

# ANNALES DE L'I. H. P.

B. HOSTINSKÝ

## **Application du Calcul des Probabilités à la Théorie du mouvement Brownien**

*Annales de l'I. H. P.*, tome 3, n° 1 (1932), p. 1-74

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1932\\_\\_3\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1932__3_1_1_0)

© Gauthier-Villars, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Application du Calcul des Probabilités à la Théorie du mouvement Brownien

PAR

**B. HOSTINSKÝ**

professeur à la Faculté des Sciences de Brno

---

## Préface

En publiant ces conférences je remercie d'abord les professeurs de la Faculté des Sciences de Paris, en particulier M. MAURAIN, Doyen de la Faculté des Sciences, et M. BOREL, directeur de l'Institut Henri Poincaré qui ont bien voulu m'inviter à donner des leçons à cet Institut.

Le sujet principal de ces leçons est l'étude de quelques propriétés générales d'une équation fonctionnelle introduite par SMOLUCHOWSKI dans la théorie du mouvement Brownien. Je montre comment cette étude se rattache à la théorie des chaînes de MARKOFF. Cette dernière théorie conçue par MARKOFF sous une forme purement algébrique dans le cas des variables discontinues, peut être étendue au cas des variables continues ; les résultats obtenus par MARKOFF conduisent ainsi à une théorie générale de la diffusion et du mouvement Brownien.

Les six chapitres du texte suivant reproduisent sans modification importante ce que j'ai exposé dans ces conférences ; en rédigeant le troisième chapitre j'ai seulement simplifié et raccourci les considérations sur les développements en série suivant les fonctions biorthogonales. Enfin j'ai ajouté quatre notes additionnelles surtout pour rappeler quelques travaux qui sont parus en 1930 et en 1931 et qui se rattachent aux questions traitées dans ces leçons.

Brno, le 27 juin 1931.

BOHUSLAV HOSTINSKÝ.

— I —

## Introduction

1. — *Problèmes sur la diffusion et sur le mélange des liquides.* — Les problèmes dont nous allons nous occuper au cours de ces leçons se posent quand on considère les mouvements des molécules dans un liquide. Introduisons, dans un vase rempli d'eau, une très petite goutte d'encre rouge. Les molécules d'eau ne sont jamais en repos, elles se meuvent d'une manière en apparence irrégulière. Le mouvement de chacune d'elles est déterminé par des chocs et par des actions qu'elle subit de la part des autres molécules d'eau. Ces petits « *mouvements Browniens* » engendrent la diffusion. Nous voyons que la frontière entre l'encre rouge et entre l'eau incolore change de forme. Elle s'étend de plus en plus dans toutes les directions, elle prend des formes bizarres qui résultent des petits mouvements à l'intérieur du liquide et, après un temps suffisamment long, le mélange devient uniforme ; la quantité d'encre rouge qui se trouve en moyenne dans un centimètre cube est partout constante. Étant donné le très grand nombre de petits chocs subis par une molécule pendant une seconde, l'emploi du calcul des probabilités est tout à fait indiqué dans les questions de ce genre. Par exemple, on peut se demander quelle est la probabilité pour qu'une molécule qui se trouve actuellement dans la position *A* prenne, après *t* secondes une autre position *B*.

Dans les derniers paragraphes de son *Calcul des probabilités* (2<sup>e</sup> édition, 1912), Henri POINCARÉ a envisagé quelques problèmes sur le mélange des liquides. Nous essayerons de montrer comment nous pouvons aller un peu plus loin dans la voie indiquée par lui en nous inspirant de travaux de MARKOFF, de SMOLUCHOWSKI et de Francis PERRIN.

Les problèmes sur les probabilités qui se rapportent aux positions des molécules sont complexes, parce qu'il y a une infinité de positions que peut prendre une molécule à l'intérieur du liquide. Pour pénétrer dans la nature de la question Poincaré commence par examiner le problème du battage des cartes. Au point de vue mathématique ce problème n'est autre chose que celui de la diffusion progressive dans le cas où les places que peuvent prendre les molécules du liquide

## APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

seraient fixées et en nombre limité. Considérons donc  $r$  molécules et soient  $r$  places fixes, chaque place étant prise par une molécule. Ici l'évolution du liquide se présente comme une suite d'opérations qui consistent à permuter les molécules. Il y a  $r!$  opérations de ce genre ; supposons que chaque opération puisse se présenter avec une probabilité positive déterminée. Quelles que soient ces probabilités et quel que soit l'arrangement initial de molécules, après un nombre infini d'opérations successives tout arrangement final de molécules pourra se présenter avec une probabilité constante égale à  $(r!)^{-1}$ . Voilà le résultat principal de POINCARÉ qui peut être rattaché à la théorie des chaînes de MARKOFF.

Nous allons examiner rapidement le mouvement Brownien discontinu sur une droite et ses rapports avec la théorie des chaînes <sup>(1)</sup>.

2. — *Mouvement Brownien linéaire discontinu. Notion de chaîne.* — Supposons qu'un point se meuve sur une droite de telle façon qu'il subisse des déplacements dûs au hasard. Chaque déplacement consiste à transporter le point mobile de sa position actuelle d'une longueur constante  $l$ , soit en avant soit en arrière, avec la même probabilité égale à  $\frac{1}{2}$ . On peut dire que le sens d'un déplacement s'obtient en tirant une boule d'une urne où se trouvent des nombres égaux de boules blanches et de boules noires ; l'extraction d'une boule blanche signifie un pas en avant, celle d'une boule noire un pas en arrière. Ce problème de la marche au hasard (*go at random*) a été étudié par Lord RAYLEIGH <sup>(2)</sup>. On trouve qu'après un très grand nombre  $n$  de pas successifs de longueur  $l$ , la valeur moyenne du carré de la distance parcourue par le point mobile est égale à peu près à  $nl^2$ . Or, ce résultat n'est valable que pour le mouvement sur une droite indéfinie ; si  $n$  augmente indéfiniment, il en est de même de la valeur moyenne en question. Mais le problème se modifie, lorsqu'on suppose que le point mobile ne sort jamais d'un segment donné. En effet, si le point mobile atteint une extrémité du segment, il y a une certaine probabilité pour qu'il reste là, et une autre pour qu'il fasse un pas vers l'intérieur du segment, la probabilité pour qu'il quitte le segment étant rigoureusement égale à zéro. Il y a

(1) Voir, pour les citations, et pour un exposé plus complet de cette théorie le *Mémorial des Sciences mathématiques* (Méthodes générales du Calcul des probabilités).

(2) Lord RAYLEIGH, *Philosophical Magazine*, t. 10, 1880, p. 73 ; t. 37, 1919, p. 321 ; *Scientific Papers*, vol. I, p. 491, vol. V, p. 256.

B. HOSTINSKÝ

pour ainsi dire des réflexions aux extrémités du segment. Soit  $Ox$  la droite où se meut le point et soit  $A(x)$  la position du point mobile. La valeur de l'abscisse  $x$  est toujours comprise dans la formule  $x = kl$ ,  $k$  étant égal à zéro ou à un entier (positif ou négatif). Dans le cas de Lord RAYLEIGH (droite illimitée) la probabilité pour que le point se déplace, par un seul pas, de  $A(kl)$  à  $A'(k'l)$  est égale à  $\frac{1}{2}$ , si  $|k - k'| = 1$ , et à zéro dans tout autre cas. Elle ne dépend que de la différence  $k' - k$ . La valeur moyenne du carré de la distance parcourue augmente indéfiniment avec le nombre de pas successifs. Mais, si le point mobile est assujéti à la condition de rester à l'intérieur d'un segment  $S$  qui va de  $x = a$  jusqu'à  $x = b$ , la probabilité pour que le mobile se déplace, par un seul pas de longueur  $l$ , de  $x = kl$  à  $x = k'l$ , ne dépend pas uniquement de la valeur différence  $k' - k$ ; elle est égale en général à une fonction de deux variables  $x$  et  $x'$  (ou de  $k$  et de  $k'$ ) comme nous l'avons expliqué plus haut, pour le cas où  $x$  correspond à une extrémité du segment  $S$ .

Les questions que l'on se peut poser en étudiant les probabilités et les valeurs moyennes pour les passages d'un point à un autre rentrent dans la théorie des phénomènes liés en chaîne. MARKOFF a imaginé cette théorie sous une forme purement algébrique sans interprétation géométrique ou cinématique. Pour notre but nous n'avons qu'à modifier légèrement la forme de l'énoncé primitif de MARKOFF pour en déduire une théorie générale du mouvement Brownien discontinu.

Commençons par donner  $r$  points fixes  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , distincts et situés d'une manière quelconque (sur une droite ou non). Un point mobile est supposé coïncider d'abord avec un de ces points, disons avec  $A_i$ . Ensuite une opération due au hasard lui assigne une autre place, par exemple  $A_k$ . La probabilité du passage de la position  $A_i$  à  $A_k$ , par une seule opération, sera désignée par  $p_{ik}$ ; nous supposons qu'elle ne dépend que des indices  $i$  et  $k$  et qu'elle est positive. Ainsi  $r^2$  quantités nouvelles  $p_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, r$ ) se trouvent introduites dans le calcul; le point mobile ne peut prendre, après l'opération, qu'une des positions  $A_1, A_2, \dots, A_r$  et il en prend sûrement une, donc

$$\sum_{k=1}^r p_{ik} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

APPLICATION DU CALCUL, DES PROBABILITÉS

3. — *Rappel de quelques résultats sur la probabilité des phénomènes liés en chaîne de Markoff.* — a) Représentons par  $P_{ik}^{(n)}$  la probabilité pour qu'après  $n$  opérations consécutives, le point mobile (qui était au début en  $A_i$ ) vienne occuper la place  $A_k$ . Le passage de  $A_i$  à  $A_k$  pouvant s'effectuer par n'importe quelle position intermédiaire  $A_s$ , on a la formule générale

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{s=1}^r P_{is}^{(m)} P_{sk}^{(n)},$$

avec

$$P_{ik}^{(1)} = p_{ik},$$

et on démontre que

$$\sum_{k=1}^r P_{sk}^{(m)} = 1, \quad (s = 1, 2, \dots, r).$$

Ces formules sont valables pour les valeurs entières et positives quelconques de  $m$  et de  $n$ . La quantité  $P_{ik}^{(m+n)}$  apparaît ainsi comme une moyenne arithmétique pondérée entre les quantités  $P_{is}^{(m)}$ . C'est sur cette propriété que MARKOFF a basé en 1907 sa démonstration du théorème fondamental suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_k, \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^r P_k = 1.$$

Ici  $P_k$  ne dépend pas de l'indice  $i$ . En d'autres termes : après un nombre infini d'opérations successives le point mobile peut atteindre toute position  $A_k$  avec une probabilité qui ne dépend pas de sa position initiale  $A_i$ . Si les probabilités  $p_{ik}$  satisfont de plus aux conditions

$$\sum_{i=1}^r p_{ik} = 1, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

toutes les valeurs limites  $P_k$  sont égales entre elles et on a  $P_k = r^{-1}$ . C'est ce cas qui se présente dans le problème du battage des cartes.

b) Pour obtenir les valeurs  $P_k$  il suffit de substituer 1 à  $n$ , dans la

B. HOSTINSKÝ

formule générale pour  $P_{ik}^{(m+n)}$ , et de faire croître  $m$  indéfiniment. Il vient

$$P_k = \sum_{s=1}^r \phi_{sk} P_s, \quad k = 1, 2, \dots, r.$$

Pour que ces équations linéaires et homogènes en  $P_s$  soient résolubles il faut que  $D_r(1) = 0$ , où

$$D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\phi_{11}, & -\lambda\phi_{12}, & \dots & -\lambda\phi_{1r} \\ -\lambda\phi_{21}, & 1 - \lambda\phi_{22}, & \dots & -\lambda\phi_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\phi_{r1}, & -\lambda\phi_{r2}, & \dots & 1 - \lambda\phi_{rr} \end{vmatrix}.$$

Ajoutons à la première colonne du déterminant  $D_r(1)$  la somme de toutes les autres colonnes ; en tenant compte de ce que

$$\phi_{i1} + \phi_{i2} + \dots + \phi_{ir} = 1,$$

on trouve que  $D(1) = 0$ .

L'équation  $D_r\lambda = 0$  du  $r^{\text{ième}}$  degré en  $\lambda$  admet donc la racine  $\lambda_0 = 1$ . Supposons que toutes les racines soient simples et représentons-les par

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}.$$

Soit  $\lambda_j$  une racine quelconque et considérons le système d'équations linéaires et homogènes

$$\varphi_{kj} - \lambda_j \sum_{s=1}^r \phi_{sk} \varphi_{sj} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

et le système adjoint

$$\psi_{ij} - \lambda_j \sum_{s=1}^r \phi_{is} \psi_{sj} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Les inconnues  $\varphi_{kj}$  et  $\psi_{ij}$  dépendent non seulement de l'indice  $k$  ou  $i$ , mais aussi de la racine  $\lambda_j$ . Nous avons

$$\sum_{k=1}^r \varphi_{kg} \psi_{kj} = \lambda_g \sum_{s=1}^r \sum_{k=1}^r \phi_{sk} \varphi_{sg} \psi_{kj} = \frac{\lambda_g}{\lambda_j} \sum_{s=1}^r \psi_{sj} \varphi_{sg},$$

d'où, si  $\lambda_j \neq \lambda_g$ ,

$$(\alpha) \quad \sum_{s=1}^r \psi_{sj} \varphi_{sg} = 0.$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Si  $\lambda_j = \lambda_g$ , nous supposons qu'en général

$$\sum_{s=1}^r \psi_{sj} \varphi_{sg} \neq 0,$$

et nous convenons de multiplier les quantités  $\varphi_{1j}, \varphi_{2j}, \dots, \varphi_{rj}$  par un facteur convenable tel que les quantités multipliées (nous conservons la notation  $\varphi_{kj}$  pour les produits) satisfassent aux conditions

$$(\xi) \quad \sum_{s=1}^r \varphi_{sj} \psi_{sj} = 1.$$

L'ensemble des équations  $(\alpha)$  et  $(\xi)$  exprime la propriété des quantités  $\varphi_{kj}$  et  $\psi_{kj}$  de former un système biorthogonal. Nous dirons plus précisément que  $(\alpha)$  et  $(\xi)$  expriment la biorthogonalité par rapport au second indice  $j$  ou  $g$  (qui ne figure pas ici comme variable de sommation). Nous verrons plus loin que les mêmes quantités forment encore un système biorthogonal par rapport au premier indice. Si  $j = 0$  on a  $\lambda_0 = 1$  et on peut prendre  $\varphi_{k0} = P_k, \psi_{k0} = 1$ ; le système d'équations qui détermine les  $\varphi_{k0}$  n'est autre chose que le système que nous avons obtenu plus haut pour les quantités  $P_k$ .

c) Soit maintenant  $k$  un indice fixe et écrivons les équations

$$\varphi_{kj} - \lambda_j \sum_{s=1}^r p_{sk} \varphi_{sj} = 0,$$

pour  $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$ . Leur déterminant par rapport aux inconnues  $p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{rk}$  ne dépend pas de  $k$  de sorte que

$$p_{ik} = \sum_{j=0}^{r-1} c_{ij} \frac{\varphi_{kj}}{\lambda_j}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

La condition

$$\psi_{ig} - \lambda_g \sum_{s=1}^r p_{is} \psi_{sg} = 0,$$



B. HOSTINSKÝ

donne, en y substituant à la place de  $\hat{p}_{is}$  l'expression précédente

$$\psi_{ig} - \lambda_g \sum_{s=1}^r \sum_{j=0}^{r-1} c_{ij} \frac{\varphi_{sj}}{\lambda_j} \psi_{sg} = 0,$$

ce qui se réduit, d'après ( $\alpha$ ), et ( $\beta$ ) à

$$\psi_{ij} = c_{ij}.$$

Donc

$$\hat{p}_{ik} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\psi_{ij} \varphi_{kj}}{\lambda_j}.$$

La formule générale pour  $P_{ik}^{(m+n)}$  et les conditions ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) donnent par un calcul facile

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\psi_{ij} \varphi_{kj}}{\lambda_j^n} = P_k + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\psi_{ij} \varphi_{kj}}{\lambda_j^n}.$$

Ces formules ont été employées dans la théorie des chaînes par ROMANOVSKY en 1929. D'après un théorème dû à FROBENIUS les conditions  $\hat{p}_{ik} > 0$  entraînent les relations  $|\lambda_j| > 1$  pour  $j = 1, 2, \dots, r-1$ ; par suite, la dernière formule montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_k$ .

d) Multiplions les équations homogènes auxquelles satisfont les quantités  $\varphi_{kj}$  par  $\psi_{ij}$ , divisons les par  $\lambda_j$  et faisons ensuite la somme par rapport à  $j$ . Il vient

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{\varphi_{kj} \psi_{ij}}{\lambda_j} - \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{s=1}^r \hat{p}_{sk} \varphi_{sj} \psi_{ij} = 0,$$

ou

$$\hat{p}_{ik} - \sum_{s=1}^r \hat{p}_{sk} b_{is} = 0,$$

en posant

$$b_{is} = \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_{sj} \psi_{ij}.$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Soient  $A$  le déterminant du  $r^{\text{ième}}$  degré formé avec les éléments  $p_{ik}$  et  $A_{ik}$  ses mineurs ; on a en général  $A \neq 0$ . L'équation précédente donne

$$\sum_{k=1}^r p_{ik} A_{tk} - \sum_{s=1}^r \sum_{k=1}^r p_{sk} A_{tk} b_{is} = 0,$$

donc pour  $i \neq t$ ,

$$A b_{it} = 0, \quad b_{it} = 0,$$

et pour  $i = t$

$$A - A b_{ii} = 0, \quad b_{ii} = 1.$$

Les quantités  $\varphi_{sj}$  et  $\psi_{ij}$  satisfont par conséquent aux équations suivantes :

$$(\alpha') \quad \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_{sj} \psi_{ij} = 0, \quad \text{pour } s \neq i.$$

$$(\beta') \quad \sum_{j=0}^{r-1} \varphi_{ij} \psi_{ij} = 1,$$

en d'autres termes elles forment un système biorthogonal par rapport au premier indice.

e) Revenons au point mobile, dont la position change par suite des opérations dues au hasard et faisons correspondre à tout point  $A_k$  un coefficient  $\alpha_k$ . Ainsi une variable  $x$  sera définie après chaque opération par la position du point mobile ; elle va recevoir successivement les valeurs  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, \dots$ . Au début, si  $A$  coïncide avec  $A_i$ , on a  $x^{(0)} = \alpha_i$  ; si après la 1<sup>re</sup>, 2<sup>me</sup>, ... opération le point mobile coïncide avec  $A_k, A_l, \dots$ , on aura  $x^{(1)} = \alpha_k, x^{(2)} = \alpha_l, \dots$

La valeur moyenne de  $x^{(n)}$  (v. m.  $x^{(n)}$ ), c'est-à-dire la valeur moyenne de  $x$  après  $n$  opérations successives est égale à

$$v. m. x^{(n)} = \sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} \alpha_k,$$

et sa limite pour  $n$  infini, sera égale à

$$\bar{\alpha} = \sum_{k=1}^r P_k \alpha_k.$$

MARKOFF a démontré que l'expression

$$v \cdot m \cdot \frac{1}{n} \left[ \sum_{s=1}^n (x^{(s)} - \bar{\alpha}) \right]^2$$

tend vers une limite constante et bien déterminée  $\frac{1}{2}C$  quand  $n$  augmente indéfiniment. Cette valeur limite mesure la dispersion ; si  $n$  est assez grand, la relation approchée a lieu

$$v \cdot m \cdot \left[ \sum_{s=1}^n (x^{(s)} - \bar{\alpha}) \right]^2 \approx \frac{1}{2} C n.$$

Nous nous contentons de ces indications sur les propriétés des variables discontinues liées en chaînes de MARKOFF ; nous traiterons tout de suite, dans le cas des variables continues, des problèmes analogues. Les méthodes du calcul se conservent en principe quand on passe du cas algébrique au cas des variables continues ; pour obtenir les résultats relatifs à ce dernier cas il suffit de remplacer certaines sommes qui figurent dans les formules précédentes par des intégrales.

