ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

V. BROUSSEAU

# Espaces de Krein et index des systèmes hamiltoniens

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 7, n° 6 (1990), p. 525-560
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1990__7_6_525_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 7, n° 6, 1990, p. 525-560. *Analyse non linéaire*

# Espaces de Krein et index des systèmes hamiltoniens

par

**V. BROUSSEAU**

CEREMADE, Université Paris-Dauphine,
place du Maréchal de Lattre de Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France

---

RÉSUMÉ. — On présente quelques notions et résultats de la théorie des espaces de Krein, qui généralisent à la fois les espaces de Hilbert et de Minkowski. On introduit en particulier la « trace de Krein » de certains opérateurs. Ce travail est ensuite appliqué à une définition de l'index d'un système hamiltonien linéaire périodique, dont on montre qu'elle généralise celles de Morse-Ekeland et de Conley et Zehnder, qui sont donc équivalentes.

*Mots clés :* Index, opérateur normal, produit de Hilbert, produit de Krein, signe de Krein, trace de Krein, système hamiltonien, résolvante, opérateur symplectique.

ABSTRACT. — Some concepts and some results of the Krein-Spaces theory are introduced. We define the concept of "Krein trace". This is then applied to a new, general definition of the index of a linear periodic hamiltonian system, which is shown to generalize the one of Morse-Ekeland and the one of Conley and Zehnder, which are then equivalent.

---

*Classification A.M.S. :* Équations differentielles.

TABLE



## NOTATIONS EMPLOYÉES

| | |
|---|---|
| $\#$, | cardinal. |
| $\mathscr{P}$, | ensemble des parties. |
| $\mathbb{N}_n$, | $\{1, 2, \ldots, n\}$. |
| $\bar{\mathbb{N}}$, $\bar{\mathbb{R}}$, | $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. |
| $\frac{\mathbb{N}}{k}$, $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, | $\{n/k \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, etc. |
| U, | cercle unité de $\mathbb{C}$. |
| $U_k$, | $\{e^{2i\pi(n/k)} / n \in \mathbb{N}_k\}$. |
| $\lvert\ \rvert$, | valeur absolue, module. |
| $[\ ]_+$, $[\ ]_-$, | partie positive, partie négative. |
| E, F, | partie entière, partie fractionnaire. |
| !, | factorielle. |
| Ln, | logarithme népérien. |
| $1_B$, | indicatrice du borélien B. |
| $\mu_k$, | probabilité de comptage sur $U_k$. |
| $\mu$, | probabilité de Lebesgue sur U. |
| Id, | Identité. |
| $I_n$, $I_E$, | identité sur $\mathbb{R}^n$, sur l'espace E. |
| J, | $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. |

| | |
|---|---|
| p. s., | produit scalaire (carrés strictement positifs). |
| p. p. s., | produit pseudo scalaire (non nuls). |
| (H; $(.,.)$), | structure d'espace de Hilbert. |
| $\{K; (.,.); \langle .,. \rangle\}$, | structure d'espace de Krein (ou d'espace de Krein faible). |
| $\dot{+}$, | somme directe (d'espaces ou d'opérateurs). |
| $(+)$, $\langle + \rangle$, etc., | somme directe orthogonale pour le produit $(.,.)$, $\langle .,. \rangle$, etc. |
| $^t$, $^\tau$, | transposition pour le produit $(.,.)$, $\langle .,. \rangle$. |
| $\langle (+) \rangle$, | somme directe biorthogonale |
| sgn, Tr, Det | signe (au sens usuel), trace, déterminant. |
| sgk, Trk, Detk, | signe de Krein, trace de Krein, déterminant de Krein. |
| $\mathscr{L}$(E; F), | espace des applications linéaires continues de E dans F. |
| $\hookrightarrow$, | immersion compacte. |
| Sp, | spectre. |

## I. ESPACES DE KREIN

### A. Rappels

On désigne par « *produit scalaire* » la forme bilinéaire ou sesquilinéaire symétrique qui dérive d'une forme quadratique définie positive, et par « *produit pseudo scalaire* » celle qui dérive d'une forme quadratique générale. Si cette dernière est non dégénérée, on dit que le p. p. s. est non dégénéré.

Un *espace de Krein* est un espace réel ou complexe muni d'un p. s. $(.,.)$ et d'un p. p. s. $\langle .,. \rangle$ qui vérifient certains critères. Le produit scalaire doit munir l'espace d'une structure de Hilbert. Il définit par là la *topologie de l'espace de Krein*, qui est par définition celle de la norme hilbertienne. Quant au p. p. s., il doit être pour cette topologie et continu, et « coercif ». Si l'on définit le *quotient* des deux produits

$$A = \frac{\langle .,. \rangle}{(.,.)} \tag{1.1}$$

par l'identité

$$(A .,.) \equiv \langle .,. \rangle \tag{1.2}$$

la *continuité* revient à dire que A est borné, et la *coercivité* signifie que A est d'inverse borné.

Étant donné $\{K; (.,.); \langle .,. \rangle\}$ une structure de Krein, on appelle $(.,.)$ son « *produit de Hilbert* » et $\langle .,. \rangle$ son « *produit de Krein* ».

Étant donnés $\langle .,. \rangle_N$ et $\langle .,. \rangle_P$ deux p. p. s. sur un espace, on définit formellement leur quotient, par analogie avec les formules (1), comme l'endomorphisme :

$$A=\frac{\langle .,. \rangle_N}{\langle .,. \rangle_P} \tag{2.1}$$

donné par l'identité :

$$\langle A .,. \rangle_P \equiv \langle .,. \rangle_N. \tag{2.2}$$

On appelle $\langle .,. \rangle_N$ le numérateur et $\langle .,. \rangle_P$ le dénominateur. Si le dénominateur est un produit de Krein, on a alors quelques résultats de base.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\{K; (.,.); \langle .,. \rangle\}$ *un espace de Krein. Soit* $\langle .,. \rangle_N$ *un p. p. s. continu pour sa topologie. Alors le quotient de* $\langle .,. \rangle_N$ *par le produit de Krein* $\langle .,. \rangle$ *est un endomorphisme continu.* □

*Démonstration.* — Ce résultat est une application simple de la continuité du numérateur et de la coercivité du dénominateur. On peut en effet écrire le produit de quotients suivant :

$$\frac{\langle .,. \rangle_N}{\langle .,. \rangle}=\frac{(.,.)}{\langle .,. \rangle}\times\frac{\langle .,. \rangle_N}{(.,.)}=\left(\frac{\langle .,. \rangle}{(.,.)}\right)^{-1}\times\frac{\langle .,. \rangle_N}{(.,.)} \tag{3}$$

et le quotient s'écrit donc, d'après les hypothèses, comme le produit de deux endomorphismes continus. □

Ce théorème a un analogue dans le cas où l'on a affaire à deux espaces de Krein $\{K'; (.,.)'; \langle .,. \rangle'\}$ et $\{K''; (.,.)''; \langle .,. \rangle''\}$ tels qu'il y ait immersion compacte du premier dans le second, ce qu'on note :

$$(K'; (.,.)') \subsetneq (K''; (.,.)''). \tag{4}$$

THÉORÈME 2. — *Sous ces hypothèses, le quotient du produit de Krein de* $K''$ *par le produit de Krein de* $K'$ *est un endomorphisme compact.* □

*Démonstration.* — On décompose cette fois le quotient en produit de trois quotients, tous continus,

$$\frac{\langle .,. \rangle''}{\langle .,. \rangle'}=\left(\frac{\langle .,. \rangle'}{(.,.)}\right)^{-1}\times\frac{(.,.)''}{(.,.)'}\times\frac{\langle .,. \rangle''}{(.,.)''} \tag{5}$$

et on applique la compacité du second d'entre eux, qui découle de l'hypothèse (4). □

Signalons enfin le résultat très simple suivant, que nous donnons sans démonstration.

