$
$$B_0 = B + \lambda\beta_0$$
$$C_0 = C + \lambda\gamma_0$$

λ étant quelconque et, en particulier, en prenant $\lambda = 0$,

$$A_0 = A, \qquad B_0 = B, \qquad C_0 = C.$$

11. — Nous appelons les fonctions qui jouissent de la propriété (9) des *fonctions du premier degré* (1). Suivant (8') elles sont de la forme

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma \tag{11}$$

A, B, C étant des fonctions de points. Nous supposerons qu'elles ont des dérivées partielles du premier ordre continues. Puisque l'intégrale (11) ne dépend que de la frontière L de la surface Σ, et si nous supposons $F\,|\,[L]\,|$ nulle lorsque L se réduit à un point, l'intégrale est nulle si Σ est une surface fermée, donc il faut que

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

Si cette condition est satisfaite la formule (11) définit une fonction de ligne du 1er degré.

Nous dirons que (12) est la *condition d'intégrabilité*.

Prenons une fonction de ligne du premier degré, définie par la formule (11). Déformons suivant l' un arc l de la ligne L et cherchons la variation correspondante de la fonction. A cause des propriétés précédentes, cette variation sera la valeur de la fonction correspondant à la ligne formée par les arcs l' et l en changeant le sens du parcours de l ; elle s'exprimera donc par l'intégrale

$$W = \int (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz),$$

σ étant une surface limitée par l et l', n sa normale prise dans le sens déjà dit.

Supposons maintenant que Σ, en décroissant indéfiniment de façon régulière, tende vers le point M ; on aura

$$\lim \frac{W}{\sigma} = A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz,$$

où A, B, C sont calculés au point M.

(1) ou encore *simples* (20) ou *régulières* (B).

La limite en question peut être appelée dérivée de la fonction de ligne F par rapport à σ et on peut la représenter par $\frac{dF}{d\sigma}$.

Prenons la dérivée de F par rapport à une surface σ_1 normale à l'axe x en M ; nous aurons

$$\frac{dF}{d\sigma_1} = A$$

et, de même si σ_2 et σ_3 sont des surfaces respectivement normales aux axes y et z, on aura

$$\frac{dF}{d\sigma_2} = B, \qquad \frac{dF}{d\sigma_3} = C;$$

on pourra désigner A, B, C par les symboles

$$\frac{dF}{d(yz)} \qquad \frac{dF}{d(zx)} \qquad \frac{dF}{d(xy)}.$$

On en conclut que

$$\frac{dF}{d\sigma} = \frac{dF}{d(yz)} \cos nx + \frac{dF}{d(zx)} \cos ny + \frac{dF}{d(xy)} \cos nz$$

ou encore

$$dF = \frac{dF}{d(yz)}\, dydz + \frac{dF}{d(zx)}\, dzdx + \frac{dF}{d(xy)}\, dxdy. \tag{13}$$

La formule (8) devient

$$F\,|[L_1]| = F\,|[L_0]| + \iint_S \left(\frac{dF}{d(yz)}\, dydz + \frac{dF}{d(zx)}\, dzdx + \frac{dF}{d(xy)}\, dxdy \right) \tag{14}$$

tandis que la condition d'intégrabilité (12) est

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{dF}{d(yz)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dF}{d(zx)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dF}{d(xy)} = 0. \tag{15}$$

12. — Les formules ci-dessus montrent une profonde analogie entre les fonctions de lignes et les fonctions de points. En effet si $\varphi(x, y, z)$ est une fonction de points, on a

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz \tag{13'}$$

analogue à (13), puis

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x_0 y_0 z_0) + \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz \right) \tag{14'}$$

analogue à (14) et enfin

$$(15') \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

analogues à (15).

Cette analogie se poursuit dans la signification géométrique des deux classes de fonctions.

Soit

$$(u, v, w) = \text{grad}\ \varphi$$

un champ scalaire. Considérons l'espace partagé en couches par les surfaces équipotentielles. La fonction de points

$$\varphi_M - \varphi_N = \int_N^M (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

mesure le nombre de couches qui se trouvent entre N et M.

Soit de même

$$(u, v, w) = \text{rot}\ (\xi, \eta, \zeta)$$

un champ vectoriel ; la fonction de lignes

$$\int_L (\xi dx + \eta dy + \zeta dz) = \iint_S (udydz + vdzdx + wdxdy)$$

mesure le nombre de tubes de tourbillons entourés par la ligne L.

13. — Occupons-nous du changement de variables

$$\bar{x} = \bar{x}(x,y,z)$$
$$\bar{y} = \bar{y}(x,y,z)$$
$$\bar{z} = \bar{z}(x,y,z)$$

La relation

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma \left(\frac{dF}{d(yz)}\,dydz + \frac{dF}{d(zx)}\,dzdx + \frac{dF}{d(xy)}\,dxdy\right),$$

donne en exprimant les coordonnées de Σ en fonction de deux paramètres u, v,

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma \left[\frac{dF}{d(yz)}\frac{d(yz)}{d(uv)} + \frac{dF}{d(zx)}\frac{d(zx)}{d(uv)} + \frac{dF}{d(xy)}\frac{d(xy)}{d(uv)}\right] dudv$$

où $\frac{d(yz)}{d(uv)}$ est le jacobien. Or

$$\frac{d(yz)}{d(uv)} = \frac{d(yz)}{d(\overline{xy})}\frac{d(\overline{xy})}{d(uv)} + \frac{d(yz)}{d(\overline{yz})}\frac{d(\overline{yz})}{d(uv)} + \frac{d(yz)}{d(\overline{yz})}\frac{d(\overline{zx})}{d(uv)};$$

on conclut que

$$\frac{dF}{d(\overline{yz})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\overline{yz})} + \frac{dF}{d(zx)}\frac{d(zx)}{d(\overline{yz})} + \frac{dF}{d(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{d(\overline{yz})}$$

$$\frac{dF}{d(\overline{zx})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\overline{zx})} + \frac{dF}{d(zx)}\cdot\frac{d(zx)}{d(\overline{zx})} + \frac{dF}{d(xy)}\frac{d(xy)}{d(\overline{zx})}$$

$$\frac{dF}{d(\overline{xy})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\overline{xy})} + \frac{dF}{d(zx)}\frac{d(zx)}{d(\overline{xy})} + \frac{dF}{d(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{d(\overline{xy})}.$$

14. — En vertu de la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

toute fonction du premier degré

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma (A\,dydz + B\,dzdx + C\,dxdy)$$

peut être écrite sous la forme

$$F\,|\,[L]\,| = \int_L (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{16}$$

où X, Y, Z vérifient les relations

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = B$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = C.$$

Ce système ne détermine cependant X, Y, Z qu'à un gradient près, car on peut remplacer X, Y, Z par

$$X^* = X + \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

$$Y^* = Y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$$Z^* = Z + \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Pour un changement de variables, les X, Y, Z se comportent comme les composantes d'un vecteur.

15. — On peut donner une autre forme à $F\,|\,[L]\,|$. On peut, en vertu de la condition d'intégrabilité, calculer deux fonctions λ et μ telles que [1]

$$A = \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)}$$

$$B = \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)}$$

$$C = \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)}$$

Il suffit, comme l'enseigne la théorie des multiplicateurs de JACOBI, de trouver une fonction μ intégrale de

$$A\frac{\partial\mu}{\partial x} + B\frac{\partial\mu}{\partial y} + C\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0$$

et de prendre

$$\lambda = \int \frac{1}{\frac{\partial\mu}{\partial z}}(A dy - B dx) + f(\mu)$$

où f est une fonction arbitraire.

Si on fait un changement de variables on voit que, du fait que

$$\frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{y}\bar{z})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)}\cdot\frac{d(zx)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{d(\bar{y}\bar{z})},$$

il vient

$$\frac{dF}{d(\bar{y}\bar{z})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{y}\bar{z})} \qquad \frac{dF}{d(\bar{z}\bar{x})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{z}\bar{x})} \qquad \frac{dF}{d(\bar{x}\bar{y})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{x}\bar{y})};$$

donc λ, μ *sont invariants.*

Soit alors Σ une surface dont l'élément d'arc est

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

on conclut que si

$$\frac{dF\,|\,[L]\,|}{d\sigma} = A\cos nx + B\cos nx + C\cos nz$$

$$= \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)}\cos nx + \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)}\cos ny + \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)}\cos nz$$

1) Voir V. VOLTERRA (20).

on aura

(17) $$\frac{dF\,|\,[L]\,|}{d\sigma} = \frac{1}{H}\,\frac{d(\lambda\mu)}{d(uv)}$$

avec

$$H^2 = EG - F^2.$$

Nous pouvons donc prendre

$$X = \lambda\,\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$Y = \lambda\,\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$Z = \lambda\,\frac{\partial\mu}{\partial z}.$$

Alors (16) donne

(18) $$F\,|\,[L]\,| = \int_L \lambda d\mu.$$

Section III

Les connexions des régions de l'espace et la polydromie des fonctions de lignes.

16. — On sait que l'application de la formule

$$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m d\varphi,$$

quand les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, mène à des remarques importantes relatives à la polydromie des fonctions et à la connexion des domaines.

Considérons un domaine plan D et l'intégrale

(1) $$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m (udx + vdy),$$

u, v étant uniformes et continues dans D et ayant des dérivées partielles du premier ordre continues liées par

(2) $$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

On sait que φ_m est uniforme ou non, suivant que

$$\mathrm{I} = \int_c (udx + vdy), \tag{3}$$

est nulle ou non pour les courbes C fermées. Or, si D est simplement connexe (par exemple si D est le domaine intérieur à un cercle) les relations (2) assurent la nullité de I et l'uniformité de φ.

Par contre, si D est multiplement connexe (par exemple si D est la couronne circulaire comprise entre deux cercles concentriques), l'intégrale I peut être différente de 0 et φ peut être polydrome. On peut éviter la polydromie en faisant une coupure qui rend le domaine simplement connexe.

Le rôle des fonctions polydromes dans la physique mathématique est bien connu ainsi que leur importance pour la théorie des fonctions, par exemple pour la théorie des fonctions algébriques et des surfaces de RIEMANN qui leurs sont attachées.

17. — Si on passe à l'espace, la théorie se complique par le fait qu'on doit considérer deux espèces différentes de connexions.

La première apparait pour l'intégrale simple

$$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m (udx + vdy + wdz),$$

avec

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2'}$$

Si (u, v, w) sont uniformes, continues, dérivables dans un domaine D les conditions (2′) assurent-elles la monodromie de φ ? La réponse est affirmative si D est l'espace intérieur à une sphère et même l'espace compris entre deux sphères, mais elle cesse de l'être si D est le domaine intérieur à un tore. En général la réponse est affirmative si toute ligne fermée intérieure au domaine D peut être réduite à un point sans sortir de ce domaine. Elle est négative dans le cas contraire. Dans le premier cas, D est dit *à connexion linéaire simple*, dans le second, *à connexion linéaire multiple*. Les domaines à connexion multiple peuvent être réduits à la connexion simple par des coupures superficielles ; ainsi l'espace intérieur au tore peut être ramené à la connexion simple par une coupure superficielle transversale.

18. — Par contre, si on applique la formule

$$F\,|\,[L]\,| = F\,|\,[L_0]\,| + \iint_S (A dy dz + B dz dx + C dx dy),$$

avec

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{2''}$$

si on veut avoir deux valeurs égales pour F | [L] | lorsqu'on considère deux surfaces S et S′ différentes quelconques qui ont pour bords L_0 et L, on doit avoir

$$\iint_\Sigma (A dy dz + B dz dx + C dx dy) = 0, \tag{3''}$$

pour toute surface Σ fermée. Cette condition est satisfaite en vertu de (2″) si le domaine D est tel que toute surface Σ puisse être réduite à un point par déformation continue sans sortir du domaine : par exemple, si D est le domaine intérieur à une sphère. On dit dans ce cas que D a la connexion superficielle simple. Sinon la connexion superficielle est multiple : par exemple si D est le domaine compris entre deux sphères concentriques.

En général un espace à connexion superficielle multiple se réduit à un espace à connexion simple par des coupures linéaires constituées par des lignes formant des lacunes tubulaires de l'espace. C'est ainsi que la connexion de l'espace compris entre deux sphères se réduit à la connexion simple par une ligne (petit tube) reliant les surfaces des deux sphères.

19. — Pour les domaines à deux dimensions on peut imaginer des domaines sans frontière simplement connexes (par exemple la surface d'une sphère) ou multiplement connexes (par exemple la surface d'un tore. Comment concevoir des domaines à trois dimensions sans frontière ? On peut le faire en utilisant un espace à quatre dimensions mais on peut y arriver d'une manière plus intuitive [1].

Si on veut, sans sortir du plan, avoir une idée topologique de la sphère, il suffit de considérer deux cercles C_1, C_2 symétriques par

(1) Pour l'analyse des propriétés topologiques des modèles de M. VOLTERRA, nous renvoyons au livre de M. LEFSCHETZ (F).

rapport à une droite Δ et de supposer que les points des frontières m_1 et m_2 sont identiques, c'est-à-dire qu'on passe de m_1 à m_2 sans saut. Nous disons dans ce cas que les deux domaines intérieurs aux cercles C_1, C_2 ont été *soudés par leurs frontières.*

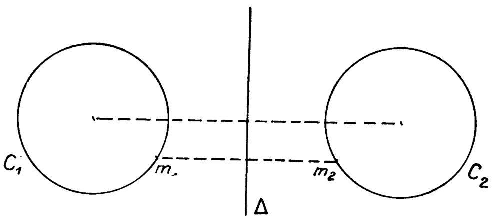


FIG. 1.

Pour avoir une idée topologique de la surface d'un tore sans sortir du plan il suffit de considérer que les domaines hachurés de la figure 2 ont été soudés par leurs frontières.

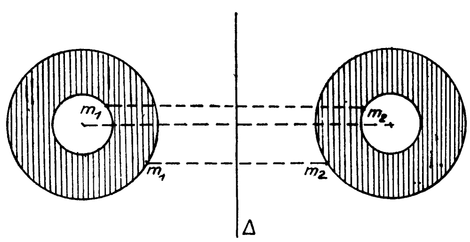


FIG. 2.

Ces remarques peuvent être étendues à l'espace. Soient S_1 et S_2 deux sphères symétriques par rapport à un plan P. Supposons qu'on puisse passer sans discontinuité d'un point m_1 sur S_1 à son symétrique par rapport à P. Nous dirons que les deux sphères ont été *soudées par leurs surfaces* dans la symétrie par rapport à P. Le domaine formé par la réunion du domaine intérieur à S_1 et celui intérieur à S_2 est à connexion superficielle et linéaire simple, et sans frontière.

