ANNALES DE L'I. H. P.

TORSTEN CARLEMAN

La théorie des équations intégrales singulières et ses applications

Annales de l'I. H. P., tome 1, nº 4 (1930), p. 401-430
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1930__1_4_401_0>

La théorie des équations intégrales singulières et ses applications

PAR

TORSTEN CARLEMAN

I. — Exemples d'équations intégrales singulières

Nous dirons qu'une équation intégrale

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)dy = f(x)$$

est *singulière* si le noyau (ou le domaine d'intégration) devient infini de telle manière que l'un ou l'autre des théorèmes fondamentaux de FREDHOLM ne soit plus applicable à (1).

Parmi ces théorèmes nous rappellerons les suivants :

1) Il existe une solution φ et une seule, sauf pour certaines valeurs de λ (nombres caractéristiques) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n, \cdots$ pour lesquelles l'équation homogène correspondante a un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n, \cdots$ n'ont pas de point limite à distance finie.

2) La solution λ est une fonction méromorphe par rapport à λ dont les pôles appartiennent à la suite $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \cdots$

FREDHOLM démontra ses théorèmes d'abord pour les noyaux $K(x, y)$ continus (bornés) puis, par un artifice remarquable pour certaines classes de noyaux admettant un noyau itéré $K^{(n)}(x, y)$ borné. Pour ces noyaux la suite des valeurs caractéristiques a un exposant de convergence fini. L'ensemble des équations intégrales régulières est plus étendu encore. C'est ce qu'on vérifie sur l'exemple suivant

$$K(x, y) = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\sin vx \cdot \sin vy}{\log^2 v} \qquad 0 < {x \atop y} < \pi,$$

pour lequel l'équation intégrale correspondante est régulière bien que aucun des noyaux itérés ne soit borné.

Les théorèmes de FREDHOLM sont toujours applicables si

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy$$

est convergente. Dans ce cas il convient de considérer des solutions à carré intégrable au sens de M. LESBESGUE. En s'inspirant de la notion de « Vollstetigkeit » introduite par M. HILBERT, M. F. RIESZ (1) a démontré que les théorèmes de FREDHOLM sont applicables à l'équation fonctionnelle

$$\varphi - \lambda S(\varphi) = f,$$

où $S(\varphi)$ est une transformation fonctionnelle linéaire qui jouit de la propriété suivante : $S(\varphi_n)$ $(n = 1, n \cdots)$ est un ensemble compact (2) si φ_n parcourt un ensemble borné ($|\varphi_n| <$ constante indépendante de n et de x). Comme corollaire on obtient le théorème suivant : le noyau $H(x, y) . \omega(x, y)$ où $H(x, y)$ est une fonction continue régulière si l'intégrale

$$\int_{-(b-a)}^{b-a} |\omega(s)| ds$$

existe.

Passons maintenant à quelques exemples d'équations intégrales singulières.

1) *Equation singulière de M. Picard.*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y) dy = f(x).$$

L'équation homogène admet, comme le montre un calcul facile, les deux solutions $e^{\pm i\alpha x}$ si $\lambda = \frac{1 + \alpha^2}{2}$. Toute valeur de λ supérieure à $\frac{1}{2}$ est donc une valeur caractéristique.

(1) *Acta matematica*, t. XLI, 1918.

(2) Cela veut dire qu'on peut toujours extraire de $S(\varphi_n)$ une suite partielle uniformément convergente.

2) *Exemple de M. Goursat.*

$$\varphi(x) - \lambda \int_x^\infty \frac{(y-x)^n}{n!} \varphi(y) dy = f(x),$$

$e^{-\alpha x}$ est une fonction fondamentale correspondant à la valeur singulière $\lambda = \alpha^{n+1}$ pourvu que la partie réelle de α soit positive. Si l'on pose

$$f(x) = \sum A_v e^{-\alpha_v x},$$

on trouve la solution

$$\varphi(x, \lambda) = \sum \frac{A_v \alpha_v^{n+1}}{\alpha_v^{n+1} - \lambda} e^{-\alpha_v x}.$$

On constate aisément qu'il est possible de choisir les α_v de manière que $\varphi(x, \lambda)$ admette une ligne quelconque dans le plan des λ comme coupure essentielle.

3) *Equation de M. Weyl.*

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty \sin xy\ \varphi(y) dy = 0.$$

Il correspond aux valeurs $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ une infinité de fonctions fondamentales

$$\varphi(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \qquad a > 0.$$

Dans les trois cas traités le domaine d'intégration est infini. Cela n'implique rien d'essentiel. On peut, en effet, par un changement de variable, obtenir, dans tous les cas, une équation intégrale à domaine d'intégration fini.

Nous traiterons maintenant une équation intégrale singulière qui admet toutes les fonctions analytiques, régulières dans un domaine donné, comme fonctions fondamentales.

Nous partons de la formule

$$\iint_D f(z) \overline{\Phi'(z)} d\sigma = -\frac{i}{2} \int_C f(z) \overline{\Phi(z)} dz, \tag{2}$$

où D est un domaine dans le plan des z entouré par une courbe simple

C suffisamment régulière. $d\sigma$ désigne l'élément de surface. $f(z)$ et $\Phi(z)$ sont des fonctions analytiques régulières dans D (contour compris). Posons dans (2) $\Phi(z) = \varphi(z, \zeta)$ où $\varphi(z, \zeta)$ est une fonction qui effectue une représentation conforme du domaine D sur le cercle de rayon autour de l'origine de telle manière qu'on ait $\varphi(\zeta, \zeta) = 0$, ζ étant un point intérieure de D. Il vient

$$(3) \quad \iint_D f(z)\overline{\Phi_z'(z, \zeta)}d\sigma = -\frac{i}{2}\int_C f(z)\frac{\varphi(z, \zeta)\overline{\varphi(z, \zeta)}}{\varphi(z, \zeta)}dz = -\frac{i}{2}\int_C \frac{f(z)}{\varphi(z, \zeta)}dz$$

$$= \pi\frac{f(\zeta)}{\left[\frac{\partial\varphi(z, \zeta)}{\partial z}\right]_{z=\zeta}}.$$

Si $\varphi(z)$ est une fonction particulière qui transforme D sur le cercle $|\varphi| \leqslant 1$, on peut écrire

$$\Phi = \varphi(z, \zeta) = \frac{\varphi(z) - \varphi(\zeta)}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(\zeta)}}.$$

On en déduit

$$\Phi'_z(z, \zeta) = \varphi'(z)\frac{(1 - \varphi(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)})}{(1 - \varphi(z)\overline{\varphi(z)})^2}.$$

En portant cette expression dans la formule (3) il vient

$$(4) \qquad f(\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi'(\zeta)\overline{\varphi'(z)}}{(1 - \varphi(\zeta)\overline{\varphi(z)})^2}f(z)d\sigma.$$

Chaque fonction analytique régulière dans D (*contour compris*) *est donc fonction fondamentale pour le noyau hermitique*

$$(5) \qquad \frac{\varphi'(\zeta)\overline{\varphi'(z)}}{(1 - \varphi(\zeta)\overline{\varphi(z)})^2},$$

correspondant à la valeur fondamentale $\frac{1}{\pi}$.

En effectuant la transformation

$$\varphi(\zeta) = x, \qquad \varphi(z) = y, \qquad (z = \omega(y)), \qquad f(\omega(x))\omega'(x) = F(x),$$

l'équation (4) prend la forme :

$$(6) \qquad F(x) = \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{1}{(1 - x\overline{y})^2}F(y)d\sigma,$$

où E est le cercle d'unité autour de l'origine. On démontre aisément que le noyau $\frac{1}{(1-x\bar{y})^2}$, ainsi que (5), sont des noyaux bornés au sens de M. HILBERT.