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses précédentes, le quotient est symétrique par rapport au p. p. s. numérateur et par rapport au p. p. s. dénominateur :*

$$\langle A .,. \rangle_N \equiv \langle .,A . \rangle_N, \qquad \langle A .,. \rangle'' \equiv \langle .,A . \rangle'' \tag{6.1}$$

$$\langle A\,.,.\rangle_D \equiv \langle\,.,A\,.\rangle_D, \qquad \langle A\,.,.\rangle' \equiv \langle\,.,A\,.\rangle'. \quad \square \tag{6.2}$$

Un quotient faisant référence à deux produits scalaires ou pseudo-scalaires, nous sommes amenés à définir la *somme biorthogonale* de deux espaces ou de deux opérateurs. Il s'agit bien sûr d'une somme orthogonale pour deux produits. Selon le contexte, il pourra s'agir :

– lorsqu'on parle d'un espace de Krein, de son produit de Hilbert et de son produit de Krein;

– lorsqu'on parle d'un quotient, de son produit numérateur et de son produit dénominateur.

## B. Espaces de Krein faibles

Un produit de Krein comprend des carrés strictement positifs, strictement négatifs, mais pas de carré nul, et ce en raison de la coercivité de ce produit par rapport au produit de Hilbert. Mais nous aurons besoin d'une notion plus large, autorisant la présence d'un nombre fini de carrés nuls. Nous définissons à cet effet la structure d'espace de Krein faible.

Soit $\underline{\{K; (.,.)_K; \langle .,. \rangle_K\}}$ un *espace de Krein* réel (respectivement complexe) et $\underline{(E; (.,.)_E)}$ un espace euclidien, (respectivement hermitien), c'est-à-dire un *Hilbert de dimension finie*. Soit F la somme directe orthogonale des hilberts K et E.

$$(F; (.,.)_F) = (K; (.,.)_K)(+)(E; (.,.)_E) \tag{1.1}$$

On a donc

$$((u_K, u_E), (v_K, v_E))_F \equiv (u_K, v_K)_K + (u_E, v_E)_E \tag{1.2}$$

On étend à F le produit de Krein $\langle .,. \rangle_K$ comme suit :

$$\langle (u_K, u_E), (v_K, v_E) \rangle_F \equiv \langle u_K, v_K \rangle_K \tag{2}$$

La structure $\{F; (.,.)_F; \langle .,. \rangle_F\}$ est par définition un *espace de Krein faible*. Le produit $(.,.)_F$ s'appelle toujours son produit de Hilbert, et le produit $\langle .,. \rangle_F$ est son *produit de Krein faible*. La *topologie* régnant sur cet espace est bien sûr celle du Hilbert $(F; (.,.)_F)$, en d'autres termes la topologie produit.

Il convient de noter que l'espace E est quelque chose d'intrinsèque à une structure de Krein faible donnée. On peut en effet, étant donné un espace de Krein faible, retrouver à partir de quel E il a été formé : c'est l'espace vectoriel sous-jacent aux plus grands espaces affines $\mathscr{A} \not\ni 0$ sur lesquels le carré $\langle x, x \rangle_F$ est constant. En revanche, plusieurs K peuvent avoir été employés à la construction du Krein-faible F. On dit que K est un *espace non nul* de F et que E est son *espace nul*.

On vérifie facilement que les théorèmes de la section A s'appliquent encore lorsque le produit numérateur est un produit de Krein faible, en faisant attention au point suivant.

La définition de propriétés comme la symétrie, etc. doit être modifiée. Au lieu de dire

$$^{\tau}A = A \qquad (= -A,\ = A^{-1}) \tag{3.1}$$

on dira

$$(.\,,A\,.) \equiv (A\,.\,,.) \qquad (\equiv -(A\,.\,,.),\ \equiv (A^{-1}\,.\,,.)) \tag{3.2}$$

On vérifie sans peine qu'en l'absence de carrés nuls les deux définitions (3) coïncident.

## C. Espaces liés au problème

On considère $H^{1/2}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\,\mathbb{R}^2)$, l'espace des fonctions T-périodiques demi-dérivables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Pour la définition des structures $H^{1/2}$, on renvoir à ([Be], II, 1, 2, p. 54). Cet espace a une structure naturelle d'espace de Hilbert.

On considère également $H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\,\mathbb{R}^2)$, l'espace des fonctions de $H^{1/2}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\,\mathbb{R}^2)$ dont la moyenne est nulle.

Posons :

$$e_1(t) \equiv (1, 0) \tag{1.1}$$

$$e_2(t) \equiv (0, 1) \tag{1.2}$$

et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

$$a_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}}\left(\cos\frac{2k\pi t}{T},\ -\sin\frac{2k\pi t}{T}\right) \tag{1.3}$$

$$b_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}}\left(\sin\frac{2k\pi t}{T},\ \cos\ldots\right) \tag{1.4}$$

$$c_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}}(\cos\ldots,\ \sin\ldots) \tag{1.5}$$

$$d_k(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2k}}(\sin\ldots,\ -\cos\ldots). \tag{1.6}$$

Formons avec ces fonctions les systèmes :

$$\beta = \{e_1, e_2, a_k, b_k, c_k, d_k;\ k \in \mathbb{N}^*\} \tag{2.1}$$

$$\beta_0 = \beta - \{e_1, e_2\} \tag{2.2}$$

Il est facile de voir que le produit scalaire admettant $\beta$ pour base orthonormée engendre la topologie de $H^{1/2}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\,\mathbb{R}^2)$. On note ce produit scalaire $(.\,,.)_{1/2}$.

De même, $\beta_0$ apparaît comme une base hilbertienne de $H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$. On conserve la notation $(.,.)_{1/2}$ pour le produit scalaire restreint.