20. — Par cette construction, on arrive à des domaines homéomorphes (qui peuvent se réduire l'un à l'autre par déformation continue) d'aspects très variés. Soit D_1 le domaine compris entre deux sphères concentriques S_1 et s_1 ; nous l'appelons *sphère trouée* (S_1 — s_1).

Deux sphères trouées, soudées par leurs frontières dans la symétrie par rapport à P *et deux tores soudés par leurs frontières dans la même symétrie, sont homéomorphes.*

Nous décrirons la déformation en priant le lecteur de se reporter à la planche (I).

a) Soient les deux sphères trouées (fig. 1 où sont seulement représentées les sections de ces sphères par un plan de figure passant par les centres). Coupons-les par un plan Q perpendiculaire à P par la ligne des centres. Puis, faisons tourner les hémisphères supérieurs de 180° autour des droites $\Delta\Delta'$ du plan Q (normales au plan de figure). Nous obtenons la situation de la fig. 2. Les couronnes circulaires planes marquées 1,1 et 2,2 sont soudées par symétrie respectivement par rapport aux plans R, R′ (plans menés par Δ, Δ' parallèles à P) ; les hémisphères grandes et petites (hachures) sont soudées dans la symétrie par rapport à P. Elles se trouvent au-dessous du plan Q de la figure.

Déformons les parties planes 1 et 2 pour les rendre sphériques et aplatissons les hémisphères; nous obtenons la figure 3 où les solides sont venus au dessous du plan Q.

Une rotation de 180° autour de S (droite commune à P et Q) réalise matériellement la soudure des parties planes à hachures simples et donne la figure 4 : deux sphères dont les surfaces sont soudées dans la symétrie par rapport à R, ces deux sphères étant tronquées par des sections planes (hachures doubles) que l'on doit souder dans la symétrie par rapport à Q.

b) Il reste enfin à allonger ces deux sphères en deux cylindres, puis à courber ces cylindres de manière à souder matériellement leurs bases dans le plan Q. On a bien obtenu les tores de l'énoncé.

21. — Soit une sphère S_1 et R sphères intérieures s_i, et le domaine D_1 intérieur à S_1 et extérieur aux s_i. Nous appelons ce domaine une *sphère à* R *trous*. Considérons une sphère Σ ayant des manches (voir pl. II fig. 5).

Deux sphères à R *trous soudées par leurs frontières et deux sphères à* R *manches soudées par leurs frontières enferment des domaines homéomorphes.*

PLANCHE I

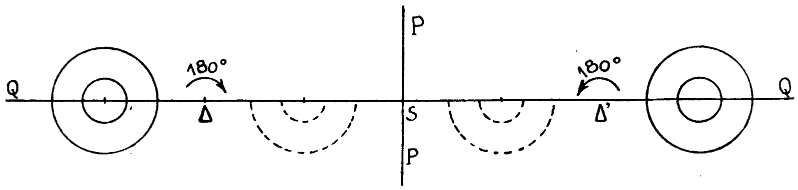


Fig. 1.

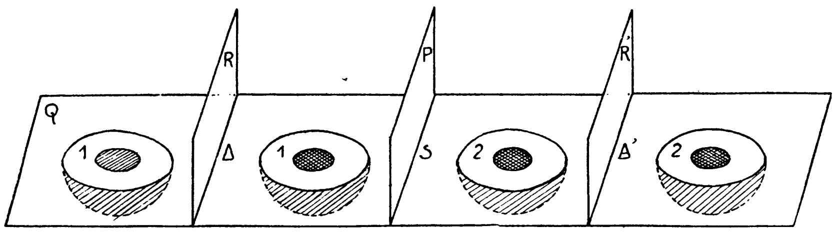


Fig. 2.

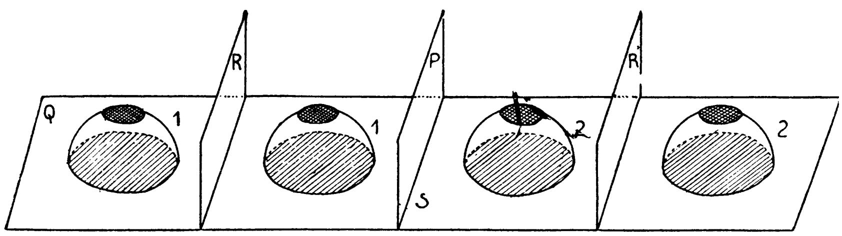


Fig. 3.

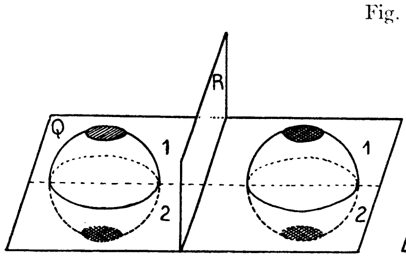


Fig. 4.

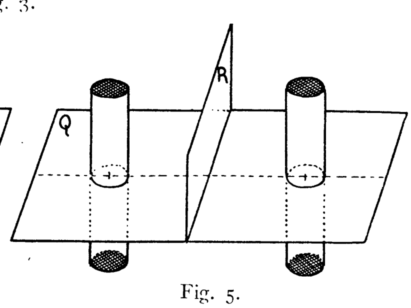


Fig. 5.

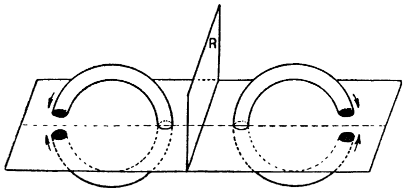


Fig. 6.

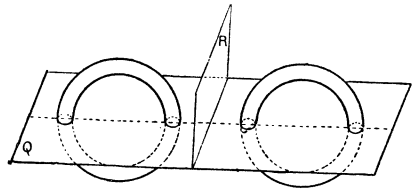
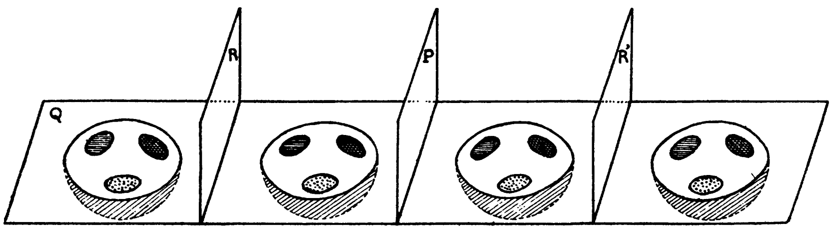


Fig. 7.

PLANCHE II



Fig, 1.

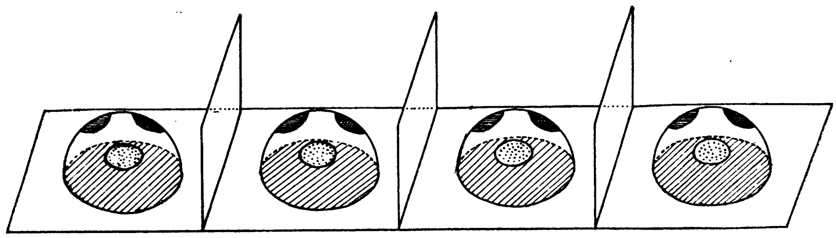


Fig. 2.

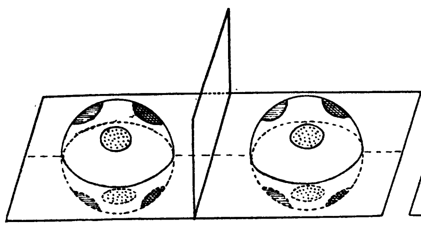


Fig. 3.

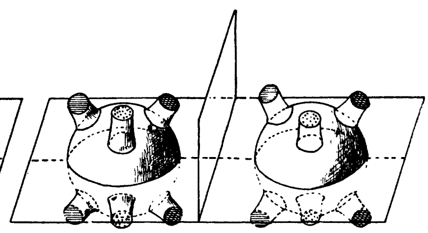


Fig. 4.

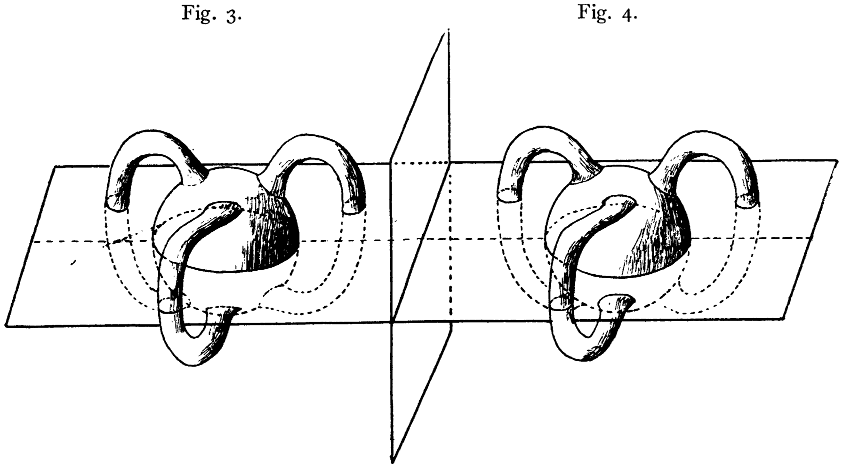


Fig. 5.

PLANCHE III

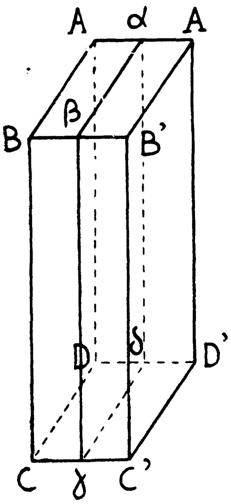


Fig. 1

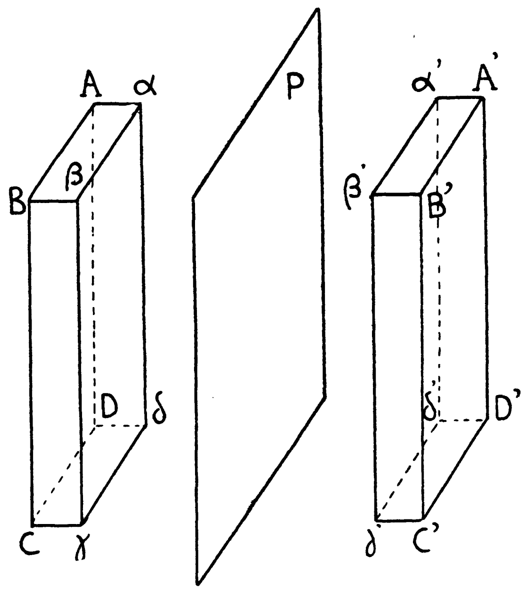


Fig. 2.

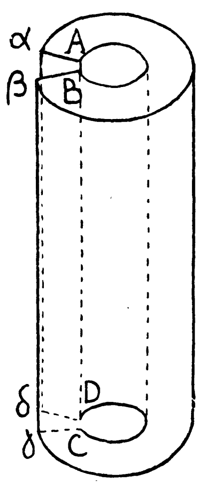


Fig. 3.

En suivant le raisonnement du paragraphe 20 *a* on arrive à la fig. 3 planche II. On continue à déformer le domaine de la manière suivante :

b) On fait saillir les sections droites (hachurées) au bout de tentacules qui prolongent la surface sphérique (fig. 4), puis on courbe ces tentacules de façon à les souder dans le plan Q ; on obtient ainsi des sphères à manches (fig. 5) et l'assertion est justifiée.

22. — *Un parallélipipède ayant les faces opposées soudées et deux tores, chacun à un canal soudés par la frontière, sont homéomorphes.*

Nous disons que les faces opposées d'un parallélipipède sont soudées lorsque nous convenons de considérer comme coïncidantes les extrémités, situées dans deux faces opposées, d'un segment parallèle à une arête.

Pour justifier l'énoncé on fera, dans le parallélipipède ABCDA'B'C'D' une section médiane $\alpha\beta\gamma\delta$, puis on écartera les deux morceaux de sorte que leurs faces $\alpha\beta\gamma\delta$ soient respectivement soudées dans la symétrie par rapport à un plan P (fig. 1 et 2, planche III).

Puis on courbera les arêtes (AB et parallèles) de manière à obtenir, par soudure des faces B$\beta\gamma$C et A$\alpha\delta$D un tube cylindrique (fig. 3). Il suffira enfin de courber ce tube jusqu'à en souder les bases et de faire les mêmes opérations sur le solide A'B'C'$\alpha\beta\gamma\delta$ pour obtenir les deux tores soudée par leurs frontières dans la symétrie par rapport à P.

Section IV

Propriétés des fonctions conjuguées.

23. — Nous avons attiré l'attention dans le premier chapitre sur le fait que le système d'équation de Cauchy

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right.$$

est une linéarisation de l'équation de Laplace parce qu'il conduit à

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Les fonctions de point u, v sont appelées *fonctions conjuguées.* Quelle est l'extension de cette théorie dans l'espace ?

24. — On a vu dans le chapitre I que le système qui correspond au système (1) est le suivant

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0, \end{array}\right. \tag{2''}$$

duquel on tire

$$\Delta u=\Delta v=\Delta w=0.$$

Or. l'équation (2′) est la condition d'intégrabilité de la différentielle d'une fonction de ligne

$$d\Phi=udydz+vdzdx+wdxdy,$$

tandis que (2″) sont les conditions d'intégrabilité de la différentielle d'une fonction de points

$$d\varphi=udx+vdy+wdz.$$

Cette propriété ressemble au fait que les équations (1) sont les conditions d'intégrabilité des deux différentielles

$$dU=udx+vdy$$
$$dV=udy-vdx$$

et l'on sait que la fonction

$$U+iV=\int(u-iv)(dx+idy),$$

a pour dérivée $u-iv$, ou bien que U et V sont conjuguées.

De même. (2) expriment que

$$\varphi=\int(udx+vdy+wdz),$$

$$\Phi=\iint(udydz+vdzdx+wdxdy),$$

(intégrales étendues respectivement à un arc de courbe compris entre un point fixe et un point variable et à une surface limitée par une ligne fermée variable) ont pour dérivées

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w,$$

et

$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = u \qquad \frac{d\Phi}{d(zx)} = v \qquad \frac{d\Phi}{d(xy)} = w.$$

On en conclut

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d(yz)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d(zx)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d(xy)}. \tag{3}$$

A la fonction de points on associe donc la fonction de lignes Φ et les relations de CAUCHY (1) sont remplacées par les relations (3) : nous pourrons dire que Φ et φ sont conjuguées.

25. — Avant de pousser plus loin cette idée, donnons-en une image physique [1].

Dans l'électromagnétisme, on considère deux espèces d'éléments : les pôles magnétiques et les courants électriques. Chaque pôle magnétique est individualisé par sa position dans l'espace et par sa masse magnétique. Chaque courant électrique est individualisé par son circuit, qui est une courbe fermée de l'espace, et par son intensité.