Une fonction complexe $g(x)$ continue (ou à carré intégrable) dans E peut d'une manière unique s'écrire comme une somme de deux fonctions $f(x) + h(x)$ où $f(x)$ est analytique et $h(x)$ orthogonale à toutes les fonctions holomorphes F dans E, c'est-à-dire $\int_E \overline{F(x)}\, h(x) d\sigma = 0$. Nous appellerons $f(x)$ *la partie analytique* de $g(x)$ dans E. En utilisant (6), on obtient pour $f(x)$ la formule

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\iint_E \frac{1}{(1-x\bar{y})^2}\, g(y) d\sigma.$$

De ce résultat on déduit aisément que :

a) l'équation (6) n'admet pas d'autres solutions que les fonctions holomorphes et

b) que $\frac{1}{\pi}$ est la seule valeur fondamentale du noyau $\frac{1}{(1-x\bar{y})^2}$.

En utilisant un théorème connu sur les fonctions fondamentales correspondantes à la plus petite valeur fondamentale d'un noyau hermitique nous pouvons maintenant caractériser les fonctions analytiques par une propriété extrémale de la manière suivante :

Parmi toutes les fonctions complexes ayant l'intégrale $\iint_E |f|^2 d\sigma =$ *constante, les fonctions régulières et analytiques sont celles qui rendent maximum l'intégrale*

$$\iint_E \iint_E \frac{1}{(1-x\bar{y})^2} f(x) \overline{f(y)}\, d\sigma_x d\sigma_y.$$

Si l'on connaît la solution générale d'une équation intégrale particulière à noyau singulier $G(x, y)$, on peut, par le procédé suivant, résoudre l'équation plus générale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b [G(x, y) + H(x, y)]\varphi(y) dy = f(x), \tag{7}$$

pourvu que $H(x, y)$ satisfasse à certaines conditions de régularité.

Nous déterminons d'abord les fonctions $\Omega(x, y|\lambda)$ et $F(x)$ par les équations

$$(8) \qquad \Omega(x, y) \mid \lambda) - \lambda \int_a^b G(x, s)\Omega(s, y \mid \lambda)ds = H(x, y),$$

$$(9) \qquad F(x) - \lambda \int_a^b G(x, y)\, F(y)dy = = f(x).$$

Si l'on remplace dans (7) $H(x, y)$ et $f(x)$ par les premiers membres des équations (8) et (9) il vient par un calcul facile

$$(10) \qquad P(x) - \lambda \int_a^b G(x, y)\, P(y)dy = 0,$$

où

$$P(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b \Omega(x, y \mid \lambda)\, \varphi(y)dy - F(x).$$

Si l'équation homogène (10) n'a pas d'autre solution que $P(x) = 0$, il s'ensuit la nouvelle équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \Omega(x, y \mid \lambda)\, \varphi(y)dz = F(x),$$

qui est résoluble par la méthode de FREDHOLM dans des cas étendus. C'est en utilisant cette méthode que j'ai résolu l'équation intégrale singulière qu'on rencontre en cherchant à résoudre le problème de DIRICHLET pour un contour anguleux par un potentiel du double couche (1).

II. — Théorie des équations intégrales à noyau hermitique

Le sujet principal de mes conférences est l'étude des équations intégrales à noyaux hermitiques (2) ou, ce qui revient au même, l'étude des formes hermitiques à une infinité de variables. C'est M. HILBERT qui a créé la théorie importante qu'on possède aujourd'hui sur cette question. Les recherches de M. HILBERT ont été poursuivies par

(1) Voir T. CARLEMAN, *Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken.* Diss. Upsala 1916 ; E. HOLMGREN, Sur les recherches de M. Carleman relatives aux fonctions harmoniques, *Bull. des sciences mathématiques*, 1917.

(2) Nous dirons que le noyau $K(x,y)$ est hermétique si la relation $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ est remplie.

plusieurs auteurs parmi lesquels nous mentionnerons MM. WEYL, HELLINGER, TOEPLITZ, PLANCHEREL, F. RIESZ (1).

Traduites dans le langage de la théorie des équations intégrales les hypothèses que fait M. HILBERT, sont les suivantes :

$$\text{I} \qquad \int_a^b \mathrm{K}|(x, y)|^2 dy \quad \text{existe en général,}$$

$$\text{II} \qquad \left| \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, u(x) u(y) dx dy \right| \leqslant k^2 \int_a^b |u(x)|^2 dx,$$

k étant une constante indépendante de $u(x)$.

Pour élargir le domaine d'application de la théorie d'HILBERT, j'ai entrepris, dans un travail intitulé : « Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique (2) » et publié en 1923, une étude de l'équation intégrale sous la seule hypothèse I. Dans une conférence devant le sixième congrès mathématique scandinave à Copenhague j'ai ajouté certains compléments que j'espère de pouvoir développer plus systématiquement.

Dans ces dernières années l'intérêt de la question qui nous occupe a considérablement augmenté. C'est, en effet, un instrument mathématique indispensable pour le développement de la mécanique moderne créé par MM. de BROGLIE, HEISENBERG et SRÖDINGER.

Etude de l'équation intégrale $\varphi(x) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\varphi(y) dy = f(x)$, *pour les valeurs non réelles de* λ.

Soit $\mathrm{K}(x, y)$ une fonction mesurable, définie dans le domaine $a \leqslant {x \atop y} \leqslant b$, et satisfaisant à la relation $\mathrm{K}(x, y) = \overline{\mathrm{K}(x, y)}$. Supposons en outre que l'intégrale

$$k(x)^2 = \int_b^a |\mathrm{K}(x, y)|^2 dy$$

existe presque partout. Dans le cas général $\int_{\mathrm{E}_n} k(x)^2 dx$ n'est pas convergente. Or, on peut toujours trouver une suite d'ensembles E_1,

(1) Pour la littérature il convient de consulter l'article de MM. HELLINGER et TOEPLITZ dans l'*Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 1928. Il y a lieu de citer aussi les ouvrages plus récents suivants : A. WINTNER, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Leipzig, 1929 ; et J. v. NEUMANN, Allg. Eigenwertheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, 1930.

(2) *Upsala universitets årsskrift*, 1923. Pour abréger, nous désignerons ce travail par *E. S.*

$E_2, \cdots E_n \cdots$ pour lesquels $\int_{E_n} k(x)^2 dx$ existe et qui satisfassent aux conditions

$$E_1 \leqslant E_2 \leqslant E_3 \cdots \leqslant E_n \leqslant \cdots,$$

$$\lim_{n \to \infty} [\text{mesure de } E_n] = b - a.$$

Pour voir qu'il en est bien ainsi, il suffit de considérer les ensembles E_n pour lesquelles $k(x) \leqslant n$. Considérons maintenant une fonction $K_n(x, y)$ égale à $K(x, y)$ si x ou y appartient à E_n et égale à un noyau hermitique arbitraire à carré intégrable si x et y n'appartient pas à E_n. Nous appellerons $K_n(x, y)$ la *réduite généralisée* de $K(x, y)$. On voit que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(x, y)|^2 dx dy$$

existe [1].

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \tag{11}$$

où $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Nous ne considérons que des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ à carré intégrable. Introduisons d'abord les solutions $\varphi_n(x)$ des équations intégrales

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(x, y) \varphi_n(y) dy = f(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

En multipliant par $\overline{\varphi_n(x)}$ et en intégrant, on obtient

$$\frac{1}{\lambda} \int_a^b \overline{\varphi_n(x)}(\varphi_n(x) - f(x)) dx = \int_a^b \int_a^b K_n(x, y) \overline{\varphi_n(x)} \varphi_n(y) dx dy.$$

Le second membre étant réel, on en déduit

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\overline{\lambda}}\right) \int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\overline{\lambda}} \int_a^b \overline{\varphi_n} f dx - \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi_n \overline{f} dx. \tag{13}$$

(1) On peut aussi considérer des réduites plus générales définies par la condition : $\lim_{n \to \infty} \int_a^b |K(x, y)) - K_n(x, y)|^2 dy = 0$ pour presque toutes les valeurs de x dans (a, b).