4. — *Généralités sur le cas des variables continues.* — a) Considérons un point mobile qui se meut sur un segment de l'axe  $Ox$  allant de  $x = a$  jusqu'à  $x = b$ . Au début le point occupe la position  $x_0$  déterminée par l'abscisse  $x_0$ . Une première opération due au hasard le transporte dans une autre position ( $x_1$ ), une seconde opération le transporte dans une position ( $x_2$ ) et ainsi de suite. Soit  $p(x, y)dy$  la probabilité pour que l'abscisse du point mobile qui, avant une opération, était égale à  $x$ , soit comprise, après l'opération, entre les limites  $y$  et  $y + dy$ . La fonction  $p(x, y)$  donne la *densité de probabilité* pour le passage de ( $x$ ) à ( $y$ ). La densité de probabilité pour le passage de ( $x$ ) à ( $y$ ) par  $n$  opérations successives sera représentée par  $P^{(n)}(x, y)$ . Ainsi  $P^{(n)}(x, y)dy$  est la probabilité pour que l'abscisse du mobile qui, avant la première opération, était égale à  $x$ , soit comprise, après la  $n^{\text{ième}}$  opération, entre  $y$  et  $y + dy$ . La fonction  $p(x, y)$  doit être positive ou égale à zéro et, d'après le théorème sur les probabilités totales il faut que

$$\int_a^b p(x, y)dy = 1.$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Au lieu de la formule générale écrite plus haut qui relie les valeurs des quantités  $P_{ik}^{(n)}$  nous aurons ici l'équation générale suivante :

$$P^{(m+n)}(x, y) = \int_a^b P^{(m)}(x, s)P^{(n)}(s, y)ds,$$

avec

$$P^{(1)}(x, y) = p(x, y) \quad \int_a^b P^{(m)}(x, y)dy = 1,$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

b) On peut aller encore plus loin et introduire une variable continue  $t$  (temps) au lieu de l'indice d'itération ( $n$ ). Écrivons

$$\Phi(x, y, t) \quad \text{au lieu de} \quad P^{(t)}(x, y);$$

l'équation précédente devient

$$\Phi(x, y, t + t') = \int_a^b \Phi(x, s, t)\Phi(s, y, t')ds.$$

L'étude de cette équation qui a été introduite par SMOLUCHOWSKI dans sa théorie du mouvement Brownien fera l'objet principal de ces leçons. Remarquons que, pour avoir l'équation relative au mouvement du point dans l'espace, il suffit d'introduire une fonction  $\Phi(A, B, t)$  de deux points A, B et de remplacer l'intégrale simple par une intégrale triple.

En résumé, la théorie des chaînes de MARKOFF qui convient au cas du mouvement Brownien discontinu peut être généralisée de deux manières : 1° on admet une infinité de positions possibles du point mobile qui remplissent un domaine continu, en conservant les passages discontinus dûs au hasard ; et 2° on admet que le point se meut d'une manière quelconque continue ou non et que la densité de probabilité du passage d'une position à l'autre en un temps donné est une fonction continue des deux positions et de la durée du passage (voir, pour une exposition plus précise, le numéro suivant).

II. — **Equation fonctionnelle de Smoluchowski. Théorème fondamental.**

5. — *Equation de Smoluchowski.* — Soit  $V$  un domaine à trois dimensions ; un point mobile s'y déplace au hasard. Choisissons deux points  $A$  et  $B$  à l'intérieur de  $V$  et désignons par  $d\tau_B$  l'élément de volume au voisinage de  $B$ . Imaginons que le point mobile passe de  $A$  à un point qui se trouve à l'intérieur de  $d\tau_B$ , la durée du passage étant égale à  $t$  secondes ; nous admettons que la probabilité de ce passage <sup>(1)</sup> soit exprimée par

$$\Phi(A, B, t)d\tau_B.$$

La fonction  $\Phi$  supposée continue <sup>(2)</sup> mesure la *densité de probabilité* pour ce passage. Tous les calculs avec la fonction  $\Phi$  ou avec des fonctions analogues qui donnent les probabilités continues ou densités de probabilité reposent sur deux principes fondamentaux.

Le premier principe (addition des probabilités) s'exprime ainsi : si l'expression  $f(B)d\tau_B$  donne la probabilité élémentaire pour qu'un point soit situé à l'intérieur d'un élément infinitésimal  $d\tau_B$ , l'intégrale triple de cette expression par rapport à  $B$ , étendue à un domaine  $V$ , représente la probabilité totale pour que le point se trouve dans  $V$ .

Le second principe (multiplication des probabilités) s'énonce comme suit : si  $f(B)d\tau_B$  est la probabilité élémentaire pour qu'un point soit situé à l'intérieur de  $d\tau_B$  et si  $g(C)d\tau_C$  est la probabilité élémentaire pour qu'un autre point soit situé à l'intérieur de  $d\tau_C$ , la probabilité composée pour que le premier point se trouve dans  $d\tau_B$  et pour que le second se trouve (simultanément ou non) dans  $d\tau_C$  est égale à  $f(B)g(C)d\tau_B d\tau_C$ .

Considérons maintenant trois positions dans  $V$  : une première  $A$ , la seconde à l'intérieur de l'élément  $d\tau_M$  au voisinage d'un point  $M$  et la troisième à l'intérieur de  $d\tau_B$  au voisinage de  $B$ . La probabilité pour que le point mobile qui se trouve d'abord en  $A$ , vienne occuper, après  $t$  secondes, la deuxième position et qu'il arrive ensuite après  $t'$  secondes

(1) En d'autres termes : la probabilité pour que le mobile se trouve après  $t$  secondes dans  $d\tau_B$ , étant donné qu'il était au début en  $A$ .

(2) Si  $B$  se confond avec  $A$ ,  $\Phi$  devient infini. Voir n° 6.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

(comptées à partir du moment où il se trouve dans  $d\tau_M$ ) dans la troisième est égale à

$$\Phi(A, M, t)\Phi(M, B, t')d\tau_M d\tau_B.$$

Intégrons l'expression que nous venons d'obtenir par rapport à M, l'intégrale triple étant étendue au domaine V constitué par toutes les positions possibles du point mobile. L'intégrale ne sera autre chose que  $\Phi(A, B, t + t')d\tau_B$ , c'est-à-dire la probabilité du passage de A à un point dans  $d\tau_B$  (par l'intermédiaire d'une position M quelconque). Donc

$$(1) \quad \Phi(A, B, t + t') = \iiint_V \Phi(A, M, t)\Phi(M, B, t')d\tau_M.$$

Voilà l'équation fonctionnelle que je propose de nommer équation de SMOLUCHOWSKI. Le savant polonais l'a obtenue dans le cas du mouvement Brownien sur une droite ; l'intégrale triple est alors à remplacer par une intégrale simple (voir n° 4b) (1).

**6. — Propriétés générales des fonctions  $\Phi$ .** — Si une fonction  $\Phi(A, B, t)$  représente la densité de probabilité pour le passage de A à B en  $t$  secondes, elle doit satisfaire à (1). Elle sera en outre positive ou nulle. Nous allons exclure d'abord ce dernier cas ; nous supposons que

$$(2) \quad \Phi(A, B, t) > 0.$$

pour toutes les positions de A et de B dans V et pour toute valeur positive de  $t$ . Le point A étant fixe, nous savons que le point mobile se trouve, après  $t$  secondes, quelque part dans V. Donc  $t$  doit satisfaire encore à la condition

$$(3) \quad \iiint_V \Phi(A, M, t)d\tau_M = 1$$

pour toute position du point A dans V et pour toute valeur positive de  $t$ .

Si le point mobile se meut d'une manière continue, il ne peut franchir une distance finie AB que pendant une durée  $t$  finie et différente de zéro ; par conséquent si A et B sont deux points différents on a

$$(4) \quad \lim_{t=0} \Phi(A, B, t) = 0.$$

(1) M. V. SMOLUCHOWSKI, *Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie*, classe des sc. math.-phys., A, 1913, p. 424 ; *Œuvres de Smoluchowski*, t. II.

B. HOSTINSKÝ

Si B coïncide avec A, la fonction  $\Phi(A, A, t)$  devient infiniment grande, quand  $t$  tend vers zéro. En effet, si nous décrivons autour de A une sphère  $\Sigma$  de rayon R aussi petit que l'on veut, l'intégrale de  $\Phi(A, M, t)d\tau_M$  étendue à la partie de V extérieure à  $\Sigma$  tend vers zéro avec  $t$  d'après (4), tandis que l'intégrale de cette même expression étendue à l'intérieur de  $\Sigma$  doit être égale à 1 d'après (3); donc  $\Phi(A, M, t)$  devient infinie, si M se confond avec A et si  $t$  tend vers zéro (c'est-à-dire si le rayon de  $\Sigma$  devient infiniment petit). Nous préciserons plus tard la manière dont  $\Phi$  augmente dans ce cas.

7. — *Une solution particulière.* — a) Supposons que le domaine V soit formé par l'espace illimité. Pour construire une solution de (I) envisageons une forme quadratique homogène de trois variables  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ :

$$\chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \xi_i \xi_k, \quad a_{ki} = a_{ik}.$$

La somme

$$\frac{1}{t} \chi(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) + \frac{1}{t'} \chi(x_1' - \xi_1, x_2' - \xi_2, x_3' - \xi_3)$$

peut être mise sous la forme

$$\left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} \right) \left[ \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \xi_i \xi_k - 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\sum_{k=1}^3 a_{ik} \left( \frac{x_k}{t} + \frac{x_k'}{t'} \right)}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}} \right] + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_i x_k + \frac{1}{t'} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_i' x_k';$$

en ajoutant et retranchant le terme

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\left( \frac{x_i}{t} + \frac{x_i'}{t'} \right) \left( \frac{x_k}{t} + \frac{x_k'}{t'} \right)}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}}$$

on trouve que notre somme est égale à

$$\left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} \right) \chi \left( \xi_1 - \frac{x_1}{t} + \frac{x_1'}{t'} \right) + \frac{1}{t + t'} \chi(x_1 - x_1');$$

nous écrivons pour abrégé,  $\chi(u_1)$  au lieu de  $\chi(u_1, u_2, u_3)$ .

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Cela posé, désignons par  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées de A et par  $x, y, z$  celles de B, et démontrons que l'expression

$$(5) \quad \Phi(A, B, t) = \frac{4}{\Delta\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{t}\chi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}.$$

satisfait à l'équation (1) ; la forme  $\chi$  doit être définie et positive et

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u \, du \, dv}{[\chi(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)]^{\frac{3}{2}}};$$

les intégrations par rapport aux coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  de M au second membre de (1) doivent être étendues de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Le second membre de (1) devient, lorsqu'on y introduit l'expression (5) à la place de  $\Phi$  (nous n'écrivons, derrière le symbole  $\chi$ , que la première variable)

$$16 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{t}\chi(\xi-x_0) - \frac{1}{t'}\chi(x-\xi)} d\xi d\eta d\zeta}{\pi\Delta^2 t^{\frac{3}{2}} t'^{\frac{3}{2}}} = \frac{16 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right)\chi(\xi) - \frac{\chi(x-x_0)}{t+t'}} d\xi d\eta d\zeta}{\Delta^2 t^{\frac{3}{2}} t'^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous avons remplacé, au second membre

$$\chi\left(\xi - \frac{x_0 - x}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}}\right) \quad \text{par} \quad \chi(\xi),$$

ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale. Introduisons encore les cosinus directeurs  $\lambda, \mu, \nu$  du rayon  $r$  qui joint l'origine des coordonnées avec le point  $(\lambda, \mu, \nu)$  ; nous avons

$$\lambda = \sin u \cos v, \quad \mu = \sin u \sin v, \quad \nu = \cos u,$$

$u$  et  $v$  étant les coordonnées géographiques sur la surface de la sphère unitaire, et

$$\chi(\xi) = r^2 \chi(\lambda, \mu, \nu), \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(r, u, v)} = r^2 \sin u.$$

En prenant

$$\rho = r \sqrt{\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right)\chi(\lambda, \mu, \nu)}$$



B. HOSTINSKÝ

comme variable d'intégration, le second membre de (I) prend la forme

$$\frac{16}{\pi \Delta^2 (t+t')^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\rho^2} \frac{\rho^2 \sin u \, d\rho \, du \, dv}{[\chi(\lambda, \mu, \nu)]^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\chi(x-x_0)}{t+t'}}.$$

Mais on a

$$\int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^2 \, d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

donc les deux membres de (I) sont égaux à

$$\frac{4}{\Delta \sqrt{\pi} (t+t')^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{\chi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}{t+t'}}.$$

La condition (3) est satisfaite par (5), car

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(A, B, t) \, d\tau_B = \frac{4}{\Delta \sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^2 \Delta t^{\frac{3}{2}} \, d\rho = 1;$$

les conditions (2) et (4) sont aussi satisfaites par (5).

b) Pour avoir une idée sur la nature du mouvement Brownien qui correspond à la fonction (5), construisons un cône de révolution T infiniment mince dont le sommet soit au point A(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, z<sub>0</sub>) et dont l'axe soit déterminé par les cosinus directeurs λ, μ, ν. Soit R la longueur de l'arête de T et dε l'angle solide infiniment petit, ouverture de T. Calculons la probabilité I pour que le point mobile partant de A se trouve, après t secondes, à l'intérieur de T. En désignant toujours par Φ la fonction (5) nous avons

$$I = \iiint_T \Phi(A, B, t) \, d\tau_B,$$

l'intégration étant étendue, par rapport aux coordonnées x, y, z de B, à l'intérieur de T. Supposons que R soit infiniment petite; il en sera de même de r = AB. Si nous négligeons les puissances supérieures de r,

$$x - x_0 = \lambda r, \quad y - y_0 = \mu r, \quad z - z_0 = \nu r, \quad d\tau_B = r^2 \, dr \, d\varepsilon$$

$$I = \frac{4d\varepsilon}{\Delta \sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \int_0^R e^{-\frac{r^2}{t} \chi(\lambda, \mu, \nu)} r^2 \, dr = \frac{4d\varepsilon \int_0^R \sqrt{\frac{\chi(\lambda, \mu, \nu)}{t}} e^{-\rho^2} \rho^2 \, d\rho}{\Delta \sqrt{\pi} [\chi(\lambda, \mu, \nu)]^{\frac{3}{2}}};$$

et

$$\lim_{t=0} I = \frac{d\varepsilon}{\Delta[\chi(\lambda, \mu, \nu)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cherchons encore la limite de la valeur moyenne  $I'$  du rapport  $r^2 : t$ , B étant à l'intérieur de T :

$$I' = \iiint_T \Phi(A, B, t) \frac{r^2}{t} d\tau_B.$$

Un calcul tout à fait analogue au précédent donne

$$\lim_{t=0} I' = \frac{4d\varepsilon}{\Delta\sqrt{\pi}[\chi(\lambda, \mu, \nu)]^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^4 d\rho;$$

la dernière intégrale étant égale à  $\frac{3}{8}\sqrt{\pi}$ , nous avons

$$\lim_{t=0} I' = \frac{3d\varepsilon}{2\Delta[\chi(\lambda, \mu, \nu)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La valeur moyenne totale de  $r^2 : t$  (pour  $\lim t = 0$ ), quand on ne spécifie pas la direction du mouvement, s'obtient en intégrant par rapport à l'angle solide  $\varepsilon$  :

$$\lim_{t=0} v \cdot m \cdot \frac{r^2}{t} = \iint \lim_{t=0} I' = \frac{3}{2\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u du dv}{[\chi(\lambda, \mu, \nu)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La formule de I nous montre qu'à partir d'une position A donnée, les différents mouvements se font avec des probabilités différentes qui dépendent de la direction. Dans le cas particulier où la densité de probabilité I ne dépend pas de la direction AB, prenons

$$\chi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4a^2} = \frac{r^2}{4a^2}.$$

Il en résulte

$$\chi(\lambda, \mu, \nu) = \frac{1}{4a^2}, \quad \Delta = 32\pi a^3,$$

$$\lim_{t=0} v \cdot m \cdot \frac{r^2}{t} = 6a^2.$$

c) Calculons les dérivées partielles de la fonction (5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \Phi \cdot -\frac{1}{t} \frac{\partial \chi}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \Phi \cdot \frac{\chi}{t^2} - \frac{3}{2t} \Phi \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \Phi \cdot \left[ \frac{1}{t^2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right], & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \Phi \cdot \left[ \frac{1}{t^2} \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{1}{t} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Nous avons, en posant

$$x - x_0 = x_1, \quad y - y_0 = x_2, \quad z - z_0 = x_3, \quad \chi = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ki} = a_{ik},$$

pour les dérivées partielles  $2u_1, 2u_2, 2u_3$  de  $\chi$  :

$$u_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}, \quad x_k = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^3 A_{ik} u_i,$$

où  $A$  est le déterminant «  $a_{ik}$  » et  $A_{ik}$  le mineur de  $a_{ik}$ . Par conséquent

$$\chi = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{A_{ji} u_j A_{sk} u_s}{A^2} = \frac{1}{4A} \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 A_{js} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \frac{\partial \chi}{\partial x_s}.$$

Nous avons encore

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_i \partial x_k} = 2a_{ik}, \quad 2 \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{a_{js} A_{js}}{A} = \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{A_{js}}{A} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j \partial x_s} = 6,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \sum_{s=1}^3 \frac{1}{4A} A_{js} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_s}.$$

L'expression (5) envisagée comme fonction du point B et du temps  $t$  satisfait donc à l'équation de la chaleur dans un milieu anisotrope ;  $\Phi$  est la température. Dans le cas où le milieu serait isotrope, par exemple si

$$A_{js} = 0, \quad \text{pour } j \neq s \quad \text{et} \quad A_{11} = A_{22} = A_{33},$$

nous aurions  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{4a^2}$  où  $a$  est une constante, et l'équation précédente devient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right);$$

la formule (5) se réduit à

$$(5a) \quad \Phi(A, B, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad r = \overline{AB}.$$

La formule (5a) correspond au cas que nous avons traité à la fin du n<sup>o</sup> 7 b.

La constante  $a^2$  est égale ici à la conductibilité calorifique divisée par le produit de la densité du corps et de sa chaleur spécifique. L'identité analytique des problèmes sur les probabilités avec ceux qui se posent dans la théorie de la chaleur a été prise en considération par Lord RAYLEIGH dans ses études sur la composition des vibrations dont les phases sont distribuées au hasard (1).

Nous avons vu plus haut que la quantité  $6a^2$  donne, dans le problème du mouvement Brownien ordinaire (la probabilité du passage ne dépendant pas de la direction) la valeur moyenne du rapport  $r^2 : t$  si  $t$  est très petit. Ce résultat peut être rapproché du suivant où nous considérons  $\Phi$  comme une température. La fonction (5a) correspond ici au cas où la chaleur est concentrée, au moment initial  $t = 0$ , au point A. La température en B devient infinie pour  $t = 0$ , si B se confond avec A. Si B est différent de A, on a  $\Phi = 0$  pour  $t = 0$ . Pour une valeur positive donnée de  $r = \overline{AB}$  l'expression (5a) atteint sa valeur maximum à l'instant  $t$  déterminé par la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad t = \frac{r^2}{6a^2}.$$

Donc si nous considérons la température en un point B comme fonction de  $t$ , il y a, pour la surface sphérique décrite autour de A avec rayon  $r$ , un instant  $t$  où la température y passe par son maximum et on a  $r^2 = 6a^2 t$ . Donc le carré de la distance de ce maximum de A augmente avec le temps de la même manière que le carré moyen de la distance parcourue par le point mobile dans le cas du mouvement Brownien.

REMARQUE. — L'équation générale aux dérivées partielles que nous avons obtenue plus haut contient autant de constantes arbitraires qu'il y en a dans la forme  $\chi$ . Mais toutes ces équations que l'on obtient

(1) Lord RAYLEIGH, *Philosophical Magazine*, 1899, t. XLVII, p. 246, 1919, t. XXXVII, p. 321, 498 ou *Scientific Papers*, IV, p. 370, VI, p. 604, 627. Voir aussi sa *Theory of Sound*, 2<sup>e</sup> édition, vol. 1, n<sup>o</sup> 42a.

en faisant varier  $\chi$  sont vérifiées par des fonctions qui satisfont à la même équation fonctionnelle (1).