Considérons un système de masses magnétiques et leur potentiel φ par rapport à un pôle magnétique m de masse 1 et de position variable ; φ est une fonction du point m, la dérivée de φ dans une direction n est la composante de l'action exercée sur m suivant la direction n.

De même, considérons le potentiel Φ de ces masses par rapport à un courant d'intensité 1 qui parcourt un circuit qui est une courbe fermée L. Φ est une fonction de la ligne L. Si nous remplaçons L par une ligne L′ voisine de L, ne différant de L qu'autour du point m, et telle que L′ — L enferme une aire $d\sigma$, le rapport $\frac{d\Phi}{d\sigma}$ représente la composante de l'action exercée sur un courant infiniment petit suivant la normale n à $d\sigma$.

(1) Voir VOLTERRA (26)

L'équivalence des courants et des feuillets magnétiques conduit à

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

26. — Enfin, on arrive aux mêmes conclusions par le raisonnement suivant : Les équations (1) expriment que si n et s sont deux directions perpendiculaires, disposées l'une par rapport à l'autre comme ox est disposé par rapport à oy, u et v sont conjuguées si (1)

$$\frac{du}{dn} = \frac{dv}{ds}. \tag{4}$$

Pour étendre cette relation dans l'espace, nous considérons une direction linéaire dn et la direction planaire perpendiculaire $d\sigma$ et deux fonctions φ et Φ telles que

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \tag{5}$$

Pour avoir une dérivée dans la direction planaire $d\sigma$, Φ doit être une fonction de ligne. En résumant : nous *disons qu'une fonction de points* φ *et une fonction de lignes* Φ *du premier degré sont conjuguées si pour chaque couple de directions : dn, direction linéaire et $d\sigma$, direction planaire perpendiculaire, on a*

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \tag{5}$$

En vertu de

$$\frac{\partial\varphi}{dn} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \alpha\frac{d\Phi}{d(yz)} + \beta\frac{d\Phi}{d(zx)} + \gamma\frac{d\Phi}{d(xy)},$$

($\alpha\beta\gamma$ étant les cosinus directeurs de dn, (5) conduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d(yz)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d(zx)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d(xy)}. \tag{3}$$

La condition d'intégrabilité de Φ conduit à

$$\Delta\varphi = 0,$$

(1) Voir V. VOLTERRA (26).

tandis que les conditions d'intégrabilité de φ conduisent à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(xy)}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Phi}{d(xz)}=0\\ &\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Phi}{d(yz)}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(yx)}=0\\ &\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(zx)}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(zy)}=0.\end{aligned}\right.$$

Nous appelons les fonctions de lignes qui vérifient (6), des *fonctions harmoniques.*

Si une fonction de lignes et une fonction de points sont conjuguées, elles sont harmoniques.

Réciproquement : *chaque fonction de point* (ou fonction de ligne) *harmonique admet une fonction de ligne* (ou fonction de point) *qui lui est conjuguée.*

27. — Ecrivons la fonction de ligne Φ définie au § 24 sous la forme

$$\Phi\,|[L]| = \int_L (Xdx + Ydy + Zdz),$$

où

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{d\Phi}{d(yz)}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On sait que ce système ne détermine pas complètement X, Y, Z ; mais on peut profiter de cette indétermination pour ajouter que, dans un certain domaine on ait la condition

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Cette équation jointe au système (3) donne

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}=0\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}=0\\ &\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.\end{aligned}\right.$$

On conclut que *les fonctions X, Y, Z sont des fonctions de point harmoniques*, c'est-à-dire

$$\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0,$$

Le système (7) a été pris par M. Gr. MOISIL comme base d'une extension à l'espace de la théorie des fonctions monogènes [1]. Il a pu étendre au système (7) les propriétés principales du système (1).

28. — Dans le cas des potentiels φ symétriques autour d'un axe Δ, on se borne à considérer les valeurs de la fonction conjuguée $\Phi \mid [L] \mid$ pour les lignes L qui sont des cercles ayant pour axe l'axe de symétrie Δ. $\Phi \mid [L] \mid$ est une fonction de deux variables et on retombe sur la théorie des fonctions associées, développée par KIRCHHOFF et BELTRAMI dans plusieurs mémoires.

CHAPITRE IV

FONCTIONS CONJUGUÉES DANS L'ESPACE A PLUSIEURS DIMENSIONS

1. — Nous passerons rapidement en revue l'extension des résultats précédents aux espaces à n dimensions E_n [2]. Considérons dans E_n une variété à r dimensions $(0 < r < n)$ S_r, donnée par les relations

$$x_i = x_i(\omega_1, \cdots, \omega_r).$$

Soit la matrice fonctionnelle

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_1} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_r}, & \cdots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_r} \end{matrix} \right\| ;$$

(1) Voir Gr. C. MOISIL (7).
(2) Voir V. VOLTERRA (24) et (A).

désignons par $\Delta_{i_1 \ldots, i_r}$ le déterminant

$$(2) \qquad \Delta_{i_1 \ldots i_r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_1} \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_r} & \cdots & \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_r} \end{vmatrix}$$

et soit Δ^2 le carré de la matrice (1)

$$(3) \qquad \Delta^2 = \sum_i \Delta^2_{i_1, \ldots, i_r}$$

Supposons que la variété S_r soit *orientée*, c'est-à-dire qu'en choisissant un signe pour Δ dans un point, le signe de Δ soit déterminé univoquement en tout point de S_r par continuité.

L'élément de volume de S_r est

$$(4) \qquad dS_r = \Delta d\omega_1 \cdots d\omega_r ;$$

les quantités

$$(5) \qquad \alpha_{i_1 \cdots i_r} = \frac{\Delta_{i_1 \cdots i_r}}{\Delta}$$

ne changeant pas si l'on substitue aux ω d'autres variables, nous les nommerons cosinus directeurs de S_r ; on vérifie qu'ils satisfont aux relations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \alpha^2_{i_1 \cdots i_r} = 1 \\ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \alpha_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \alpha_{i_s h_2 \cdots h_r} = 0. \end{array} \right.$$

Quel que soit l, on peut écrire

$$(7) \qquad d\omega_l = \sum_i A_{i_1 \cdots i_{r-1}} \frac{d(x_{i_1} \cdots \qquad \cdots x_{i_{r-1}})}{d(\omega_1 \cdots \omega_{l-1} \; \omega_{l+1} \cdots \omega_r)},$$

les A étant des paramètres infinitésimaux, en partie indéterminés, et la somme étant étendue à toutes les combinaisons des indices $i_1 i_2 \ldots i_{r-1}$. En effet, en formant la matrice des coefficients des A, parmi ses mineurs se trouveront les puissances $(r-1)$-ièmes des mineurs de la matrice (1), de sorte que ces mineurs ne peuvent être tous nuls. On en conclut que si

$$a_{i_1 \cdots i_{r-1}} = - \Delta \cdot A_{i_1 \cdots i_{r-1}},$$

on a

$$dx_s = \sum_i a_{i_1 \ldots i_{r-1}} \alpha_{si_1 \ldots i_{r-1}}, \tag{8}$$

2. — Nous considérons un nombre Φ *fonction de l'hyperespace* S_r, c'est-à-dire un nombre Φ qui a une valeur déterminée pour chaque $S_r : \Phi \mid [S_r] \mid$.

La définition de la continuité de $\Phi \mid [S_r] \mid$ est une généralisation immédiate de la continuité des fonctions de lignes : Soit un point P de S_r et, en ce point, un hyperespace S_{n-r} normal à S_r, dans lequel nous prenons un petit voisinage v du point P.

Lorsque P décrit S_r, v engendrera une portion de l'espace à n dimensions que l'on peut appeler un voisinage de S_r et un point P^1 de v engendrera un nouvel hyperespace S_r^1 que nous dirons appartenir au voisinage de S_r. La fonction $\Phi \mid [S_r] \mid$ sera dite *continue* lorsque, η étant choisi arbitrairement petit, on peut toujours trouver un voisinage de S_r tel que

$$\left| \Phi \mid [S_r^1] \mid - \Phi \mid [S_r] \mid \right| < \eta$$

dès que S_r^1 appartient à ce voisinage.

A côté de la continuité de $\Phi \mid [S_r] \mid$ nous admettrons aussi la propriété suivante. On passe de l'hyperespace S_r à S_r^1 par un déplacement ε qui varie continûment de point en point. Ce déplacement ε engendre un hyperespace S_{r+1}, à $r + 1$ dimensions, d'étendue σ ; nous admettrons que l'on peut rendre $\Phi \mid [S_r^1] \mid - \Phi \mid [S_r] \mid$ arbitrairement petit, en prenant σ inférieur à un σ_0, convenablement choisi.

La *dérivée* fonctionnelle de Φ en un point P est

$$\Phi'_{r_i} = \lim_{\substack{\Delta x_i = 0 \\ s = 0}} \frac{\Phi \mid [S_r^1] \mid - \Phi \mid [S_r] \mid}{s \cdot \Delta x_i}, \tag{9}$$

obtenue en prenant dans S_r le voisinage s d'un point P et en donnant aux points de s un déplacement δx_i parallèle à x_i, ce qui fait passer de S_r à S_r^1. Si la limite est atteinte uniformément et si cette limite est continue, on a pour la variation de Φ, lorsque chaque point de S_r prend un déplacement $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_r$, la formule

$$\delta\Phi = \int_{S_r} \sum_i \Phi'_{x_i} \delta x_i dS_r. \tag{10}$$

Les dérivées fonctionnelles sont liées par

$$\sum_i \Phi'_{x_i} \alpha_{ih_1 \cdots h_{r-1}} = 0 \tag{11}$$

que l'on obtient immédiatement si l'on écrit que $\delta\Phi$ est identiquement nul pour des déplacements δx s'effectuant dans S_r.

Or, les α satisfont à (6), donc à

$$\sum_1^{r+1}{}_t (-1)^t \alpha_{q_t h_1 \cdots h_{r-1}} \alpha_{q_1 \cdots q_{t-1} q_{t+1} \cdots q_{r+1}} = 0 \, ;$$

en multipliant par les indéterminées λ satisfaisant à la condition de changer de signe pour chaque transposition des indices, on arrive à

$$\sum_1^n{}_i \sum_q \lambda_{iq_1 \cdots q_r} \alpha_{q_1 \cdots q_r} \alpha_{ih_1 \cdots h_{r-1}} = 0 \, ;$$

retranchant enfin cette équation de la précédents (11), on démontre que les Φ sont de forme

$$\Phi'_{x_i} = \sum_q \lambda_{iq_1 \cdots q_r} \alpha_{q_1 \cdots q_r}, \tag{12}$$

les λ étant des fonctions de point et d'hyperespaces S_r.

On en conclut que

$$\delta\Phi = \int_{S_r} \sum \lambda_{iq_1 \cdots q_r} \alpha_{q_1 \cdots q_r} \delta x_i dS_r. \tag{13}$$

Considérons une S_{r+1} ayant pour frontière S_r et la S_r déformée : S_r'. Si les équations de S_r sont

$$x_i = x_i(w_1 w_2 \cdots w_r) \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

celles de S_{r+1} seront

$$x_i = x_i(w_1 \cdots w_r) + w_{r+1} \delta x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Soit alors Δ^2_{r+1} le carré de la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial w_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial w_r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial w_r} \\ \delta x_1 & \cdots & \delta x_n \end{array} \right\|$$

et Δ_r^2 le carré de la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne, on vérifie que

$$\Delta^2_{r+1} = \Delta^2_r \left\{ \sum_q \sum_{t=1}^{r+1} (-1)^{t-1} \alpha_{q_1 \cdots q_{t-1} q_{t+1} \cdots q_{r+1}} \delta x_t \right. ;$$

on peut fixer la direction de S_{r+1} par rapport à celle de S_r de façon que

$$\Delta_{r+1} = (-1)^r \Delta_r \sum_q \sum_{t=1}^{r+1} (-1)^{t-1} \alpha_{q_1 \cdots q_{t-1} q_{t+1} \cdots q_{r+1}} \delta x_{qt}$$

(13) donne alors, en désignant par $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}}$ les cosinus directeurs de S_{r+1} calculés par la matrice précédente,

(14) $$\delta\Phi = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}} \alpha_{q_1 \cdots q_{r+1}} dS_{r+1}.$$

Si, par suite, l'hyperespace S_r passe de S_r' à S_s'' en engendrant S_{r+1}, on aura

$$\Phi \mid [S''_r] - \Phi \mid [S'_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}} \alpha_{q_1 \cdots q_{r+1}} dS_{r+1};$$

il faut remarquer qu'en général λ est fonction de point et aussi d'hyperespace.

3. — Soient S_r' et S_r'' deux hyperespaces ayant une partie commune s qui a une orientation différente suivant qu'elle appartient à S_r' et à S_r''. Appelons $S_r' + S_r''$ la variété formée par les parties non communes à S_r' et S_r''. Les fonctions du premier degré sont définies par

(15) $$\Phi \mid [S_r' + S_r''] \mid = \Phi \mid [S_r'] + \Phi \mid [S_r''] \mid.$$

Dans ce cas on peut choisir les λ indépendants de la variété S_r et la dernière formule du n° 3, appliquée en remarquant que Φ tend vers zéro avec S_r, donnera

(16) $$\Phi = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}} \alpha_{q_1 \cdots q_{r+1}} dS_{r+1},$$

les λ étant des fonctions de points et S_{r+1} un espace arbitraire à $r+1$ dimensions, dont la frontière est S_r.

Si S_{r+1} est un domaine très petit autour du point P, on aura

$$\frac{d\Phi}{dS_{r+1}} = \sum_q \lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}} \alpha_{q_1 \cdots q_{r+1}}, \tag{17}$$

les α étant les cosinus directeurs de S_{r+1} au point P.

Prenons en particulier S_{r+1} telle que, au point P, tous les cosinus directeurs soient nuls sauf $\alpha_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}} = 1$; le second membre de (17) se réduit à $\lambda_{q_1 q_2 \cdots q_{r+1}}$ et, comme au nº 11 du chapitre II, il sera naturel de poser

$$\lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}} = \frac{d\Phi}{d(x_{q_1} \cdots x_{q_{r+1}})}, \tag{18}$$

et de définir cette quantité comme *dérivée de* Φ *par rapport à* $x_{q_1} x_{q_2} \cdots x_{q_{r+1}}$. Reste à établir les relations entre les *dérivées* ainsi obtenues.