C'est une relation tout à fait indépendante du noyau. En appliquant l'inégalité de SCHWARZ on trouve

$$\left(\frac{1}{\bar\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)\int_a^b |\varphi_n(x)|^2dx \leqslant \frac{2}{|\lambda|}\sqrt{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2dx \int_a^b |f(x)|^2dx},$$

d'où l'on conclut

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2dx \leqslant \frac{4|\lambda|^2}{|\lambda-\bar\lambda|^2}\int_a^b |f(x)|^2dx. \tag{14}$$

Les intégrales $\int_a^b |\varphi_n(x)|^2dx$ sont donc bornées dans leur ensemble.

Nous avons maintenant besoin de quelques notions introduites par M. F. RIESZ dans son Mémoire : Über Systeme integrierbarer Funktionen (*Math. Ann.* 1910). Soit

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\ f_n(x)\ \cdots \tag{15}$$

une suite de fonctions à carré intégrable telles que

$$\int_a^b |f_v(x)|^2dx \leqslant \mathrm{M}, \tag{16}$$

où M est une constante indépendante de v.

Nous dirons que $f_v(x)$ *converge faiblement* vers une fonction $f(x)$ à carré intégrable si

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^x f_v(x)dx = \int_a^x f(x)dx, \qquad a < x < b.$$

et que $f_v(x)$ *converge fortement* vers $f(x)$ si

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b |f(x)-f_v(x)|^2dx = 0.$$

Citons les théorèmes suivants dûs à M. F. RIESZ.

I. De chaque ensemble $f_v(x)$ satisfaisant à la condition (16) on peut toujours extraire une suite partielle qui soit faiblement convergente.

II. Si $f_v(x)$ converge faiblement vers $f(x)$, on a

$$\overline{\lim_{v\to\infty}}\int_a^b |f_v(x)|^2dx \geqslant \int_a^b |f(x)|^2dx, \tag{17}$$

$$\lim_{v\to\infty}\int_a^b f_v(x)\,g(x)dx = \int_a^b f(x)\,g(x)dx, \tag{18}$$

$g\ (x)$ étant une fonction à carré intégrable.

III. Si $f_v(x)$ converge faiblement vers $f(x)$ tandis que $g_v(x)$ tend fortement vers $g(x)$, on a

$$\lim_{v \to \infty} \int_a^b f_v(x) g_v(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

IV. Si une suite $f_v(x)$ faiblement convergente vers $f(x)$ converge (en sens ordinaire) presque partout vers une fonction $F(x)$ on a presque partout $f(x) = F(x)$.

Revenons maintenant aux fonctions $\varphi_n(x)$ introduites à la page 408. A cause de la condition (14), on peut trouver une suite n_v telle que $\varphi_{n_v}(x)$ converge faiblement vers une fonction $\varphi(x)$ à carré intégrable. En vertu du théorème II on a pour presque toutes les valeurs de x dans (a, b) (plus précisément pour les valeurs de x appartenant à $E = \lim E_n$) :

$$\lim_{v \to \infty} \int_a^b k_{n_v}(x, y) \varphi_{n_v}((y) dy = \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy.$$

En tenant compte de (12) il s'ensuit que $f_{n_v}(x)$ converge presque partout. En posant dans (12) $n = n_v$ et en faisant $v \to \infty$, on trouve donc en vertu du théorème IV que $\lim\limits_{v \to \infty} f_n(x) = \varphi(x)$ est une solution (1) de (11). Il est facile de voir qu'on peut choisir les nombres n_v de manière que $\lim \varphi_{n_v}(x)$ existe presque partout pour toutes les fonctions $f(x)$ à carré intégrable. On obtient ainsi une fonctionnelle $T(f, \lambda)$ solution de l'équation

$$T_x(f, \lambda) - \lambda \int_a^b k(x, y) T_y(f, \lambda) dy = f(x).$$

Si l'on introduit le symbole

$$D(\varphi, f; \lambda) = \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}} \int_a^b |\varphi|^2 dx + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \left[\frac{1}{\lambda} \int_a^b \bar{\varphi} f dx - \frac{1}{\bar{\lambda}} \int_a^b \varphi \bar{f} dx \right],$$

nous pouvons écrire la relation (13) sous la forme

$$D(\varphi_n, f; \lambda) = 0.$$

Par un passage à la limite il vient

$$D(F(f, \lambda), f; \lambda) \leqslant 0. \tag{19}$$

(1) Nous dirons que $\varphi(x)$ est solution de (11) si cette équation est vérifiée pour presque toutes les valeurs de x dans (a, b).

Il convient de considérer en même temps les équations associées

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy = g(x), \tag{20}$$

$$\psi_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(y, x)\psi_n(y)dy = g(x). \tag{21}$$

Nous pouvons choisir les n_v de telle manière que $\varphi_{n_v}(x)$ et $\psi_{n_v}(x)$ convergent simultanément vers des solutions $\varphi(x) = T(f, \lambda)$ et $\psi(x) = T'(g, \lambda)$ de (11) et de (20) et cela pour toutes les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ à carré intégrable et même pour toutes les valeurs non réelles de λ. Des formules (12) et (21) on déduit

$$\int_a^b f(x)\psi_n(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx.$$

Par un passage à la limite il vient

$$\int_a^b fT'(y, \lambda)dx = \int_a^b gT(f, \lambda)dx, \tag{22}$$

formule fondamentale pour l'étude qui suivra.

Si, au lieu de la fonction φ, on introduit une nouvelle fonction u par la transformation

$$\varphi = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}(f + u),$$

l'expression $D(\varphi, f\,; \lambda)$ prend la forme simple suivante

$$D(\varphi, f\,; \lambda) = \frac{1}{|\lambda - \bar{\lambda}|^2}\left[\int_a^b u\bar{u}dx - \int_a^b f\bar{f}dx\right].$$

En désignant par $u(f)$ la fonctionnelle qui correspond à $T(f)$, nous pouvons donc remplacer l'inégalité (19) par

$$\int_a^b |u(f)|^2dx \leqslant \int_a^b |f|^2dx. \tag{23}$$

Pour que le signe d'égalité ait lieu dans cette formule il faut et il suffit que $\varphi_{n_v}(x)$ converge fortement vers sa limite.

Résumé : Pour λ non réel l'équation (11) *admet au moins une solution à carré intégrable. De chaque suite de réduites* $K_n(x, y)$ *on peut extraire une suite partielle* $K_{n_v}(x, y)$ *telle que les solutions* $\varphi_{n_v}(x)$ *et* $\psi_{n_v}(x)$ *de*

(12) *et* (21) *tendent vers des solutions bien déterminées* $\varphi(x) = T(f, \lambda)$, $\psi(x) = T'(g, \lambda)$ *de* (11) *et* (20) *et cela pour toutes les fonctions f et g à carré intégrable et pour toutes les valeurs non réelles de* λ.