8. — *Valeur moyenne d'une fonction du point mobile.* — Nous avons déjà calculé la valeur moyenne de  $r^2 : t$ . Considérons maintenant un point M quelconque dans le domaine V où se meut le point mobile, et soit  $\alpha(M)$  une fonction donnée du point M. Si le point mobile vient en A, la fonction prend la valeur  $\alpha(A)$  ; s'il vient en B, elle prend la valeur  $\alpha(B)$  et ainsi de suite. Supposons que A soit la position initiale du point mobile. La probabilité pour qu'il se trouve, après  $t$  secondes, à l'intérieur de  $d\tau_B$  est égale à  $\Phi(A, B, t)d\tau_B$ . Donc la moyenne des valeurs que peut prendre  $\alpha(B)$  après  $t$  secondes sera

$$(6) \quad v \cdot m \cdot \alpha(B) = \int \int \int_V \Phi(A, B, t) \alpha(B) d\tau_B.$$

Cette quantité dépend de la position initiale A ainsi que de  $t$  ; nous la désignerons par  $\bar{\alpha}(A, t)$ .

Or, en suivant la voie indiquée par MARKOFF dans le cas des variables discontinues, on peut démontrer que  $\bar{\alpha}(A, t)$  tend vers une limite déterminée, indépendante de A, quand  $t$  augmente indéfiniment. Nous allons donner la démonstration de ce théorème dans le numéro suivant.

9. — *Démonstration du théorème fondamental.* — a) Reprenons d'abord le point de vue adopté au n° 4a. Considérons l'équation fonctionnelle relative au mouvement Brownien sur un segment rectiligne :

$$\Phi(x, y, t + t') = \int_a^b \Phi(x, s, t) \Phi(s, y, t') ds.$$

et supposons que  $t$  ne prenne que les valeurs

$$t = \varepsilon, \quad 2\varepsilon, \dots, n\varepsilon, \dots$$

$\varepsilon$  étant un nombre positif quelconque et  $n$  un entier positif arbitraire. Soit

$$p(x, y) = \Phi(x, y, \varepsilon),$$

une fonction positive et continue quelconque de deux variables  $x$  et  $y$  qui satisfait, pour toute valeur de  $x$  comprise entre les limites  $a$  et  $b$ , à la condition

$$(3') \quad \int_a^b p(x, y) dy = \int_a^b \Phi(x, y, \varepsilon) dy = 1,$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

analogue à (3). La valeur  $\Phi(x, y, z)$  étant supposée connue, l'équation fonctionnelle permet de déterminer  $\Phi(x, y, 2z)$  ; on en déduira  $\Phi(x, y, 3z)$  et ainsi de suite. Posons  $t = mz$ ,  $t' = nz$ ,  $m$  et  $n$  étant deux entiers positifs ; l'équation fonctionnelle prend la forme

$$\Phi[x, y, (m, + n)z] = \int_a^b \Phi(x, s, mz)\Phi(s, y, nz)ds,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation générale du n° 4a avec

$$P^{(n)}(x, y) = \Phi(x, y, nz), \quad P^{(1)}(x, y) = p(x, y).$$

Or, si le point mobile part de la position  $x$ , la valeur moyenne, après  $nz$  secondes, d'une fonction  $\alpha(y)$ ,  $y$  étant l'abscisse de la position actuelle, est égale à (voir n° 8)

$$\bar{\alpha}(x, nz) = \int_a^b \Phi(x, y, nz)\alpha(y)dy.$$

L'équation écrite plus haut donne pour  $m = 1$ , si l'on y écrit  $n - 1$  au lieu de  $n$ ,

$$\Phi(x, y, nz) = \int_a^b [p(x, s)\Phi(s, y, (n - 1)z)] ds,$$

donc

$$\bar{\alpha}(x, nz) = \int_a^b \int_a^b p(x, s)\Phi(s, y, (n - 1)z)\alpha(y)dyds,$$

ou

$$(3'') \quad \bar{\alpha}(x, nz) = \int_a^b p(x, s)\bar{\alpha}(s, (n - 1)z)ds,$$

$x$  et  $y$  étant deux positions initiales quelconques. L'équation (3'') donne

$$\bar{\alpha}(x, nz) - \bar{\alpha}(y, nz) = \int_a^b [p(x, s) - p(y, s)]\bar{\alpha}(s, (n - 1)z)ds.$$

Soit  $e$  l'ensemble de parties des l'intervalle  $(a, b)$  où la fonction  $[p(x, s) - p(y, s)]$  de la variable  $s$  est positive et  $f$  celui où elle est négative ; nous la représenterons par  $\beta(s)$  dans  $e$  et par  $-\beta'(s)$  dans  $f$ . Donc, d'après (3')

$$\int_e \beta ds < 1, \quad \int_f \beta' ds < 1$$

$$\int_e \beta ds - \int_f \beta' ds = \int_a^b [p(x, s) - p(y, s)]ds = 1 - 1 = 0,$$

et l'équation écrite plus haut donne

$$\bar{\alpha}(x, n\varepsilon) - \bar{\alpha}(y, n\varepsilon) = \int_e \beta(s) \bar{\alpha}(s, (n-1)\varepsilon) ds - \int_f \beta'(s) \bar{\alpha}(s, (n-1)\varepsilon) ds.$$

Les variables  $x$  et  $y$  peuvent avoir des valeurs quelconques comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ . Si  $\Delta^{(k)}$  est la valeur maximum de  $\bar{\alpha}(x, k\varepsilon) - \bar{\alpha}(y, k\varepsilon)$  l'inégalité suivante a lieu

$$|\bar{\alpha}(x, n\varepsilon) - \bar{\alpha}(y, n\varepsilon)| < h\Delta^{(n-1)},$$

où

$$0 < h = \int_e \beta(s) ds = \int_f \beta'(s) ds < 1.$$

Cela posé, choisissons  $x$  et  $y$  de telle façon que le premier membre de notre inégalité soit précisément égal à sa valeur maximum  $\Delta^{(n)}$ . Nous aurons

$$\Delta^{(n)} < H\Delta^{(n-1)},$$

où  $0 < H < 1$  et par conséquent

$$\Delta^{(n)} < H^{n-1}\Delta^{(1)},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0.$$

Or, les formules (3') et (3'') montrent que le maximum de  $\bar{\alpha}(x, n\varepsilon)$  dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$  ne croît pas avec  $n$  et que son minimum ne décroît pas avec  $n$ ; la différence entre le maximum et entre le minimum tend vers zéro, donc les deux valeurs extrêmes convergent vers une limite commune qui est en même temps égale à la limite de  $\bar{\alpha}(x, n\varepsilon)$  pour  $x$  quelconque :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\alpha}(x, n\varepsilon) = \bar{\alpha}.$$

La démonstration précédente s'applique aussi à l'équation (1) où le domaine  $V$  a trois dimensions; il faut remplacer les intégrales simples prises entre les limites  $a$  et  $b$  par des intégrales triples étendues à  $V$ .

Prenons en particulier une fonction  $\alpha(M)$  égale à zéro partout sauf dans le voisinage du point  $B$  où elle devient infiniment grande de sorte que

$$\iiint_V \alpha(M) d\tau_M = 1.$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

La formule (6) du n° 8 montre que

$$\bar{\alpha}(A, n\varepsilon) = \Phi(A, B, n\varepsilon).$$

La limite  $\bar{\alpha}$  de cette expression pour  $n$  infini ne dépend pas de  $A$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A, B, n\varepsilon) = P(B).$$

et la formule (6) donne

$$(7) \quad \bar{\alpha} = \iiint_V P(B)^{\alpha(B)} \cdot d\tau_{ii}.$$

b) Il s'agit maintenant d'étendre la démonstration précédente au cas où  $t$  croît indéfiniment par des valeurs quelconques qui ne sont pas nécessairement comprises dans la formule  $n\varepsilon$ ,  $n$  étant entier. Supposons donc qu'une fonction continue  $\Phi(A, B, t)$  satisfasse à (1) pour des positions quelconques de  $A$  et de  $B$  dans  $V$  et pour  $0 < t < T$  et que, de plus, les conditions (2) et (3) soient satisfaites. La forme de l'équation (1) montre qu'on peut calculer  $\Phi(A, B, t)$  pour toute valeur positive de  $t$ , si l'on connaît ses valeurs pour  $0 < t \leq T$ . Ce prolongement de  $\Phi$  est d'ailleurs unique ;  $\Phi$  est une fonction continue de  $t$  pour toute valeur positive de  $t$ . Or si  $\varepsilon$  est une quantité positive suffisamment petite, le théorème qui vient d'être démontré nous apprend que la fonction  $\Phi(A, B, m\varepsilon)$ , où l'entier  $m$  est plus grand qu'un certain entier  $n$ , diffère aussi peu que l'on veut d'une quantité  $P(B)$ , indépendante de  $\varepsilon$ . Si nous substituons  $\varepsilon : r$  à la place de  $\varepsilon$ ,  $r$  étant un entier, la limite de  $\Phi(A, B, m\frac{\varepsilon}{r})$  pour  $m$  infini ne diffère pas de  $P(B)$ . Donc quelque soit l'entier  $r$ , la suite infinie

$$\Phi\left(A, B, m\frac{\varepsilon}{r}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

admettra la limite  $P(B)$ . Il en résulte que

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(A, B, t) = P(B),$$

et la formule (7) donne la limite, pour  $t$  infini, de la valeur moyenne de  $\alpha(B)$  après un temps infiniment long. En résumé, si une fonction continue  $\Phi(A, B, t)$  satisfait aux conditions (1), (2) et (3) pour  $0 < t \leq T$ , elle a une valeur bien déterminée pour tout  $t$  positif et la valeur moyenne d'une fonction  $\alpha(B)$  (calculée au moyen de  $\Phi$ ) après  $t$  secondes, tend,



quand  $t$  augmente indéfiniment, vers une limite constante  $\bar{\alpha}$  indépendante de la position initiale  $A$  du point mobile. La densité de probabilité du passage  $\Phi(A, B, t)$  tend en même temps vers une limite  $P(B)$  qui ne dépend pas de  $A$ .

Pour obtenir  $P(B)$ , faisons croître indéfiniment la valeur de  $t$ ; l'équation (1) donne alors

$$(9) \quad P(B) = \iiint_{\mathbf{v}} \Phi(M, B, t') P(M) d\tau_M.$$

Voilà l'équation de FREDHOLM homogène qui sert à déterminer  $P(B)$ . Il suit immédiatement de la démonstration précédente que, pour toute valeur de  $t'$ , l'équation (9) — dont le noyau  $\Phi(M, B, t')$  satisfait aux conditions (1), (2) et (3) — admet une solution  $\varphi(B)$  positive. La fonction  $\varphi(B)$  satisfait à la condition (3) qui se réduit à

$$(3a) \quad \iiint_{\mathbf{v}} P(B) d\tau_B = 1,$$

Dans le cas où  $t$  augmente indéfiniment en prenant les valeurs  $t = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), l'existence de la limite (8) a été démontrée par J. HADAMARD <sup>(1)</sup>. La démonstration donnée au n° 9a ne diffère pas en principe de celle de MARKOFF <sup>(2)</sup> sauf en ce que nous avons ici des intégrales au lieu des sommes finies. Le travail de MARKOFF est resté inconnu. Le principe de la démonstration (calcul des valeurs moyennes successives) a été indiqué par F. A. URBAN <sup>(3)</sup>. La démonstration de Paul LÉVY <sup>(4)</sup> ainsi que celle de HADAMARD <sup>(5)</sup> dans le cas du battage des cartes sont fondées sur le même principe. Je l'ai employé dans mes travaux précédents <sup>(6)</sup> en suivant la voie indiquée par M. HADAMARD.

10. — Compléments au théorème précédent. — a) Supposons que

(1) J. HADAMARD, *Comptes Rendus*, t. CLXXXVI, p. 189, 1928.

(2) A. MARKOFF, *Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan* (2), XV, 1907, n° 4, p. 135 (en russe).

(3) F. A. URBAN, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Leipzig-Berlin, 1923), p. 168.

(4) P. LÉVY, *Calcul des probabilités*, Paris, 1925, p. 49.

(5) J. HADAMARD, *Comptes Rendus*, t. CLXXXV, p. 5, 1927.

(6) B. HOSTINSKÝ, *Comptes Rendus*, t. CLXXXVI, p. 59, 487, 1928.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

la fonction  $\Phi(A, B, t)$  qui satisfait aux conditions (1), (2) et (3) vérifie encore la condition suivante

$$(10) \quad \iiint_V \Phi(A, B, t) d\tau_A = 1,$$

quelle que soit la position du point B dans V. Dans ce cas l'équation intégrale (9) admet la solution  $P(B) = \text{constante}$  ; et cette constante doit être égale à l'inverse du volume V, car son intégrale étendue à V est égale à l'unité. Donc si les conditions (1), (2), (3) et (10) sont satisfaites, la limite de  $\Phi(A, B, t)$ , quand t augmente indéfiniment, est égale à l'inverse du volume de V.

Ce théorème admet la réciproque suivante : si une fonction  $\Phi(A, B, t)$  satisfait aux conditions (1), (2) et (3) et si elle tend vers une limite constante, quand t augmente indéfiniment, elle vérifie aussi la condition (10). En effet, si  $P(B)$  est égale à une constante, (10) est une conséquence directe de (9).

b) La condition (2) est importante pour la démonstration donnée au numéro précédent. Si la fonction  $\Phi(A, B, t)$  n'est pas positive pour toutes les positions de A et de B dans V, elle n'admet pas de limite en général pour t infini. Pour étudier le cas où  $\Phi$  devient nulle dans certaines parties de V, il faut examiner les valeurs singulières de l'équation homogène de FREDHOLM

$$\varphi(B) = \lambda \iiint_V \Phi(M, B, t) \varphi(M) d\tau_M.$$

Si la condition (2) est remplie, cette équation admet  $\lambda = 1$  comme valeur singulière (elle ne diffère pas, pour  $\lambda = 1$ , de l'équation (9)), la fonction singulière correspondante  $\varphi(B) = P(B)$  est partout positive dans V,  $\lambda = 1$  est une racine simple du déterminant  $D(\lambda)$  de Fredholm et les autres racines sont en valeur absolue plus grandes que 1 (Théorème de JENTZSCH (1)). Si la condition (2) n'est pas remplie, la racine  $\lambda = 1$  de  $D(\lambda) = 0$  peut être multiple et il peut arriver que cette équation possède la racine  $\lambda = -1$ . Dans ce cas, comme l'a fait observer V. ROMANOVSKY (2), la limite de  $\Phi(A, B, t)$  peut n'exister

(1) R. JENTZSCH, *Journal für reine u. angew. Mathematik*, Bd. CXLI, p. 235, 1912.

(2) V. ROMANOVSKY, *Sur les chaînes de Markoff (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de U. R. S. S., 1929, A. p. 203)*.

pas ou, si elle existe, elle dépend de la position initiale  $A$  du point mobile.

Signalons encore le cas simple suivant où la limite existe quoique la fonction  $\Phi$  ne soit pas partout positive pour un  $t$  donné. Si la fonction  $\Phi(A, B, t)$  est positive pour  $0 < t \leq T$  et pour les points  $B$  situés à l'intérieur d'une sphère  $\Sigma$  décrite autour de  $A$  comme centre avec un rayon  $R$ , et si elle est nulle en dehors de  $\Sigma$ , on obtient, en faisant croître  $t$  suffisamment, des valeurs positives de  $\Phi(A, B, t)$  pour des positions quelconques de  $A$  et de  $B$ . En effet nous supposons que la densité de probabilité pour le passage de  $A$  à  $B$  en  $t$  secondes ( $t \leq T$ ) soit positive pourvu que  $\overline{AB} < R$ . Après  $T$  secondes, tout point à l'intérieur de  $\Sigma$  pourra être pris pour une nouvelle position initiale ; donc les positions qui peuvent être atteintes, à partir de  $A$ , en  $2T$  secondes seront situées à l'intérieur d'une sphère de rayon  $2R$  concentrique à  $E$ . En faisant croître  $t$  on voit qu'après un temps suffisamment long tout point  $B$  de  $V$  pourra être atteint par le point mobile. Donc  $\Phi(A, B, t)$  sera positive dès que  $t$  aura dépassé une certaine limite  $T_1$  ; il en résulte que  $\Phi$  admettra une limite  $P(B)$  quant  $t$  augmente indéfiniment (pour le voir il suffit de substituer  $t = T_1$  dans (1) et d'y introduire successivement  $T_1, 2T_1, 3T_1, \dots$  à la place de  $t'$ ).

c) Le théorème du n° 9 s'applique aussi au mouvement d'un point dans un espace à un nombre quelconque de dimensions (ou sur une surface) ; il en est de même des compléments démontrés au n° 10  $a, b$ .

### III. — Conditions qui déterminent une solution de l'équation fonctionnelle. Méthodes d'itération.

11. — *Les fonctions itérées sur la surface de la sphère.* — Pour déterminer une solution de l'équation (1), il faut donner quelques conditions supplémentaires analogues aux conditions initiales dans le cas des équations différentielles. Dans sa thèse sur la théorie mathématique du mouvement Brownien de rotation, F. PERRIN a réussi à déterminer ainsi les solutions d'une équation fonctionnelle du type (1) (1). Nous allons exposer quelques résultats obtenus par lui.

(1) F. PERRIN, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1928.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Soit P un point sur la sphère dont le rayon est égal à un. Nous considérons P comme pôle d'un système de coordonnées géographiques sur la sphère et soient  $\omega = PM$ ,  $\theta = PN$ ,  $\alpha = MN$  les côtés du triangle sphérique PMN,  $\mu$  et  $\lambda$  les azimuths des points N et M. La position de M est définie par les quantités  $(\lambda, \omega)$ , celle de N par  $(\mu, \theta)$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega \cos (\lambda - \mu) \\ d\sigma_N &= \sin \theta d\theta d\mu, \end{aligned}$$

si  $d\sigma_N$  est l'élément de surface de la sphère au voisinage de N.

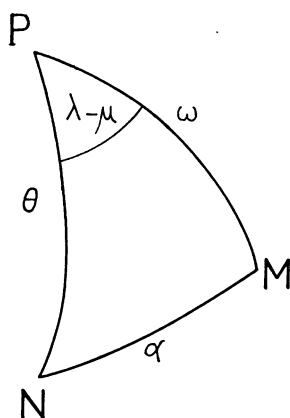


Fig. 1.

Désignons par  $\varphi^{(1)}(\omega)$  une fonction du point M dont la valeur ne dépend que de la distance sphérique  $\omega$  de M au pôle P. Les fonctions itérées  $\varphi^{(2)}(\omega)$ ,  $\varphi^{(3)}(\omega)$ , ... sur la sphère seront définies par les formules suivantes :

$$\varphi^{(2)}(\omega) = \iint \varphi^{(1)}(\theta) \varphi^{(1)}(x) d\sigma_N, \quad \varphi^{(k+1)}(\omega) = \iint \varphi^{(k)}(\theta) \varphi^{(1)}(x) d\sigma_N,$$

les intégrations étant toujours étendues à la surface de la sphère entière.