4. — Rappelons pour cela *la formule de Stokes généralisée* [1]

$$\int_{S_r} \sum_i L_{i_1 i_2 \cdots i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dS_r = \int_{S_{r+1}} \sum_h M_{h_1 \cdots h_{r+1}} \alpha_{h_1 \cdots h_{r+1}} dS_{r+1} \tag{19}$$

avec

$$M_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}. \tag{20}$$

Cette relation montre que si

$$\int_{S_r} \sum_i L_{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dS_r = 0,$$

pour tout hyperespace S_r fermé, on a

$$\sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Il s'ensuit que les dérivées d'une fonction d'hyperespace satisfont aux relations

$$\sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+1}})} = 0, \tag{21}$$

qui sont les conditions *d'intégrabilité*.

(1) Cette formule a été donnée pour la première fois par M. V. VOLTERRA dans ses notes (24-25) des *Rendiconti dei Lincei*. D'autres généralisations ont été données ulterieurement.

5. — On dit que deux espaces S_r' et S''_{n-r} sont orthogonaux en un point si en ce point

$$\alpha'_{i_1 \cdots i_r} = \alpha''_{i_{r+1} \cdots i_n}, \tag{22}$$

pour toutes les permutations paires $(i_1 \dots i_n)$ des indices $(1, \dots, n)$.

Nous dirons que deux fonctions du premier degré $\Phi\,|\,[S_{r-1}]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_{n-r-1}]\,|$ sont *conjuguées* [1] si pour chaque couple d'éléments d'espaces dS_r et dS_{n-r} orthogonaux, on a

$$\frac{d\Phi}{dS_r} = \frac{d\Psi}{dS_{n-r}}. \tag{23}$$

On en déduit

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} = \frac{d\Psi}{d(x_{i_{r+1}} \cdots x_{i_n})}. \tag{24}$$

Nous appelons *ordre* de $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ le nombre r.

6. — *Théorème d'existence.* — Pour établir l'existence des fonctions conjuguées de différents ordres, nous allons démontrer quelques lemmes préliminaires.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions P *intégrales du système*

$$\sum_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1 \cdots i_{r+1}}, \tag{25}$$

est que

$$\sum_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0. \tag{26}$$

Pour démontrer que la condition est nécessaire, on introduit les valeurs (25) des p dans le premier membre de (26) et on en conclut qu'on obtient zéro. Pour démontrer que la condition (26) est suffisante, nous allons procéder par récurrence. Soient $M_{h_1 \dots h_{r-1} n}$ des fonctions arbitraires et en supposant $h_1, h_2 \dots h_r \neq n$ prenons

$$\frac{\partial M_{h_1 \cdots h_r}}{\partial x_n} = (-1)^{r-1} \left\{ p_{h_1 \cdots h_r n} - \sum_s (-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_r n}}{\partial x_{h_s}} \right\};$$

(1) Voir V. VOLTERRA (26).

On aura

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{1}^{r+1}(-1)^s\frac{\partial M_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}\\&=(-1)^{r+1}\sum_s(-1)^{s-r}\frac{\partial p_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_{r+1}n}}{\partial x_{h_s}}=\frac{\partial p_{h_1\cdots h_{r+1}}}{\partial x_n}\end{aligned}\right.$$

C'est pourquoi on pourra écrire

$$\sum(-1)^s\frac{\partial M_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}=p_{h_1\cdots h_{r+1}}+p'_{h_1\cdots h_{r+1}},$$

$p_{h_1}'\ldots_{h_{r+1}}$ n'étant fonctions que des variables $x_1,\ldots,x_{n-1}$. En vertu de (26) on obtient

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial p'_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}}=0.$$

Il suffit maintenant de trouver des P′ qui soient des intégrales de

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial P'_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=0 \qquad (i_{r+1}=n)$$

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial P'_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=p'_{i_1\cdots i_{r+1}} \qquad (i_1,i_2\cdots i_{r+1}\neq n)$$

car en vertu de ces relations en posant

$$P_{i_1\cdots i_r}=M_{i_1\cdots i_r}+P'_{i_1\cdots i_r}$$

on obtiendra des intégrales de (25).

Or, si l'on prend

$$P'_{i_1\cdots i_{r-1}n}=0$$

et $P_{i_1,\ldots,i_r}$ fonctions de $x_1,\ldots,x_{n-1}$ on arrive à un système du type (25) à n–1 variables. Par récurrence, on ramène la question à voir si l'on peut déterminer les $P^{n-r-1}_{1,2\cdots s-1,s+1\cdots r+1}$ telles qu'elles satisfont une seule équation

$$\sum_{1}^{r+1}(-1)^s\frac{\partial P^{n-r-1}_{1\cdots s-1\,s+1\cdots r+1}}{\partial x_s}=p^{n-r-1}_{1\cdots r+1}$$

à $n-r-1$ variables. Puisque on voit facilement que cela est possible, le théorème est démontré et on voit aussi qu'on peut déterminer les P par quadratures.

7. — Si nous posons

$$Q_{i_1 \ldots i_{r+1}} = P_{i_{r+2} \ldots i_n},$$

$$q_{i_1 \ldots i_r} = p_{i_{r+1} \ldots i_n},$$

on en conclut que :

La condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial Q_{i_1 \ldots i_r t}}{\partial x_t} = q_{i_1 \ldots i_r}, \tag{27}$$

soit intégrable est que

$$\sum_{1}^{n}{}_s \frac{\partial q_{i_1 \ldots i_{r-1} s}}{\partial x_s} = 0. \tag{28}$$

8. — En vertu de la condition d'intégrabilité (21) et du lemme précédent on peut écrire, $F \mid [S_r] \mid$ étant une fonction de premier degré de l'hyperespace S_r,

$$\frac{\partial F \mid [S_r] \mid}{\partial (x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} = \lambda_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \sum_t (-1)^t \frac{\partial \Lambda_{i_1 \ldots i_{t-1} i_{t+1} \ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}},$$

et si $\alpha_{q_1 \ldots q_{r+1}}$ sont les cosinus de direction de S_{r+1}

$$\Phi \mid [S_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1 \ldots q_{r+1}} \alpha_{q_1 \ldots q_{r+1}} dS_{r+1}$$

on pourra donc écrire

$$\Phi \mid [S_r] \mid = \int_{S_r} \sum_q \Lambda_{q_1 \ldots q_r} \alpha_{q_1 \ldots q_r} dS_r,$$

$\alpha_{q_1 \ldots q_r}$ étant les cosinus de direction de S_r de sorte que toute fonctionnelle Φ du premier degré de la variété S_r peut s'exprimer par une intégrale étendue à S_r. Réciproquement toute intégrale analogue à l'intégrale précédente sera une fonction de premier degré de S_r.

9. — Nous pouvons maintenant démontrer la proposition fondamentale.

Il existe pour chaque hyperespace S_n, des couples de fonctions conjuguees, d'ordre $r - 1$ et $n - r - 1$.

En effet, nous montrerons que si l'on prend des fonctions $M_{i_1 \cdots i_r}$ harmoniques, et *que l'on pose*

$$P_{i_1 \cdots i_{r-1}} = \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{r-1} t}}{\partial x_t}$$

$$Q_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}}$$

$$q_{i_{r+1} i_{r+2} \cdots i_n} = \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial Q_{i_1 \cdots i_r t}}{\partial x_t}$$

a) *p et q sont les dérivées de deux fonctions d'hyperespace*

$$\Phi \,|\, [S_{r-1}] \,| \text{ et } \Psi \,|\, [S_{n-r-1}] \,|$$

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} = p_{i_1 \cdots i_r}$$

$$\frac{d\Psi}{d(x_{i_{r+1}} \cdots x_{i_n})} = q_{i_{r+1} i_{r+2} \cdots i_n}.$$

b) *Φ et Ψ sont conjuguées.*

En effet, notons tout d'abord que, si les fonctions d'hyperespace Φ et Ψ existent, elles sont conjuguées. Pour s'en rendre compte. il suffit de remarquer que

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= \sum_{1}^{r}{}_s \sum_{1}^{n}{}_t (-1)^s \frac{\partial^2}{\partial x_{i_s} \partial x_t} M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r t};$$

or

$$Q_{i_1 i_2 \cdots i_n t} = \sum_{1}^{r} (-1)^s \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r t}}{\partial x_{i_s}} - (-1)^r \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x_t},$$

d'où

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_r} = q_{i_{r+1} \cdots i_n} + (-1)^r \Delta M_{i_1 \cdots i_r}.$$

et, puisque les M sont harmoniques

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_r} = q_{i_{r+1} \cdots i_n}.$$

D'autre part, la condition d'intégrabilité de Φ est bien vérifiée, comme il résulte du lemme du n° 6. Le lemme du n° 7, en tenant compte des relations entre les p et les q entraîne

$$\sum_{1}^{n} {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} t}}{\partial x_t} = 0,$$

qui donnent enfin

$$\sum (-1)^t \frac{\partial q_{i_r \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_n}}{\partial x_{i_t}} = 0,$$

c'est-à-dire la condition d'intégrabilité de Ψ.

L'énoncé est ainsi entièrement justifié.

Il s'ensuit que dans un espace à n dimensions, on peut construire des fonctions de points (fonctions de S_0) conjuguées à des fonctions d'espaces à n-2 dimensions, des fonctions de lignes (fonctions de S_1) conjuguées à des fonctions d'espaces à n–3 dimensions, etc..., des fonctions d'espaces à n–3 dimensions conjuguées à des fonctions de lignes, enfin des fonctions d'espaces à n–2 dimensions conjuguées à des fonctions de points.

On démontre que si $\Phi\,|\,[S_{r-1}]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_{n-r-1}]\,|$ sont conjuguées, $\Psi\,|\,[S_{n-r-1}]\,|$ et $(-1)^{r(n-r)}\,\Phi\,|\,[S_{r-1}]\,|$ sont aussi conjuguées.

10. — Si $n = 4k$, il peut exister des fonctions d'espaces S_{2k-1} qui soient leurs propres conjuguées. Un exemple dû à M. Moisil [1] est le suivant : si $n = 4$, la fonction de lignes

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_L (X dx + Y dy + Z dz + T dt)$$

est sa propre conjuguée

$$\frac{d\Phi}{d(xy)} = \frac{d\Phi}{d(zt)}$$
$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = \frac{d\Phi}{d(tx)}$$
$$\frac{d\Phi}{d(zx)} = \frac{d\Phi}{d(yt)}$$

(1) Voir Gr. C. Moisil (9

si

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

11. — Le théorème fondamental du n° 9 admet une réciproque [1] : *si*

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \frac{\partial F\,|[S_{r-1}]|}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}, \qquad \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} t}}{\partial x_t} = 0$$

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

il existe des fonctions harmoniques $M_{i_1 \cdots}$ *telles que*

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial M_{i_1 \cdots i_{r-1} t}}{\partial x_t} = P_{i_1 \cdots i_{r-1}},$$

$$\sum_{1}^{s}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \cdots i_r},$$

et à partir desquelles on pourra construire, comme au n° 9, la fonctionnelle $\Psi\,|[S_{n-r-1}]|$, *conjuguée de la fonctionnelle* $\Phi\,|[S_{r-1}]|$.

Nous démontrons ce théorème pour $r = 1$. Le système est

$$\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0$$
$$-\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$$

donc

$$p_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

et

$$\Delta P = 0;$$

on pourra donc prendre des M_i tels que

$$\Delta M_i = 0$$
$$\sum_i \frac{\partial M_i}{\partial x_i} = P$$

(1) Voir V. Volterra (26)

Pour le cas général on procédera par récurrence en passant de r à $r-1$, $r-2, \cdots 1$ [1].

Par définition, nous dirons que $\Phi\,|[S_{r-1}]|$ *est harmonique* si elle satisfait à l'équation

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_t)} = 0\,;$$

dans ces conditions, le théorème précédent prend l'énoncé suivant : *si* $\Phi|[S_{r-1}]|$ *est harmonique, il existe une fonction* $\Psi\,|[S_{n-r-1}]|$ *conjuguée de* Φ.

Pour quelques classes de fonctions conjuguées, nous renvoyons le lecteur à une note de M. Gr. C. Moisil [2].

12. — Soient $\Phi'\,|[S_{r-1}]|$, $\Phi''\,|[S_{r-1}]|$ deux fonctions du premier degré. On peut généraliser à leur sujet le théorème de Green; on montre en effet que

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^{r-1}\int_{S_n}\sum \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}\cdot\frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}\,dS_n \\ &= \int_{S_{n-1}}\sum_i P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)}\cos(\nu x_t)\,dS_{n-1} \\ &+ \int_{S_n}\sum_i P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{\partial}{\partial x_t}\frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)}\,dS_n, \end{aligned}\right.$$

les P étant définis à partir des $p_{i_1\cdots i_r} = \dfrac{d\Phi}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}$ comme au nº 9, S_{n-1} étant la frontière de S_n et ν désignant sa normale dirigée vers l'intérieur de S_n.

La dernière intégrale est nulle si Φ'' est harmonique.

On conclut de la formule précédente que

$$\begin{aligned} &\int_{S_{n-1}}\Big\{\sum_i P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)}\cos(\nu x_t) \\ &\qquad -\sum_i P''_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)}\cos(\nu x_t)\Big\}dS_{n-1} \\ &+\int_{S_n}\Big\{\sum_i P'_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{\partial}{\partial x_t}\frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)} \\ &\qquad -\sum_i P''_{i_1\cdots i_{r-1}}\sum_t \frac{\partial}{\partial x_t}\frac{d\Phi'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}x_t)}\Big\}dS_n = 0. \end{aligned}$$

(1) Voir Gr. C. Moisil (8).
(2) Voir V. Volterra (27).

13. — Les fonctions harmoniques peuvent être rattachées à un *problème du calcul des variations*. En effet, si on veut minimiser la valeur de l'intégrale

$$\int_{S_n} \sum \left[\frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_r})} \right]^2 dS_n$$

pour la fonction Φ, lorsqu'on suppose données à la frontière les valeurs

$$\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \ldots x_{i_{r+1}})} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1 \ldots i_{r+1}},$$

on arrive à la conclusion que Φ doit être harmonique. On peut montrer que si les $b_{i_1 \ldots i_{r+1}}$ sont données à la frontière, Φ est déterminée. Mais, à la frontière, ces quantités ne sont pas arbitraires. On peut donner aux problèmes analogues aux problèmes de DIRICHLET et de NEUMANN des solutions qui généralisent les solutions relatives aux fonctions harmoniques ordinaires.

En résumant : les expressions

$$\sum_i \left[\frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_r})} \right]^2$$

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_r} x_t)}$$

$$\sum_i \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_r})} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_r})}$$

jouent le rôle du premier paramètre différentiel, du second paramètre différentiel et du paramètre mixte.

14. — Les problèmes auxquels il vient d'être fait allusion peuvent être complètement résolus pour le cas de la sphère.

Sans les traiter complètement montrons par quelle voie on peut en trouver la solution.