Les fonctionnelles φ *et* ψ *satisfont à certaines relations qui, moyennant les transformations*

$$\varphi = \frac{\bar\lambda}{\bar\lambda - \lambda}(f + u), \qquad \psi = \frac{\bar\lambda}{\bar\lambda - \lambda}(g + v),$$

peuvent s'écrire :

$$\int_a^b |u|^2 dx \leqslant \int_a^b |f|^2 dx, \qquad \int_a^b |v|^2 dx \leqslant \int_a^b |g|^2 dx,$$

$$\int_a^b ugdx = \int_a^b vfdx. \tag{24}$$

Il est bien connu que l'équation intégrale (11) ne possède qu'une seule solution à carré intégrable pour $I[\lambda] \neq 0$ (1), si $K(x, y)$ est un noyau borné (au sens de MM. HILBERT et WEYL). L'exemple suivant montre qu'il n'est pas toujours ainsi pour les noyaux plus généraux que nous considérons ici. Définissons, comme suit, un système de fonctions ψ_1, $\psi_2, \cdots, \psi_n, \cdots$ orthogonales et normales dans l'intervalle (0,1) (2).

$$\psi_0(x) = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\psi_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{»} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

. . . .

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{»} \quad 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x < 1 - \frac{1}{2^n}, \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{»} \quad 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

(1) $I[\lambda]$ = partie imaginaire de λ.

(2) Ce système de fonctions orthogonales a été introduit par M. HAAR. (Cf. PLANCHEREL *Ann. de l'Ecole Normale*, 1914, p. 244).

L'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)dy = 0,$$

où

$$K(x, y) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p(x)\psi_p(y),$$

admet certainement pour $\lambda = i$ une solution $\varphi(x)$ telle que

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \neq 0$$

si la série

$$\sum \frac{2^v}{1 + a_v^2}$$

converge (1).

Il convient de classer les noyaux considérés *en deux classes I et II* suivant que l'équation homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0,$$

n'admet pas ou admet de solution non nulle à carré intégrable lorsque λ n'est pas réel. Il est facile de voir que la classe I est plus étendue que la classe des noyaux bornés d'HILBERT. Nous verrons plus loin qu'un grand nombre de propriétés des noyaux bornés subsistent pour les noyaux de la classe I.

Ecrivons pour abréger

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = S(\varphi), \qquad \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy = S'(\psi).$$

Nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Si les équations

(25) $$\varphi - \lambda S(\varphi) = 0,$$
(26) $$\psi - \lambda S'(\psi) = 0,$$

n'ont pas de solution non nulle pour une valeur particulière

$$\lambda = \lambda^* = \alpha^* + i\beta^* (\beta^* \neq 0)$$

(1) Pour la démonstration, je renvois à *E. S.*, pp. 62-66.

il en est de même pour toutes les valeurs non réelles de λ. De l'équation (25) on peut déduire les relations

$$\varphi - \lambda^* S(\varphi) = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\varphi,$$

$$\bar{\varphi} - \lambda^* S'(\bar{\varphi}) = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\varphi}.$$

On a donc, en tenant compte des hypothèses du théorème :

$$\varphi = T\left(\left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\varphi\,;\lambda^*\right), \quad \bar{\varphi} = T\left(\left(1 - \frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\varphi}\,;\lambda^*\right).$$

En appliquant la formule (22) il vient

$$\left(1 - \frac{\lambda^*}{\bar{\lambda}}\right)\int_a^b \varphi\bar{\varphi}dx = \left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda}\right)\int_a^b \varphi\bar{\varphi}dx,$$

d'où l'on conclut, si $\lambda \neq \bar{\lambda}$, que

$$\int_a^b |\varphi|^2 dx = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient le théorème suivant : *L'équation* (25) *admet le même nombre de solutions à carré intégrable pour toutes les valeurs de* λ *situées du même côté de l'axe réel.*

Signalons enfin que les noyaux de la classe I sont caractérisés par la propriété suivante : *Soit* D *l'ensemble des fonctions* f *telles que* $S(f)$ *soit aussi à carré intégrale, et* $\bar{D}$ *l'ensemble des fonctions conjuguées de* D. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $K(x, y)$ *appartienne à la classe I est que la relation*

$$\int_a^b f S'(g)dx = \int_a^b g S(f)dx,$$

ait lieu chaque fois que f *appartient à* D *et* g *à* $\bar{D}$.

Les fonctions spectrales d'un noyau hermitique.

Soit $K_1(x, y)$, $K_2(x, y) \cdots$, $K_n(x, y), \cdots$ une suite de réduites généralisées du noyau $K(x, y)$ telle que la solution de l'équation

$$\varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K_n(x, y)\,\varphi_n(y)dy = f(x), \tag{27}$$

tende presque partout vers une limite $\varphi(x) = T(f(x))$ pour chaque fonction $f(x)$ à carré intégrable et pour chaque valeur non réelle de λ.

On constate que, dans ce cas, la solution de l'équation associée tend aussi vers une limite $\psi(x) = \mathrm{F}'(g(x))$, et qu'on a

$$\int_a^b \mathrm{T}(f)g\,dx = \int_a^b f\mathrm{T}'(g)\,dx.$$

Nous allons maintenant introduire la *fonction spectrale* $\theta(x, y|\lambda)$ qui correspond à la suite $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ Désignons le système orthogonal et normal de fonctions fondamentales qui appartiennent au noyau $\mathrm{K}_n(x, y)$ par $\varphi_{n,p}(x)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ et les valeurs fondamentales correspondantes par $\lambda_{n,p}$, et introduisons la fonction $\theta_n(x, y|\lambda)$, définie par les relations

$$\theta_n(x, y|\lambda) = \sum_{0<\lambda_{n,p}<\lambda} \varphi_{n,p}(x)\,\overline{\varphi_{n,p}(y)}, \qquad \text{pour } \lambda > 0,$$

$$\theta_n(x, y|\lambda) = -\sum_{\lambda\leqslant\lambda_{n,p}<0} \varphi_{n,p}(x)\,\overline{\varphi_{n,p}(y)} \qquad \text{pour } \lambda < 0,$$

$$\theta_n(x, y|0) = 0.$$

Considérons les intégrales

$$\mathrm{I}_n = \int_a^b\int_a^b \theta_n(x, y\,|\,\lambda)h(x)\,\overline{h(y)}\,dx\,dy,$$

où $h(x)$ est une fonction à carré intégrable. La variation de cette fonction de λ dans l'intervalle $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ est évidemment inférieure à

$$\sum_{\alpha\leqslant\lambda_{n,p}\leqslant\beta} \left| \int_a^b \varphi_{n,p}(x)\,h(x)\,dx \right|^2 \leqslant \int_a^b |h(x)|^2 dx.$$

D'apıès un théorème de M. HELLY (Wien. Sitzungsberichte, 1912) on peut donc trouver une suite d'indices n_v telle que I_{n_v} tende vers une fonction limite $\mathrm{I}(\lambda)$ bien déterminée et à variation bornée, inférieure à $\int_a^b |h(x)|^2 dx$. On démontre aisément que la suite n_v peut être choisie de telle manière que la convergence ait lieu pour toutes les fonctions $h(x)$ à carré intégrable.

Si x et y appartiennent à E ($\mathrm{E} = \lim \mathrm{E}_v$), on a, pour n suffisamment grand

$$\theta_n(x, y|\lambda) = \int_0^\lambda \lambda^2 d_\lambda \int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(x, s)\theta_n(s, t|\lambda)\,\overline{\mathrm{K}(y, t)}\,ds\,dt.$$

On en déduit que $\theta_n(x, y|\lambda)$ tend vers une limite $\theta(x, y|\lambda)$ bien déterminée si x et y appartiennent à E.