12. — *Mouvement Brownien sur la surface de la sphère et le problème de la chaleur.* — a) Supposons qu'un point se meuve au hasard sur la sphère. A et B étant deux points sur la sphère la densité de proba-

bilité  $f(A, B, t)$  pour le passage de A à B en  $t$  secondes satisfait à l'équation

$$f(A, B, t + t') = \iint f(A, N, t)f(N, B, t')d\sigma_N.$$

qui ne diffère de (I) que parce que l'élément de volume est remplacé par l'élément de surface  $d\sigma_N$ ; l'intégration au second membre (ainsi que dans les formules suivantes) est étendue à la surface de la sphère. Supposons de plus avec F. PERRIN que la fonction  $f(A, B, t)$  ne dépende que de la distance sphérique des points A, B et du temps  $t$ . Si nous plaçons A au pôle P (voir n° II) et si nous continuons à employer la notation introduite au n° II, l'équation s'écrit

$$(I \text{ bis}) \quad f(\omega, t + t') = \iint f(\omega, t)f(\alpha, t')d\sigma_N.$$

Or, pour trouver une solution de cette équation, écrivons la série

$$f(\omega, t) = \frac{1}{4\pi}[c_0(t) + \dots + (2n + 1)c_n(t)P_n(\cos \omega) + \dots],$$

où  $P_n$  désigne le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de LEGENDRE. D'après les propriétés connues de ces polynômes

$$\iint P_m(\cos \theta)P_n(\cos \alpha)d\sigma_N = 0 \quad \text{pour} \quad m \neq n,$$

$$\iint P_n(\cos \theta)P_n(\cos \alpha)d\sigma_N = \frac{4\pi}{2n + 1}P_n(\cos \omega).$$

Introduisons la série à la place de  $f$  dans l'équation (I bis). La série satisfait à l'équation, si

$$c_n(t + t') = c_n(t)c_n(t'),$$

c'est-à-dire si

$$c_n(t) = e^{-a_n t},$$

$a_n$  étant des constantes. La fonction cherchée sera donc exprimée par la formule

$$(IIa) \quad 4\pi f(\omega, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)e^{-a_n t} \cdot P_n(\cos \omega).$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

b) Prenons, comme cas particulier de la formule précédente, la série suivante

$$(11b) \quad 4\pi f(\omega, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-n(n+1)Rt} P_n(\cos \omega),$$

R étant une constante.

Cette formule donne la température que prend un point situé à la distance  $\omega$  de P à l'instant  $t$  sous les conditions suivantes :

1° La distribution de la température qui ne dépend que de  $\omega$  et de  $t$  obéit à l'équation de la chaleur sur la surface de la sphère c'est-à-dire à l'équation

$$R \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \sin \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) = \sin \omega \frac{\partial f}{\partial t}.$$

2° La quantité totale de la chaleur ne change pas au cours du temps ; elle est égale à l'unité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\omega, t) \sin \omega d\omega d\varphi = 1.$$

3° Si  $\omega$  est différent de zéro, la température tend vers zéro avec  $t$  ; si  $\omega = 0$ , elle devient infiniment grande pour  $t$  infiniment petit (chaleur concentrée au moment initial  $t = 0$  dans le voisinage de P).

En effet, si nous posons  $\cos \omega = u$ ,  $f(\omega, t) = F(u, t)$ , l'équation de la chaleur sur la sphère devient

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ (1-u^2) \frac{\partial F}{\partial u} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial t},$$

et on voit qu'elle est satisfaite par

$$c_n e^{-Rn(n+1)t} P_n(u),$$

car les polynômes  $P_n$  de Legendre satisfont à l'équation

$$\frac{d}{du} \left[ (1-u^2) \frac{dP_n(u)}{du} \right] = -n(n+1)P_n(u).$$

La série (11b) satisfait donc à la condition 1°. Pour voir qu'elle est d'accord avec la condition 2° multiplions la série membre à

membre par  $\sin \omega d\omega d\varphi$  et intégrons sur la surface totale de la sphère. Nous avons

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega d\varphi = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(u) du = 0 \quad \text{pour } n > 0$$

$$= 4\pi, \quad \text{si } n = 0;$$

donc la condition est vérifiée.

Si  $\omega \neq 0$  et  $t = 0$ , calculons les coefficients  $c_k$  du développement en série suivant :

$$f(\cos \omega, 0) = F(u, 0) = c_0 + c_1 P_1(u) + c_2 P_2(u) + \dots$$

Nous avons

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(u)]^2 du = \frac{2}{2n+1}, \quad \int_{-1}^{+1} P_m(u) P_n(u) du = 0 \quad \text{pour } m \neq n,$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} F(u, 0) P_n(u) du = \frac{2c_n}{2n+1}.$$

La fonction  $F(u, 0)$  ne diffère de zéro que pour  $u = 1$ ;  $P_n(1) = 1$ . Notre intégrale est égale à

$$\int_{-1}^{+1} F(u, 0) du = \int_0^\pi f(\cos \omega, 0) \sin \omega d\omega = \frac{1}{2\pi},$$

d'après 2°. Par conséquent

$$c_n = \frac{2n+1}{4\pi}.$$

La condition 3° est satisfaite. On voit que  $F(u, t)$  doit tendre vers infini quand  $u = 0$  et quand  $t$  tend vers zéro.

**13.** — *Conditions qui déterminent une solution de l'équation (I bis).* — Nous venons de voir que la solution de (I bis) est exprimée par (II a); et dans le cas particulier (qui correspond au problème de la chaleur traité dans le numéro précédent), la solution est donnée par (II b). Il s'agit de déterminer différentes solutions comprises dans la formule générale (II a) par des conditions supplémentaires appropriées.

F. PERRIN a montré qu'on peut déterminer une solution de (I bis) comme suit (voir, pour les détails, la fin du dernier chapitre de sa Thèse).

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Soit  $\Psi(u, t)$ ,  $u = \cos \omega$  une fonction quelconque satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes que nous imposons à la solution cherchée  $\Phi(u, t)$  de (I bis) :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \Psi(u, t) \geq 0, \quad 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t) du = 1 \\ \lim_{t=0} \Psi(u, t) = 0, \quad \lim_{t=0} \frac{1}{t} \Psi(u, t) = \Psi'_t(u, t) = D(u) \geq 0, \quad \text{si } u \neq 1 \\ \lim_{t=0} \frac{1}{t} 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t)(1-u) du = p_1 > 0. \end{array} \right.$$

On démontre que, si une fonction  $\Psi(u, t)$  vérifie ces conditions, il en est de même de la fonction  $\Psi^{(q)}\left(u, \frac{t}{2}\right)$ , quel que soit l'indice  $q$  d'itération (voir n° 11 pour la définition des fonctions itérées sur la sphère). Ensuite on établit que,  $\alpha_0$  étant une quantité positive ou nulle, on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{t=0} \frac{2\pi}{t} \int_{1-\varepsilon}^1 \Psi(u, t)(1-u) du = \alpha_0 \geq 0,$$

et que

$$\lim_{q=\infty} \Psi^{(q)}\left(u, \frac{t}{q}\right) = 4\pi\Phi(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)e^{-ant}P_n(u),$$

avec

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \alpha_0 + 2\pi \lim_{\varepsilon=0} \int_{-1}^{1-\varepsilon} D(u)[1-P_n(u)] du.$$

La fonction  $\Phi$  étant la limite des  $\Psi^{(q)}$  qui satisfont aux conditions (A), satisfait elle-même à ces conditions et, comme elle est représentée par la série (11 a), elle satisfait à l'équation fonctionnelle (1 bis).

Pour obtenir la fonction particulière (11 b) il faut que

$$a_n = -n(n+1)R, \quad \text{donc} \quad (\text{avec } \alpha_0 = 2R) D(u) \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t=0} \frac{\Psi(u, t)}{t} = \Psi'_t(u, t) \equiv 0 \quad \text{pour } u \neq 1.$$

14. — *Méthode des fonctions itérées dans le cas général.* — Reprenons l'équation générale (1) qui convient au cas d'un point mobile dans un domaine  $V$  à trois dimensions. Il semble que la théorie développée



par F. PERRIN dans le cas du mouvement sur la sphère puisse être généralisée.

Quant aux premières conditions (A) (première et seconde ligne) elles se généralisent ainsi qu'il suit. A et B étant deux points quelconques dans V, la fonction  $\Psi(A, B, t)$  doit satisfaire, pour tout  $t$  positif, aux conditions

$$\Psi(A, B, t) \geq 0, \quad \iiint_V \Psi(A, B, t) d\tau_B = 1,$$

et, si les points A et B ne sont pas confondus entre eux, aux conditions

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(A, B, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi(A, B, t) = [\Psi'_t(A, B, t)]_{t=0} = D(A, B) \geq 0.$$

Quant à la dernière condition (A), elle devra peut-être prendre la forme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \iiint_V \Psi(A, B, t) r^2 d\tau_B = \rho(A) > 0,$$

où A et B sont deux points distincts dans V et où  $r$  représente leur distance AB.

Supposons maintenant que l'on ait un système de fonctions

$$\varphi_0(A), \varphi_1(A), \dots, \varphi_n(A); \psi_0(A), \psi_1(A), \dots, \psi_n(A), \dots$$

biorthogonal dans V c'est-à-dire tel que

$$(I2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iiint_V \varphi_i(A) \psi_i(A) dt_A = 1, \\ \iiint_V \varphi_i(A) \psi_k(A) d\tau_A = 0, \end{array} \right\} i \neq k. \quad (i, k = 0, \dots),$$

Nous admettons que

$$(I2') \quad \varphi_0(A) > 0, \quad \psi_0(A) = 1$$

et que l'on puisse développer  $\Psi(A, B, t)$  en série procédant suivant les produits  $\varphi_i \psi_i$  :

$$\Psi(A, B, t) = \varphi_0(B) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(B) \psi_n(A).$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Cette fonction ne satisfait pas en général à l'équation (I).  
Formons les fonctions itérées en posant

$$\Psi^{(q)}(A, B, t) = \iiint_V \Psi^{(q-1)}(A, M, t) \Psi(M, B, t) d\tau_M,$$

En tenant compte des propriétés des fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  on démontre que

$$\Psi^{(q)}\left(A, B, \frac{t}{q}\right) = \varphi_0(B) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ u_n\left(\frac{t}{q}\right) \right]^2 \varphi_n(B) \psi_n(A).$$

Les conditions imposées plus haut à la fonction  $\Psi(A, B, t)$  sont vérifiées même par des fonctions itérées. Si, comme nous l'admettons, la limite de  $\Psi^{(q)}\left(A, B, \frac{t}{q}\right)$  pour  $q$  infini existe et si elle est exprimable par la série

$$(I3) \quad \Phi(A, B, t) = \varphi_0(B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(B) \psi_n(A)}{\lambda_n^t},$$

on voit qu'elle satisfait à (I). La formule (I3) dont nous n'avons pas donné la démonstration, correspond à la formule (II b) démontrée par F. PERRIN par la méthode des itérations dans le cas où le domaine du point mobile est la surface de la sphère et où la fonction cherchée ne dépend que de la distance sphérique des deux points.

**15.** — *Itération des transformations fonctionnelles linéaires. Propriété de groupe.* — a) Soit  $f(A)$  une fonction quelconque du point A dans V et  $\Psi(A, B, t)$  une fonction donnée des deux points et du paramètre  $t$ . Si  $t$  à une valeur fixe déterminée, l'équation

$$(I4) \quad g(A) = \iiint_V \Phi(A, B, t) f(B) d\tau_B,$$

fait correspondre à toute fonction  $f(A)$  une autre fonction  $g(A)$  (*transformation fonctionnelle linéaire*). Au point de vue adopté par V. VOLTERRA, (I4) n'est autre chose qu'une substitution linéaire et

homogène à une infinité de variables ; en effet, si l'on remplace l'intégrale par une somme finie, on obtient les équations de la forme

$$y_i = \sum_{k=1}^r a_{ik} x_k,$$

où  $x_i$ ,  $y_i$  et  $a_{ik}$  remplacent les valeurs de  $f(B)$ ,  $g(B)$  et de  $\Phi(A, B, t) \cdot h$ ,  $h$  étant l'élément de volume. Et en faisant croître  $r$  indéfiniment on obtient la formule (14).

Interprétons le paramètre  $t$  comme une durée ; la formule (14) fait alors correspondre, après  $t$  secondes,  $g(A)$  à une fonction  $f(A)$  donnée. Si  $t$  varie, nous avons une infinité de telles transformations. Forment-elles un groupe ? Dans ce cas la transformation (14), définie pour une valeur  $t$  du paramètre, suivie par une seconde transformation du même type qui correspond à la valeur  $t'$  du paramètre, donne une troisième transformation fonctionnelle ; et cette dernière doit être comprise dans la formule (14) à la condition d'y remplacer  $t$  par  $t + t'$  (1). Or si la première transformation change  $f(A)$  en  $g(A)$  et si la seconde, appliquée à  $g(A)$ , donne  $h(A)$ , nous avons

$$h(C) = \iiint_{\mathbf{v}} \Phi(C, A, t') g(A) d\tau_A,$$

d'où, en éliminant  $g(A)$  :

$$h(C) = \iiint_{\mathbf{v}} \left[ \iiint_{\mathbf{v}} \Phi(C, A, t') \Phi(A, B, t) d\tau_A \right] f(B) d\tau_B.$$

Voilà la formule qui donne la troisième transformation ; il faut donc, pour que les transformations forment un groupe, que la quantité entre crochets soit égale à  $\Phi(C, B, t + t')$ . Par conséquent

$$\Phi(C, B, t + t') = \iiint_{\mathbf{v}} \Phi(C, A, t') \Phi(A, B, t) d\tau_A,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1).

(1) Le paramètre de la transformation résultante est en général une fonction de  $t$  et de  $t'$ , qui peut être ramenée à la somme  $t + t'$ .

APPLICATION DU CALCUL, DES PROBABILITÉS

Cette propriété de groupe a été signalée par J. HADAMARD dans ses leçons sur le Principe d'Huygens qu'il a données à Prague et à Brno en 1928.

b) Si nous ne considérons que les valeurs  $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$ , de  $t$ , la fonction  $\Phi(A, B, \varepsilon)$  étant donnée, on en déduit facilement  $\Phi(A, B, n\varepsilon)$  par des itérations,  $n$  étant un entier. Mais le problème de construire une fonction  $\Phi(A, B, t)$  telle que (13), consiste à trouver un système de fonctions  $\varphi_i(A)$  et  $\psi_i(A)$  biorthogonales et de déterminer les constantes  $\lambda_i$ . Les conditions de biorthogonalité (12) sont tout à fait analogues des conditions ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) (voir chap. I) qui se présentent dans le cas des variables discontinues. Il y a encore, pour les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$ , quelque chose d'analogue aux conditions ( $\alpha'$ ) et ( $\beta'$ ) que nous avons trouvées au chapitre I. En effet, deux points distincts A et B étant choisis dans V, la seconde condition du n° 14, c'est-à-dire

$$\lim_{t=0} \Psi(A, B, t) = 0,$$

est satisfaite ; nous avons, d'après (13),

$$\lim_{t=0} \left[ \varphi_0(B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(B)\psi_n(A)}{\lambda_n^t} \right] = 0,$$

ce qui est une équation analogue de ( $\alpha'$ ). Si A est confondu avec B, l'expression entre crochets devient infinie pour  $t = 0$  ; voilà ce que devient la relation ( $\beta'$ ).

c) La formule (13) étant supposée valable pour toute valeur positive de  $t$ , elle donne ce que nous pouvons appeler la puissance *t<sup>ième</sup>* symbolique de la transformation fonctionnelle (qui correspond à la valeur  $t = 1$ ) ; l'exposant  $t$  peut avoir n'importe quelle valeur positive fractionnaire ou irrationnelle.

Les fonctions  $\varphi_i$  qui figurent au second membre de (13) s'obtiennent comme solutions de l'équation de Fredholm

$$\varphi(B) = \lambda \iiint_V \Phi(A, B, t) \varphi(A) d\tau_A,$$

et les  $\psi_i$  satisfont en même temps à l'équation associée

$$\psi(A) = \lambda \iiint_V \Phi(A, B, t) \psi(B) d\tau_B.$$

B. HOSTINSKÝ

Si  $D(\lambda)$  est le dénominateur de Fredholm <sup>(1)</sup> les racines de  $D(\lambda) = 0$  donnent les valeurs singulières de  $\lambda$ . Les fonctions  $\varphi_0(B)$  et  $\psi_0 = 1$  correspondent à la racine  $\lambda_0 = 1$  (voir les conditions (I2) et (I2')) ; les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  correspondent à la racine  $\lambda_i^i$ . Notons que les  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  ne dépendent pas de  $t$  ; ce sont seulement les  $\lambda_i^i$  qui en dépendent.

La recherche des développements tels que (I3) revient donc à la question de trouver toutes les transformations fonctionnelles linéaires de la forme (I4) telles qu'on puisse former leur puissances symboliques pour un indice d'itération quelconque fractionnaire ou irrationnel.

La question a été étudiée, dans le cas algébrique, par H. POINCARÉ <sup>(2)</sup>. POINCARÉ considère les substitutions à quatre variables

$$x_1 = \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3 + \delta_1 \xi_4, \quad x_2 = \alpha_2 \xi_1 + \dots, \quad x_3 = \alpha_3 \xi_1 + \dots, \quad x_i = \alpha_i \xi_1 + \dots$$

et il les divise en quatre catégories d'après les propriétés des racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 - \lambda, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_3, & \dots & \dots & \delta_i - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Une telle substitution T sera de la première catégorie, si les racines de l'équation caractéristique sont toutes distinctes et si de plus les puissances  $m^{\text{ièmes}}$  des racines sont également distinctes,  $m$  étant un nombre entier quelconque.

T sera de la deuxième catégorie, si les racines sont distinctes, mais si leurs puissances  $m^{\text{ièmes}}$  ne le sont pas,  $m$  étant un nombre entier quelconque.

T sera de la troisième catégorie, si les racines ne sont pas toutes distinctes, mais si T peut être regardée comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

Enfin T sera de la quatrième catégorie, si les racines ne sont pas toutes distinctes et si, de plus, T ne peut pas être regardée comme une puissance entière d'une transformation de la deuxième catégorie.

POINCARÉ trouve qu'on peut définir les puissances fractionnaires, irrationnelles ou imaginaires d'une transformation T de l'une des trois premières catégories.

(1) Voir, pour l'étude de l'équation de FREDHOLM, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III.

(2) H. POINCARÉ : *Journal de l'Ecole polytechnique*. 50<sup>e</sup> cah., t. XXXI, 1881, p. 206.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Dans notre problème algébrique (chaînes de MARKOFF discontinues, voir chap. I.) à  $r$  variables il peut arriver, d'après ROMANOVSKY, si certaines quantités  $p_{ik}$  sont nulles, que la limite de  $P_{ik}^{(n)}$  pour  $n$  infini n'existe pas ou, si elle existe, qu'elle dépende des deux indices  $i$  et  $k$ . Des cas analogues peuvent se présenter pour les variables continues. Leur étude semble être liée à celle des racines de l'équation  $D(\lambda) = 0$ , où  $D(\lambda)$  est le dénominateur de Fredholm relatif aux équations en  $\varphi$  et en  $\psi$  écrites plus haut.

IV. — Calcul de la dispersion.

16. — *La dispersion dans le cas du mouvement continu.* — a) Supposons que le point mobile se meuve dans  $V$  d'une manière continue, la densité de probabilité du passage  $\Phi(A, B, t)$  étant toujours assujettie à être continue et à vérifier les conditions (1), (2) et (3). Soit  $\varepsilon$  un nombre positif quelconque,  $A$  la position initiale du point mobile et  $\alpha(M)$  une fonction donnée du point  $M$  dans  $V$ . Si  $A_n$  désigne la position du point mobile après  $n\varepsilon$  secondes, la fonction prendra respectivement les valeurs  $\alpha(A_1), \alpha(A_2), \dots$  après  $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots$  secondes. Si  $P^{(n)}(A, B) = \Phi(A, B, n\varepsilon)$  est la densité de probabilité pour le passage de  $A$  à  $B$  en  $n\varepsilon$  secondes, nous avons, d'après la formule (6)

$$v \cdot m \cdot \alpha(A_n) = \iiint_V P^{(n)}(A, B) \alpha(B) d\tau_B.$$

Cette valeur moyenne dépend de la position initiale  $A$  et de l'indice  $n$ . Faisons croître  $n$  indéfiniment.