On va maintenant munir $H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$ d'une structure d'espace de Krein. On note :

$E_+$ l'espace engendré par les $a_k$ et les $b_k$,

$E_-$ l'espace engendré par les $c_k$ et les $d_k$,

$E_0$ l'espace des fonctions constantes :

$$E_+=\overline{\mathrm{Vect}}(a_k,\,b_k;\,k\in\mathbb{N}^*) \tag{3.1}$$

$$E_-=\overline{\mathrm{Vect}}(c_k,\,d_k;\,k\in\mathbb{N}^*) \tag{3.2}$$

$$E_0=\overline{\mathrm{Vect}}(e_1,\,e_2) \tag{3.3}$$

Les projecteurs $(.,.)_{1/2}$-orthogonaux sur $E_+$, $E_-$, $E_0$ sont respectivement notés $P_+$, $P_-$, $P_0$. On définit alors le produit pseudo-scalaire $\langle .,. \rangle_{1/2}$ par :

$$\langle f, g\rangle_{1/2}\equiv((P_+-P_-)f,\,g)_{1/2} \tag{4}$$

Le point crucial est que $E_+$ et $E_-$ sont orthogonaux *pour le produit scalaire* $(.,.)_{1/2}$, *donc le produit défini*. Grâce à cela, l'espace $H_0^{1/2}$ muni du p. s. $(.,.)_{1/2}$ et du p. p. s. $\langle .,. \rangle_{1/2}$ a une structure d'espace de Krein, que nous notons $K_0^{1/2}$ :

$$K_0^{1/2}=H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\,\mathbb{R}^2);\,(.,.)_{1/2};\,\langle .,. \rangle_{1/2}\} \tag{5}$$

Nous avons jusqu'à présent introduit deux espaces de Hilbert, dont un de Krein.

Nous introduisons encore quatre espaces de Hilbert, à savoir $L^2$, $L_0^2$, $H^2$ et $H_0^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$. L'indice zéro signifie la restriction aux fonctions de moyenne nulle; cela étant, le sens des notations est clair. Les deux premiers hilberts sont munis du produit scalaire $L^2$, que nous notons $(.,.)_0$. Les deux derniers sont munis du produit scalaire $H^1$. Il est entendu que les constantes multiplicatives ont été convenablement choisies.

$$(f,g)_0\equiv\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,dt \tag{6.1}$$

$$(f,g)_1\equiv\frac{1}{T}\int_0^T (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,dt. \tag{6.2}$$

On pose :

$$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{7}$$

On vérifie alors, au moyen des formules (1.3)-(1.6), que pour une fonction $C^1$ $x$, on a :

$$(J\dot{x},\,x)_0=\langle x,\,x\rangle_{1/2}. \tag{8}$$

Comme les fonctions $C^1$ sont denses dans les six espaces considérés, on étendra formellement l'égalité (8) à tous leurs éléments.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ et non plus dans $\mathbb{R}^2$. Toutes les définitions précédentes d'espaces et de produits s'étendent facilement au moyen de sommes biorthogonales directes $n$-uples. Les fonctions définies en (1) doivent acquérir un indice supplémentaire $l$ variant entre 1 et $n$. La formule (5) doit se réécrire

$$K_0^{1/2} = \{ H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n});\ (.,.)_{1/2};\ \langle .,. \rangle_{1/2} \} \tag{9}$$

et la formule (8) ne varie pas, mais le J qu'elle utilise doit alors s'entendre

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Il nous reste à munir $H^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n})$, qui comprend de plus les fonctions constantes, d'une structure $K^{1/2}$ d'espace de Krein faible. On le fait naturellement à partir de l'espace de Krein $K_0^{1/2}$. Assimilons à $\mathbb{R}^{2n}$ euclidien l'espace des fonctions constantes de $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, et dénotons par $(.,.)$ le produit euclidien canonique. On a la somme directe orthogonale de hilberts :

$$\begin{aligned}(H^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n});\ (.,.)_{1/2}) \\ = (H_0^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n});\ (.,.)_{1/2}) (+) (\mathbb{R}^{2n};\ (.,.))\end{aligned} \tag{11}$$

Le produit de Krein $\langle .,. \rangle_{1/2}$ de $K_0^{1/2}$ donne alors le produit de Krein faible de $K^{1/2}$ selon le procédé décrit en B(2). On constate que le carré de $x$ pour le produit ainsi construit vaut encore $(J\dot{x}, x)_0$, lorsque la fonction $x$ est assez lisse. Cela justifie que l'on conserve pour ce produit de Krein faible la notation $\langle .,. \rangle_{1/2}$ et que l'on étende formellement l'équation (8) à tout $H^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n})$. On note alors la structure de Krein faible :

$$K^{1/2} = \{ H^{1/2}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\ \mathbb{R}^{2n});\ (.,.)_{1/2};\ \langle .,. \rangle_{1/2} \}. \tag{12}$$

Mentionnons enfin l'espace de Krein de dimension finie qui joue un rôle essentiel en géométrie symplectique et dans la théorie des index de systèmes hamiltoniens. Considérons l'espace hermitien canonique de dimension $2n$. Le produit hermitien n'est autre que le complexifié du produit euclidien standard de $\mathbb{R}^{2n}$, dont nous conservons la notation. Nous convenons, pour être cohérent avec [YS] (*voir* [YS], I, 1.1, (1.1), p. 2) que ce produit est sesquilinéaire en sa première variable et linéaire en sa seconde variable :

$$((u_1, \ldots, u_{2n}), (v_1, \ldots, v_{2n})) = \sum_{j=1}^{2n} u_j \bar{v}_j \tag{13}$$

L'espace hermitien canonique $(\mathbb{C}^{2n}, (.,.))$ est déjà en lui-même un hilbert. Nous lui adjoignons un produit de Krein ainsi défini :

(14) $$\langle .,. \rangle \equiv (i\mathrm{J}\, .,.)$$

En cela, nous suivons toujours exactement [YS] (*voir* [YS], III, 1.1, (1.1), p. 156, et p. 158 ligne $(-2)$, p. 159 ligne 1). On remarque immédiatement que $\langle .,. \rangle$ a $n$ carrés positifs, $n$ négatifs, et zéro carré nul. Par conséquent,

$$\{\mathbb{C}^{2n}; (.,.); \langle .,. \rangle\} \tag{15}$$

est bien une structure de Krein.

Nous avons à présent introduit tous les espaces de Hilbert, de Krein et de Krein faibles, qui ont pour nous une valeur générale, c'est-à-dire qui ne dépendent pas d'un système hamiltonien particulier.

### D. Signe de Krein d'une valeur propre

La notion de signe de Krein joue un rôle essentiel dans la construction d'index associés à un système hamiltonien. Nous la présentons brièvement.

Soit $\langle .,. \rangle$ un produit de Krein et $\tau$ la transposition pour ce produit. Soit $\Gamma$ le lieu dans $\mathbb{C}$ des solutions de :

$$\bar{z} = \varphi(z) \tag{1}$$

où $\varphi(z)$ signifie $z$, respectivement $-z$, respectivement $1/z$. $\Gamma$ coïncide donc avec l'axe réel, respectivement l'axe imaginaire respectivement le cercle unité.

Soit A un opérateur $\varphi$-normal de l'espace de Krein, c'est-à-dire normal et vérifiant de plus :

$$^{\tau}\mathrm{A} = \varphi(\mathrm{A}). \tag{2}$$

Dans un espace réel, A est donc symétrique, respectivement antisymétrique, respectivement orthogonal. Dans un espace complexe, A est hermitien, respectivement antihermitien, respectivement unitaire.