Les données au contour sont

$$\sum_1^n {}_t p_{i_1 \ldots i_{r-1} t} \cos(\nu x_t) = a_{i_1 \ldots i_{r-1}}.$$

ou

$$\sum_1^{r+1} (-1)^s p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1 \ldots i_{r+1}}$$

On peut montrer d'abord que les deux problèmes rentrent l'un dans l'autre.

Cela posé envisageons le deuxième problème. On remarquera que les fonctions

$$\omega_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_s (-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} x_{i_s}$$

sont harmoniques et connues à la surface de la sphère, on sait donc les calculer et on en déduira finalement les p. (Cf. pour plus de détails, Volterra, (28)).

15. — Étudions le caractère invariant de la théorie développée (1). Si nous faisons un changement de variables (coordonnées curvilignes quelconques)

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \cdots, x_n),$$

on voit facilement que pour une $\Phi \,|\, [S_{r-1}] \,|$

$$\frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{i_1} \cdots, \bar{x}_{i_r})} = \sum_h \frac{d\Phi}{d(x_{h_1} \cdots x_{h_r})} \frac{d(x_{h_1} \cdots x_{h_r})}{d(\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_r})}.$$

Si Φ et Ψ sont conjuguées et si nous posons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} = p_{i_1 \cdots i_r}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(x_{i_{r+1}} \cdots x_{i_n})} = q_{i_{r+1} \cdots i_n}$$

on trouve, puisque $p_{i_1 \cdots i_r} = q_{i_{r+1} \cdots i_n}$

$$\bar{q}_{h_{r+1} \cdots h_n} = \sum_i p_{i_1 \cdots i_r} \frac{d(x_{i_{r+1}} \cdots x_{i_n})}{d(\bar{x}_{h_{r+1}} \cdots \bar{x}_{h_n})}$$

et

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_n})}{d(\bar{x}_{h_1} \cdots \bar{x}_{h_n})}} \sum_k \frac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}{d(\bar{x}_{k_1} \cdots \bar{x}_{h_r})} q_{h_{k+1} \cdots h_n}.$$

En employant le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum_i \sum a_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j$$

(1) Voir V. Volterra (27).

et l'identité

$$\sum_i \frac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}{d(\bar{x}_{h_1} \cdots \bar{x}_{h_r})} \frac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}{d(\bar{x}_{k_1} \cdots \bar{x}_{k_r})} = \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} \cdots a_{h_1 k_r} \\ a_{h_r k_1} \cdots a_{h_r k_r} \end{vmatrix}$$

on obtient

$$\bar{p}_{h_1 \cdots h_r} = \sqrt{a} \sum_k \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{bmatrix} \bar{q}_{k_{r+1} \cdots k_n}$$

$$\bar{q}_{k_{r+1} \cdots k_n} = \sqrt{a} \sum_h \begin{bmatrix} h_{r+1} & \cdots & h_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n \end{bmatrix} \bar{p}_{h_1 \cdots h_r}.$$

en posant

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1} & \cdots & a_{h_1 k_r} \\ \vdots & & \\ a_{h_r k_1} & \cdots & a_{h_r k_r} \end{vmatrix}.$$

Le premier paramètre différentiel est

$$\sum_{h,k} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{h_1} \ldots \bar{x}_{h_r})} \cdot \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{k_1} \ldots \bar{x}_{k_r})}$$

et le second

$$\sum_{r}^{n}{}_{s} (-1)^s \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{k_s}} \sum_h \sqrt{a} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots & & \cdots h_n \\ k_r \cdots & k_{s-1} k_{s+1} & \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{h_1} \cdots \bar{x}_{h_r})}$$

Ces expressions sont valables dans un espace de RIEMANN quelconque et elles ne dépendent que des coefficients du carré de l'élément linéaire.

CHAPITRE IV

FONCTIONS ISOGÈNES DANS L'ESPACE

SECTION I

Les fonctions de lignes isogènes.

1. — Nous avons montré dans les chapitres précédents que la notion de fonctions conjuguées est susceptible d'être généralisée dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Montrons que la *monogénéité* est un concept qui a aussi son correspondant dans un espace à plusieurs dimensions.

On sait que deux fonctions complexes des points d'une surface

$$\varphi = \varphi_1(u, v) + i\varphi_2(u, v)$$
$$f = f_1(u, v) + if_2(u, v)$$

sont appelées *monogènes* si le quotient

$$\frac{d\varphi}{df} = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta f}$$

est indépendant de la manière dont le point variable (auquel correspondent $\varphi + \Delta\varphi$, $f + \Delta f$) tend vers le point initial (auquel correspondent φ, f). La condition de monogénéité est

$$\frac{\dfrac{\partial(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial v}},$$

En introduisant les notations

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = p_1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = q_1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = p_2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = q_2$$

$$p_1^2 + p_2^2 = \varepsilon_{11} \qquad p_1q_1 + p_2q_2 = \varepsilon_{12} \qquad q_1^2 + q_2^2 = \varepsilon_{22}$$

$$p_2q_1 - p_1q_2 = \mathrm{D}$$

la relation de monogénéité conduit à

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}{D}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \frac{\varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \varepsilon_{22}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}{D}$$

ou bien à

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \frac{-\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}}{D}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \frac{-\varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \varepsilon_{22}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}}{D}.$$

La condition d'intégrabilité conduit à l'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varepsilon_{22}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varepsilon_{11}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{D}\right) = 0$$

à laquelle satisfont φ_1 et φ_2. Réciproquement, si φ_1 satisfait à l'équation ci-dessus, on peut lui associer une fonction φ_2 telle que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit monogène à $f_1 + if_2$.

2. — Si on passe à l'espace à trois dimensions, nous allons considérer deux fonctions complexes de lignes, qui soient des fonctions du premier degré :

$$\Phi\,|[L]| = \Phi_1 + i\Phi_2$$
$$F\,|[L]| = F_1 + iF_2$$

et nous supposerons que le rapport de leurs dérivées prises suivant un élément plan $d\sigma$

$$(1) \qquad \frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = \frac{d\Phi}{dF}$$

soit indépendant de la direction de l'élément plan $d\sigma$. Dans ce cas, nous dirons que Φ, F sont *isogènes* (1).

1) Voir V. VOLTERRA (21).

Introduisons les notations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dF_1}{d(yz)} = p_1 & \dfrac{dF_1}{d(zx)} = q_1 & \dfrac{dF_1}{d(xy)} = r_1 \\ \dfrac{dF_2}{d(yz)} = p_2 & \dfrac{dF_2}{d(zx)} = q_2 & \dfrac{dF_2}{d(xy)} = r_2 \\ \dfrac{d\Phi_1}{d(yz)} = \omega_1 & \dfrac{d\Phi_1}{d(zx)} = \chi_1 & \dfrac{d\Phi_1}{d(xy)} = \rho_1 \\ \dfrac{d\Phi_2}{d(yz)} = \omega_2 & \dfrac{d\Phi_2}{d(zx)} = \chi_2 & \dfrac{d\Phi_2}{d(xy)} = \rho_2. \end{array}\right.$$

Si n est la normale à l'élément $d\sigma$, le rapport

$$\frac{(\omega_1 + i\omega_2)\cos(nx) + (\chi_1 + i\chi_2)\cos(ny) + (\rho_1 + i\rho_2)\cos(nz)}{(p_1 + ip_2)\cos(nx) + (q_1 + iq_2)\cos(ny) + (r_1 + ir_2)\cos(nz)}$$

doit être indépendant de n, donc

$$\frac{\omega_1 + i\omega_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2}$$

d'où

$$(1')\qquad \left\{\begin{array}{ll} q_1\omega_1 - q_2\omega_2 = p_1\chi_1 - p_2\chi_2 & q_2\omega_1 + q_1\omega_2 = p_2\chi_1 + p_1\chi_2 \\ r_1\chi_1 - r_2\chi_2 = q_1\rho_1 - q_2\rho_2 & r_2\chi_1 + r_1\chi_2 = q_2\rho_1 + q_1\rho_2 \\ p_1\rho_1 - p_2\rho_2 = r_1\omega_1 - r_2\omega_2 & p_2\rho_1 + p_1\rho_2 = r_2\omega_1 + r_1\omega_2. \end{array}\right.$$

Si on pose

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lll} p_1^2 + p_2^2 = \varepsilon_{11} & q_1^2 + q_2^2 = \varepsilon_{22} & r_1^2 + r_2^2 = \varepsilon_{33} \\ q_1r_1 + q_2r_2 = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} & r_1p_1 + r_2p_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} & p_1q_1 + p_2q_2 = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \\ q_2r_1 - q_1r_2 = D_1 & r_2p_1 - r_1p_2 = D_2 & p_2q_1 - p_1q_2 = D_3 \end{array}\right.$$

on aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_2 = \dfrac{\varepsilon_{11}\chi_1 - \varepsilon_{12}\omega_1}{D_3} = -\dfrac{\varepsilon_{11}\rho_1 - \varepsilon_{13}\omega_1}{D_2} \\ \chi_2 = \dfrac{\varepsilon_{22}\rho_1 - \varepsilon_{23}\chi_1}{D_1} = -\dfrac{\varepsilon_{22}\omega_1 - \varepsilon_{21}\chi_1}{D_3} \\ \rho_2 = \dfrac{\varepsilon_{33}\omega_1 - \varepsilon_{31}\rho_1}{D_2} = -\dfrac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{32}\rho_1}{D_1}. \end{array}\right.$$

et six autres équations dans lesquelles on a échangé ω_2, χ_2, ρ_2 avec $-\omega_1$, $-\chi_1$, $-\rho_1$, et ω_1, χ_1, ρ_1 avec ω_2, χ_2, ρ_2.

Or, on voit facilement que

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{11}D_1 + \varepsilon_{12}D_2 + \varepsilon_{13}D_3 = 0 \\ \varepsilon_{21}D_1 + \varepsilon_{22}D_2 + \varepsilon_{23}D_3 = 0 \\ \varepsilon_{31}D_1 + \varepsilon_{32}D_2 + \varepsilon_{33}D_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2 = D_1^2 & \varepsilon_{12}\varepsilon_{13} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23} = D_2D_3 \\ \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{31}^2 = D_2^2 & \varepsilon_{23}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{31} = D_3D_1 \\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2 = D_3^2 & \varepsilon_{31}\varepsilon_{32} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12} = D_1D_2\,; \end{array}$$

on en déduit

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} \omega_2 = \dfrac{\varepsilon_{12}\rho_1 - \varepsilon_{13}\chi_1}{D_1} & \omega_1 = \dfrac{\varepsilon_{13}\chi_2 - \varepsilon_{12}\rho_2}{D_1} \\ \chi_2 = \dfrac{\varepsilon_{23}\omega_1 - \varepsilon_{21}\rho_1}{D_2} & \chi_1 = \dfrac{\varepsilon_{21}\rho_2 - \varepsilon_{23}\omega_2}{D_2} \\ \rho_2 = \dfrac{\varepsilon_{31}\chi_1 - \varepsilon_{32}\omega_1}{D_3} & \rho_1 = \dfrac{\varepsilon_{32}\omega_2 - \varepsilon_{31}\chi_2}{D_3} \end{array}\right.$$

d'où l'on conclut que ω_1, χ_1, ρ_1, satisfont à l'équation

$$D_1\omega_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0;$$

la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\chi_1}{\partial y} + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} = 0$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{12}\rho_1 - \varepsilon_{13}\chi_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\omega_1 - \varepsilon_{21}\rho_1}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{31}\chi_1 - \varepsilon_{32}\omega_1}{D_3}\right) = 0.$$

La partie réelle Φ_1 d'une fonction de ligne Φ isogène à F *satisfait aux équations aux dérivées fonctionnelles*

$$(7)\qquad D_1\frac{d\Phi_1}{d(yz)} + D_2\frac{d\Phi_1}{d(zx)} + D_3\frac{d\Phi_1}{d(xy)} = 0$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varepsilon_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)} - \varepsilon_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)}}{D_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\varepsilon_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(yz)} - \varepsilon_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)}}{D_2}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\varepsilon_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)} - \varepsilon_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(yz)}}{D_3}\right) = 0. \end{array}\right.$$

le coefficient Φ_2 de la partie imaginaire satisfait aux mêmes équations fonctionnelles.

3. — Réciproquement *si* $\Phi_1 \,|\,[L]\,|$ *satisfait au système* (7), (8), *on peut trouver une fonction de lignes* $\Phi_2 \,|\,[L]\,|$ *telle que* $\Phi_1 + i\Phi_2 = \Phi$ *soit isogène à* F.

Il suffit de construire une fonction de lignes telle que

$$\frac{d\Phi_2}{d(yz)} = \frac{\varepsilon_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)} - \varepsilon_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)}}{D_1}$$

. . . ., ce qui est possible, la condition d'intégrabilité étant satisfaite en vertu de (8). En tenant compte de la condition (7) on trouve que le rapport (1) est indépendant de la direction de l'élément plan σ, donc Φ est isogène à F.

La propriété suivante des fonctions isogènes est évidente :

Si Φ *et* F *sont isogènes et si* Φ *et* G *sont isogènes,* G *et* F *sont également isogènes.*

4. — Nous allons donner une propriété intéressante due à M. S. MANDELBROJT [1], qui montre que les fonctionnelles isogènes peuvent être envisagées comme un prolongement des fonctions monogènes.

On sait que si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle, développable en série de Taylor, on peut trouver une fonction monogène $f(z)$ qui coïncide avec $f(x)$ sur l'axe des x.

Soit S une surface, Q un point arbitraire de S, C une congruence de courbes fermées de l'espace, qui jouissent des propriétés suivantes :

α) par chaque point Q de S il passe une courbe C et une seule ; nous l'appelons C_Q.

β) deux courbes C_P et C_Q quelconques ont toujours une portion AMB commune.

γ) les portions non communes des deux courbes C : APB et AQB tendent vers 0 si le point Q tend vers P.

Soient $\Phi\,|[L]|$ et $F\,|[L]|$ des fonctionnelles isogènes ; définissons deux fonctions des points de S par

$$\varphi(Q) = \Phi\,|[C_Q]|$$
$$f(Q) = F\,|[C_Q]|.$$

Lorsque Φ et F sont isogènes, le rapport

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta F} = \frac{\Phi\,|[C_Q]| - \Phi\,|[C_P]|}{F\,|[C_Q]| - F\,|[C_P]|}$$

tend vers une limite indépendante de la manière dont C_Q tend vers C_P, puisque C_Q ne diffère de C_P qu'au voisinage du point P ; cette limite est donc indépendante de la direction dans laquelle Q tend vers P.

(1) Voir S. MANDEBROJT (5), (6).

Il s'ensuit que le rapport des différentielles des fonctions de point

$$\frac{d\varphi}{df}$$

est indépendant de la manière dont Q tend vers P.