Le théorème du n° 9 montre que  $P^{(n)}(A, B)$  tend vers une limite  $P(B)$  indépendante de  $A$ . La valeur moyenne en question admet en même temps la limite  $\bar{\alpha}$ , définie par la formule

$$\bar{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} v \cdot m \cdot \alpha(A_n) = \iiint_V P(B) \alpha(B) d\tau_B,$$

avec

$$P(B) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(A, B, t).$$

Remarquons que  $\bar{\alpha}$  peut être obtenue également au moyen de la définition suivante

$$\bar{\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} v \cdot m \cdot \frac{\alpha(A_1) + \alpha(A_2) + \dots + \alpha(A_N)}{N}.$$

En effet, la valeur moyenne de  $\alpha(A_k)$  est égale à

$$\iiint_{\mathcal{V}} P^{(k)}(A, B) \alpha(B) d\tau_B;$$

l'intégrale converge uniformément vers  $\bar{\alpha}$ ; elle diffère de  $\bar{\alpha}$  d'une quantité  $\varepsilon$  aussi petite que l'on veut, si  $k$  est assez grand. Par conséquent, si nous remplaçons dans le numérateur de l'expression précédente les termes  $\alpha(A_k)$ , à partir d'un certain  $k = n$ , par  $\bar{\alpha}$ , nous obtenons une expression qui tend vers  $\bar{\alpha}$  lorsque  $N$  augmente indéfiniment. Donc  $\bar{\alpha}$  n'est autre chose que la valeur de la limite. La quantité  $\bar{\alpha}$  apparaît ainsi comme moyenne arithmétique entre les valeurs  $\alpha(A_k)$ .

Nous nous proposons maintenant de calculer la quantité

$$\Delta_N = v \cdot m \cdot [N\bar{\alpha} - \alpha(A_1) - \alpha(A_2) - \dots - \alpha(A_N)]^2.$$

C'est cette quantité qui nous renseigne sur la manière dont la moyenne arithmétique des valeurs  $\alpha(A_n)$  s'approche de  $\bar{\alpha}$ , si  $N$  augmente indéfiniment. Nous démontrerons que  $\Delta_N : N$  tend vers une limite constante qui nous donne la mesure de la *dispersion*, comme disent les statisticiens.

La dispersion a été calculée par MARKOFF dans le cas d'une chaîne discontinue. Pour obtenir le résultat dans le cas des variables continues, on peut employer deux méthodes différentes. Une première méthode consiste à partir de la formule donnée par MARKOFF dans le cas algébrique et à effectuer le passage à la limite. On obtient ainsi le résultat suivant (1).

$$\frac{C}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} v \cdot m \cdot \frac{\Delta_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \iiint_{\mathcal{V}} \dots \iiint_{\mathcal{V}} \left\{ \sum_{i=1}^k [\alpha(A_i) - k\bar{\alpha}] \right\}^2 \cdot \Phi_k \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \iiint_{\mathcal{V}} \dots \iiint_{\mathcal{V}} \Phi_k \cdot d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k}.$$

(1) B. HOSTINSKÝ, *Comptes Rendus*, t. CLXXXIX, p. 78, 1929.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Ici le symbole  $\Phi_k$  représente le déterminant du  $k^{\text{ième}}$  degré formé avec les éléments  $\Phi(A_i, A_j, \varpi)$  où  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ;  $d\tau_i$  désigne l'élément du volume au voisinage du point  $A_i$ . Le terme général de la somme dans le numérateur ou dans le dénominateur est une intégrale multiple d'ordre  $3k$ ; on intègre par rapport aux trois coordonnées des points  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

Une autre méthode, plus directe, dont le principe a été donné aussi par MARKOFF dans le cas algébrique, consiste à évaluer  $\Delta_n$  en élevant au carré le second membre de la formule. Nous allons employer cette méthode en admettant que  $\Phi$  puisse être exprimée par la formule (13).

Élevons au carré et cherchons les valeurs moyennes de différents termes; nous avons d'abord à calculer l'expression suivante

$$v \cdot m \cdot [\bar{x} - \alpha(A_n)]^2 = \iiint_{\mathcal{V}} P^{(n)}(A, B) [\bar{x} - \alpha(B)]^2 d\tau_B.$$

Pour calculer ensuite

$$v \cdot m \cdot [\bar{x} - \alpha(A_n)] \cdot [\bar{x} - \alpha(A_{n+m})],$$

remarquons

1° que la densité de probabilité pour le passage de A à B en  $n\varpi$  secondes est égale à  $P^{(n)}(A, B)$  et

2° que la densité de probabilité pour le passage de B à C en  $m\varpi$  secondes est égale à  $P^{(m)}(B, C)$ .

Donc notre valeur moyenne est égale à

$$\iiint_{\mathcal{V}} \iiint_{\mathcal{V}} P^{(n)}(A, B) P^{(m)}(B, C) \cdot [\bar{x} - \alpha(B)] [\bar{x} - \alpha(C)] d\tau_B d\tau_C.$$

Nous admettons que  $P^{(n)}(A, B) = \Phi(A, B, n\varpi)$  est exprimé par la formule (13) où il faut écrire  $n\varpi$  au lieu de  $t$  et où  $\varphi_0(B)$  n'est autre chose que  $P(B)$ .

Nous supposons en outre que la condition (2) soit vérifiée. Par suite (théorème de JENTZSCH; voir n° 10) les  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  sont en valeur absolue plus grands que 1. La formule (13) s'écrit donc

$$(13') \quad P^{(n)}(A, B) = P(B) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s(B) \psi_s(A)}{\lambda_s^{n\varpi}};$$



les  $\varphi_s$  et  $\psi_s$  satisfont aux conditions de biorthogonalité (I2) :

$$\begin{aligned} P(B) > 0, \quad \iiint_{\mathbf{v}} P(B) d\tau_{\mathbf{B}} = 1, \quad \iiint_{\mathbf{v}} P(B) \psi_k(B) d\tau_{\mathbf{B}} = 0, \\ \iiint_{\mathbf{v}} \varphi_i(B) d\tau_{\mathbf{B}} = 0, \quad \iiint_{\mathbf{v}} \varphi_i(B) \psi_k(B) d\tau_{\mathbf{B}} = 0, \quad \iiint_{\mathbf{v}} \varphi_k(B) \psi_k(B) d\tau_{\mathbf{B}} = 1, \\ (i \ k = 1, 2, 3, \dots, \quad i \neq k). \end{aligned}$$

La définition de  $\bar{\alpha}$  donne immédiatement

$$\iiint_{\mathbf{v}} P(B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)] d\tau_{\mathbf{B}} = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} v \cdot m \cdot \Delta_N = \\ = \sum_{n=1}^N \iiint_{\mathbf{v}} P^{(n)}(A, B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)]^2 d\tau_{\mathbf{A}}, \\ + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-n} \iiint_{\mathbf{v}} \iiint_{\mathbf{v}} P^{(n)}(A, B) P^{(m)}(B, C) [\bar{\alpha} - \alpha(B)] [\bar{\alpha} - \alpha(C)] d\tau_{\mathbf{B}} d\tau_{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Portons maintenant le second membre de (I3') à la place de  $P^{(n)}(A, B)$  ou de  $P^{(m)}(A, B)$  dans la formule précédente. Le premier terme devient égal à la somme de deux expressions suivantes (dans la seconde expression, nous avons sommé une série géométrique,  $n$  étant l'indice de sommation)

$$(I) \quad N \iiint_{\mathbf{v}} P(B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)]^2 d\tau_{\mathbf{B}},$$

$$(II) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \iiint_{\mathbf{v}} \frac{1 - \mu_s^{-N}}{\mu_s - 1} \varphi_s(B) \psi_s(A) [\bar{\alpha} - \alpha(B)]^2 d\tau_{\mathbf{B}},$$

où  $\mu_s = \lambda_s^{\frac{1}{N}}$ .

Le second terme se simplifie (car l'intégration du produit de  $P(B)$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

par  $[\bar{\alpha} - \alpha(B)]$  donne zéro) de sorte qu'il devient égal à la somme de deux expressions suivantes

$$(III) \left\{ \begin{aligned} & 2 \iiint_V \iiint_V \sum_{s=1}^{\infty} P(B) \varphi_s(C) \psi_s(B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)] [\bar{\alpha} - \alpha(C)] \\ & \left[ \frac{\mu_s^{-N+1} - 1}{(\mu_s - 1)^2} + \frac{N - 1}{\mu_s - 1} \right] d\tau_B d\tau_C, \end{aligned} \right.$$

$$(IV) \left\{ \begin{aligned} & 2 \iiint_V \iiint_V \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(B) \psi_j(A) \varphi_s(C) \psi_s(B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)] [\bar{\alpha} - \alpha(C)] \\ & \left[ \frac{\mu_j^{-N+1} - \mu_s^{-N+1}}{(1 - \mu_s)(\mu_s - \mu_j)} + \frac{1 - \mu_j^{-N+1}}{(1 - \mu_s)(1 - \mu_j)} \right] d\tau_B d\tau_C. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons les expressions (I), (II), (III) et (IV), divisons la somme par  $N$  et faisons croître  $N$  indéfiniment. Il vient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v \cdot m \cdot \frac{\Delta_N}{N} = \frac{C}{2},$$

$\frac{C}{2}$  étant la constante qui mesure la dispersion, déterminée par la formule

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \frac{C}{2} = \iiint_V P(B) [\bar{\alpha} - \alpha(B)]^2 d\tau_B \\ & + 2 \iiint_V \iiint_V \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varphi_s(B) \psi_s(A)}{\lambda_s^{\frac{2}{\varepsilon}} - 1} P(A) [\bar{\alpha} - \alpha(A)] [\bar{\alpha} - \alpha(B)] d\tau_A d\tau_B. \end{aligned} \right.$$

La valeur de  $C$  dépend de  $\varepsilon$ .

17. — *Cas particulier où la probabilité du passage ne dépend pas de la position initiale.* — Supposons que la densité de probabilité du passage  $\Phi(A, B, t)$  ne dépend pas de la position initiale  $A$  du point mobile. Notre équation fonctionnelle (I) prend dans ce cas la forme

$$\Phi(B, t + t') = \iiint_V \Phi(M, t) \Phi(B, t') d\tau_M$$

où nous avons posé  $\Phi(B, t)$  à la place de  $\Phi(A, B, t)$ .

La condition (3) qui s'écrit ici

$$\iiint_{\mathbf{v}} \Phi(\mathbf{M}, t) d\tau_{\mathbf{M}} = 1$$

montre que

$$\Phi(\mathbf{B}, t + t') = \Phi(\mathbf{B}, t'),$$

c'est-à-dire que  $\Phi$  ne dépend pas de  $t$ . La probabilité est donc entièrement déterminée si l'on se donne la position finale  $\mathbf{B}$ . Il ne suffit pas d'introduire la probabilité d'une position du point mobile sans se préoccuper de sa position antérieure et de la durée du passage, mais il y a beaucoup de cas dans la théorie cinétique de la matière où l'on se place précisément à ce point de vue. Dans la théorie élémentaire des probabilités, on se place au même point de vue. En effet, considérons par exemple les tirages successifs d'une urne contenant des boules blanches et noires. On suppose d'habitude qu'une agitation suffisante ait lieu après chaque tirage de sorte que la probabilité d'extraire une boule blanche a la même valeur pour chaque tirage et qu'elle ne dépend pas des résultats amenés par les tirages précédents. Mais si l'on n'agitait pas assez, la boule extraite et remise ensuite dans l'urne aurait une plus grande chance d'être extraite dans le tirage suivant que les autres (du moins si l'on préfère à extraire les boules déposées dans les couches supérieures); dans ce cas la probabilité d'extraire une boule blanche dépend du résultat du tirage précédent (ou des tirages précédents) et nous avons le cas d'une chaîne de MARKOFF ou d'un schéma plus général encore.

La théorie de la dispersion permet nettement de mettre en évidence la différence des deux cas. Supposons que la densité de probabilité du passage  $\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}, t)$  ne dépende que du point  $\mathbf{B}$  et considérons les positions du point mobile aux instants  $\varkappa, 2\varkappa, 3\varkappa, \dots$ ; les probabilités de ces positions sont indépendantes les unes des autres et la formule (15) donne

$$(15a) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} v \cdot m \cdot \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\bar{x} - \alpha(\mathbf{M}_n)) \right]^2}{N} = \iiint_{\mathbf{v}} \mathbf{P}(\mathbf{B}) [\bar{x} - \alpha(\mathbf{B})]^2 d\tau_{\mathbf{B}},$$

car l'équation intégrale (9), où  $\Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}, t) = \Phi(\mathbf{B})$  se réduit à

$$\varphi(\mathbf{B}) = \lambda \Phi(\mathbf{B}),$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

en tenant compte de la condition (3). Elle n'admet donc que la solution  $\Phi(B) = \varphi(B)$  ;  $\lambda$  doit être égal à 1 à cause de (3). Les racines  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  de  $D(\lambda) = 0$  doivent être regardées comme infiniment grandes et tous les termes de la formule (15) qui contiennent des intégrales sextuples disparaissent. Imaginons que nous observions les positions actuelles du point mobile  $M_1, M_2, \dots, M_N$  qu'il prend respectivement après  $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, N\varepsilon$  secondes. De là nous déduisons une valeur approchée de  $P(B)$  comme il suit : Divisons le domaine  $V$  en certain grand nombre de parties égales dont une  $v$  contient le point  $B$  à son intérieur ; si, parmi les points  $M_1, M_2, \dots, M_N$  il y en a  $n$  qui se trouvent dans  $v$ , le rapport  $n : N$  donne une valeur approchée de la probabilité  $P(B)$ , du moins pour  $N$  très grand. Cela posé nous pouvons évaluer approximativement le premier membre de (15 a) ; car si l'on fait un très grand nombre de séries à  $N$  observations on arrive à des valeurs différentes de la somme

$$\alpha(M_1) + \alpha(M_2) + \dots + \alpha(M_N)$$

et leur moyenne donne une valeur approchée de  $\bar{\alpha}$ . On en déduira une valeur approchée du premier membre de (15 a) et on pourra aussi calculer le second membre de (15 a).

Dans le cas général, où  $\Phi(A, B, \varepsilon)$  dépend de  $A$ , de  $B$ , et de  $\varepsilon$ , le premier membre de (15 a) ainsi calculé ne sera pas égal au second membre ; car il faut employer ici la formule générale où il y a encore un second terme (intégrales sextuples) au second membre.

Dans le cas des probabilités  $\Phi(B)$  qui ne dépendent que de  $B$  le premier terme du second membre de (15) donne lui seul une valeur approchée du premier membre, comme le montre (15 a). Mais cela n'a pas lieu dans le cas général. On voit ainsi la différence fondamentale entre les deux cas.

V. — **Etude de quelques cas particuliers.**  
**Ondes de probabilité. Equilibres statistiques.**

18. — *Interprétation physique de la solution particulière obtenue au n° 7.* — Nous avons vu que la formule

$$(5) \quad \Phi(A, B, t) = \frac{4}{\Delta\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{1}{t}\chi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}$$

donne une solution de notre équation fonctionnelle (I) ; les  $x_0, y_0, z_0$  sont ici les coordonnées du point A, les  $x, y, z$  celles du point B et  $\gamma$  une forme quadratique définie positive, enfin

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u \, du \, dv}{[\gamma(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)]^2}.$$

Le domaine V est formé par l'espace indéfini dans tous les sens. Or imaginons que tout l'espace soit rempli par de l'eau en repos et qu'un point mobile (petite particule) s'y meuve. L'eau n'est jamais en repos au sens strict ; il y a toujours des petits mouvements Browniens des molécules qui font déplacer le point mobile. Nous entendons par les mots « liquide en repos » le cas où il n'y a pas de courants visibles dans le liquide. La fonction (5) dépend de  $t$  et des différences des coordonnées de A et B seulement. Donc

$$\Phi(A, B, t) = \Phi(A', B', t),$$

si A'B' est un vecteur équipollent à AB. Nous pouvons nous borner au cas où A coïncide avec l'origine des coordonnées ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ).

La limite, pour  $t = 0$ , de la valeur moyenne de  $r^2 : t$  relative au cône T (voir n° 7 b) dépend en général de la direction de son axe et elle est proportionnelle à son ouverture infiniment petite  $d\varepsilon$ . Considérons les deux cas particuliers suivants :

1° La forme quadratique se réduit à la distance des points A et B. C'est le cas, que nous avons déjà traité au n° 7 c. Nous avons ici ( $\bar{r} = AB$ )

$$\gamma = \frac{r^2}{4a^2}, \quad \Phi(A, B, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}$$

et la valeur moyenne de  $r^2$  ne dépend pas de la direction de l'axe du cône T. Calculons  $v \cdot m \cdot r^2$  pour une position quelconque de B et pour un  $t$  positif quelconque. Il vient

$$\begin{aligned} v \cdot m \cdot r^2 &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} dx dy dz \\ &= \frac{4\pi}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} dr = \frac{16\pi a^2 t}{\sqrt{\pi^3}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^4 du = 6a^2 t. \end{aligned}$$

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

2° La forme quadratique est égale à

$$\chi = \frac{1}{4a^2}(x^2 + y^2 + \varepsilon z^2).$$

$\varepsilon$  étant une quantité positive très petite. Nous avons ici ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ )

$$\Phi(A, B, t) = c \cdot e^{-\frac{1}{4a^2t}(x^2 + y^2 + \varepsilon z^2)}.$$

C étant une constante. Or, si  $z$  et  $t$  ont des valeurs données, la fonction  $\Phi$  ne prend que des valeurs très petites pourvu que la somme  $x^2 + y^2$  soit assez grande ; mais pour  $x = y = 0$  ou pour des valeurs de  $x$  et de  $y$  suffisamment petites, elle a une valeur autant plus grande que  $\varepsilon$  est petit.

La différence entre les deux cas que nous venons de considérer consiste en ce que dans le premier cas la diffusion ne dépend pas de la direction, tandis que dans le second le point mobile a plus de chance de se mouvoir dans la direction  $Oz$  que dans une autre. Ce dernier cas nous montre ce qui se passe, s'il y a des courants permanents dans le liquide. Dans la direction du courant, la densité de probabilité pour le passage de A à B pour des valeurs assez petites de la distance AB, est très grande ; pour les autres directions, elle est plus petite. Quoique le cas 2° ne donne pas la solution complète pour un courant uniforme parallèle à  $Oz$  et superposé au mouvement Brownien, cet exemple suffit pour comprendre les idées de BOUSSINESQ sur les applications des méthodes statistiques à l'Hydrodynamique. Dans un travail déjà ancien <sup>(1)</sup> Joseph BOUSSINESQ a proposé d'admettre qu'en général en tout élément d'un liquide, les molécules se meuvent dans toutes les directions et qu'une composante de la vitesse du courant n'est qu'une valeur moyenne des composantes de vitesses possédées par les molécules ; il y aurait donc des mouvements dans toutes les directions, mais celui dans la direction du courant est le plus important.