On considère $\lambda$, valeur propre de A de multiplicité finie. Soit $m$ sa multiplicité, soit $\mathrm{E}_\lambda$ son espace caractéristique. Dénotons par E l'espace de Krein tout entier, et par $\mathrm{E}_\lambda^\perp$ l'espace des vecteurs $\langle .,. \rangle$ orthogonaux à $\mathrm{E}_\lambda$. Formulons deux hypothèses sur $\lambda$, la première disant qu'elle se trouve sur $\Gamma$ :

$$\bar{\lambda} = \varphi(\lambda) \tag{3}$$

la deuxième imposant, d'une part, la *multiplicité finie*, garantissant, d'autre part, que $\lambda$ est un *point isolé* du spectre :

$$\mathrm{Dim}\, \mathrm{E}_\lambda < \infty \tag{4.1}$$

$$\exists r > 0/\mu \in \mathbb{C}, \quad 0 < |\lambda - \mu| < r \;\Rightarrow\; \|(\mathrm{A} - \mu \mathrm{I})^{-1}\| < \infty \tag{4.2}$$

L'ensemble des complexes vérifiant l'hypothèse (4) s'appelle le *spectre discret* (*voir* [AG], IV, 48, p. 119, ligne 14). On a le :

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses* (3) *et* (4), *l'espace de Krein est la somme directe* (1), *et donc la somme orthogonale directe, de* $E_\lambda$ *et* $E_\lambda^\perp$ :

$$E = E_\lambda \dot{+} E_\lambda^\perp = E_\lambda \langle + \rangle E_\lambda^\perp. \quad \square \tag{5}$$

*Démonstration.* — Posons

$$P_\lambda = \frac{1}{2 i \pi} \int_\gamma (\mu I - A)^{-1} \, d\mu \tag{6}$$

où $\gamma$ est un lacet dans le disque ouvert complexe de rayon $r$ et de centre $\lambda$, qui tourne une fois autour de ce centre dans le sens trigonométrique. On vérifie classiquement que $P_\lambda$ est indépendant du lacet particulier choisi, et que c'est un projecteur sur l'espace $E_\lambda$.

Utilisons alors l'hypothèse (3). Puisque $\lambda$ vérifie cette identité, on peut choisir un lacet invariant par $\varphi$ :

$$\{ z / z \in \gamma \} = \{ \varphi(z) / z \in \gamma \}. \tag{7}$$

Pour un tel lacet, la définition (6) rend évident que $P_\lambda$ est $\langle .,. \rangle$-orthogonal. Mais en vertu de l'hypothèse (4), $P_\lambda$ est continu. Par conséquent, et c'est là le point essentiel, le projecteur $\langle .,. \rangle$-orthogonal sur $E_\lambda$ est continu.

Par suite, celui sur $E_\lambda^\perp$ l'est aussi. Les domaines de ces projecteurs sont donc E tout entier, et tout vecteur de E se décompose en la somme d'un vecteur de $E_\lambda$ et d'un vecteur de $E_\lambda^\perp$. Cette décomposition est clairement unique. La somme de ces deux espaces est donc bien directe.

Q.E.D. $\square$

Il en résulte que $P_\lambda$ est le projecteur de Riesz associé à $E_\lambda$. De plus on a le

COROLLAIRE 1. — *Le produit* $\langle .,. \rangle$ *est non dégénéré sur* E. $\square$

*Démonstration.* — Par définition des espaces de Krein, ce produit est non dégénéré sur l'espace E tout entier. Ce fait et la formule (5) entraînent le résultat. $\square$

(1) Le professeur Langer a attiré notre attention sur le fait que dans un espace de Krein cette somme n'a pas en principe a être directe. Ce point constitue le piège fondamental de ces espaces. Il n'est dû ni à la dimension infinie ni à la métrique indéfinie, mais à la combinaison des deux. Il n'a pas lieu dans un espace de Hilbert, ni dans un espace finidimensionnel de Krein. Par conséquent, le théorème 1 joue un rôle crucial dans la définition du signe de Krein.

DÉFINITION 1. — La signature de Krein d'une valeur propre vérifiant les hypothèses (3) et (4) est la signature du produit de Krein restreint à son espace caractéristique.

On note cette signature $(p, q)$, où $p$ est le nombre de carrés strictement positifs et $q$ le nombre de carrés strictement négatifs. Le corollaire 1 peut alors se réénoncer :

$$p+q=m \tag{8}$$

Il est souvent commode d'individualiser les valeurs propres. On dira dans ce cas que sur les $m$ valeurs propres coïncidant en $\lambda$, $p$ sont positives et $q$ sont négatives, (ou bien Krein-positives et Krein-négatives, lorsqu'il y a risque d'équivoque avec le signe au sens usuel du terme).

Dans le cas de l'espace de Krein C (15), [YS] désigne par valeurs propres de première (respectivement seconde) sorte outre les valeurs propres Krein-positives (respectivement Krein-négatives), celles dont le module est strictement inférieur (respectivement supérieur) à un.

Dans le cas des espaces de *dimension finie*, et en particulier de l'espace C (15), les valeurs propres comptées avec leur multiplicité sont en nombre fini. Il en résulte, primo, que l'hypothèse (4) est toujours automatiquement vérifiée, et, secondo, que l'on peut former des combinaisons linéaires (ou des produits de puissances entières) de toutes les valeurs propres. Ces deux points permettent de définir les notions importantes de trace de Krein et de déterminant de Krein.

DÉFINITION 2. — Soit $\varphi(z) \equiv z$ (ou $-z$). Soit A un endomorphisme normal d'un espace de Krein finidimensionnel vérifiant (2). Soit $\Gamma$ la courbe de $\mathbb{C}$ définie par (1). On appelle trace de Krein de cet endomorphisme, et l'on note Trk A, la différence de la somme de ses valeurs propres Krein-positives et de la somme de ses valeurs propres Krein-négatives :

$$\operatorname{trk} A = \sum_{\lambda \in \Gamma \cap \operatorname{Sp}(A)} \lambda \operatorname{sgk} \lambda \tag{9}$$

où les $\lambda$ sont individualisées, Sp A désigne le spectre de A, et sgk $\lambda$, le signe de Krein de la valeur propre $\lambda$. □

DÉFINITION 3. — Soit $\varphi(z) = z^{-1}$ et A vérifiant (2). Le déterminant de Krein de A est noté Detk A et vaut :

$$\operatorname{Detk} A = \prod_{\lambda \in \Gamma \cap \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{(\operatorname{sgk} \lambda)}. \tag{10}$$

*Remarque* 1. — Si l'espace de Krein est en fait un espace euclidien, la notion de trace de Krein (respectivement de déterminant de Krein) coïncide avec la notion usuelle de trace (respectivement de déterminant).

*Remarque* 2. — Étant donné un endomorphisme Krein antisymétrique ou antihermitien, le déterminant de Krein de son exponentielle est égal à l'exponentielle de sa trace de Krein.

Il est clair que la trace de Krein (respectivement le déterminant de Krein) est une fonction *homogène* de degré égal à un (respectivement à la dimension de l'espace). Par ailleurs, on établit en appliquant ([YS], III, 2.10, théorème, p. 191, ligne 18) qu'il s'agit de fonctions *continues*. Toutefois, la trace de Krein n'est *pas en général linéaire*. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ muni du p. p. s. $x^2-y^2$, les matrices symétriques

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \tag{11}$$

ont pour trace de Krein la quantité

$$\operatorname{signe}(a-c)\sqrt{[(a-c)^2-4b^2]_+} \tag{12}$$

où $[x]_+ := \frac{1}{2}(|x|+x)$ désigne la partie positive de $x$.