Les deux fonctions de ligne isogènes Φ *et* F, *qui prennent les mêmes valeurs que* φ *et* f *sur les courbes C correspondant aux points de* S, *peuvent être considérées comme prolongement analytique pour les courbes de l'espace, des deux fonctions monogènes de point* φ *et* f.

Section II

Etude d'un cas particulier.

5. — Nous étudierons d'une manière plus approfondie un cas particulier très intéressant : celui dans lequel l'équation

(9) $$D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = 0$$

est complètement intégrable (1), ou bien

(10) $$D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = \zeta d\eta.$$

Cette propriété se conserve par un changement des variables x, y, z.

En posant

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = \frac{d\Phi}{d(yz)}, \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2 = \frac{d\Phi}{d(zx)}, \quad \rho = \rho_1 + i\rho_2 = \frac{d\Phi}{d(xy)},$$

$$D_1\omega + D_2\chi + D_3\rho = 0$$

la relation (7) devient

(11) $$\frac{\partial\eta}{\partial x}\omega + \frac{\partial\eta}{\partial y}\chi + \frac{\partial\eta}{\partial z}\rho = 0.$$

Or

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0,$$

on peut donc (Cf. Chap. II, n° 15) trouver une fonction $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, telle que

(12) $$\omega = \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(yz)}, \quad \chi = \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(zx)}, \quad \rho = \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(xy)}$$

(1) Voir V. Volterra (22).

D'ailleurs

$$p = \frac{dF}{d(yz)} \qquad q = \frac{dF}{d(zx)} \qquad r = \frac{dF}{d(xy)}$$

satisfont aux relations

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$
$$D_1 p + D_2 q + D_3 r = 0,$$

d'où, t étant une fonction complexe $t_1 + it_2$

$$p = \frac{d(t\eta)}{d(yz)} \qquad q = \frac{d(t\eta)}{d(zx)} \qquad r = \frac{d(t\eta)}{d(xy)}$$

Il en résulte aisément que

$$D_1 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)} \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad D_2 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)} \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad D_3 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)} \frac{\partial \eta}{dz}$$

donc à cause de l'équation (10)

$$\zeta = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)}.$$

6. — Si nous portons dans les équations du § 2, Section 1, les valeurs de ω, χ, ρ données par (12), nous obtenons en séparant les parties réelles des parties imaginaires

$$(13) \qquad \begin{aligned} D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{13} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ D_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} &= \varepsilon_{21} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{23} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \\ D_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} &= \varepsilon_{31} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{32} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \end{aligned}$$

On peut trouver un système analogue en changeant θ_2 en $-\theta_1$ et θ_1 en θ_2. On en conclut que θ_1, et θ_2 satisfont à l'équation

$$(14) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{13} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{21} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{23} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)\right] \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{31} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{32} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

θ, η sont invariants dans un changement de variables. Si nous prenons comme nouvelles variables t_1, t_2, η, on a

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 \qquad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$$
$$D_1 = D_2 = 0 \qquad D_3 = -1$$

et le système (13) devient

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial t_2} = 0$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial t_1} = 0$$

donc $\theta_1 + i\theta_2$ *est fonction analytique de* $t_1 + it_2$.

Réciproquement, *si* $\theta_1 + i\theta_2$ est fonction analytique *de* $t_1 + it_2$ *les fonctions de lignes*

$$\Phi \,|[\mathrm{L}]|\, = \int_{\mathrm{L}} (\theta_1 + i\theta_2) d\eta,$$

$$\mathrm{F} \,|[\mathrm{L}]|\, = \int_{\mathrm{L}} (t_1 + it_2) d\eta,$$

sont isogènes.

On a donc le moyen de construire ces fonctions isogènes dans le cas où (9) est complètement intégrable. Il suffit de prendre trois fonctions régulières de x, y, z, soient t_1, t_2, η, puis une fonction analytique $\theta_1 + i\theta_2$ de la variable complexe $t_1 + it_2$, dépendant aussi de η ; les deux intégrales curvilignes précédentes définiront des fonctionnelles isogènes.

7. — Considérons l'expression

$$\mathrm{H}_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{\varepsilon_{22}\rho_1\rho_2 - \varepsilon_{23}(\rho_1\chi_2 + \rho_2\chi_1) + \varepsilon_{33}\chi_1\chi_2}{\mathrm{D}_1^2},$$

$$= \frac{1}{\zeta}\left\{ \frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{23}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{32}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} \right\}.$$

On a la généralisation du *théorème de* GREEN

$$\iiint_{\mathrm{V}} \zeta \mathrm{H}_{\Phi_1\Phi_2}\, dv$$

$$= \iint_{\mathrm{S}} \theta_2 \left\{ \frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\cos nx + \frac{\varepsilon_{23}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\cos ny + \frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{32}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\cos nz \right\}$$

$$- \iiint \theta_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{22}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\right. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{23}\rho_1}{\mathrm{D}_1}\right) \right\}$$

On en conclut que *la condition d'extrémum de l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \iiint \zeta \mathrm{H}_{\Phi\Phi}\, dv$$

est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{13}\chi - \varepsilon_{12}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\chi - \varepsilon_{22}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{33}\chi - \varepsilon_{32}\rho}{D_1}\right) = 0.$$

Une autre propriété analogue au théorème de GREEN est obtenue si on considère l'expression

$$\theta_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2 & \rho_2 \\ \chi_1 & \rho_1 \end{vmatrix};$$

on trouve

$$\theta_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{1}{\zeta}\left[\omega_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \chi_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right]$$
$$= -\frac{1}{\zeta}\left[\omega_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \chi_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \rho_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right]$$

d'où

$$\iiint \zeta\theta_{\Phi_1\Phi_2}\, dv = \iint \theta_2 \frac{d\Phi_1}{d\sigma}\, d\sigma = -\iint \theta_1 \frac{d\Phi_2}{d\sigma}\, d\sigma.$$

SECTION III

Relation d'isogénéité entre les fonctions de ligne et les fonctions de point.

8. — Si Φ et F sont deux fonctions de ligne isogènes, on a par définition

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = f(x,y,z)$$

f étant une fonction complexe de point ; on a donc

$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = f.\frac{dF}{d(yz)} \qquad \frac{d\Phi}{d(zx)} = f.\frac{dF}{d(zx)} \qquad \frac{d\Phi}{d(xy)} = f.\frac{dF}{d(xy)};$$

en vertu des conditions d'intégrabilité, on conclut que Φ et F satisfont à

$$(15) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d\Psi}{d(yz)} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d\Psi}{d(zx)} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{d\Psi}{d(xy)} = 0.$$

(1) Voir V. VOLTERRA (23).

Rappelons que si φ et ψ sont deux fonctions monogènes des points d'une surface, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial(-x)}=0.$$

Nous dirons que la relation (15) caractérise la liaison d'isogénéité de la fonction de point f et de la fonction de ligne Ψ.

La fonction f est appelée dérivée de $\Phi|[L]|$ par rapport à $F|[L]$

$$f=\frac{d\Phi}{dF};$$

donc : *la dérivée d'une fonction* Φ *par rapport à une fonction* F, *qui lui est isogène, est une fonction de point, elle-même isogène aux deux fonctions* Φ *et* F.

Pour montrer que f est isogène à F et à Φ, il suffit d'écrire les conditions d'intégrabilité des dérivées de Φ et de F.

Réciproquement : *si* f *est isogène à* $F|[L]|$, *il existe une fonction* $\Phi|[L]|$ *telle que* $d\Phi : dF = f$.

En effet, si

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dF}{d(yz)}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{d(zx)}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dF}{d(xy)}=0$$

en vertu de

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{dF}{d(yz)}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dF}{d(zx)}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{dF}{d(xy)}=0$$

on conclut que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{dF}{d(yz)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{dF}{d(zx)}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\frac{dF}{d(xy)}\right)=0;$$

il existe donc une fonction de ligne $\Phi|[L]|$ ayant pour dérivées

$$f\frac{dF}{d(yz)},\ f\frac{dF}{d(zx)},\ f\frac{dF}{d(xy)}.$$

Φ sera appelée *intégrale* de f par rapport à $F|[L]|$ et nous écrirons

$$\Phi|[L]|=\iint f dF$$

notation qui est justifiée parce que

$$\Phi\,|[\mathrm{L}]| = \iint \left[f\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)}\,dy\,dz + f\frac{d\mathrm{F}}{d(zx)}\,dz\,dx + f\frac{d\mathrm{F}}{d(xy)}\,dx\,dy \right],$$

l'intégrale étant étendue à une surface σ limitée par la ligne fermée L.

9. — *Si* f_1, f_2, f_3 *sont isogènes à* $\mathrm{F}\,|[\mathrm{L}]|$, on a

$$\frac{\partial(f_1 f_2 f_3)}{\partial(xyz)} = 0\,;$$

en effet, les dérivées de F, non toutes nulles, doivent satisfaire aux trois équations

$$\frac{\partial f_i}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{d\mathrm{F}}{d(zx)} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{d\mathrm{F}}{d(xy)} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

dont le déterminant doit être nul ; on peut dire que *si* f_1, f_2, f_3 sont *isogènes à une même fonction de lignes,* f_3 *est fonction de* f_1, f_2.

Réciproquement *si* f_1 *et* f_2 *sont isogènes à* $\mathrm{F}\,|[\mathrm{L}]|$, *toute fonction de* f_1, f_2 telle que $f_3 = \varphi\,(f_1 f_2)$ *est isogène à* $\mathrm{F}\,|[\mathrm{L}]|$.

Nous dirons dans ce cas, que $f_1 f_2 f_3$ sont isogènes entre elles.

Pour donner une signification à l'isogénéité des fonctions de point, analogue à la monogénéité, rappelons la définition de monogénéité de deux fonctions f_1, f_2 des points d'une surface. Soit P un point infiniment voisin du point fixe M et d la différentielle suivant MP. Les deux fonctions sont monogènes si $df_1 : df_2$ est indépendant de la manière par laquelle P tend vers M.

De même soient $\mathrm{P_I}$, $\mathrm{P_{II}}$ deux points infiniment voisins d'un point fixe M dans un espace à trois dimensions et d_{I}, d_{II} les différentielles suivant $\mathrm{MP_I}$, $\mathrm{MP_{II}}$. *Si* f_1, f_2, f_2 sont *isogènes, les rapports*

$$\begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_1 & d_{\mathrm{II}} f_1 \\ d_{\mathrm{I}} f_2 & d_{\mathrm{II}} f_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_2 & d_{\mathrm{II}} f_2 \\ d_{\mathrm{I}} f_3 & d_{\mathrm{II}} f_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_3 & d_{\mathrm{II}} f_3 \\ d_{\mathrm{I}} f_1 & d_{\mathrm{II}} f_1 \end{vmatrix}$$

sont indépendants de la manière dont les points $\mathrm{P_I}$, $\mathrm{P_{II}}$ *tendent vers* M.

10. — Considérons des fonctions de lignes $\mathrm{F}_i\,|[\mathrm{L}]|$, isogènes d'une fonction de points f :

$$\frac{d\mathrm{F}_i}{d(yz)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\mathrm{F}_i}{d(zx)}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\mathrm{F}_i}{d(xy)}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,;$$

on vérifie qu'il existe des fonctions de points φ_i telles que

$$\frac{d\mathrm{F}_i}{d(yz)} = \frac{d\,(\varphi_i f)}{p(y,z)}, \ldots$$

et que les fonctions φ_i, f sont isogènes.

Réciproquement, si les fonctions φ_i sont isogènes, il existe des fonctions de lignes Φ_{ij} telles que

$$\frac{d\Phi_{ij}}{d(yz)} = \frac{d(\varphi_i\varphi_j)}{d(yz)}, \dots$$

et les Φ_{ij} sont isogènes entre elles ; en même temps, les Φ_{ij} sont isogènes aux fonctions φ_k.

11. — Puisqu'on a, quelles que soient f_1 et f_2,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{d(f_1f_2)}{d(yz)} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{d(f_1f_2)}{d(zx)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d(f_1f_2)}{d(xy)} = 0$$

il existe évidemment une fonction $\Psi\,|[L]|$ donnée par

$$\frac{d\Psi}{d(yz)} = \frac{d(f_1f_2)}{d(yz)}, \dots ;$$

nous l'écrirons

$$\Psi = (f_1f_2) ;$$

nous dirons que Ψ provient de la *composition des deux fonctions* f_1, f_2. L'opération générale de composition sera étudiée dans le chapitre suivant. Nous démontrerons ici seulement le théorème : *pour que*

$$(f_1f_2) = (g_1g_2)$$

il est nécessaire et suffisant que f_1, f_2 *soient deux fonctions de* g_1, g_2 *satisfaisant à*

$$\frac{d(g_1,g_2)}{d(f_1,f_2)} = 1.$$

La condition est évidemment suffisante ; pour établir qu'elle est nécessaire notons que l'égalité de (f_1f_2) et (g_1g_2) signifie que

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{d(y,z)} = \frac{d(g_1,g_2)}{d(y,z)}, \dots$$

On en conclut que

$$\frac{d(f_1,f_1,f_2)}{d(x,y,z)} = \frac{d(f_1,g_1,g_2)}{d(x,y,z)} = 0$$

d'où

$$\frac{d(f_1,f_2)}{d(y,z)} = \frac{d(f_1,f_2)}{d(g_1,g_2)}\cdot\frac{d(g_1,g_2)}{d(y,z)}\dots,$$

et par suite

$$\frac{d(f_1f_2)}{d(g_1g_2)} = 1.$$

12. — Remarquons aussi que si nous cherchons une fonction F isogène aux deux fonctions f_1, f_2, nous pourrons écrire

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)} = \lambda \frac{d(f_1 f_2)}{d(yz)}$$

. . . .

puisque

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\cdot\frac{d\mathrm{F}}{d(zx)} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\cdot\frac{d\mathrm{F}}{d(xy)} = 0 \qquad (i = 1,2),$$

λ étant évidemment fonction de $f_1 f_2$. Si nous posons

$$\lambda = \frac{\partial f_3}{\partial f_2}$$

ces relations deviennent

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)} = \frac{d(f_3 f_2)}{d(yz)}.$$

On en conclut que $\mathrm{F} = (f_3 f_2)$, ce qui peut encore s'écrire

$$\mathrm{F} = \iint_s \frac{d(f_3 f_2)}{d(uv)}\, du\, dv,$$

ou encore

$$\mathrm{F} = \iint df_3 \cdot df_2,$$

l'intégrale double étant toujours étendue à une portion de surface (de paramètres u et v) limitée par la courbe fermée L.