Désignons par $\Delta\theta(x, y|\lambda)$ la différence $\theta(x, y|\lambda + \Delta\lambda) - \vartheta(x, y|\lambda)$. On a

$$\int_a^b |\Delta\theta_n(x, y|\lambda)|^2 dy = \Delta\theta_n(x, x|\lambda).$$

Il s'ensuit que

$$f_{n_\nu}(x) = \int_a^b \Delta\theta_{n_\nu}(x, y|\lambda) h(y) dy.$$

converge vers $\int_a^b \Delta\theta(x, y|\lambda) h(y) dy$, si x appartient à E. En tenant compte de la relation

$$\int_a^b |f_n(x)|^2 dx \leqslant \sum |h_p|^2 \leqslant \int_a^b |h(x)|^2 dx,$$

on déduit

$$\lim \int_a^b\int_a^b \Delta\theta_{n_\nu}(x, y|\lambda) g(x) h(y)\, dxdy = \int_a^b\int_a^b \Delta\theta(x, y|\lambda)\, g(x) h(y)\, dxdy.$$

Pour l'étude détaillée des intégrales

$$\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\, h(y)\, dxdy,$$

et

$$\int_a^b\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\, g(x)\, h(y) dxdy,$$

(et d'autres expressions analogues) je renvois à *E. S.* Chapitre I. On démontre que ces fonctions de λ sont à variation bornée dans l'intervalle $(-l, l)$, quel que soit l, et que les variations sont inférieures ou égales à

$$lk(x) \sqrt{\int_a^b |h(y)|^2 dy},$$

où à

$$\sqrt{\int_a^b |h(y)|^2 dy \int_a^b |g(x)|^2 dy}.$$

La formule d'Hilbert-Schmidt pour le noyau $K_n(x, y)$ peut s'écrire

$$\int_a^b K_n(x, y) h(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d_\lambda \int_a^b \theta_n(x, y|\lambda)\, h(y) dy.$$

On démontre, par un passage à la limite (*E. S.*, p. 43), que

$$\int_a^b \mathrm{K}(x,y)h(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d_\lambda \int_a^b \theta(x, y|\lambda)h(y)dy.$$

Si l'intégrale $\int_a^b |g(x)|k(x)dx$ existe, on a aussi (*E. S.*, p. 40)

$$\int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\, g(x)\, h(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda \int_a^b\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\, g(x)\, h(y)}{\lambda}.$$

En considérant le développement de la solution $\varphi_n(x)$ de (27) suivant les fonctions fondamentales $\varphi_{n,p}(x)$, on obtient, par un passage à la limite, une formule exprimant $\mathrm{T}(f, \lambda)$ au moyen de la fonction spectrale $\theta(x, y|\lambda)$. D'une manière analogue on peut généraliser d'autres formules valables pour les noyaux réguliers. Nous résumerons les résultats ainsi obtenus dans l'énoncé suivant :

Soit $\theta(x, y|\lambda)$ la fonction spectrale correspondant à une suite de réduites $\mathrm{K}_n(x, y)$ qui fournit une solution limite $\varphi = \mathrm{T}(f, \lambda)$ bien déterminée. Alors on a, $h(x)$ et $g(x)$ étant des fonctions à carré intégrable :

$$\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\, h(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} d_\lambda \int_a^b \theta(x, y|\lambda)\, h(y)dy, \tag{28}$$

$$\int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\, g(x)\, h(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda \int_a^b\int_a^b \theta(x,y|\lambda)g(x)h(y)dxdy}{\lambda}, \tag{29}$$

si $\int_a^b |g(x)|k(x)dx$ existe (1).

$$\varphi = \mathrm{T}(f, \lambda) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu \int_a^b \theta(x, y|\mu) f(y)dy, \tag{30}$$

$$\psi = \mathrm{T}'(g, \lambda) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu \int_a^b \overline{\theta(x, y|\mu)}\, g(y)dy \tag{31}$$

$$\int_a^b h(x)\, \overline{g(x)}dx \tag{32}$$

$$= \sum h_p \bar{g}_p - \sum\sum \mu_{pq} \bar{g}_p h_q + \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int_a^b\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\bar{g}(x)\, h(y)dxdy,$$

(1) Si $\mathrm{K}(x,y)$ est de la classe I il suffit de supposer que $g(x)$ appartient à l'ensemble $\overline{\mathrm{D}}$ introduit à la page 414.

où l'on a posé

$$h_p = \int_a^b h(x)\overline{\omega_p(x)}, \qquad g_p = \int_a^b g(x)\overline{\omega_p(x)}dx,$$

$$\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_a^b \int_a^b \theta(x, y \mid \lambda)\overline{\omega_p(x)}\omega_q(y)dxdy$$

$\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\cdots \omega_n(x)$, $\cdots$ *étant un système de fonctions orthogonales et normales qui engendre l'ensemble linéaire des solutions de l'équation*

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\omega(y)dy = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

D'après la définition des noyaux de la classe I ceux-ci ne peuvent admettre qu'une seule solution limite $\mathrm{T}(f)$. Il s'ensuit que chaque noyau de la classe I admet une fonction spectrale unique.

La fonction spectrale d'un noyau régulier jouit de certaines propriétés d'orthogonalité importantes qu'on peut exprimer par les formules [2]

$$\int_a^b \Delta_1\theta(x, s|\lambda)\Delta_2\theta(s, y|\lambda)ds = 0, \tag{33}$$

si les intervalles Δ_2 et Δ_1 n'empiètent pas l'un sur l'autre, et

$$\int_a^b \Delta\theta(x, s|\lambda)\Delta\theta(s, y|\lambda)ds = \Delta\theta(x, y|\lambda). \tag{34}$$

Ces relations n'ont pas toujours lieu pour une fonction spectrale quelconque. Cela tient à ce qu'on ne peut pas toujours effectuer le passage à la limite $n \to \infty$ sous le signe d'intégration dans les formules

$$\int_a^b \Delta_1\theta_n(x, s|\lambda)\,\Delta_2\theta_n(s, y|\lambda)ds = 0,$$

$$\int_a^b \Delta\theta_n(x, s|\lambda)\,\Delta\theta_n(s, y|\lambda)ds = \Delta\theta_n(x, y|\lambda).$$

Nous pouvons démontrer que *la fonction spectrale d'un noyau de la*

(1) Si $\mathrm{K}(x, y)$ est de la classe I tous les μ_{pq} sont nuls.

(2) On suppose que les limites des intervalles Δ, Δ_1, Δ_2 ne coïncident pas avec les points de discontinuité, nécessairement dénombrables, de $\theta(x,y \mid \lambda)$,

classe I satisfait aux relations d'orthogonalité (33) *et* (34). Partons des équations

$$\Delta_1\theta_n(x, y|\mu) - \lambda\int_a^b K_n(x, s)\,\Delta_1\theta_n(s, y|\mu)ds = \int_{\Delta_1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta_n(x, y|\mu)$$

$$\Delta_2\overline{\theta_n(x, z|\mu)} - \lambda\int_a^b K_n(s, x)\,\overline{\Delta_2\theta_n(s, z|\mu)}ds = \int_{\Delta_2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\overline{\theta_n(x, z|\mu)}.$$

Par un passage à la limite on peut dans cette formule omettre l'indice n. En utilisant la formule fondamentale $\int gT(f)dx = \int fT'(g)dx$ il vient

$$\int_a^b \Delta_1\theta(x, y|\mu)\int_{\Delta_1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\overline{\theta(x, y|\mu)}dx \tag{35}$$

$$= \int_a^b \overline{\Delta_2\theta(x, z|\mu)}\int_{\Delta_2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta(x, y|\mu)dx.$$

Cette équation a lieu pour toutes les valeurs non réelles de λ. On démontre qu'elle est équivalente aux relations d'orthogonalité (33) et (34).