DÉFINITION 4. — Soit A opérateur $\varphi$-normal. On dit que $\lambda$ valeur propre de A est indéfinie si :

— elle appartient au spectre discret

— elle est sur $\Gamma$

— la restriction a son espace invariant du carré associé au produit rendant A normal est une forme quadratique indéfinie.

$$p \neq 0, \qquad q \neq 0. \tag{13}$$

On dit qu'elle est définie si elle appartient au spectre discret et à $\Gamma$, et que soit $p$ soit $q$ est nul. La définition ne s'applique pas aux valeurs propres ne vérifiant pas simultanément et l'hypothèse (3) et l'hypothèse (4). □

LEMME 1. — *En dimension finie, si* A *est un endomorphisme z-normal (resp. $-z$-normal, resp, $z^{-1}$-normal) sans valeur propre indéfinie, alors la trace de Krein (resp. la trace de Krein, resp. le déterminant de Krein) est différentiable en A.* □

*Démonstration.* — Il suffit de la vérifier pour A $z$-normal, les autres cas se démontrant de façon similaire. D'après l'hypothèse, il est possible de construire $P_+$ (resp. $P_-$) le projecteur orthogonal sur la somme des espaces invariants associés aux valeurs propres Krein positives (resp. Krein négatives) de $\Gamma$, c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ en l'occurence. On vérifie facilement que la somme $\Sigma_+$ des valeurs propres Krein positives est différentiable de différentielle $D\Sigma_+(A)\times M = \operatorname{Trace}(P_+ M)$, et similairement pour $\Sigma_-$, d'où il résulte

$$D\,\mathrm{Trk}(A)\times M = \operatorname{Trace}((P_+ - P_-)M. \quad \square \tag{14}$$

**E. Signe de Krein d'un bloc de Jordan**

Soit A un opérateur $\varphi$-normal sur un espace de Krein, c'est-à-dire vérifiant D(2), où $^\tau$ désigne la transposition pour le produit de Krein. Soit $\lambda$ une valeur propre de A vérifiant D(3) et D(4), c'est-à-dire élément de $\Gamma$ et du spectre discret. Soit $E_\lambda$ l'espace caractéristique qui lui est associé. On se propose d'étendre la notion de signe de Krein aux $\lambda$-blocs de Jordan de A. Cela signifie que le signe associée à une valeur propre *individualisée* devra être le même qu'elle soit vue comme *valeur propre* d'ordre un ou comme *bloc de Jordan* d'ordre un.

Par définition, les *bases de Jordan* d'un bloc B d'ordre $q$ sont celles dans lesquelles il admet l'écriture

$$B=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \dots & & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{vmatrix} \tag{1}$$

On traite d'abord le cas où A est symétrique ou hermitien, pour lequel $\varphi(z)\equiv z$ et dans lequel $\lambda\in\mathbb{R}$. Dans ce cas, on envisage de définir le signe du bloc comme le signe du produit de Krein des vecteurs intial et final d'une base de Jordan :

$$\operatorname{sgk}(B)=\operatorname{sgn}\langle v_q, v_1\rangle \tag{2}$$

où $v_1, v_2, \ldots, v_q$ est une base de Jordan de B. Il est clair qu'ainsi pour $q=1$ on retrouve la définition du signe d'une valeur propre, mais il faut vérifier que pour un ordre quelconque le produit de Krein est *réel* et de signe *indépendant du choix de la base de Jordan*. Cette vérification constitue le :

LEMME 1. — *Soient* $v_1, \ldots, v_q$ *et* $v'_1, \ldots, v'_q$ *deux bases de Jordan de* B, *bloc de l'opérateur* A *de valeur propre* $\lambda$, *où* A *et* $\lambda$ *vérifient les hypothèses annoncées. Alors*

$$\langle v_q, v_1\rangle\in\mathbb{R}^* \tag{3.1}$$

$$\langle v'_q, v'_1\rangle\in\mathbb{R}^* \tag{3.2}$$

$$\operatorname{sgn}\langle v_q, v_1\rangle=\operatorname{sgn}\langle v'_q, v'_1\rangle. \quad \square \tag{3.3}$$

*Démonstration.* — Soit $E_B$ l'espace associé au bloc :

$$E_B=\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_q). \tag{4}$$

On passe d'une base de Jordan à une autre :

– par addition à chaque $v_n$ d'une combinaison linéaire quelconque des $v_k$, $k<n$,

– par multiplication de tous les $v_n$ par un même scalaire.

L'ordre de ces deux opérations n'ayant pas d'importance. Il en résulte immédiatement :

– d'une part, que l'hyperplan H de $E_B$

$$H = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{q-1}) \tag{5}$$

engendré par les $q-1$ premiers $v_n$ est indépendant du choix de la base de Jordan, donc *intrinsèque* au bloc, et

– d'autre part, que pour $v_1$ fixé l'ensemble des $v_q$ possibles décrit un hyperplan affine $\hat{H}$ de $E_B$, *parallèle à et distinct de* H.

On utilise alors les hypothèses. Que B soit hermitien (ou symétrique) et $\lambda$ réel donne immédiatement la relation

$$\langle v_m, v_{n+1} \rangle = \langle v_{m+1}, v_n \rangle \tag{6}$$

valable pour tous entiers $m$ et $n$ inférieurs ou égaux à $q$, les indices négatifs ou nuls renvoyant au vecteur nul. De (6) se déduit la réalité des produits $\langle v_q, v_1 \rangle$ puisqu'on peut les égaler à $\langle v_1, v_q \rangle$, et l'inclusion

$$H \subset \mathrm{Ker} \langle v_1, . \rangle \tag{7}$$

puisqu'on peut ramener les produits à tester à un produit par zéro. Comme à $v_1$ fixé les $v_q$ décrivent $\hat{H}$, les produits $\langle v_q, v_1 \rangle$ possibles sont donc ou tous nuls ou tous de même signe. Reste qu'on est dans les hypothèses du théorème 1 de D. Le produit de Krein ne peut donc avoir de carré nul sur $E_\lambda$, qui est avec son orthogonal en somme *directe*. Il n'en a pas non plus sur $E_B$. L'inclusion (7) devient alors :

$$H = \mathrm{Ker} \langle v_1, . \rangle \cap E_B. \tag{8}$$

Les $\langle v_q, v_1 \rangle$ ne peuvent être nuls, ce qui achève la démonstration du lemme.