13. — Nous avons défini plus haut la *dérivée* d'une $\Phi|[\mathrm{L}]|$ par rapport à une $\mathrm{F}|[\mathrm{L}]|$ isogène et nous avons aussi considéré (§ 9) l'opération inverse d'intégration.

f étant une fonction de point isogène à $\mathrm{F}|[\mathrm{L}]|$ et σ une surface ouverte ou fermée de l'espace, $\frac{d\mathrm{F}}{d\sigma}$ est défini dès que le sens de la normale est fixé et de même l'intégrale

$$\int_\sigma f \frac{d\mathrm{F}}{d\sigma}\, d\sigma,$$

que nous avons écrit

$$(15) \qquad \int_\sigma f dF$$

(et qui change de signe avec le sens de la normale).

Les conditions posées entraînent immédiatement que, si σ est une surface fermée ne renfermant pas de singularités de f et F, l'intégrale de fonction isogène (15) est nulle. C'est l'analogue du théorème de CAUCHY pour les intégrales de fonctions analytiques.

Le théorème inverse (MORERA) se généralise aussi : si (15) s'évanouit identiquement pout toute surface fermée σ, f est isogène à F.

Dans ces conditions si σ est une surface ouverte (limitée par la courbe L) l'intégrale (15) *ne dépend pas de la forme de cette surface*, supposée variable dans un champ simplement connexe où f et F n'ont pas de singularités, *mais dépend uniquement de* L ; c'est une fonctionnelle $\Phi|[L]|$, isogène à F et telle que

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Nous avons donc bien obtenu l'opération inverse de la dérivation.

Si nous prenons F sous forme de *composition*, $F = (f_1 f_2)$, l'intégrale (15) s'écrira

$$\int_\sigma f dF = \int_\sigma f d(f_1 f_2) = \iint_\sigma f \frac{d(f_1 f_2)}{d(uv)} dudv\,;$$

et, puisque f est, d'après ce qui précède, fonction de f_1 er f_2,

$$\int_\sigma f dF = \iint_\sigma f(f_1 f_2) df_1 df_2.$$

Ceci montre *la théorie des intégrales doubles des fonctions de deux variables complexes est un problème de la théorie des fonctions isogènes.* Notre résultat précédent sur l'extension du théorème de CAUCHY coïncide au fond avec l'extension du même théorème, donnée par POINCARÉ pour le cas des intégrales doubles.

CHAPITRE V

L'ISOGÉNÉITÉ DANS LES ESPACES A PLUS DE TROIS DIMENSIONS

SECTION I

1. — Passons aux fonctions isogènes dans un espace à n dimensions [1]. Soient $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $F\,|\,[S_r]\,|$ deux fonctions complexes du premier degré. Nous dirons qu'elles sont *isogènes* si le rapport

$$\frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}} \tag{1}$$

est indépendant de l'orientation de l'élément dS_{r+1}. Si nous séparons les parties réelle et imaginaire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} &= p_{i_1\ldots i_{r+1}} + i q_{i_1\ldots i_{r+1}} = p_\mathrm{I} + i q_\mathrm{I} \\ \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} &= \omega_{i_1\ldots i_{r+1}} + i\chi_{i_1\ldots i_{r+1}} = \omega_\mathrm{I} + i\chi_\mathrm{I}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où nous désignons par I l'ensemble d'indices

$$\mathrm{I} = (i_1, \cdots, i_{r+1}) \tag{3}$$

qui représentent une combinaison quelconque $r+1$ à $r+1$ des nombres $1, 2, \cdots n$; H aura une signification analogue.

La relation d'isogénéité conduit à

$$\frac{\omega_\mathrm{I} + i\chi_\mathrm{I}}{p_\mathrm{I} + i q_\mathrm{I}} = \frac{\omega_\mathrm{H} + i\chi_\mathrm{H}}{p_\mathrm{H} + i q_\mathrm{H}} \tag{4}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \omega_\mathrm{I} p_\mathrm{H} - \omega_\mathrm{H} p_\mathrm{I} &= \chi_\mathrm{I} q_\mathrm{H} - \chi_\mathrm{H} q_\mathrm{I} \\ \omega_\mathrm{I} q_\mathrm{H} - \omega_\mathrm{H} q_\mathrm{I} &= \chi_\mathrm{H} p_\mathrm{I} - \chi_\mathrm{I} p_\mathrm{H}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}_\mathrm{IH} &= p_\mathrm{I} p_\mathrm{H} + q_\mathrm{I} q_\mathrm{H} \\ \mathrm{D}_\mathrm{IH} &= p_\mathrm{I} q_\mathrm{H} - p_\mathrm{H} q_\mathrm{I}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

(1) Voir V. VOLTERRA (24) et (B).

d'où les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} D_{IH}E_{KL} + D_{HK}E_{LI} + D_{KI}E_{LH} = 0 \\ E_{IH}E_{KL} - E_{IL}E_{KH} = D_{IK}D_{HL}. \end{cases}$$

La solution des équations (5) est

$$\omega_I = \frac{E_{IH}\chi_I - E_{II}\chi_H}{D_{HI}}; \qquad \chi_I = \frac{E_{IH}\omega_I - E_{II}\omega_H}{D_{IH}};$$

on en conclut, par un calcul simple,

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega_I = \dfrac{E_{IH}\chi_K - E_{IK}\chi_H}{D_{HK}} \\[2ex] \chi_I = \dfrac{E_{IH}\omega_K - E_{IK}\omega_H}{D_{KH}} \end{cases}$$

d'où

$$(9)\qquad \begin{cases} D_{HK}\omega_I + D_{KI}\omega_H + D_{IH}\omega_K = 0 \\ D_{HK}\chi_I + D_{KI}\chi_H + D_{IH}\chi_K = 0. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \omega_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} = 0$$

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \chi_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} = 0$$

donnent en vertu de (8)

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left\{ \frac{E_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2} H}\chi_K - E_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2} K}\chi_H}{D_{HK}} \right\} = 0,$$

et la même équation pour ω. Donc : *les parties réelle et imaginaire de Φ satisfont au système*

$$(10)\qquad \begin{cases} D_{HK}\dfrac{d\Psi}{d(x_I)} + D_{KI}\dfrac{d\Psi}{d(x_H)} + D_{IH}\dfrac{d\Psi}{d(x_K)} = 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \\[2ex] \left\{ \dfrac{E_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2} H}\dfrac{d\Psi}{d(x_K)} - E_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2} K}\dfrac{d\Psi}{d(x_H)}}{D_{HK}} \right\} = 0. \end{cases}$$

On peut montrer que réciproquement *si Φ satisfait au système* (10), *il existe une fonction Ψ telle que $\Phi + i\Psi$ soit isogène avec* F.

2. — Considérons deux fonctions isogènes Φ et F et la fonction **de** points

$$f = \frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}}.$$

f sera appelée *dérivée de* Φ *par rapport à* F

$$f = \frac{d\Phi}{dF}.$$

En vertu des conditions d'intégrabilité de

$$p_I = \frac{dF}{d(x_I)}$$

$$\pi_I = \frac{d\Phi}{d(x_I)}.$$

on conclut que

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^{s-1} p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0$$

ou

$$\sum_{1}^{r+2}(-1)^{s-1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} x_{i_{r+2}})} = 0.$$

Nous dirons dans ce cas qu'il y a *isogénéité entre* F $|[S_r]|$ *et* f.

La dérivée f *d'une fonction d'hyperespace* Φ *par rapport à une fonction isogène* F *est isogène avec* F *et* Φ.

3. — Supposons qu'on considère une fonction d'hyperespace F$|[S_r]|$, isogène à une fonction de points f. L'intégrale

$$\int_{S_{r+1}} f \frac{dF}{dS_{r+1}}\, dS_{r+1}$$

sera écrite simplement

$$\int_{S_{r+1}} f \cdot dF.$$

Elle est, si $\alpha_{i_1 \ldots i_{r+1}}$ sont les cosinus directeurs de S_{r+1}

$$\int_{S_{r+1}} f \cdot dF = \int_{S_{r+1}} f \sum{}_I \frac{dF}{d(x_I)} \alpha_I \, dS_{r+1}$$

ou, en employant le théorème de STOKES, $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{r+2}}$ étant les cosinus directeurs d'une S_{r+2} qui a pour frontière S_{r+1} (supposée fermée)

$$\int_{S_{r+1}} f \cdot dF = \int_{S_{r+2}} \sum_i \alpha_{i_1 \ldots i_{r+2}} \sum_s (-1)^s \frac{\partial f(p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} dS_{r+2}$$

$$= \int_{S_{r+2}} \sum_i \alpha_{i_1 \ldots i_{r+2}} \left\{ \sum_s (-1)^s p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \right.$$

$$\left. + f \sum_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_{r+1}$$

elle est donc nulle

$$\int_{S_{r+1}} f dF = 0.$$

C'est la généralisation du *théorème de* CAUCHY.

4. — Considérons deux S_r que nous appellerons S_r^0 et S_r^1, tels qu'on puisse mener un S_{r+1} qui ait pour frontières S_r^0 et S_r^1 ; il est facile de voir qu'en vertu du théorème ci-dessus

$$\int_{S_{r+1}} f \cdot dF$$

est une fonction de S_r^0 et S_r^1 seuls ; nous le désignons par

$$\int_{S_r^0}^{S_r'} f dF$$

et l'appelons *intégrale* (*somme*) *de f par rapport à* F. Si S^0 est fixe

$$\Phi \,|\, [S_r] \,| = \int_{S_r^0}^{S_r} f dF$$

est une fonction de S_r *qui est isogène avec* F *et telle que*

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Ceci signifie que *la dérivation et l'intégration qui viennent d'être définies sont deux opérations inverses.*

SECTION II

Fonctions élémentaires. Composition.

5. — On voit en comparant les propriétés du paragraphe précédent que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions isogènes avec* F *est que le système d'équations aux dérivées partielles*

$$(11) \qquad \varepsilon_{i_1 \ldots i_{r+2}} \equiv \sum_{1}^{r+2} (-1)^s p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0$$

ait au moins une intégrale f (1).

Le système précédent peut être incompatible. Dans le cas de quatre dimensions et pour les fonctions de lignes ($n = 4, r = 1$) le système est

$$\begin{aligned} p_{32}\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_{13}\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_{21}\frac{\partial f}{\partial x_3} &= 0 \\ p_{43}\frac{\partial f}{\partial x_2} + p_{24}\frac{\partial f}{\partial x_3} + p_{32}\frac{\partial f}{\partial x_4} &= 0 \\ p_{14}\frac{\partial f}{\partial x_3} + p_{31}\frac{\partial f}{\partial x_4} + p_{43}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 0 \\ p_{21}\frac{\partial f}{\partial x_4} + p_{42}\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_{14}\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Il n'est compatible que si

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{23}p_{14} = 0$$

6. — Il existe une classe importante de systèmes du type (11) : ceux pour lesquels

$$(12) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \, p_{i_s h_1 \ldots h_{r+1}} p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} = 0.$$

L'un au moins des p est différent de zéro : supposons que ce soit $p_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}}$; les conditions (12) entraînent alors que *les équations* (11) *sont des conséquences du système*

$$(11') \qquad \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1} h_1} = 0 \cdots \varepsilon_{i_1 \ldots i_{r+1} h_{n-r-1}} = 0$$

(1) Pour plus de détails, *cf.* VOLTERRA (B).

dans lequel les $h_1 h_2 \cdots h_{n-r-1}$ sont tous différents entre eux et différents des i.

Ce théorème est valable même si les p ne sont pas les dérivées d'une fonction $F|[S_r]|$: il suffit seulement qu'ils soient hémisymétriques par rapport à leurs indices et liés par les relations (12).

Si les p satisfont seulement aux conditions ci-dessus, on montre que (11) n'est pas complet ; mais il le devient par l'adjonction du système

$$\sum_s (-1)^s L_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+3}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0$$

avec

$$L_{h_1 \cdots h_{r+2}} = \sum (-1)^s \frac{\partial p_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}}.$$

Les p étant les dérivées d'une $F|[S_r]|$, les précédentes L sont nulles à cause des conditions d'intégrabilité de sorte que, *sous les conditions* (12), *le système* (11) *est complètement intégrable. Les parenthèses alternées de Poisson*

$$(\varepsilon_{i_1 \cdots i_{r+1} h_t}, \varepsilon_{i_1 \cdots i_{r+1} h_v})$$

sont identiquement nulles de sorte que le système (11′) est Jacobien.

7. — Si les conditions (12) sont satisfaites, nous dirons que $F|[S_r]|$ est une *fonction élémentaire*. Dans ce cas, (11) a $r+1$ intégrales indépendantes

$$f, f_1, \cdots f_r,$$

le rapport

$$\theta = \frac{p_{i_1 \cdots i_{r+1}}}{\left(\dfrac{d(f, f_1, \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}\right)}$$

est indépendant des indices i, et

$$p_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \theta \frac{d(f, f_1 \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}.$$

En vertu de

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

(1) Voir V. VOLTERRA (25).

on a

$$\sum_{1}^{r+2} {}_s(-1)^s \frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} \frac{d(f, \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} = 0$$

ou

$$\sum_{1}^{r+2} {}_s(-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} = 0;$$

donc θ est une fonction de $f, f_1, \cdots f_r$. Si nous écrivons

$$\theta = \frac{\partial f_0}{\partial f},$$

nous obtenons

$$p_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \frac{d(f_0 f_1 \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}$$

Donc, *si* F *est une fonction élémentaire*

(13) $$\frac{dF}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} = \frac{d(f_0, f_1, \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}.$$

où $f_0 f_1 \cdots f_r$ sont isogènes avec F.

Réciproquement, *si nous prenons $r + 1$ fonctions $f_0, f_1 \cdots f_r$, les expressions* (13) *définissent une fonction* F *élémentaire et isogène avec les f.*

8. — *Toute fonction isogène à une fonction élémentaire est elle-même élémentaire.*

Car si F est élémentaire et que

$$\frac{d\Phi}{dF} = f$$

f est une intégrale du système (11) et

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} \equiv \pi_{i_1 \cdots i_{r+1}} = f \frac{d(f_0 f_1 \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}.$$

f est donc fonction de $f_0, f_1, \cdots f_r$; définissons λ par

$$f = \frac{d\lambda}{df_0},$$

il viendra

$$\pi_{i_r \cdots i_{r+1}} = \frac{d(\lambda f_1 \cdots f_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})}.$$

Nous désignerons la fonction F, définie par (13), par

$$F = (f_0 f_1 \cdots f_r)$$

et nous dirons qu'elle est obtenue par *composition*.

9. — *Si*

$$(f_0 f_1 \cdots f_r) = (g_0 g_1 \cdots g_r)$$

les g_i sont fonctions des f_i telles que

$$\frac{d(g_0 g_1 \cdots g_r)}{d(f_0 f_1 \cdots f_r)} = 1.$$

La démonstration est identique à celle donnée pour l'espace à trois dimensions.

10. — Jusqu'à présent nous avons *composé* des fonctions de point, mais la notion de *composition* [1] peut être étendue aux fonctions d'ordre quelconque.