**19.** — *Mouvement Brownien superposé à des courants permanents.* — Supposons qu'il y ait des courants permanents établis à l'intérieur d'un vase rempli d'eau. Si les mouvements de l'eau étaient régis exactement par les équations classiques de l'Hydrodynamique, on n'aurait qu'à intégrer ces équations en tenant compte des conditions aux limites, c'est-à-dire aux parois du vase. Mais supposons qu'il y ait

(1) J. BOUSSINESQ, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Paris, 1877, Première partie.

des mouvements Browniens, qu'il y ait diffusion. Les trajectoires idéales de l'Hydrodynamique sont alors troublées par les petits mouvements Browniens et les équations classiques de l'Hydrodynamique ne suffisent pas pour déterminer les mouvements de l'eau. Il faut avoir une théorie de la diffusion. Plusieurs méthodes se présentent. D'après ce que nous avons exposé au Chap. III on pourra obtenir, sous certaines hypothèses, des fonctions  $\Phi$  qui donnent la solution de l'équation fonctionnelle (1) ; ces solutions sont exprimées par des séries infinies de fonctions biorthogonales. Ici une question importante se pose ; étant donné un système biorthogonal de fonctions qui satisfont aux conditions (12) et une fonction  $\Phi$  exprimée par la série (13) (ou bien : étant donnée une fonction  $\Phi$  qui satisfait à (1)), cette solution, correspond-elle à un cas réel de la diffusion ? Observons d'abord qu'une telle fonction ne peut correspondre qu'à des cas où les courants dans le fluide sont permanents. En effet, dans le cas d'un courant non permanent la vitesse en un point déterminé change avec le temps et la probabilité de passage de A à B en secondes est une fonction de l'époque où le point se trouve en A (et non seulement de la durée du passage (1)). Il faut encore étudier les conditions aux limites. Dans le cas particulier traité par F. PERRIN (n° 11-13) il n'y a pas de problème sur les limites du domaine, car la surface d'une sphère n'a pas de frontière. Mais dans le cas d'un domaine V à trois dimensions (intérieur d'un vase) il faut tenir compte de ce qui arrive aux parois. Des circonstances très différentes s'y peuvent présenter. Par exemple un petit grain arrivé à la paroi peut y subir une réflexion ; c'est ce qui a été observé par les physiciens dans le cas des grains de certaines émulsions. L'influence des parois sur les probabilités de passage est évidente. Supposons pour plus de simplicité qu'il n'y ait pas de courants, que le liquide soit parfaitement homogène et qu'il n'y ait pas de forces extérieures. Pour les petits mouvements au voisinage d'un point suffisamment éloigné des parois, tout se passe comme si le fluide était indéfini et la relation  $v \cdot m \cdot r^2 = 6a^2t$  (voir n° 18, ex. 1°) s'applique. Mais pour deux points A et B très voisins d'une paroi il faut tenir compte de son influence sur le mouvement. Si le point mobile subit des réflexions régulières à la paroi, nous avons à distinguer les densités de probabilité pour les passages suivants : 1° de A à B sans toucher la paroi ; 2° de A

(1) Voir, pour ce problème, n° 29a, équation (21).

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

à  $B$  avec une réflexion ; 3<sup>o</sup> de  $A$  à  $B$  avec deux réflexions et ainsi de suite. La probabilité totale relative au passage de  $A$  à  $B$  serait égale à la somme des probabilités précédentes. Il peut arriver aussi que les parois ne réfléchissent pas, mais que le particule se colle à la paroi ; après l'avoir touché une fois en un point, elle y reste pour toujours. Ou bien il peut y avoir une certaine probabilité pour que la particule arrivée à la paroi, y soit arrêtée. On peut obtenir des formules pour la probabilité dans ces différents cas en employant soit l'équation fonctionnelle (1), soit des équations aux dérivées partielles avec certaines conditions aux limites. Nous rappellerons au n<sup>o</sup> 22 quelques résultats obtenus par SMOLUCHOWSKI dans ce genre de recherches ; nous allons auparavant dire quelques mots sur un problème relatif aux variables discontinues.

**20.** — *Tirage de deux urnes avec l'échange des boules. Mouvement Brownien discontinu sur un segment.* — a) LAPLACE s'est occupé dans sa *Théorie analytique des Probabilités* du problème suivant <sup>(1)</sup> qui a été déjà considéré par BERNOULLI :  $e$  boules blanches et  $f$  noires sont distribuées dans deux urnes de sorte que chaque urne contient la moitié  $\frac{1}{2}(e + f)$  du nombre total de boules. Soit  $i$  le nombre de boules blanches dans la première urne. Il y aura  $\frac{1}{2}(e + f) - i$  boules noires dans la première,  $e - i$  blanches dans la deuxième et  $\frac{f - e}{2} + i$  noires dans la deuxième (nous supposons que  $e < f$ ). La composition des deux urnes est donc déterminée par le nombre  $i$ . Un tirage consiste à extraire une boule de la première urne et une boule de la seconde en même temps et à déposer ensuite la boule tirée de la première urne dans la seconde et celle qui a été extraite de la seconde dans la première. Supposons que les probabilités d'extraire une boule d'une couleur donnée soient exprimées par les formules classiques. On peut alors calculer la probabilité  $z(x, r)$  pour qu'en partant d'une composition donnée d'urnes,  $x$  boules blanches se trouvent dans la première urne après  $r$  tirages successifs. Comptez toutes les manières dont le nombre de boules blanches contenues dans la première urne peut changer par un seul tirage ; vous trouvez ainsi une équation aux différences finies partielles

(1) LAPLACE, *Théorie analytique des Probabilités* (*Œuvres de Laplace*, VII, p. 314).



pour la fonction  $z(x, r)$ . Cette équation a été formée par LAPLACE, mais il ne l'a pas résolu directement ; il a eu recours à une méthode approchée qui consiste à remplacer l'équation aux différences finies par une équation aux dérivées partielles (voir n° 21) et il en a déduit le théorème suivant (en admettant que le nombre total de boules soit très grand) : après un nombre infini de tirages successifs, la valeur moyenne du nombre de boules blanches dans la première urne sera égale à  $\frac{1}{2}e$ . C'est à MARKOFF, autant que je sache, que nous devons une première solution rigoureuse de ce problème. Voici comment on peut procéder pour arriver au théorème de LAPLACE.

Figurons par un point de coordonnées  $x, y$  le passage de la composition définie par le nombre  $x$  de boules blanches dans la première urne à la composition définie par le nombre  $y$ . Les nombres  $x$  et  $y$  sont toujours compris entre les limites (si  $f > e$ ) zéro et  $\frac{1}{2}(f + e)$ .

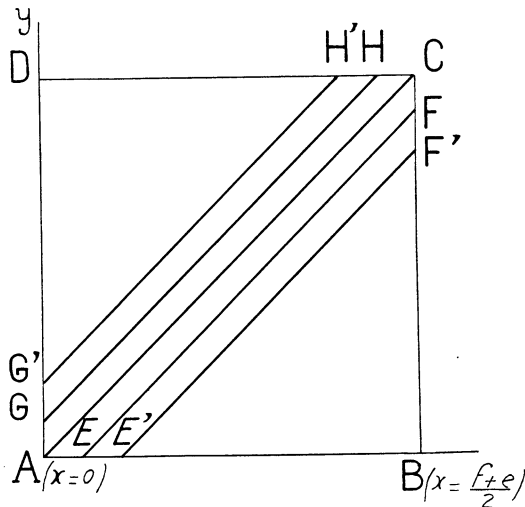


Fig. 2.

Soit  $[p(x, y)]$  la probabilité de passage de la première composition ( $x$ ) à la seconde ( $y$ ) par un seul tirage. Tant que  $|x - y| \leq 1$  la probabilité  $p(x, y)$  sera positive ; mais si cette condition n'est pas remplie,  $p(x, y)$  sera égale à zéro (car, par un seul tirage, le nombre de boules blanches dans la première urne ne peut changer que d'une unité au plus). On

voit sur la figure que les points  $(x, y)$  qui correspondent aux probabilités positives sont situés sur la diagonale AC d'un carré et sur deux segments parallèles EF et GH à cette diagonale de part et de l'autre ; tout autre point  $(x, y)$  aux coordonnées entières situé dans le carré ABCD correspond à un passage dont la probabilité est égale à zéro. Construisons maintenant la figure pour les passages d'une composition  $x$  à une autre  $y$  par deux tirages successifs. On voit que cette fois les points qui représentent les passages à probabilité positive sont situés sur cinq lignes parallèles, à savoir sur la diagonale AC et sur quatre segments parallèles EF, GH, E'F' et H'H' disposées symétriquement par rapport à AC ; et les autres points correspondent aux passages de probabilité égale à zéro. Prenons un nombre  $r$  de tirages assez grand ; en faisant la figure, on voit que tout point à coordonnées entières situé dans le carré représente un passage possible de l'état  $x$  à l'état  $y$  avec une probabilité positive. De là on déduit aisément que le théorème de MARKOFF s'applique : il y a une probabilité bien déterminée, indépendante de la composition initiale de l'urne, pour qu'après un nombre infini de tirages successifs une composition donnée se présente. Enfin on peut montrer que la valeur moyenne du nombre de boules blanches sera égale à  $\frac{1}{2}e$  après un nombre infini de tirages successifs.

b) On peut déduire des calculs que nous venons d'indiquer un exemple du mouvement Brownien sur un segment (voir n° 2). Considérons sur l'axe  $Ox$  le point dont l'abscisse  $x$  est égale au nombre de boules blanches dans la première urne. Chaque tirage donne lieu à un déplacement du point. Il se meut par conséquent sur le segment dont les extrémités ont les abscisses

$$0, \quad \frac{f + e}{2}.$$

Après un nombre infini de déplacements successifs tout point  $B$  de ce segment pourra être atteint par notre point mobile et cela avec une probabilité qui ne dépend que de  $B$ .

21. — *Une équation aux dérivées partielles.* — LAPLACE en cherchant à résoudre le problème des deux urnes avec échange des boules a appliqué la méthode suivante. Il suppose qu'il y ait autant de boules blanches que noires ( $e = f = n$ ) et que le nombre total  $2n$  de boules soit très grand. Il regarde le nombre actuel  $x$  de boules blanches dans

la première urne comme une variable continue et il développe  $z(x, r)$  (= probabilité pour qu'il y ait précisément  $x$  boules blanches dans la première urne après  $r$  tirages) en série de TAYLOR en prenant  $x = 1$  pour l'accroissement de  $x$  :

$$z(x + 1, r) = z(x, r) + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dots$$

Il introduit ensuite de nouvelles variables  $\mu$  et  $r'$  de sorte que

$$x = \frac{n + \mu \sqrt{n}}{2}, \quad r = nr'$$

et il trouve, en négligeant certaines quantités infiniment petites, que la fonction  $z(x, r) = U$  satisfait à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial r'} = 2U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}.$$

Et c'est sur cette équation qu'il a fondé son raisonnement pour démontrer le théorème dont nous avons parlé au n° 20a. La marche des calculs approchés de LAPLACE est difficile à suivre. Si la démonstration de MARKOFF (que nous avons résumée sous forme géométrique au n° 20 a) est préférable au point de vue de la généralité et de la rigueur, la méthode de LAPLACE mérite notre attention à un autre point de vue. En effet, l'équation aux dérivées partielles obtenue par LAPLACE a été retrouvée par SMOLUCHOWSKI dans ses recherches sur le mouvement Brownien. Bornons nous au cas où les mouvements sont parallèles à l'axe  $Ox$  de sorte qu'ils sont régis par l'équation (1') (voir n° 4 b)

$$(1') \quad \Phi(x_0, x, t + t') = \int \Phi(x_0, s, t) \Phi(s, x, t') ds.$$

La densité de la probabilité  $\Phi(x_0, x, t)$  pour le passage du point  $A(x_0)$  au point  $B(x)$  en  $t$  secondes peut être interprétée de la façon suivante : Supposons qu'il y ait un très grand nombre de points mobiles qui se meuvent au hasard et que, deux quelconques d'entre eux étant choisis, le mouvement d'un de ces points ne soit pas gêné par celui de l'autre. Si les points se trouvent d'abord concentrés au voisinage immédiat de  $A$ , ils seront distribués, après  $t$  secondes, d'une certaine manière et leur concentration en  $B$  (c'est-à-dire : nombre de points mobiles dans un centimètre cube), sera proportionnelle à la densité de probabilité  $\Phi(A, B, t)$ . Or, d'après la théorie de la diffusion,

l'accroissement de la concentration en une seconde est égal d'une part à  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , d'autre part (au signe près) à la dérivée par rapport à  $x$  du courant de diffusion qui, lui-même est égal à

$$- D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi \cdot f(x),$$

si  $f(x)$  est la force extérieure qui s'exerce sur une particule,  $D$  étant le coefficient de diffusion. Nous avons donc (1)

$$(16) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(\Phi f(x)).$$

Si  $f(x) = 0$  (force extérieure = 0), nous avons l'équation ordinaire de la diffusion, identique à l'équation de la chaleur. Nous avons déjà vu qu'il y a des fonctions  $\Phi(x_0, x, t)$  qui, par rapport aux variables  $x$  et  $t$  satisfont à l'équation de la chaleur et en même temps à (1'). Il s'agit maintenant de trouver des solutions convenables de (16) en tenant compte des conditions aux limites. Nous allons traiter, dans le n° suivant, quelques problèmes particuliers sur le mouvement Brownien linéaire résolu par SMOLUCHOWSKI.

**22. — Quelques cas particuliers. Equilibres statistiques.** — Les problèmes dont nous nous occuperons maintenant se rapportent au mouvement sur l'axe  $Ox$  qui sont régis par l'équation (1') ; l'intégration au second membre est étendue suivant les cas, soit à un segment, soit à l'axe  $Ox$  illimité. Ces problèmes peuvent être traités aussi par l'emploi de l'équation (16).

Nous avons vu au n° 7c que dans le cas du mouvement Brownien dans l'espace illimité à trois dimensions la densité de probabilité  $\Phi(A, B, t)$  est donnée par la formule (5 a). Cette formule doit être remplacée, dans le cas du mouvement Brownien linéaire qui nous intéresse maintenant, par la formule

$$(5b) \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}}$$

qui satisfait à l'équation (1') ; elle convient au cas où la particule se meut sur l'axe  $Ox$  indéfini.

(1) SMOLUCHOWSKI, *Annalen der Physik*, (4), XLVIII, 1915, p. 1103.

Il faut partir de la formule (5 b) pour en déduire les solutions dans d'autres cas (1).

a) Considérons d'abord le cas où il y a une force élastique proportionnelle à la distance  $x$  qui attire le point mobile vers le point  $x = 0$ . On a dans ce cas  $f(x) = -\gamma x$ ,  $\gamma$  étant une constante positive. SMOLUCHOWSKI trouve, en partant de l'équation fonctionnelle, et en employant une méthode d'itérations (semblable à celle qui a été employée par F. PERRIN ; voir chap. III) que

$$(17) \quad \Phi(x_0, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1 - e^{-2\gamma t})}} \cdot e^{-\frac{\gamma(x-x_0 e^{-\gamma t})^2}{2D(1 - e^{-2\gamma t})}},$$

l'intervalle d'intégration s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On peut vérifier que cette expression satisfait, soit à (16) pour  $f(x) = -\gamma x$  à savoir à

$$(16a) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \gamma x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \gamma \Phi$$

soit à (1'). L'équation (16a) ne diffère pas de l'équation en  $U$  obtenue par LAPLACE dont nous avons parlé au n° 21. SMOLUCHOWSKI remarque que les déviations angulaires d'un petit miroir suspendu sur un fil (dues aux mouvements de torsion du fil) obéissent à la formule (17).

b) Supposons maintenant que l'axe  $Ox$  soit vertical et que les grains qui se meuvent dans le liquide se réfléchissent sur le fond du vase  $x=0$ . La condition suivante doit être satisfaite pour  $x = 0$  :

$$D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c\Phi = 0.$$

En effet le premier terme donne la vitesse d'une particule due au courant de diffusion (nombre de particules qui arrivent à  $x = c$  au cours d'une seconde par suite de la diffusion) et le second donne le nombre de particules qui y arrivent par seconde avec la vitesse  $c$  (mouvement uniforme engendré par la pesanteur et par la viscosité du liquide) ; les deux accroissements de la concentration doivent

(1) La fonction (5b) satisfait à l'équation de la chaleur obtenue en faisant  $f = 0$  dans (16). Elle constitue la « solution fondamentale » de cette équation.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

s'équilibrer mutuellement. Or, SMOLUCHOWSKI trouve la solution suivante :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \Phi(x_0, x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right] \cdot e^{-\frac{c(x-x_0)}{2D} - \frac{c^2 t}{4D}} \\ &+ \frac{c}{\sqrt{D\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x+x_0-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2} dz, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne pour  $t$  infini

$$(18a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, x, t) = \frac{c}{D} e^{-\frac{cx}{D}}.$$

Voilà la loi de répartition finale de grains. Cette formule (18a) s'applique aussi dans la théorie d'une expérience célèbre de Jean PERRIN sur la distribution des grains dans les émulsions sous l'action de la viscosité et de la pesanteur.

c) Considérons encore le cas où le mouvement Brownien est limité à un segment de l'axe  $Ox$  entre deux plans P et P' qui lui sont perpendiculaires. Les particules arrivées soit à un bout soit à l'autre s'y réfléchissent. Pour calculer  $\Phi(x_0, x, t)$  il faut, d'après SMOLUCHOWSKI, construire les images du point  $x_0$  par rapport aux plans P et P', ensuite des images par rapport à ces images et ainsi de suite. Si l'on substitue les abscisses de ces images à la place de  $x_0$  dans (5b) on obtient une suite infinie de termes dont la somme donne la solution cherchée. Un terme présente la probabilité de passage de  $x_0$  à  $x$  sans aucune réflexion ; un autre la probabilité pour le passage avec une seule réflexion en P et ainsi de suite. Ainsi on arrive, d'après SMOLUCHOWSKI, à la formule suivante

$$(19) \quad \Phi(x_0, x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{Dt}} \cdot e^{-\frac{(x \pm x_0 \pm 2nh)^2}{4Dt}}.$$

Ici  $x=0$  et  $x=h$  sont les abscisses des plans P et P', et  $\pm(2nh \pm x_0)$  sont les abscisses des images ;  $n$  est un entier et les signes  $\pm$  dans la parenthèse ne dépendent pas de ceux qui se trouvent devant elle,

de sorte que, dans la série qui donne  $\Phi$ , il y a quatre termes différents qui correspondent à un même  $n$ . Or on trouve que

$$\int_0^h \Phi(x_0, x, t) dx = 1, \quad \int_0^h \Phi(x_0, x, t) dx_0 = 1.$$

Donc les conditions (3) et (10) (avec cette différence toutefois que nous avons ici des intégrales simples au lieu des intégrales triples) sont vérifiées ; le théorème du n° 10 a montre que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x_0, x, t) = \frac{1}{h},$$

ce qui peut être démontré comme une conséquence de la formule (19). Après un temps infiniment long, les grains seront répartis uniformément sur le segment.

**23. — Ondes de probabilité.** — Dans tous les exemples qui précèdent les fonctions  $\Phi$  qui donnent la solution du problème, sont positives quelle que soit la valeur de  $t$ . Mais il semble qu'il y ait un intérêt de trouver des fonctions qui satisfont à (1) ou à (1') sans être positives pour toutes les valeurs de  $t$ . Nous avons vu au n° 10 b qu'une fonction qui est nulle pour une certaine position de B et pour une certaine valeur de  $t$ , peut devenir positive plus tard. De telles fonctions nous donneraient ce que nous pourrions appeler ondes de probabilité. D'après ce que nous avons expliqué plus haut (voir n° 19) de telles ondes pourraient se réfléchir aux parois. Il serait intéressant de démontrer précisément l'existence de ces ondes, c'est-à-dire la possibilité d'une discontinuité pour la probabilité  $\Phi(A, B, t)$  du passage (1). La surface qui sépare la région où  $\Phi > 0$  de celle où  $\Phi = 0$  devrait se déplacer d'une manière analogue à celle du front d'une onde sonore.

**24. — Remarque sur la fonction  $\Phi$  qui donne la densité de la probabilité du passage.** — D'après la théorie générale (chap. II), la limite de  $\Phi(A, B, t)$  pour  $t$  infini dépend en général du point B. Mais si la fonction  $\Phi$  satisfait à la condition (10), la limite est constante. Par exemple, dans le problème traité au n° 22 b) la condition (10) n'est pas vérifiée ; donc la limite dépend de B (répartition finale des grains

(1) La fonction  $\Phi$  peut aussi être interprétée comme température ; nous aurions dans ce cas une onde calorifique.

telle que la densité varie avec la hauteur). Dans le problème 22 *c*, la condition (10) est vérifiée, donc la distribution finale de la probabilité sera uniforme. Or dans quelques problèmes de la théorie cinétique de la matière, ce dernier cas est surtout intéressant et la question se pose d'étudier en particulier les fonctions  $\Phi$  qui satisfont à la condition (10).

Remarquons qu'on obtient des fonctions  $\Phi$  qui satisfont à (10) dans le cas suivant. Supposons que l'opération qui consiste à déplacer le point mobile de la position A à B soit en même temps une transformation géométrique c'est-à-dire qu'on définit en même temps un déplacement pour tout point dans le domaine V. Ce ne sera donc pas le passage d'une certaine position à une autre qui sera pris au hasard, mais ce sera une transformation géométrique que l'on choisit et la transformation étant choisie, à toute position A correspondra une position B. On trouve qu'après avoir opéré un nombre infini de transformations successives prises au hasard toutes les positions finales auront la même probabilité, quelle que soit la position initiale du point mobile. Nous allons donner deux exemples de ce genre.