On traite maintenant le cas où $\varphi(z) \equiv -z$, respectivement $z^{-1}$. $\lambda$ doit donc se trouver sur l'axe imaginaire pur, respectivement le cercle unité. Dans ce cas, on envisage de se ramener à un bloc $z$-normal, c'est-à-dire symétrique ou hermitien, en appliquant au bloc étudié la fonction $z \to iz$ respectivement $z \to i \,\mathrm{Ln}\, z$. Puisqu'on s'intéresse à une valeur propre isolée, cette dernière fonction est toujours bien définie (à un opérateur scalaire près, mais cette indétermination n'affecte pas la structure de Jordan). Il importe de noter que le choix de $z \to iz$ est *arbitraire*. Il se justifie par un souci de cohérence avec [Br1] et [Br2], mais on aurait pu choisir de considérer $z \to iz$. En revanche, une fois ce choix fixé, celui de $z \to i \,\mathrm{Ln}\, z$ est *canonique*. Il est le seul qui rende cohérentes les définitions du signe d'un bloc $-z$-normal et de son exponentielle.

Ces considérations et le lemme 1 nous autorisent à poser la :

Définition 1. – Soit A un opérateur $\varphi$-normal [hypothèse D(2)]. Soit $\lambda$ un élément de $\Gamma$ [hypothèse D(3)] et du spectre discret de A [hypothèse D(4)]. Soit $B_0$ un bloc de Jordan de A, de valeur propre $\lambda$. Le signe de Krein de $B_0$ se définit comme le signe de Krein du bloc $z$-normal B, par la formule (2), où $v_1, \ldots, v_q$ est une base de Jordan de B, et où :

$$B = B_0 \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv z \tag{9.1}$$

$$B = i B_0 \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv -z \tag{9.2}$$

$$B = i \operatorname{Ln} B_0 \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv z^{-1}. \quad \square \tag{9.3}$$

Cette définition explicite la cohérence des trois cas étudiés. Il peut cependant être avantageux de définir le signe d'un bloc *directement à partir de sa base de Jordan*, ce qui n'est pas le cas en (9.2) et en (9.3). Pour obtenir ces définitions équivalentes on a d'abord besoin du :

LEMME 2. — *Soit a une série formelle à coefficients complexes dont le terme d'ordre zéro est nul et le terme d'ordre un est non-nul :*

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \tag{10.1}$$

$$a_0 = 0 \tag{10.2}$$

$$a_1 \neq 0. \tag{10.3}$$

On désigne par $a^{(n)}$ sa $n$-ième puissance au sens du produit de Cauchy :

$$a^{(n)} = (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)} \ldots) \tag{11.1}$$

$$a^{(0)} = (1, 0, 0 \ldots) \tag{11.2}$$

$$a^{(1)} = a. \tag{11.3}$$

Soit B un bloc de Jordan d'ordre $q$. L'ensemble des bases $(u_1, \ldots, u_q)$ dans lesquelles B admet l'écriture

$$B = \begin{vmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & & & a_{q-1} \\ & \lambda & a_1 & & & \\ & & \lambda & \ldots & \lambda & \\ & & & & & a_1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{vmatrix} \tag{12}$$

est en correspondance biunivoque avec l'ensemble de ses bases de Jordan, celles dans lesquelles il admet l'écriture (1). De plus cette bijection s'explicite par la formule

$$v_{q-n} = \sum_{k=n}^{q-1} a_q^{(n)} u_{q-k}. \quad \square \tag{13}$$

*Démonstration.* — Convenons que $u_{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, désigne le vecteur nul. Comme $a_k^{(n)}$ est nul pour $k < n$, (13) se réécrit avec une somme de 0 à $+\infty$.

On a alors

$$\begin{aligned} B(v_{q-m}) &= B\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^{(n)} u_{q-k}\Big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k^{(n)} B(u_{q-k})) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{k'\in\mathbb{N}} (a_k^{(n)} a_{k'}, u_{q-k-k'}) \\ &= \sum_{k''\in\mathbb{N}} a_{k''}^{(n+1)} u_{q-k''} \end{aligned} \tag{14}$$

ce qui d'après (13) vaut $v_{q-n-1}$. La forme de l'algorithme (13) rend d'autre part évident qu'il est inversible en remplaçant $a$ par sa série réciproque, d'où la bijectivité. □

On peut alors établir le :

THÉORÈME 1. — *Les formules donnant le signe de Krein d'un bloc* $B_0$ $\varphi$-*normal, de valeur propre* $\lambda$ *et d'ordre* $q$, *en fonction de l'une de ses bases de Jordan* $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$, *sont :*

$$\operatorname{sgk}(B_0) = \langle u_q, u_1 \rangle \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv z \tag{15.1}$$

$$\operatorname{sgk}(B_0) = \langle u_q, u_1 \rangle \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv -z \tag{15.2}$$

$$\operatorname{sgk}(B_0) = i^{1-q} \lambda^{q-1} \langle u_q, u_1 \rangle \quad \text{si} \quad \varphi(z) \equiv z^{-1}. \quad \square \tag{15.3}$$

*Démonstration.* — Seul le troisième cas vaut la peine d'être vérifié. Si $u_1, u_2, \ldots, u_q$ est base de Jordan de $B_0$, $v_1, v_2, \ldots, v_q$ donné par (13) est base de Jordan de B donné par (9.3). Or

$$\begin{aligned} B &= i \operatorname{Ln} B_0 \\ &= i \operatorname{Ln}(\lambda I + N) \qquad \text{avec} \quad N^q = 0 \\ &= i\left[(\operatorname{Ln}\lambda) I + \operatorname{Ln}\left(I + \frac{N}{\lambda}\right)\right] \\ &= \gamma I + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k N^k \end{aligned} \tag{16}$$

où $\gamma I$ est scalaire sur l'espace associé à $B_0$ et $a_1 = i/\lambda$. Le premier terme non nul de $a^{(q-1)}$ est

$$a_{q-1}^{(q-1)} = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{q-1} \tag{17}$$

Par conséquent $v_1 = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{q-1} u_1$. Or $v_q = u_q$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgk}(B_0) &= \langle v_q, v_1 \rangle \quad \text{par définition} \\ &= \left[\left(\frac{i}{\lambda}\right)^{q-1}\right] \langle u_q, u_1 \rangle \quad \text{d'après (13)} \\ &= i^{1-q} \lambda^{q-1} \langle u_q, u_1 \rangle \end{aligned} \tag{18}$$

car $\lambda$ et donc $i/\lambda$ se trouvent sur le cercle unité. □

C'est avec la formule (14.3) que le signe de Krein a été défini dans [Br2] [I, formule (2), p. 12, ligne 9; dans ce texte, les lettres $v$ désignaient la base de Jordan de $B_0$ et correspondent aux $u$ du présent texte].

## II. INDEXATION DES SYSTÈMES HAMILTONIENS

### A. Index standard

Dans ce qui suit, on étudie le *système hamiltonien linéaire* T-*périodique :*

$$\dot{x} = -\mathrm{JH}(t)\,x \tag{1}$$

où $\mathrm{H}(t)$ est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n}; (.,.))$ :

$$\forall t, \quad {}^t\mathrm{H}(t) = \mathrm{H}(t) \tag{2}$$

dépendant continûment de $t$, et T-périodique :

$$\mathrm{H} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}/\mathrm{T}\,\mathbb{Z}; \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n})) \tag{3}$$

Le cas échéant, on formulera l'hypothèse supplémentaire selon laquelle $\mathrm{H}(t)$ est à tout instant $t$ inversible. Cela reviendra à adjoindre à (3) l'équation :

$$\mathrm{H}^{-1} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}/\mathrm{T}\,\mathbb{Z}; \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n})) \tag{4}$$

où l'exposant $-1$ désigne l'inversion des endomorphismes.