Signalons encore le théorème suivant qui correspond au théorème de PARCIVAL pour les systèmes de fonctions orthogonales. Désignons par

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda)d_\lambda\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\,h(y)dy,$$

la limite en moyenne (par rapport à x), pour $l \to \infty$, de l'expression

$$\int_{-l}^{l}\omega(\lambda)d_\lambda\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\,h(y)dy.$$

Si $\theta(x,y|\lambda)$ *satisfait aux conditions d'orthogonalité* (33) *et* (34), *on a*

$$\int_a^b\left|\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda)d_\lambda\int_a^b\theta(x, y|\lambda)h(y)dy\right|^2 dx \tag{36}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|\omega(\lambda)|^2 d_\lambda\int_a^b\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\,\overline{h(x)}\,h(y)dxdy$$

$\omega(\lambda)$ *étant une fonction continue et* $h(x)$ *une fonction à carré intégrable* (1).

(1) Cf. *E. S.*, p. 49 et 227.

On peut compléter ce théorème de la manière suivante. Désignons par $G(h(x))$ la fonctionnelle linéaire

$$G(h(x)) = h(x) - \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda \int_a^b \theta(x, y|\lambda)h(y)dy.$$

On vérifie aisément la relation

$$\int_a^b G(h(x))\, \Delta\theta(x, y|\lambda)dx = 0.$$

Ceci posé, on a la formule suivante :

$$(37)\qquad \int_a^b \left| AG(h(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda)d_\lambda \int_a^b \theta(x, y|\lambda)\, h(y)dy \right|^2$$

$$= |A|^2 \int_a^b |G(h(x))|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\omega(\lambda)|^2 d_\lambda \int_a^b\int_a^b \theta(x, y|\lambda)\bar{h}(x)h(y)dxdy.$$

Nous avons vu qu'à chaque suite de réduites $K_n(x, y)$ pour laquelle $T_n(f)$ et $T'_n(g)$ tendent vers des solutions limites $T(f)$ et $T'(g)$ bien déterminées il correspond une fonction spectrale $\theta(x, y|\lambda)$ et une seule. Pour reconnaître si cette fonction spectrale est orthogonale, nous pouvons utiliser le théorème suivant. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction spectrale $\theta(x, y|\lambda)$ satisfasse aux conditions d'orthogonalité* (32) et (33) *est que* $T_n(f)$ *et* $T_n(g)$ *tendent fortement vers leurs limites pour* $n \to \infty$. Remarquons d'abord que nous pouvons exprimer le fait que $T_n(f)$ et $T_n'(f)$ sont fortement convergentes vers $T(f)$ et $T(g)$ par les équations

$$(38)\qquad D(T(f), f|\lambda) = 0, \qquad D(T'(g), g|\lambda) = 0.$$

Si ces relations sont remplies, nous dirons que $T(f)$ et $T'(g)$ sont des *solutions limites maximales* de (11) et (20). La nécessité de la condition du théorème s'obtient immédiatement, en tenant compte de la formule (36), si l'on remplace dans (38) $T(f)$ et $T'(g)$ par les expressions données par les formules (30) et (31). Pour voir que la condition est en même temps suffisante, nous supposerons que $T_n(f)$ et $T'_n(g)$ convergent fortement vers leurs limites. On a

$$\Delta\theta_n(x, y|\lambda) - \lambda \int_a^b K_n(x, s)\Delta\theta_n(s, y|\lambda)ds = \int_\Delta \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) d_\mu \theta_n(x, y|\mu).$$

Donc

$$\int_a^b \Delta\theta_n(x, y|\lambda)g(x)dx = \int_a^b \mathrm{T}'_n(g)\int_\Delta\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta_n(x, y|\mu)dx.$$

Comme $\mathrm{T}'_n(g)$ tend fortement vers sa limite, on trouve (Théorème III p. 410)

$$\int_a^b \Delta\theta(x, y|\lambda)g(x)dx = \int_a^b \mathrm{T}'(g)\int_\Delta\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta(x, y|\mu)dx.$$

On a aussi (formule (22))

$$\int_a^b \mathrm{T}\left(\int_\Delta\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta(x, y|\mu)\right)g(x)dx = \int_a^b \mathrm{T}'(g)\int_\Delta\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta(x, y|\mu)dx.$$

En remarquant que les relations ont lieu quel que soit g, il s'ensuit que

$$\mathrm{T}\left(\int_{\Delta_1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\theta(x, y|\mu)\right) = \Delta_1\theta(x, y|\mu).$$

Par le même raisonnement on trouve

$$\mathrm{T}'\left(\int_{\Delta_2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)d_\mu\overline{\theta(x, z|\mu)}\right) = \Delta_2\overline{\theta(x, z|\mu)}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la formule (22) pour aboutir à la relation (35) qui est équivalente aux relations d'orthogonalité (33) et (34).

Nous avons vu que les solutions limites $\mathrm{T}(f, \lambda)$ $\mathrm{T}'(g, \lambda)$ qui sont maximales sont particulièrement intéressantes parce que, pour elles, la fonction spectrale est orthogonale. Par les transformations

$$\mathrm{T}(f) = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}(f + \mathrm{U}(f)), \qquad \mathrm{T}'(f) = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda}(g + \mathrm{V}(g)),$$

les propriétés intégrales que possèdent les solutions maximales peuvent s'écrire sous la forme simple suivante

$$(39) \qquad \begin{aligned} \int \mathrm{U}(f)\overline{\mathrm{U}(f_1)}dx &= \int f\bar{f_1}dx, \\ \int \mathrm{V}(g)\overline{\mathrm{V}(g_1)}dx &= \int g\bar{g_1}dx, \\ \int \mathrm{U}(f)g dx &= \int \mathrm{V}(g)f dx. \end{aligned}$$

Nous signalons ici sans démonstration le théorème suivant. Si l'on a trouvé des fonctionnelles linéaires $T_1(f)$ et $T'_1(g)$ solutions respectives de (11) et de (20), définies sur certains ensembles linéaires M et M' de fonctions f et g à carré intégrable et satisfaisant aux relations (39), il est toujours possible de trouver une suite de réduites $K_n(x, y)$ telles que les solutions limites $T(f)$ et $T'(g)$ correspondantes coïncident avec les fonctionnelles $T_1(f)$ et $T'_1(g)$, lorsque f et g appartiennent à M ou à M'.

Pour que le noyau $K(x, y)$ *possède une fonction spectrale orthogonale il faut que les équations homogènes* (pour λ non réel)

$$\varphi - \lambda S(\varphi) = 0, \tag{40}$$

$$\psi - \lambda S'(\psi) = 0, \tag{41}$$

admettent le même nombre de solutions linéairement indépendantes. Voici la démonstration : Supposons, pour simplifier, que les nombres des solutions indépendantes soient finis. Considérons des fonctionnelles $U(f)$ et $V(g)$ correspondant à une fonction spectrale orthogonale. Démontrons d'abord que $U(\bar{\omega})$ est toujours une solution de (40) si ω est solution de (41). On a, en effet,

$$\omega - \lambda S'(\omega) = 0, \qquad \bar{\omega} - \bar{\lambda} S(\bar{\omega}) = 0,$$

$$\bar{\omega} - \lambda S(\bar{\omega}) = \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\omega},$$

d'où l'on conclut

$$T(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\omega}}{1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}} + \Phi,$$

où Φ est une solution de (40). On en déduit

$$U(\bar{\omega}) = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\bar{\lambda}} T(\bar{\omega}) - \bar{\omega} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\bar{\lambda}} \Phi.$$

Il s'ensuit que $U(\bar{\omega})$ est solution de (40). On démontre d'une manière analogue que $V(\bar{\Phi})$ satisfait à (41) si Φ est une solution quelconque de (40). Ceci posé, désignons par $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n$ un système complet de solutions orthogonales et normales de (40) et par $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_m$ un système analogue pour l'équation (41).