**25.** — *Rotations d'une circonférence et celles d'une sphère à centre fixe.* —

a) Un point se meut sur une circonférence dont le rayon est égal à l'unité. Sa position sur la circonférence sera définie par l'angle  $x$  du rayon avec une direction fixe. La densité  $p(x, y)$  de probabilité pour le passage d'une position  $x$  à l'autre  $y$  est périodique par rapport à  $x$  ainsi que par rapport à  $y$  toujours avec la période  $2\pi$ . Supposons que

$$\int_0^{2\pi} p(x, y) dy = 1, \quad p(x, y) > 0$$

et reprenons les notations du n° 9. L'expression  $P^{(n)}(x, y)$  a pour  $n$  infini une limite  $P(y)$ . Mais si  $p(x, y)$  satisfait encore à la condition supplémentaire (10) qui s'écrit ici

$$\int_0^{2\pi} p(x, y) dx = 1,$$

nous avons

$$P(y) = \frac{1}{2\pi}.$$

La dernière condition peut être interprétée de la façon suivante : Si la transformation (cela veut dire : le passage du point d'une position



$x$  à l'autre  $y$ ) s'effectue de telle manière que la circonférence entière tourne d'un angle  $u$  ( $0 \leq u < 2\pi$ ) autour de son axe,  $u$  étant pris au hasard, la probabilité  $f(u)du$  pour que l'angle de rotation soit compris entre les limites  $u$  et  $u + du$  satisfait à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(u)du = 1.$$

Mais  $u = y - x$ , donc, si  $x$  est constant,

$$f(u)du = f(y - x)dy = p(x, y)dy$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} p(x, y)dy = \int_{-x}^{2\pi-x} f(u)du = \int_0^{2\pi} f(u)du = 1.$$

Si  $y$  est constant,

$$f(u)du = -f(y - x)dx = -p(x, y)dx,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} p(x, y)dx = -\int_y^{y-2\pi} f(u)du = \int_0^{2\pi} f(u)du = 1.$$

La condition supplémentaire est vérifiée,  $P^{(n)}$  a donc une limite constante. Après un nombre infini de rotations successives dont les angles de rotation ont été pris au hasard, tout point lié à la circonférence pourra prendre n'importe quelle position avec une densité de probabilité constante.

b) Considérons une sphère fixe  $\Sigma$  à centre  $O$  dont le rayon est égal à l'unité. Une sphère mobile  $\Sigma'$  concentrique à  $\Sigma$  et de même rayon tourne autour de  $O$ . Une rotation  $U(n_1, n_2, n_3)$ , de  $\Sigma'$  sera définie par les coordonnées sphériques  $u_1, u_2$  du point  $C$  où son axe de rotation perce  $\Sigma$  et par l'angle de rotation  $Qu_3$ . Chaque rotation sera ainsi représentée par un point dans un espace  $\Sigma$  à trois dimensions, et l'élément de volume de cet espace au voisinage de  $U$  sera représenté par

$$d\tau_U = \sin u_1 \sin^2 u_3 du_1 du_2 du_3;$$

cette formule a été appliquée par F. PERRIN dans sa thèse. Pour

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

obtenir toutes les rotations possibles il faut faire varier les  $u_1$  entre les limites suivantes

$$(E) \quad 0 \leq u_1 \leq \pi, \quad 0 \leq u_2 < 2\pi, \quad 0 \leq u_3 < \frac{\pi}{2}.$$

Soit

$$F(u_1, u_2, u_3) \sin u_1 \sin^2 u_3 du_1 du_2 du_3 = F(U) d\tau_U,$$

la probabilité pour que le point représentatif d'une rotation choisi au hasard se trouve à l'intérieur de  $d\tau_U$ . La fonction  $F(U)$  doit être positive et satisfaire à la condition

$$(3') \quad \iiint F(U) d\tau_U = 1,$$

l'intégration étant étendue à l'ensemble défini par les conditions (E). Supposons maintenant que  $U(u_1, u_2, u_3)$  soit la résultante de deux rotations  $V(v_1, v_2, v_3)$  et  $W(w_1, w_2, w_3)$  opérées successivement

$$U = [V \cdot W].$$

Le produit symbolique au second membre désigne la transformation obtenue en opérant d'abord  $V$  et ensuite  $W$ .

Nous allons considérer successivement deux transformations de la condition (3') (1). En premier lieu fixons les coordonnées  $w_i$  de  $W$  et introduisons les coordonnées  $v_i$  de  $V$  comme variables d'intégration. On trouve

$$\iiint F(V \cdot W) d\tau_V = 1 \quad \text{pour } W \text{ quelconque.}$$

En second lieu, soient  $v_i$  des nombres constants et introduisons les  $w_i$  comme variables d'intégration. (3') devient

$$\iiint F(V \cdot W) d\tau_W = 1 \quad \text{pour } V \text{ quelconque.}$$

Dans les deux dernières formules les intégrations par rapport à  $V$  ou par rapport à  $W$  sont étendues à tout l'espace (E).

(1) J'ometts ici les calculs que j'ai développés dans mon travail sur les « Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe » (*Journal de Liouville*, (9), VIII, 1929, p. 35).

Soit  $U$  la rotation qui amène  $\Sigma'$  d'une position  $a$  à une autre  $b$ , et  $V$  la rotation qui l'amène de  $a$  à  $b'$ . La densité de probabilité pour le passage de  $b$  à  $b'$ , par une seule rotation, sera exprimée par la formule

$$\Phi(b, b') = F(U^{-1}V),$$

car  $U^{-1}V$  est la seule rotation qui amène la sphère de  $b$  à  $b'$ . La densité de probabilité pour le passage de  $b$  à  $b'$  par  $n$  rotations successives sera égale à

$$\Phi^{(n)}(b, b') = F^{(n)}(U^{-1}V),$$

où

$$F^{(n)}(U^{-1}V) = \iiint F^{(n-1)}(U^{-1}T)F(T^{-1}V)d\tau_T, \quad F^{(1)} = F.$$

Or les deux formules que nous avons déduites plus haut de (3') donnent

$$\begin{aligned} \iiint F(U^{-1}V)d\tau_V &= 1 \quad \text{pour } V \text{ quelconque,} \\ \iiint F(U^{-1}V)d\tau_V &= 1 \quad \text{pour } U \text{ quelconque.} \end{aligned}$$

L'expression  $F(U^{-1}V)$  considérée comme fonction de deux points  $U$  et  $V$  pris dans  $(E)$  (ou bien fonction de deux positions  $b$  et  $b'$  de  $\Sigma'$ ) satisfait aux conditions (3) et (10) ; par conséquent, la densité de probabilité pour le passage de  $\Sigma'$  d'une position quelconque à une autre quelconque par un nombre infini de rotations successives prises au hasard a une valeur constante.

#### VI. — Considérations générales sur les applications du Calcul des probabilités à la Théorie de la diffusion et problèmes analogues.

26. — *Molécules d'un liquide et points mobiles.* — Supposons que des courants permanents soient établis à l'intérieur d'un vase clos rempli d'eau. Les équations du mouvement, en supposant que le fluide soit

un continu, s'écrivent sous la forme (POINCARÉ : *Calcul des probabilités* 2<sup>e</sup> édition, p. 320)

$$(20) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = h(x, y, z),$$

où  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions données du point mobile  $M(x, y, z)$ . Pour calculer la trajectoire de  $M$  il suffit de connaître sa position initiale. Tout calcul avec les équations (20) repose sur l'hypothèse fondamentale suivante : Etant donnés deux états du fluide correspondant à deux valeurs de  $t$  quelconques, il y a une correspondance biunivoque entre les positions d'un point matériel quelconque du liquide. Nos équations définissent donc le mouvement pour tout point matériel du liquide. Nous supposons que le liquide soit incompressible ce qui se traduit par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

Le mouvement d'un point n'est pas indépendant de celui des autres, car une partie du fluide ne peut pas pénétrer dans une autre. Les équations du mouvement peuvent être regardées comme le résultat d'une élimination ; les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  résument toutes les influences exercées par le liquide sur notre point matériel  $M$ . Si nous voulons suivre, dans une expérience réelle, les trajectoires d'un point mobile, nous rencontrons des difficultés assez graves. En effet, il n'y a pas de points mobiles. On ne peut que suivre le mouvement d'une très petite portion  $v$  du fluide. Cette portion conserve son volume pendant le mouvement, car le fluide est incompressible par l'hypothèse. Mais cela ne veut pas dire que toutes les dimensions de  $v$  restent très petites pendant le mouvement ; au contraire, si le mouvement se prolonge beaucoup, la portion  $v$  qui était d'abord très petite prend des formes bizarres, elle devient une espèce d'éponge qui s'étale en couches très minces sur tout le vase (1). Où est donc notre point matériel ? Soient  $v$  et  $v'$  deux états de notre petite position à deux époques quelconques. Ces deux volumes se correspondent point par point ; mais la déformation continue de la position ne permet pas, quelque petit soit le do-

(1) Voir le fascicule sur la Mécanique statistique classique, par F. PERRIN, dans le *Traité du Calcul des probabilités et ses applications*, publié par M. BOREL.

maine  $v$ , de construire une trajectoire indéfiniment prolongée, ni la figure approchée de la trajectoire de notre portion du fluide.

Plaçons-nous maintenant au point de vue de la structure discontinue de la matière. Le fluide est composé des molécules et les mouvements sont régis par un système d'équations différentielles ordinaires ; l'intégration de ce système doit fournir les coordonnées de chaque molécule en fonction du temps. Est-il possible dans ce cas, une molécule de coordonnées  $x, y, z$  étant choisie, d'éliminer les coordonnées des autres molécules et d'obtenir des équations de la forme (20) ? Il est évident que la chose est impossible en général. Il n'y a pas de courants permanents absolus. En un point A à l'intérieur du vase, la plus grande partie des molécules qui s'y trouvent à un instant donné ont une vitesse à peu près constante qui définit la direction et la vitesse du courant permanent. Mais il y a d'autres molécules, quoique peu nombreuses, très voisines de A à cet instant, dont les vitesses diffèrent notablement de la vitesse du courant <sup>(1)</sup>.

Dans les dernières pages de son *Calcul des probabilités*, POINCARÉ raisonne d'une part sur les équations (20) et d'autre part, il regarde la diffusion comme une permutation des molécules. Il faut s'inspirer des deux points de vue, mais il ne faut pas les confondre. Déjà dans des travaux plus anciens (*Mémoire sur le problème des trois corps*, *Acta Mathematica* XIII ; *Leçons de Mécanique céleste*) POINCARÉ a proposé d'employer le calcul des probabilités dans les questions de la dynamique pour échapper aux certaines difficultés. Par exemple, si deux planètes ont leurs périodes de révolution autour du soleil dans le rapport 2 : 3, leurs trajectoires ne seraient pas stables, de grandes perturbations se produiraient à cause des effets mutuels d'attraction. Mais il n'y a pas de sens de considérer le rapport des deux périodes comme étant *précisément* égal à 2/3. C'est pour cela que POINCARÉ propose d'introduire les probabilités pour que certaines quantités soient comprises entre les limites données. Cette idée a été développée par E. BOREL sous une forme différente. Nous allons en dire quelques mots.

27. — *Le problème fondamentale de la théorie cinétique des gaz d'après E. BOREL.* — Étant donné un gaz dans un vase fermé et impénétrable pour la chaleur, quelle que soit la distribution initiale de la

(1) Voir ce que nous avons dit sur les idées de BOUSSINESQ (n° 18).

température du gaz, après un temps suffisamment long, la température devient uniforme. Pour comprendre cette tendance vers l'état de température uniforme, MAXWELL et BOLTZMANN ont calculé les effets des chocs moléculaires sur la distribution des vitesses. Supposons que les molécules du gaz soient des sphères parfaitement élastiques et que les parois du vase soient elles-mêmes parfaitement élastiques. Les lois du choc des corps élastiques nous renseignent sur ce qui se passe lorsqu'une molécule rencontre une autre molécule ou lorsqu'elle se heurte contre une paroi. Les positions et les vitesses initiales des molécules étant données, on pourra calculer leurs trajectoires. MAXWELL et BOLTZMANN ont appliqué le calcul des probabilités, ils ont fait certaines statistiques sur les trajectoires. Mais comment peut-on introduire le Calcul des probabilités, si les données initiales sont connues et si des lois précises déterminent l'évolution du système ? Les fondateurs de la théorie cinétique n'ont pas répondu à cette question et dans les *Traité* de BOLTZMANN il y a des points qui sont peu satisfaisants au point de vue mathématique. Par exemple, BOLTZMANN a admis certaines hypothèses sur l'allure des trajectoires décrites par les molécules pour pouvoir expliquer la tendance vers l'état de l'équilibre thermique. Mais tout cela ne donne pas une solution convenable du problème.

Dans un travail de 1903 (Sur la théorie cinétique des gaz : *Annales de l'École Normale Supérieure*, réimprimé dans l'ouvrage : *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, 1914 ; voir aussi CASTELNUOVO : *Calcolo delle probabilità*), E. BOREL s'est placé au point de vue suivant pour traiter les questions sur la théorie cinétique des gaz dont nous avons parlé plus haut. Les lois du choc entre les molécules ou entre une molécule et entre la paroi ne sont jamais rigoureusement valables ; il y a de très petites différences entre le choc réel et entre le choc calculé d'après les règles classiques. Ces différences seraient négligeables pour un seul choc ou pour deux ; mais étant donné que le nombre de chocs pendant une seconde est très grand, les petits effets (écarts de la loi classique) s'accumulent, de sorte que le résultat n'est pas du tout négligeable après un très grand nombre de chocs, c'est-à-dire après un certain temps. Une paroi n'est pas une surface géométrique ; elle se compose de molécules qui se meuvent, les molécules du gaz elles-mêmes ne sont pas invariables, elles se composent d'atomes et d'électrons en mouvement. Le gaz n'est jamais soustrait aux influ-

ences extérieures. Si vous déplacez un poids de 1 kilogramme, même à un endroit très éloigné du vase qui contient le gaz, le champ de gravitation engendré par le poids varie et cela fait varier les trajectoires des molécules du gaz. Ainsi il y a beaucoup de petites causes qui, après un temps suffisamment long, changent complètement une trajectoire calculée d'après la théorie à partir de certaines données initiales. Et ce sont ces petites causes dont les effets s'accroissent pour produire suivant BOREL le mélange des molécules, de sorte que l'énergie cinétique des molécules dans un  $\text{cm}^3$  devient constante partout, en d'autres mots que la température devient uniforme. BOREL a étudié dans des exemples simples (mouvement d'un seul point qui se réfléchit sur les côtés d'un carré ou d'un quadrilatère) l'influence des variations dans les données initiales exercée sur l'évolution du système. Mais un instant quelconque peut être regardé comme un instant initial et il faut tenir compte des petites perturbations qui peuvent se produire à chaque instant. Et c'est ici que le calcul des probabilités s'introduit. Il ne faut pas faire une statistique de trajectoires idéales calculées sur les données initiales, mais il faut s'occuper de la question suivante : étant donné que le système se trouve dans une certaine configuration, quelle est la probabilité pour qu'il passe en  $t$  secondes à une autre configuration donnée ? Il semble que cette manière de poser la question fait intervenir le calcul des probabilités d'une manière qui est plus convenable que celle qui a été adoptée dans la théorie classique des gaz et dans la mécanique statistique classique (voir E. BOREL : *Encyclopédie des sciences mathématiques, Mécanique statistique*). Si, après un temps très long, l'équilibre thermique s'établit, on comprend que le gaz ne peut pas revenir à l'état primitif où la température n'est pas uniforme. Suivant la théorie classique, il suffirait de changer le signe de toutes les vitesses des molécules pour provoquer l'évolution du gaz en sens inverse. Mais au point de vue de BOREL cela ne suffit pas ; pour obtenir l'évolution dans le sens inverse, il faudrait encore renverser tous ces petits effets (irrégularités pendant les chocs, forces de gravitation extérieures variables) qui ont agi sur les molécules, ce qui est évidemment impossible. A ce point de vue, le problème fondamental de la théorie des gaz est voisin du problème sur le mouvement Brownien, ainsi que d'autres problèmes dont nous allons donner une revue au paragraphe suivant.

28. — *Analyse des équilibres statistiques.* — a) Si la probabilité du passage de A à B, comme nous l'avons défini dans le chapitre II, satisfait à certaines conditions, la limite P(B) de  $\Phi(A, B, t)$  pour  $t$  infini existe et elle est indépendante de A. Par conséquent, si nous imaginons un très grand nombre de points mobiles qui partent en même temps de A, et si leurs mouvements Browniens sont indépendants les uns des autres, la fonction P(B) détermine leur répartition au bout d'un temps infini. P(B) est à peu près proportionnelle au nombre de points mobiles qui se trouvent dans un  $\text{cm}^3$  au voisinage du point B. Voilà l'équilibre statistique des émulsions (voir aussi le n° 22).

b) Considérons un corps solide conducteur calorifique dont la surface est impénétrable pour la chaleur. Si la température initiale en un point M du corps est égale à une fonction quelconque du point M, après un temps infini la température devient uniforme partout. Pour le démontrer regardez les formules classiques de FOURIER ; vous trouvez que  $f(M)$  étant la distribution initiale de la température, celle-ci en A après  $t$  secondes, sera égale à  $F(A, t)$ , où

$$F(A, t) = \iiint_V \Phi(A, M, t) f(M) d\tau_M,$$

l'intégration étant étendue au corps donné V. La fonction  $\Phi(A, M, t)$  a les propriétés suivantes (à condition d'adopter un choix convenable d'unités de longueur, de masse, etc.) :

$$\Phi(A, B, t) \geq 0, \quad \iiint_V \Phi(A, B, t) d\tau_B = 1, \quad \iiint_V \Phi(A, B, t) d\tau_A = 1.$$

Or, la température après  $t + t'$  secondes sera donnée soit par

$$F(A, t + t') = \iiint_V \Phi(A, M, t') F(M, t) d\tau_M,$$

ou

$$F(A, t + t') = \iiint_V \iiint_V \Phi(A, N, t') \Phi(N, M, t) f(M) d\tau_N d\tau_M,$$



soit par

$$F(A, t + t') = \iiint_V \Phi(A, M, t + t') f(M) d\tau_M.$$

Donc (voir aussi le n<sup>o</sup> 15 a).

$$\Phi(A, M, t + t') = \iiint_V \Phi(A, N, t') \Phi(N, M, t) d\tau_N$$

et (voir n<sup>o</sup> 10 a)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(A, M, t) = \frac{1}{V},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(A, t) = \frac{1}{V} \iiint_V f(M) d\tau_M.$$

Cette démonstration pourra s'appliquer même aux corps anisotropes et non homogènes ; après un temps infini, la température devient uniforme.