On considère la structure de Krein I.C (15). On appelle *endomorphismes symplectiques* les endomorphismes réels Krein-unitaires pour cette structure. Ils forment un groupe, et leurs restrictions à l'espace réel sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ qui les redonnent entièrement.

L'Hamiltonien, c'est-à-dire la fonction T-périodique H, est en correspondance biunivoque avec l'arc M défini par :

$$\mathrm{M}(0) = \mathrm{I}_{2n} \tag{5.1}$$

$$\dot{\mathrm{M}}(t) = -\mathrm{JH}(t)\,\mathrm{M}(t). \tag{5.2}$$

On prouve ([YS], III.1.1, p. 157, ligne $-7$) que cet arc est à valeurs dans le groupe des endomorphismes symplectiques. Nous le nommons l'*arc résolvant.* L'endomorphisme M (T) s'appelle son *endomorphisme terminal* ou encore sa *résolvante.*

Lorsque 1 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme terminal,

$$\mathrm{Det}(\mathrm{M}(\mathrm{T}) - \mathrm{I}) \neq 0 \tag{6}$$

et lorsque $n \geqq 2$, Conley et Zehnder ([C], I) associent au système (1), ou à son arc résolvant, un entier relatif que nous notons $i_{\mathrm{T}}(\mathrm{H})$ et que nous l'appelons l'*index standard.* Il reste constant lorsque l'arc résolvant subit une déformation continue qui préserve la condition (6). Lorsque H est constant,

$$\dot{H}(t) \equiv 0 \tag{7}$$

cet index admet l'expression explicite

$$i_T(H) = \sum_{\lambda} \left( \frac{1}{2} + E \left( \operatorname{sgk}(\lambda) \frac{T\lambda}{2\pi} \right) \right) \tag{8}$$

où E désigne la partie entière, la somme est étendue à toutes les valeurs propres imaginaires pures de JH, et sgk désigne le signe de Krein d'une valeur propre pour la structure I.C(15) : JH est en effet Krein-antisymétrique pour cette structure.

On remarque une certaine similitude entre la définition (8) et la définition I.D(9) de la trace de Krein. C'est le reflet d'une similitude beaucoup plus forte. On associe au système (1), en ([Br1], p. 352, ligne $-8$), un index continu $l_T$. Pour $\|H(.)\|_{L^1}$ suffisamment petit, le nombre $2\pi l_T$ est égal au logarithme du déterminant de Krein de $M(t)$, ou bien (en prenant sa détermination la plus simple) à la *trace de Krein* du logarithme de M(T), dont l'expression est à rapprocher de (8). Si la norme $\|H(.)\|_{L^1}$ est quelconque, les deux quantités ne diffèrent que d'une fonction en escalier à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Nous détaillerons cela en III.A.

## B. Index algébriques

Sous les hypothèses A(2), A(3) et A(4), on associe au système hamiltonien A(1) les trois espaces de Krein faibles

$$K^0(H) = \{ L^2; (.,.)_0; \langle .,. \rangle_{0,H} \} \tag{1}$$

$$K^{1/2} = \{ H^{1/2}; (.,.)_{1/2}; \langle .,. \rangle_{1/2} \} \tag{2}$$

$$K^1(H) = \{ H^1; (.,.)_1; \langle .,. \rangle_{1,H} \} \tag{3}$$

où tout a été défini plus haut, sauf :

$$\langle x, y \rangle_{0,H} := (Hx, y)_0 \tag{4}$$

$$\langle x, y \rangle_{1,H} := (H^{-1} J\dot{x}, J\dot{y})_0. \tag{5}$$

L'hypothèse A(3) permet de vérifier la continuité de $\langle .,. \rangle_{0,H}$, et la coercivité sur $H_0^1$ de $\langle .,. \rangle_{1,H}$; l'hypothèse A(4) permet de vérifier la coercivité de $\langle .,. \rangle_{0,H}$ et la continuité de $\langle .,. \rangle_{1,H}$. $K^0(H)$ et $K^1(H)$ sont donc bien des structures de Krein faibles.

On note comme suit la moyenne d'une fonction $x$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt. \tag{6}$$

Les restrictions des espaces de Krein faibles (1), (2), (3) aux fonctions de moyennes nulles définissent des espaces de Krein, que nous notons $K_0^0(H)$, $K_0^{1/2}$ et $K_0^1(H)$, leurs espaces vectoriels étant $L_0^2$, $H_0^{1/2}$ et $H_0^1$.

On définit sur $L_0^2 = L_0^2(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\, \mathbb{R}^{2n})$ l'opérateur M qui associe à toute fonction de moyenne nulle son unique primitive de moyenne nulle. M est donc une bijection linéaire et isométrique de $L_0^2$ dans $H_0^1$. Considéré comme endomorphisme de $L_0^2$, M est compact.

Remarquons que sur les six produits des structures (1), (2) et (3), le seul qui ne rende pas orthogonales les fonctions constantes aux fonctions de moyennes nulles (à moins que H ne soit constant) est le produit $\langle .,. \rangle_{0,H}$. Cela amène à définir les espaces

$$D^0 = \{ x \in L^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^{2n},\ \langle x, y \rangle_{0,H} = 0 \} \tag{7.1}$$
$$D^{1/2} = D^0 \cap H^{1/2} \tag{7.2}$$
$$D^1 = D^0 \cap H^1 \tag{7.3}$$

où $\mathbb{R}^{2n}$ est assimilé à l'espace des fonctions constantes. $\mathbb{R}^{2n}$ est l'espace nul des espaces de Krein faibles (2) et (3).

Nous allons nous intéresser à deux quotients de produits de Krein faibles. Le premier est celui de $\langle .,. \rangle_{1/2}$ par $\langle .,. \rangle_{1/2} - \langle .,. \rangle_{0,H}$ et le deuxième, de $\langle .,. \rangle_{1,H}$ par $\langle .,. \rangle_{1,H} - \langle .,. \rangle_{1/2}$.