D'après les résultats que nous venons d'obtenir, on a

$$U(\overline{\omega}_p) = \sum_{v=1}^{n} a_{pv}\Phi_v, \qquad p = 1, 2, \cdots, m.$$

Nous avons, en outre

$$\int_a^b U(\overline{\omega}_p)\,\overline{U(\overline{\omega}_q)}dx = \sum_{v=1}^{n} a_{pv}\overline{a}_{qv} = \int_a^b \overline{\omega}_p\omega_q dx = \begin{cases} 0 & p \neq q, \\ 1 & p = q. \end{cases}$$

Les expressions $\sum_{v=1}^{n} a_{pv}\Phi_v$ $(p = 1, 2, \cdots, m)$ forment donc un système de formes linéaires et orthogonales à n variables. Il s'ensuit que $m \leqslant n$. En considérant les expressions $V(\overline{\Phi}_p)$ on trouve d'une manière analogue $n \leqslant m$. On a donc $n = m$, C. Q. F. D.

Supposons maintenant $m = n$. En utilisant un théorème énoncé précédemment nous pouvons démontrer de proche en proche l'existence de fonctionnelles U et V satisfaisant aux conditions (39) si f est orthogonale à $\overline{\omega}_p$, $(p = 1, 2, \cdots, n)$ et si g est orthogonale à $\overline{\Phi}_p (p = 1, 2, \cdots, n)$. On trouve en même temps que U et V sont déterminés sans ambiguité pour ces ensembles de fonctions. Il nous reste à définir $U(f)$ et $V(g)$ pour les $\overline{\omega}_p$ et les $\overline{\Phi}_p$. Nous pouvons poser

$$U(\overline{\omega}_p) = \sum_{v=1}^{n} a_{pv}\Phi_v,$$

où les a_{pv} sont les coefficients dans une matrice unitaire quelconque. Si les a_{pv} sont choisis, les expressions $V(\overline{\Phi}_p)$ sont complètement déterminées. On obtient le résultat : *Si les équations* (40) et (41) *ont le même nombre n de solutions linéairement indépendantes pour λ non réel, il existe pour le noyau* $K(x, y)$ *une infinité de fonctions spectrales orthogonales dépendant d'une transformation unitaire arbitraire à n variables.*

III. — Applications

Les formes hermitiques à une infinité de variables.

Il est presque évident que la théorie générale des équations intégrales à noyau hermitique embrasse comme cas particulier celle des formes hermitiques

$$A(x) = \sum_{p,\, q}^{\infty} a_{pq} x_p x_q$$

à une infinité de variables. On peut, en effet, faire correspondre à $A(x)$ un noyau hermitique $K(x, y)$ défini par les relations :

$$K(x, y) = a_{pq} \qquad \text{pour} \qquad \begin{cases} p - 1 < x < p, \\ q - 1 < y < q, \end{cases}$$

$$K(x, y) = 0 \qquad \text{sur les lignes} \qquad x = p, \qquad y = q,$$

$$p = 1, 2, \cdots, \qquad q = 1, 2, \cdots,$$

tel que l'on ait

$$\sum_{p,\, q}^{m} a_{pq} x_p x_q = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(x, y) h_m(x) h_m(g) dx dy,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} h_m(x) &= x_p \qquad \text{pour} \qquad p - 1 < x < p, \qquad\qquad p < m, \\ h_m(x) &= 0 \qquad\quad \text{»} \qquad\quad x > m. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les séries

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2,$$

soient convergentes quel que soit p. Cela revient à dire que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} |K(x, y)|^2 dy$$

est convergente. Considérons le système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = \alpha_p \qquad\qquad (p = 1, 2, \cdots).$$

En posant $\varphi(x) = x_p$ pour $p - 1 < x < p$ et $f(x) = \alpha_p$ pour $p - 1 < x < p$, on voit que la détermination de toutes les solutions

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dont la somme $\sum|x_p|^2$ converge est équivalente à la recherche des solutions à carré intégrable de l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty K(x, y)\varphi(y)dy = f(x).$$

En appliquant les résultats des chapitres précédents, on voit qu'un grand nombre des théorèmes que M. HILBERT a établi pour les formes quadratiques bornées subsistent sous les hypothèses que nous avons considéré ici.

Les fractions continues.

Considérons des formes quadratiques du type suivant

$$J(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p x_p^2 - 2\sum_{p=1}^{\infty} b_p x_p x_{p+1}.$$

Déjà M. HEINE (Handbuch der Theorie der Kugelfunktionen Bd. I. Teil II) a remarqué que la théorie de ces formes est étroitement liée à celle de la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 - \mu - \cfrac{b_1^2}{a_2 - \mu - \cfrac{b_2^2}{a_3 - \mu - \cdots}}}$$

Cette relation a été étudiée de plus près par M. HELLINGER et TOEPLITZ [1].

Si l'on considère le tableau des coefficients a_{pq} de la forme $J(x)$ $(J(x) = \sum a_{pq} x_p x_q)$, on voit que la série $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ est convergente quel que soit p (elle ne contient, en effet, qu'un nombre fini de termes). On peut donc appliquer la théorie générale à la forme $J(x)$. On retrouve ainsi la théorie de STIELTJES ainsi que certains résultats plus récents de MM. GROMMER et HAMBURGER. Au lieu de résumer ici mes conférences sur cette question je renvois le lecteur à mon ouvrage *E. S.* déjà cité p. 189-220, et à mon article sur les équations intégrales singulières dans les Comptes Rendus du sixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves.

(1) Voir HELLINGER et TOEPLITZ, Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Journal für Math.*, 1914 ; et E. HELLINGER, Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie, *Math. Ann.*, 1922, Band 86.

L'équation de Schrödinger.

Nous essayerons d'abord une déduction de l'équation de Schrödinger. Considérons un point matériel de masse m se mouvant dans un champ des forces ayant une fonction des forces U indépendante du temps. En vertu du principe de moindre action les trajectoires correspondant à l'énergie E sont déterminées par la condition de rendre minimum l'intégrale

$$\int_{P_0}^{P} \sqrt{2(U+E)}\,\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

P_0, et P étant deux points quelconques de la trajectoire. Écrivons, pour abréger, $2(U+E)=\omega$. On obtient les équations différentielles :

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\omega}\,\frac{dx}{ds}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\omega}}\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\omega}\,\frac{dy}{ds}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\omega}}\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\omega}\,\frac{dz}{ds}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\omega}}\frac{\partial\omega}{\partial z}.$$

En introduisant les notations

$$\sqrt{\omega}\,\frac{dx}{ds}=p,\qquad \sqrt{\omega}\,\frac{dy}{ds}=q,\qquad \sqrt{\omega}\,\frac{dz}{ds}=r,$$

on en déduit le système

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{dp}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\frac{dq}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{dn}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial z}}=\frac{ds}{\sqrt{\omega}}. \tag{42}$$

Or, on voit aisément que ces équations sont les équations différentielles des bicaractéristiques (ou plutôt la projection des bicaractéristiques dans l'espace) d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre et du type hyperbolique

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-C\omega(x,y,z)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \tag{43}$$

où C est une constante arbitraire. Les surfaces caractéristiques de (43) sont définies par l'équation

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2-C\omega=0. \tag{44}$$

Les bicaractéristiques sont les caractéristiques de cette équation du premier ordre (voir HADAMARD, *Propagation des ondes*). Les équations différentielles de ces caractéristiques sont les suivantes

$$(45)\qquad \frac{dx}{2p}=\frac{dy}{2q}=\frac{dz}{2r}=\frac{dp}{C\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\frac{dq}{C\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{dr}{C\frac{\partial\omega}{\partial z}}=\frac{dt}{2(p^2+q^2+r^2)},$$

où l'on a posé $\frac{\partial t}{\partial x}=p,\ \frac{\partial t}{\partial y}=q,\ \frac{\partial t}{\partial z}=r$. Remplaçons dans (45) $p,\ q,\ r$ par $p\sqrt{C}q,\ q\sqrt{C},\ r\sqrt{C}$. On obtient le système :

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}=\frac{dp}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\frac{dq}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial y}}=\frac{dr}{\frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial z}}.$$

En comparant avec les formules (42), on voit que *les trajets des bicaractéristiques dans l'espace coïncident avec les trajectoires du mouvement dynamique.* Les bicaractéristiques jouent le rôle de rayons pour le mouvement ondulatoire régi par l'équation (43).