L'équilibre thermique est lui même un équilibre statistique, car la température est proportionnelle à la force vive totale des molécules dans un cm<sup>3</sup>. Nous ne connaissons pas exactement la distribution des vitesses des molécules, mais nous savons que la valeur moyenne devient partout constante après un temps infiniment long.

c) Le problème fondamental de la théorie cinétique des gaz ressemble aux précédents. En effet, si nous figurons l'état du gaz par la position d'un point M dans un espace à  $3n$  dimensions ( $n$  étant égal au nombre de molécules), il y aura, deux positions A et B (deux configurations du gaz) étant choisies, une certaine probabilité de passage (densité de probabilité)  $\Phi(A, B, t)$  de A à B en  $t$  secondes. Or le problème d'un gaz abandonné à lui-même exige la détermination de la fonction  $\Phi$ . On pourra pour cela utiliser les calculs de MAXWELL et de BOLZMANN, surtout sous la forme employée par E. BOREL. Si la fonction  $\Phi$  possède des propriétés convenables, la tendance de  $\Phi$  vers une limite ou l'évolution du système vers un état d'équilibre statistique peut être démontrée. Remarquons qu'une équation obtenue par BOLZMANN et une équation intégrale obtenue par HILBERT, ne sont

autre chose que l'équation intégrale (9) que nous avons obtenue plus haut pour  $P(B)$  (voir n° 9) sous des formes différentes.

d) Considérons le modèle de l'atome suivant BOHR. L'atome se compose d'électrons qui circulent autour d'un noyau positif. On admet que les électrons passent de temps en temps brusquement d'une trajectoire à l'autre ; les trajectoires conservent d'ailleurs des formes stables. A chaque saut d'un électron correspond une émission d'énergie lumineuse de fréquence déterminée. Ici nous avons à considérer les probabilités  $p_{ik}$  relatives aux passages d'un état ( $i$ ) à un autre ( $k$ ). Or, après un très grand nombre de passages successifs il y aura une probabilité  $P_k$  pour qu'un électron se trouve à l'état ( $k$ ).

e) Considérons enfin le rayonnement du corps noir. Si vous chauffez un corps et si vous le placez dans une enceinte impénétrable pour la chaleur, un échange d'énergie a lieu entre les molécules (énergie cinétique), entre les atomes (émissions d'ondes électromagnétiques) et entre l'éther (oscillations électromagnétiques). Enfin un équilibre statistique s'établit et les vibrations d'éther ont une composition particulière dont le spectre est bien connu par des recherches expérimentales précises ; ce spectre du corps noir est donné par une formule célèbre de PLANCK. Deux états quelconques de l'enceinte étant donnés, il y a une probabilité de passage de l'un à l'autre en  $t$  secondes. Et à la limite (pour  $t$  infini) nous obtenons des probabilités différentes pour des états divers. C'est par cette voie qu'on pourra chercher à déduire la formule de PLANCK. EINSTEIN a fait un premier essai dans cette direction en considérant l'échange d'énergie dans des conditions simples.

En résumé, il y a toute une série de problèmes généraux qui peuvent être traités par la méthode que nous avons employée pour la recherche du mouvement Brownien.

Voici les points principaux de cette méthode qui pourrait être appelée *Calcul des valeurs moyennes successives* :

1° Il y a une probabilité (densité de probabilité) de passage d'un état A à un autre B en  $t$  secondes ; elle satisfait à l'équation fonctionnelle (1). Dans le cas de variables discontinues (exemple d)) nous n'avons qu'un système de probabilités  $p_{ki}$ .

2° Après un temps infini, la probabilité de passage ne dépend que de l'état final B et la probabilité correspondante  $P(B)$  s'obtient au moyen d'une équation de FREDHOLM homogène.

3° Si l'on prend des valeurs  $\Phi(A, B, n\varepsilon)$  qui correspondent à  $n = 1, 2, 3, \dots$  les valeurs absolues des différences  $\Phi(A, B, n\varepsilon) - \Phi(B)$  pour un état B déterminé sont plus petites que les termes d'une série géométrique convergente. (Voir, pour la démonstration, n° 9 ; elle est basée sur la formation des valeurs moyennes, ce qui justifie la dénomination de cette méthode.)

29. — *Généralisations diverses.* — a) La démonstration du théorème fondamental (n° 9) repose sur certaines propriétés de la fonction  $\Phi(A, B, t)$  qui correspondent aux propriétés des coefficients  $P_{ik}^{(n)}$  d'une substitution linéaire obtenue par des itérations d'une substitution donnée S. (Voir chap. 1). Soient  $p_{ik}$  les coefficients de S. Or le théorème sur la limite de  $P_{ik}^{(n)}$  pour  $n$  infini (voir n° 3) est un cas particulier d'un théorème plus général. En effet on peut composer une suite indéfinie de substitutions linéaires  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  dont les coefficients sont respectivement  $p_{ik}^{(1)}, p_{ik}^{(2)}, \dots, p_{ik}^{(n)}, \dots$ . Les coefficients de la substitution composée admettent, sous certaines hypothèses, des limites déterminées qui ne dépendent pas du second indice, quand le nombre de substitutions  $S_1, S_2, \dots$  opérées successivement augmente indéfiniment (chaîne de MARKOFF avec éléments variables). MARKOFF a étendu certains résultats même pour ces chaînes et S. BERNSTEIN a complété ses études. Si l'on transporte ces problèmes au cas des variables continues, on obtient l'équation fonctionnelle suivante

$$(21) \quad \Phi(A, B, t + t', \theta) = \iiint_v \Phi(A, M, t, \theta) \Phi(M, B, t', \theta + t) d\tau_M.$$

Ici  $\Phi(A, B, t, \theta)$  désigne la densité de probabilité pour le passage de A à B en  $t$  secondes, étant donné que le point mobile se trouve en A à l'instant  $\theta$ . Interprétons cette fonction  $\Phi$  de deux points et de deux temps dans le cas du mouvement Brownien. Elle correspond au passage de A à B, s'il y a des courants variables ou si les propriétés physiques du fluide changent avec le temps. Car dans ces cas, il n'y a pas de probabilité déterminée pour le passage de A à B en  $t$  secondes, si l'on ne sait pas à quelle époque le point mobile se trouve en A ; il faut donc que  $\Phi$  dépende encore de cette époque  $\theta$ . L'équation (21) a été donnée par S. CHAPMAN (*On the Brownian displacements and thermal*

*diffusion of grains suspended in a non-uniform Fluid; Proceedings of the Royal Society A*, 119, 1928) et appliquée par lui à l'étude de la diffusion dans le cas où le fluide n'est pas homogène.

b) Beaucoup d'autres généralisations peuvent être imaginés. MARKOFF a déjà considéré le cas où la probabilité pour qu'un phénomène E se produise comme le résultat d'une expérience peut dépendre des résultats d'un certain nombre d'expériences précédentes (chaîne composée). Ou bien on peut considérer des probabilités pour qu'un phénomène se produise, étant donné qu'un autre phénomène dont la probabilité est liée en chaîne a lieu. Dans le cas des variables continues des dérivées peuvent intervenir. Nous aurions alors à considérer (dans le cas du mouvement Brownien linéaire) une fonction de la forme  $\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}, x, \frac{dx}{dt}, t\right)$  à la place de  $\Phi(x_0, x, t)$ . Cela veut dire : la probabilité de passage d'un état à un autre dépend non seulement des coordonnées des deux états, mais aussi des vitesses.

**30.** — *Conclusions sur le rôle du calcul des probabilités dans les théories physiques.* — Dans toutes les applications du calcul des probabilités il importe surtout de ne pas oublier le sens du mot hasard. Le hasard n'est pas du tout une espèce de force qui agit d'une manière différente de celle que nous observons chez les forces qui sont régies par des lois précises. Il y a du hasard lorsque une petite cause engendre un effet considérable ou lorsqu'il y a un très grand nombre de petites causes dont les effets s'accumulent. Ce point a été mis en pleine lumière par Henri POINCARÉ dans la préface la seconde édition de son *Calcul des probabilités* (voir aussi son livre *Science et Méthode*).

Je me permets enfin de dire quelques mots d'un problème qui à mon avis devrait être considéré partout où l'on emploie les systèmes d'équations différentielles à la recherche des phénomènes physiques.

Supposons que nous connaissions exactement les lois des forces qui s'exercent entre les parties d'un système A et qui sont exprimées par un système d'équations différentielles

$$(I) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

les  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les paramètres qui définissent l'état actuel du système. S'il n'y avait pas d'autres forces, l'évolution du système A serait définie par les équations (I) et nous n'aurions pas à nous occuper des

questions sur les probabilités. Mais admettons qu'il y ait un autre système B très éloigné de A de sorte que son influence sur A soit très petite. Si  $y_1, y_2, \dots, y_m$  sont les paramètres qui définissent l'état actuel de B, les lois précises pour la variation des paramètres  $x_i$  sont exprimées par le système différentiel suivant

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t), \\ \frac{dy_k}{dt} = G_k(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, t), \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Pour passer de (II) à (I) on néglige les quantités  $y_i$  ; le système (I) s'obtient en faisant abstraction de l'influence que le système (B) exerce sur (A). Mais cette méthode de simplifier le système (II) en négligeant certaines expressions et en diminuant le nombre de paramètres ne peut pas donner en général un résultat satisfaisant. Car tout changement apporté aux fonctions  $F_i$  et  $G_k$  modifie en général toute fonction  $x_i(t)$  ou  $y_k(t)$  qui satisfait à (II) et même si ces changements de  $F_i$  et de  $G_k$  n'étaient pas très grands, les variations de  $x_i$  ou de  $y_i$  pourraient l'être.

Dans ce cas l'emploi du calcul des probabilités semble être nécessaire. Il faut poser la question suivante : Les forces qui s'exercent entre les parties de (A) sont connues ; s'il n'y en avait pas d'autres, le développement du système serait régi par les équations (I). Ces équations font correspondre à tout point <sup>(1)</sup>  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une direction D définie dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux seconds membres de (I). Étant donné que l'influence du système B sur A est très faible, la direction de la tangente à la courbe C décrite par  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ne sera pas identique avec D, mais elle fera avec D un petit angle ; elle sera comprise à l'intérieur d'un cône dont D est l'axe. Notre problème consiste à calculer les probabilités pour différentes positions du point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en supposant quelque chose sur les propriétés des fonctions qui expriment l'influence de B sur A. Par exemple on pourra admettre que les cônes dont nous venons de parler ont une ouverture donnée et que la probabilité pour que la direction de la tangente  $t$  en un point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de C se trouve à l'intérieur de l'angle solide  $d\varepsilon$  soit proportionnelle à  $d\varepsilon$ . Nous cherchons ensuite la probabi-

(1) Nous représentons l'état du système par un point P dans un espace à  $n$  dimensions.

## APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

lité pour qu'après un certain temps le point mobile P se trouve dans une partie donnée de l'espace à  $n$  dimensions. Ou bien on pourra construire des tubes convenables dans cet espace et chercher la probabilité pour que la trajectoire soit comprise à l'intérieur de ce tube pendant un certain temps <sup>(1)</sup>.

Suivant Laplace, les applications du Calcul des probabilités sont basées en partie sur nos connaissances, en partie sur notre ignorance. POINCARÉ a précisé cette pensée en disant « c'est seulement parce que nous savons quelque chose que nous pouvons entreprendre le calcul d'une probabilité ».

Pour revenir encore une fois sur le mouvement Brownien il nous suffit de faire quelques hypothèses d'ordre général sur une solution  $\Phi(A, B, t)$  de l'équation fonctionnelle (I) pour en déduire que la limite pour  $t = \infty$  existe et qu'elle ne dépend pas de A. Cet exemple montre la voie à suivre quand on applique le calcul des probabilités aux problèmes qui se posent dans la Physique.

---

## NOTES ADDITIONNELLES

---

### NOTE I

#### **Sur le théorème de Frobenius-Jentzsch. Cas des racines multiples.**

a) D'après FROBENIUS, l'équation caractéristique d'une substitution linéaire et homogène à coefficients positifs admet (voir n° 3c) 1° une racine réelle simple  $\lambda_0$  et 2° d'autres racines qui sont toutes plus grandes en valeur absolue que  $\lambda_0$ . La seconde partie de ce théorème a

(1) Si l'influence du système B tend vers zéro, les ouvertures de nos cônes deviennent infiniment petites, chaque cône se confond avec la tangente  $t$  ; nous n'avons pas besoin de construire des tubes ; il suffit d'intégrer le système (I) pour obtenir les trajectoires.

B. HOSTINSKÝ

été démontrée par A. RAJCHMAN (*Comptes Rendus* t. CLXXXX, 1930, second semestre, p. 729) pour le cas où  $\sum_{p=1}^r a_{ik} = 1$  par un calcul simple d'approximations successives. Il semble que la même méthode pourra être employée dans le cas des variables continues (théorème de JENTZSCH, voir n° 10).

b) Le cas où les coefficients de la substitution ne sont pas tous positifs a été analysé par J. KAUCKÝ. (*Quelques remarques sur les chaînes de MARKOFF* ; Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, n° 131 ; Brno, 1930) et par V. ROMANOVSKY (*Sur les chaînes discrètes de MARKOFF*, C. R., t. CLXXXI, 1930, second semestre, p. 450). Voir n° 10 b.

---

NOTE II

**Sur la résolution des équations fonctionnelles  
de Smoluchowski et de Chapman.**

Dans le troisième chapitre j'ai tenté de généraliser la méthode employée par F. PERRIN dans le cas de la sphère (développements en série, itérations) à des cas plus généraux. Le problème revient à trouver la température dans un conducteur solide si à l'instant initial la chaleur est concentrée en un point unique. Les développements en série sont connus pour les conditions aux limites classiques (voir l'ouvrage de H. S. CARSLAW : *Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids*, 2<sup>e</sup> édition, par exemple, p. 198-199, London 1921). Dans une note insérée aux *Comptes Rendus* t. CLXXXII, 2 mars 1931, p. 546) j'ai envisagé des développements qui conviennent aux conditions aux limites plus générales.

Quant à la démonstration de convergence pour les itérations, je n'avais pas pu obtenir dans le cas d'un domaine général ce que F. PERRIN a démontré dans le cas de la sphère (chap. III).

Je trouve aujourd'hui que cette démonstration de convergence peut être donnée en utilisant une méthode basée sur ce que M. VOL-

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS

TERRA appelle *intégration des substitutions*. Cette méthode introduite par lui en 1887 (voir aussi ses *Leçons sur les fonctions des lignes*, Paris 1913, p. 38) peut être étendue à l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires. Et c'est par cette intégration que j'obtiens non seulement la résolution de l'équation de SMOLUCHOWSKI (1) pour un domaine quelconque, mais aussi pour l'équation générale (21) donnée par CHAPMAN. Nous écrivons ici cette dernière équation sous la forme que lui a donnée M. KOLMOGOROFF ( $\alpha < \beta < \gamma$ )

$$\Phi(A, B, \alpha, \gamma) = \iiint_{\mathcal{V}} \Phi(A, M, \alpha, \beta) \Phi(M, B, \beta, \gamma) d\tau_M.$$

Ici  $\Phi(A, B, \alpha, \beta)$  représente la densité de probabilité pour le passage de A à B si le point mobile se trouve en A à l'instant  $t = \alpha$  et en B à l'instant  $t = \beta$ . Dans une note qui sera publiée prochainement dans les *Rendi conti* de l'Accademia dei Lincei je montre qu'une transformation fonctionnelle linéaire du type (14) étant donnée, il suffit d'intégrer cette transformation par rapport à  $t$  pour obtenir une solution de l'équation de CHAPMAN (n° 29). Dans le cas où la fonction  $\Phi$  qui définit la transformation (14) ne dépend pas de  $t$ , cette intégration revient aux itérations employées par SMOLUCHOWSKI et F. PERRIN.

---

NOTE III

**Sur le principe ergodique.**

Dans la note déjà citée (*Comptes Rendus*, 2 mars 1931), j'ai remarqué que sous certaines conditions une fonction  $\Phi(A, B, \alpha, \beta)$  qui satisfait à l'équation de CHAPMAN tend, quand  $\alpha$  augmente indéfiniment, vers une limite indépendante de A. En même temps A. KOLMOGOROFF (*Mathem. Annalen*, Bd., 104, Heft 3, publié le 2 mars 1931, p. 415) démontre le même théorème comme une extension d'un résultat démontré antérieurement par J. HADAMARD et par l'auteur



B. HOSTINSKÝ

(voir, pour les citations, n° 9) (1). D'après A. KOLMOGOROFF toute fonction qui satisfait à l'équation de CHAPMAN satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre. En généralisant et complétant les résultats obtenus par BACHELIER, KOLMOGOROFF montre comment les problèmes de probabilités relatifs aux quantités discontinues peuvent être ramenés aux problèmes où figurent les probabilités qui varient avec le temps d'une manière continue.

---

NOTE IV

**Sur le calcul d'une valeur moyenne**

Soient (voir le n° 16)  $A_1, A_2, \dots, A_N, \dots$  les positions du point mobile aux instants  $\varepsilon, 2\varepsilon, \dots, N\varepsilon, \dots$  et soit  $\alpha(A)$ , une fonction donnée de la position du point mobile et  $\bar{\alpha}$  sa valeur moyenne après un temps infini. L'expression

$$v \cdot m \cdot \frac{1}{N} [(\alpha(A_1) - \bar{\alpha}) + (\alpha(A_2) - \bar{\alpha}) + \dots + (\alpha(A_N) - \bar{\alpha})]^2$$

tend, pour  $N$  infini, vers une valeur limite qui dépend de  $\varepsilon$ . Il serait intéressant de rechercher comment varie cette limite quand  $\varepsilon$  change. Dans beaucoup de problèmes on est amené à calculer cette valeur moyenne qui définit la dispersion et il importe de connaître la valeur en fonction de l'intervalle de temps  $\varepsilon$  qui sépare deux observations consécutives.

(Conférences faites à l'Institut HENRI-POINCARÉ en Janvier et Février 1930).

(1) Voir encore J. HADAMARD, *Comptes Rendus*, t. CLXXXVI, p. 275, 30 janvier 1928.

## TABLE DES MATIÈRES

---

PRÉFACE.....	I
<b>I. — Introduction</b>	
1. — Problèmes sur la diffusion et sur le mélange des liquides.....	2
2. — Mouvement Brownien linéaire discontinu. Notion de chaîne.....	3
3. — Rappel de quelques résultats sur la probabilité des phénomènes liés en chaîne de Markoff.....	5
4. — Généralités sur le cas des variables continues.....	10
<b>II. — Equation fonctionnelle de Smoluchowski</b>	
5. — Équation de Smoluchowski.....	12
6. — Propriétés générales des fonctions $\Phi$ .....	13
7. — Une solution particulière.....	14
8. — Valeur moyenne d'une fonction du point mobile.....	20
9. — Démonstration du théorème fondamental.....	20
10. — Compléments au théorème précédent.....	24
<b>III. — Conditions qui déterminent une solution de l'équation fonctionnelle. Méthodes d'itération</b>	
11. — Les fonctions itérées sur la surface de la sphère.....	26
12. — Mouvement Brownien sur la surface de la sphère et le problème de la chaleur....	27
13. — Conditions qui déterminent une solution de l'équation (1 bis).....	30
14. — Méthode des fonctions itérées dans le cas général.....	31
15. — Itération des transformations fonctionnelles linéaires. Propriété de groupe.....	33
<b>IV. — Calcul de la dispersion</b>	
16. — La dispersion dans le cas du mouvement continu.....	37
17. — Cas particulier où la probabilité du passage ne dépend pas de la position initiale..	41
<b>V. — Etude de quelques cas particuliers. Ondes de probabilité. Équilibres statistiques</b>	
18. — Interprétation physique de la solution particulière obtenue au n° 7.....	43
19. — Mouvement Brownien superposé à des courants permanents.....	45
20. — Tirages de deux urnes avec échange des boules. Mouvement Brownien discontinu sur un segment.....	47
21. — Une équation aux dérivées partielles.....	49
22. — Quelques cas particuliers. Équilibres statistiques.....	51

B. HOSTINSKÝ

23. — Ondes de probabilité.....	54
24. — Remarque sur la fonction $\Phi$ qui donne la densité de probabilité du passage.....	54
25. — Rotations d'une circonférence et celles d'une sphère à centre fixe.....	55

**VI. — Considérations générales sur les applications du Calcul des probabilités à la Théorie de la diffusion et problèmes analogues**

26. — Molécules d'un liquide et points mobiles.....	58
27. — Le problème fondamental de la théorie cinétique des gaz d'après E. Borel.....	60
28. — Analyse des équilibres statistiques.....	63
29. — Généralisations diverses.....	66
30. — Conclusions sur le rôle du Calcul des probabilités dans les théories physiques....	67

**Notes additionnelles**

NOTE I. — Sur le théorème de Frobenius-Jentzsch. Cas des racines multiples.....	69
NOTE II. — Sur la résolution des équations fonctionnelles de Smoluchowski et de Chapman.....	70
NOTE III. — Sur le principe ergodique.....	71
NOTE IV. — Sur le calcul d'une valeur moyenne.....	72