Indiquons par

$$(-1)^{\begin{pmatrix} h_1 \cdots h_{t+2} \\ i_1 \cdots i_{t+2} \end{pmatrix}}$$

le nombre 1 ou — 1 suivant que la permutation $\begin{pmatrix} h_1 \cdots h_{t+2} \\ i_1 \cdots i_{t+2} \end{pmatrix}$ est paire ou impaire.

Il existe une fonction $F\,|\,[S_{t+1}]\,|$ *définie par*

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{t+2}})} = \sum_h (-1)^{\begin{pmatrix} h_1 \cdots h_{t+2} \\ i_1 \cdots i_{t+2} \end{pmatrix}} \frac{d\Phi}{d(x_{h_1} \ldots x_{h_{r+1}})} \cdot \frac{d\Psi}{d(x_{h_{r+2}} \ldots x_{h_{t+2}})},$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des $t + 2$ indices $i_1 \cdots i_{t+2}$, pris $r + 1$ à la fois.

Nous écrirons

$$F = (\Phi, \Psi)$$

et dirons qu'on obtient F par la composition de Φ et Ψ.

D'une manière générale, étant données les fonctionnelles

$$\Phi^{(1)}\,|[S_{r_1}]|, \ldots \Phi^{(K)}\,|[S_{r_K}]$$

(1) Voir V. VOLTERRA (25) et (B).

nous désignerons par

$$F = (\Phi^{(1)}, \ldots \Phi^{(K)})$$

la fonctionnelle d'hyperespace S_R, avec

$$R = \sum_1^K r_t + K$$

obtenue comme il suit :

$$\Psi_2 = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}), \qquad \Psi_3 = (\Psi_2\Phi^{(3)}), \qquad \ldots F = (\Psi_{K-1}\Phi^K)$$

et nous dirons que F résulte par composition de $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(K)}$.

La composition est associative mais non commutative ; une inversion dans les éléments de F peut d'ailleurs produire seulement un changement de signe du résultat.

Nous disons que $\Phi^{(k)}$ est un *diviseur* de F. Si F n'a aucun diviseur, elle sera appelée *première*. Si une fonction divise un diviseur d'une autre fonction, elle divise cette fonction.

Deux fonctions $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $F\,|\,[S_r]\,|$ *sont isogènes si*

$$F = (\Psi f) \qquad \Phi = (\Psi g)$$

f, g étant des fonctions de points et f étant fonction de g.

Section III

Quelques extensions de la notion d'isogénéité.

11. — *a*) Nous pouvons étendre l'idée d'isogénéité aux fonctions d'ordre différents $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_t]\,|$. Nous disons que $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_t]\,|$, avec $r > t$, sont isogènes si

$$(14) \qquad \sum_1^{r+2} (-1)^s \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \ldots x_{i_{r+2}})} \cdot \frac{d\Psi}{d(x_{i_s} x_{h_1} \ldots x_{h_t})} = 0 ;$$

c'est l'extension de la définition du n° 2 de la 1re section à laquelle elle se réduit si $t = 0$.

Si $r = t$, les conditions (14) impliquent que Φ et Ψ sont non seulement isogènes dans notre premier sens, mais aussi qu'elles sont élémentaires.

Réciproquement, deux fonctions d'hyperespace du même nombre de dimensions, élémentaires et isogènes dans le sens du début, sont isogènes dans le sens actuel.

Toute fonction qui est divisible par Φ est isogène avec Ψ.

La condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit isogène dans ce sens avec la fonction élémentaire Ψ est que

$$\Phi = (\Psi\theta).$$

b) Un système de fonctions élémentaires sera dit *système isogène d'ordre* r (1) si toutes les fonctions composées ayant un ordre $> r$ sont nulles mais s'il existe une fonction composée de ces fonctions, d'ordre $r - 1$, non nulle.

Les fonctions élémentaires proviennent de la composition de certaines fonctions de points

$$f_1, \cdots f_m.$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'isogénéité d'ordre r est qu'on ait

$$\frac{d(f_{i_1} \cdots f_{i_{r+1}})}{d(x_{l_1} \ldots x_{l_{r+1}})} = 0 \tag{15}$$

pour toutes les combinaisons d'indices i, l.

Une fonction du système d'ordre $r - 1$ est isogène avec toute autre fonction du système (dans le sens *a*).

Toute fonction du système d'ordre $r - 1$ admet comme diviseur toute autre fonction du système d'ordre moindre.

Considérons en particulier les fonctions de point du système, soient f_i ; d'après (15), il y en a seulement r indépendantes : $f_1, f_2, \cdots f_r$; toute autre fonction de point du système est fonction de $f_1, f_2, \cdots f_r$, que l'on peut appeler *variables indépendantes du système isogène*.

Si Φ et F sont des fonctions du système d'ordre $r - 1$, on aura

$$\frac{d\Phi}{dF} = f(f_1, \ldots, f_r)$$

et, l'intégration étant faite sur un S_r fermé,

$$\int f\, dF = 0.$$

(1) Voir V. VOLTERRA (25).

Si

$$F = (f_1 \dots f_r)$$

on conclut que

$$\int_{S_r} f\, df_1 \dots df_r = 0,$$

qui est le théorème de CAUCHY pour les intégrales de fonctions de plusieurs variables complexes.

Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit que l'intégration multiple des fonctions de r variables complexes donnera lieu à un système isogène d'ordre r tel que les r variables complexes soient précisément les r *variables indépendantes du système.*

12. — Nous indiquerons enfin une autre extension du théorème de CAUCHY en renvoyant, pour plus de détails, aux Mémoires de M. VOLTERRA (cf. en particulier (30), n° 13 et 14).

Soient deux fonctions du premier degré d'hyperespaces

$$F\,|\,[S_r]\,| \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}\,|\,[S_{m-r-2}]\,|,$$

telles que

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \dots x_{i_{r+1}})} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial V_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{d(x_{i_{r+2}} \dots x_{i_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{V}_{i_{r+2} \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_m}}{\partial x_{i_s}}.$$

Posant

$$I_{i_1 \dots i_{m-1}} = \sum_h \frac{dF}{d(x_{h_1} \dots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2} \dots h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{J}_{i_1 \dots i_{m-1}} = \sum_h \frac{d\mathcal{F}}{d(x_{h_{r+1}} \dots x_{h_{m-1}})} V_{h_1 \dots h_r},$$

nous aurons, comme le montre un calcul simple

$$(16) \qquad \sum_{1}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial I_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_m}}{dx_{i_s}} = \sum_h \frac{dF}{d(x_{h_1} \dots x_{h_{r+1}})} \frac{d\mathcal{F}}{d(x_{h_{r+2}} \dots x_{h_m})}$$
$$= \sum_{1}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{J}_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

avec $h_1\, h_2 \dots h_m \equiv i_1\, i_2 \cdots i_m$.

Si nous posons $\dfrac{df}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_m})}$ égal au premier membre de (16), il en résulte que

$$f \equiv (\mathrm{F}, \mathcal{F}).$$

Cette propriété peut encore s'exprimer de façon différente. Prenons pour S_{m-1} un hyperespace fermé à m — 1 dimensions, contenu dans S_n et qui peut se réduire à un point sans rencontrer de singularités de F et $\mathcal{F}$; soient $\alpha_{i_1\ldots i_{m-1}}$ ses cosinus directeurs. Nous aurons

$$f\,|[\mathrm{S}_{m-1}]|$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1}\cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2}\cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1\cdots i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1}$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathcal{F}}{d(x_{h_{r+1}}\cdots x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1\cdots h_r} \right) \alpha_{i_1\cdots i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1},$$

avec

$$h_1 h_2 \cdots h_{m-1} \equiv i_1 i_2 \cdots i_{m-1}.$$

Si

$$(\mathrm{F}, \mathcal{F}) \equiv 0,$$

on aura

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1}\cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2}\cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1\cdots i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1} \\ &= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathcal{F}}{d(x_{h_{r+1}}\cdots x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1\cdots h_r} \right) \alpha_{i_1\cdots i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $\mathcal{F}$ est une fonction de point, la formule précédente se réduit à l'extension du théorème de CAUCHY donnée au nº 3 de la section précédente. Elle représente donc une nouvelle extension du sus-dit théorème.

Voici un cas particulier auquel (17) sera applicable : celui où F et $\mathcal{F}$ admettent un diviseur commun, qui est une fonction d'un hyperespace d'ordre pair. Dans ce cas, en effet, on a

$$(\mathrm{F}, \mathcal{F}) \equiv 0.$$

Pour vérifier ce dernier point, on remarquera que si λ est fonction d'un hyperespace d'ordre pair, $(\lambda, \lambda) \equiv 0$, parce que la somme

$$\sum_{i} l_{i_1 \cdots i_t} l_{i_{t+1} \cdots i_n}$$

dans laquelle

$$l_{i_1 i_2 \cdots i_t} = \frac{d\lambda}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_t})}$$

contiendra des termes deux à deux égaux et opposés. En appliquant la propriété associative de l'opération de composition des fonctions d'hyperespace, on obtiendra le résultat annoncé.

3. — Si au lieu d'un couple de fonctions F et $\mathcal{F}$ nous en avons plusieurs F_K et $\mathcal{F}_K$, auxquels correspondent respectivement les $V^{(k)}_{h_1 \cdots h_r}$ et $V^{k}_{h_{r+2} \cdots h_{m-1}}$, nous constaterons en posant

$$f = \Sigma_K (F_K; \mathcal{F}_K),$$

que f peut s'exprimer comme deux sommes d'intégrales analogues à celles qui figurent dans (17) ; si $f \equiv 0$, les deux sommes d'intégrales seront nulles.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

(A) Vito Volterra. — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles* (Professées à Stockholm, 1906), Paris, A. Hermann, 1912).

(B) Vito Volterra. — *The generalisation of analytic functions* (dans *The Rice Institute Pamphlet*, vol. IV, 1917, p. 53 et suiv.).

(C) Vito Volterra. — *Teoria de las funcionales* (rédigée par Luigi Fantappié), Madrid, 1927, cap. III, p. 77.

(D) Vito Volterra. — *Theory of Functionals* (édition anglaise du livre précédent, traduit par Miss M. Long, revue et augmentée) Blackie et Son, London et Glasgow, 1930, chap. III, p. 74.

Pour une étude de la signification physique des équations de Dirac voir.

(E) P. A. M. Dirac. — *Les principe de lu mécanique quatique.* Traduction française par Al. Proca et J. Ullmo, Les Presses Universitaires, Paris.

Une description et une analyse topologique des modèles de M. Volterra se trouve dans.

(F) Lefschetz. — *L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique* (Gauthier-Villars, 1924).

Mémoires

(1) Bohannan (R. D). — Pascal line equation and some consequences (*Math. Monthly*, vol. XXIII, 1916).

(2) De Donder. — Sur les fonctions de Volterra et les invariants intégraux (*Publ. Acad. Royale de Belgique*, juin 1906).

(3) Fréchet (M). — Sur les fonctions de lignes fermées (*Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, vol. XXI, 1904).

(4) Graustein (W. C). — Note on isogenous complex functions of curves (*Bull. of Am. Math. Soc.*, vol. XXIX, 1918).

(5) Mandelbrojt (S). — Sur le prolongement analytique des fonctions monogènes de Cauchy en fonctions isogènes au sens de M. Volterra (*C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris*, vol. CLXXX, 1925).

(6) MANDELBROJT (S). — Remarques sur la manière dont peuvent être engendrées les fonctionnelles isogènes (*C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris*, vol. CLXXXI, 1925).

(7) MOISIL (Gr. C.). — Quatre Notes dans les *C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris*, t. CXCI, 1930, pp. 984 et 1192 et t. CXCII, pp.

(8) MOISIL (Gr. C.). — Sur les fonctions conjuguées au sens de M. Volterra (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 1931).

(9) MOISIL (Gr. C.). — Sur les quaternions monogènes (*Bull. des Sc. Math.*, 1931).

(10) MOISIL (Gr. C.). — Fonctions monogènes dans les espaces à plusieurs dimensions (*C. R. du Congrès des Sociétés Savantes*, Clermont-Ferrand, 1931).

(11) MOISIL (Cr. C.). — *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique* (Bucarest, 1931).

(12) NICOLESCO (Miron). — *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace* (Thèse Paris, 1928, G. Villars).

(13) PASCAL (Ernesto). — L'integrazione doppia nel campo complesso (*Rend. Acc. Scienze di Napoli*, (3), vol. XXIII, 1917).

(14) PASCAL (Ernesto). — Il theorema di Cauchy-Morera esteso agli integrali doppi delle funzioni di variabili complesse (*Rend. Acc. Scienze di Napoli*, (3), vol. XXIII, 1917).

(15) PASCAL (MARIO). — Le funzioni monogenee di linee complesse (*Rend. Acc. Scienze di Napoli* (3), XXV, 1919).

(16) PASCAL (MARIO). — Il teorema e la formula di Cauchy per le funzioni monogenee di linee complesse (*Rend. Acc. Scienze di Napoli* (3), vol. XXV, 1919).

(17) THEODORESCO (N.). — *La dérivée aréolaire et ses applications physiques* (Thèse, Paris, 1931). Gauthier-Villars.

(18) THEODORESCO (N.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac (*Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei*, 1931, p. 342).

(19-20) VOLTERRA (V.). — Sopra le funzioni dipendenti da linee (2 Notes dans les *Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei* (4), vol. III, 1887, pp. 225, 274).

(21-23) VOLTERRA (V.). — Sopra una extensione della teoria di Riemann sulle variable complesse (3 Notes dans *Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei*, (4) vol. III, 1887, p. 281 et vol. IV, 1888, pp. 107 et 196).

(24-25) VOLTERRA (V.). — Delle variabili complesse negli iperspazi (*Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei*, (4), vol. V, 1889, pp. 158 et 291).

(26) VOLTERRA (V.). — Sulle funzioni coniugate (*Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei*, (4), vol. V, p. 599.

(27) VOLTERRA (V.). — Sulle funzioni di iperspazii et sui loro parametri differenziali (*R. Acc. Naz. dei Lincei* (4), vol. V, p. 630).

(28) VOLTERRA (V.). — Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzione coniugate (*Rend. Circ. Mat. di Palermo*, vol. III, 1889).

(29) VOLTERRA (V.). — Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable complexe (*Acta Mathematica*, Stockholm, 1889, p. 233.

(30) VOLTERRA (V.). — Sulle variabili complesse negli iperspazii (*Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei*, (4) vol. VI, 1890).

(31) VOLTERRA (V.). — Un teorema sugli integrali multipli (*R. Ac. Sci. di Torino*.

TABLE DES MATIÈRES

Imprimerie des PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, Paris-Saint-Amand. — 23-3-1934.