Il est remarquable que la vitesse a de propagation suivant la bicaractéristique est différente de la vitesse dynamique v et cela quelle que soit la constante C. On déduit, en effet, de (45)

$$\frac{ds}{2\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{ds}{2\sqrt{C\omega}}=\frac{dt}{2C\omega},$$

d'où il suit

$$a=\frac{1}{\sqrt{C\omega}},$$

tandis qu'on a

$$v=\sqrt{\frac{\omega}{m}}.$$

Or, il est possible de choisir C de manière que v soit la vitesse de groupe de certaines ondes de (43) correspondant à différentes valeurs de E. Pour définir cette vitesse de groupe, il faut choisir, pour chaque valeur de E, une certaine fréquence ν, fonction de E. On peut aussi considérer E comme fonction de ν. Ceci posé, la vitesse de groupe b est définie par l'équation

$$\frac{1}{b}=\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{a}\right)=\frac{d}{d\nu}(\nu\sqrt{C}\cdot\sqrt{\omega})=\sqrt{\omega}\,\frac{d(\nu\sqrt{C})}{d\nu}+\nu\,\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{dE}{d\nu}.$$

En écrivant $b = v = \sqrt{\frac{m}{\omega}}$, et en utilisant la relation $\omega = 2(\mathrm{U} + \mathrm{E})$, on en déduit

$$(46) \qquad 2\mathrm{U}\frac{d(\nu\sqrt{\mathrm{C}})}{d\nu} + 2\mathrm{E}\frac{d(\nu\sqrt{\mathrm{E}})}{d\nu} + \nu\sqrt{\mathrm{C}}\frac{d\mathrm{E}}{d\nu} = \sqrt{m}.$$

Remarquons que E et C sont indépendants de x, y, z, tandis que U est une fonction de ces variables. Pour que (46) ait lieu il faut donc que le coefficient de U soit égal à zéro, c'est-à-dire

$$(47) \qquad \frac{d(v\sqrt{\mathrm{C}})}{d\nu} = 0.$$

L'équation (46) nous donne encore

$$(48) \qquad v\sqrt{\mathrm{C}}\frac{d\mathrm{E}}{d\nu} = \sqrt{m}.$$

De (47) et (48) on déduit maintenant les relations suivantes

$$\mathrm{E} = h\nu \qquad \text{(Relation de Planck)},$$

où h est une constante, et

$$\mathrm{C} = \frac{m}{\mathrm{E}^2}.$$

L'équation (43) peut donc s'écrire

$$(49) \qquad \Delta\mathrm{V} - 2m\frac{\mathrm{U} + \mathrm{E}}{\mathrm{E}^2}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial t^2} = 0.$$

En posant

$$\mathrm{V} = e^{2\pi i\nu t}\varphi(x, y, z),$$

on obtient

$$(50) \qquad \Delta\varphi + 2m(\mathrm{U} + \mathrm{E})\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\varphi = 0.$$

Le point fondamental dans la théorie de M. Schrödinger est l'hypothèse que les « niveaux d'énergie » qui correspondent aux « orbites possibles » de la théorie de M. Bohr sont les valeurs caractéristiques de l'équation (50), E étant le paramètre, c'est-à-dire les valeurs de E, pour lesquelles l'équation (50) admet une solution φ à carré intégrable, le domaine d'intégration étant l'espace entier.

Nous allons étudier de plus près le cas où le champ des forces U est créé par l'attraction newtonienne d'un nombre fini de masses concentrées en des points fixes dans l'espace. Nous montrerons que l'équation (50) ne peut admettre de solution à carré intégrable que pour un nombre dénombrable de valeurs réelles de E. En écrivant $\lambda = E\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2$, nous pouvons écrire l'équation (50) sous la forme

$$\Delta\varphi + (W + \lambda)\varphi = 0, \tag{51}$$

où

$$W(p) = \sum \frac{\alpha_v}{r_v} + \beta,$$

les α_v et β étant des constantes positives et les r_v désignant les distances du point variable p à certains points fixes. Nous chercherons d'abord une fonction de GREEN $G(p, q)$ de l'équation

$$\Delta\varphi - \varkappa^2\varphi + W\varphi = 0,$$

où $\varkappa$ a une valeur que nous allons préciser plus loin. En adjoignant l'équation

$$\Delta H - \varkappa^2 H = 0,$$

qui admet la solution $H(p, q) = \frac{e^{-\varkappa r_{pq}}}{r_{pq}}$ (r_{pq} désignant la distance entre les points p et q), et en appliquant une formule de GREEN, on démontre que la fonction $G(p, p_1)$ peut s'obtenir par la résolution de l'équation intégrale

$$G(p, p_1) - H(p, p_1) - \frac{1}{4\pi}\int H(p, q)U(q)G(q, p_1)d\omega_q = 0. \tag{52}$$

En introduisant les fonctions

$$\begin{aligned} \Omega(p, q) &= \sqrt{W(p)}\,H(p, q)\sqrt{W(q)}, \\ L(p, q) &= \sqrt{W(p)}\,G(p, q)\sqrt{W(q)}, \end{aligned} \tag{53}$$

nous pouvons écrire (52) sous la forme

$$L(p, p_1) - \frac{1}{4\pi}\int \Omega(p, q)L(q, p_1)d\omega_q = \Omega(p, p_1). \tag{54}$$

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin du théorème suivant (*E. S.*, p. 12) : S'il existe une fonction positive $A(p)$ telle que

$$\int |K(p, q)|A(q)d\omega_q < kA(p)$$

(k = constante indépendante de p) $K(p, q)$ est un noyau borné (au sens de M. HILBERT) dont la borne ne dépasse pas k. Prenons $A(q) = \sqrt{W(q)}$. On a

$$\int \Omega(p, q)\, A(q) d\omega_q = A(p) \int \frac{e^{-\varkappa r_{pq}}}{r_{pq}} \left(\sum_{v=1}^{N} \frac{\alpha_v}{r_{pq_v}} + \beta \right) d\omega_q.$$

On peut prendre $\varkappa$ suffisamment grand pour que l'intégrale du second membre soit inférieure à un nombre positif $< 4\pi$ quel que soit p. $\Omega(p, q)$ est donc un noyau borné et l'on peut résoudre l'équation (54) par la série de Neumann. La solution obtenue $L(p, q)$ est, elle aussi, un noyau borné. La fonction $G(p, q)$ cherchée s'obtient maintenant par la formule (53). En remarquant que $\sqrt{W(p)} < \sqrt{\beta}$ on trouve que $G(p, q)$ est un noyau borné.

Ceci posé, on démontre (par une formule de GREEN) que chaque solution à carré intégrable de l'équation différentielle (51) est en même temps solution de l'équation intégrale

$$\varphi(p) - \frac{\lambda + \varkappa^2}{4\pi} \int G(p, q)\, \varphi(q) d\omega_q = 0,$$

et inversement. Le noyau de cette équation étant un noyau borné d'HILBERT, il s'ensuit que l'équation (50) ne peut admettre de solution à carré intégrable que pour un nombre dénombrable de valeurs réelles de λ. C. Q. F. D.

(1) Cf *E. S.*, pp. 176-179.

(Conférences faites à l'Institut H. Poincaré entre le 30 Avril et le 24 Mai 1930).