LEMME 1. — *L'espace nul du produit* $\langle .,. \rangle_{1/2} - \langle .,. \rangle_{0,H}$ *est l'espace des solutions* T-*périodiques du système* A(1). *L'espace nul du produit* $\langle .,. \rangle_{1,H} - \langle .,. \rangle_{1/2}$ *est la somme de l'espace de ces solutions et de* $\mathbb{R}^{2n}$, *l'espace des fonctions constantes.* (*Cette somme n'est pas nécessairement directe.*) □

*Démonstration.* — Elle consiste en une simple chaîne de calculs, explicitée par exemple en [Br 2], (83), p. 36 à (86), p. 37) ou en ([E1], III, (42), p. 23 à (50), p. 25). □

LEMME 2. — *Lorsque le système hamiltonien* A(1) *vérifie la condition* A(6), *et donc ce cas seulement, les structures :*

$$\tilde{K}^{1/2}(H) := \{ H^{1/2};\ (.,.)_{1/2};\ \langle .,. \rangle_{1/2} - \langle .,. \rangle_{0,H} \} \tag{8.1}$$
$$\tilde{K}_0^1(H) := \{ H_0^1;\ (.,.)_1;\ \langle .,. \rangle_{1,H} - \langle .,. \rangle_{1/2} \} \tag{8.2}$$

*sont celles d'espaces de Krein.*

*Démonstration.* — Le premier point à véfifier est que les produits de Krein de (8) et de (9) sont continus par rapport aux produits de Hilbert qui leur correspondent. Grâce aux théorèmes de Sobolev, on obtient la chaîne d'immersions compactes suivantes :

$$K^0(H) \subsetneq K^{1/2} \subsetneq K^1(H). \tag{9}$$

Les quotients $\dfrac{\langle .,. \rangle_{0,H}}{(.,.)_{1/2}}$ et $\dfrac{\langle .,. \rangle_{1/2}}{(.,.)_{1,H}}$ sont compacts d'après le théorème I.A(2), donc continus, ce qui établit le premier point. Le deuxième point à vérifier est que les produits de Krein sont coercifs par rapport à leurs produits de Hilbert. Faisons-le pour la structure (8.1). Le quotient du produit de Krein par le produit de Hilbert est la somme de $\frac{\langle .,. \rangle_{1/2}}{(.,.)_{1/2}}$, dont les *points réguliers* constituent un *voisinage de zéro*, et de $\frac{\langle .,. \rangle_{0,H}}{(.,.)_{1/2}}$, qui est *compact*. Par conséquent, au voisinage de zéro, le spectre de ce quotient ne comprend que des *points isolés* qui sont des *valeurs propres* de *multiplicité finie*. Il suffit donc de vérifier qu'aucune d'entre elles ne vaut zéro : c'est ce qu'assurent *l'hypothèse A* (1) et le *lemme* 1. On raisonne de même pour la structure (8.2). □

Lorsque l'hypothèse A (6) est vérifiée, le théorème I.A.1 et le lemme 2 nous autorisent à considérer les quotients

$$A_{1/2} := \frac{\langle .,. \rangle_{1/2}}{\langle .,. \rangle_{1/2} - \langle .,. \rangle_{0,H}} \tag{10.1}$$

$$A_1 := \frac{\langle .,. \rangle_{1,H}}{\langle .,. \rangle_{1,H} - \langle .,. \rangle_{1/2}} \tag{10.2}$$

définis respectivement sur $H^{1/2}$ et $H_0^1$ :

$$\begin{gathered} A_{1/2} \in \mathscr{L}(H^{1/2}; H^{1/2}), \\ \langle A_{1/2}\, .,. \rangle_{1/2} - \langle A_{1/2}\, .,. \rangle_{0,H} \equiv \langle .,. \rangle_{1/2} \end{gathered} \tag{11.1}$$

$$\begin{gathered} A_1 \in \mathscr{L}(H_0^1; H_0^1), \\ \langle A_1\, .,. \rangle_{1,H} - \langle A_1\, .,. \rangle_{1/2} \equiv \langle .,. \rangle_{1,H} \end{gathered} \tag{11.2}$$

On a alors le

LEMME 3. — *Le spectre de ces quotients se constitue uniquement de valeurs propres isolées de multiplicité finie*, (i.e. *est purement discret*). □

*Démonstration.* — Considérons le quotient (11.1). Son espace de Krein est la structure (8.1). C'est la somme directe biorthogonale de $D^{1/2}$ et de $\mathbb{R}^{2n}$. $A_{1/2}$ se décompose donc en la somme directe biorthogonale de l'endomorphisme zéro de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n})$ et de sa restriction $\tilde{A}_{1/2}$ à l'espace de Krein $D^{1/2}$ [muni des produits restreints de (8)].

$$A_{1/2} = \tilde{A}_{1/2} \dotplus 0 = \tilde{A}_{1/2} (+) 0 = A_{1/2} [+] 0 \tag{12.1}$$

avec

$$[.,.] \equiv \langle .,. \rangle_{1/2} - \langle .,. \rangle_{0,H} \tag{12.2}$$

$$A_{1/2} \in \mathscr{L}(D^{1/2}; D^{1/2}) \tag{12.3}$$

$$0 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}^{2n}). \tag{12.4}$$

On peut donc se ramener à la démonstration du lemme pour $\tilde{A}_{1/2}$ et $A_1$. Or on peut trouver un voisinage de zéro constitué de points qui sont réguliers pour $\tilde{A}_{1/2}$ et pour $A_1$. Donc on peut se ramener à la démonstration du lemme pour $\tilde{A}_{1/2}^{-1}$ et pour $A_1^{-1}$. Mais l'addition d'un endomorphisme scalaire ne modifie pas la structure spectrale. On se ramène finalement à établir le lemme pour $I-(\tilde{A}_{1/2})^{-1}$ et $I-(A_1)^{-1}$. Or ces endomorphismes valent respectivement les quotients de $\langle .,. \rangle_{0,H}$ par $\langle .,. \rangle_{1/2}$ et de $\langle .,. \rangle_{1/2}$ par $\langle .,. \rangle_{1,H}$. D'après le théorème I.2, ils sont compacts, et leur spectre a donc les propriétés requises. Cela établit le lemme. □

LEMME 4. — *Choisissant pour produit de Krein leurs produits dénominateurs respectifs la définition* 1 *de I.C s'applique à toutes les valeurs propres réelles des quotients* $A_{1/2}$ *et* $A_1$. □

*Démonstration.* — D'après le théorème I.A.3, ces quotients sont dénominateur-symétriques. Ils vérifient donc la condition I.C(2) pour $\varphi(z)\equiv z$. Les valeurs propres réelles vérifient alors la condition I.C(3). Il reste à établir qu'elles vérifient aussi la condition I.C(4). Mais ceci découle directement du lemme 3. □

Les valeurs propres réelles de $A_{1/2}$, respectivement $A_1$, sont donc munies dans l'espace de Krein $\tilde{K}^{1/2}(H)$, respectivement $\tilde{K}_0^1(H)$, d'une signature de Krein. Si $\lambda$ est une telle valeur propre, on note cette signature $(p(\lambda), q(\lambda))$.

Nous sommes alors en mesure de munir les systèmes hamiltoniens vérifiant A(6) de deux index algébriques. Ce sont des nombres entiers, notés $m_{1/2,T}(H)$ et $m_{1,T}(H)$, définis comme suit :

$$i\in\{1/2;\,1\},\qquad m_{i,T}(H):=\sum_{\substack{\lambda\in]-\infty,0[\\ \lambda\in \mathrm{Sp}(A_i)}}(q(\lambda)-p(\lambda))+\frac{1}{2}(q(0)-p(0)) \tag{13}$$

soit de façon plus condensée

$$m_{i,T}(H)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}\cap \mathrm{Sp}(A_i)} f(\lambda)(q(\lambda)-p(\lambda)) \tag{14}$$

où $f$ est le représentant symétrique de la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^-$ :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ 1/2 & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x>0\end{cases} \tag{15}$$

*Remarque* 1. — La condition A(4) est utilisée pour la commodité de la rédaction, mais elle n'est *pas essentielle* à la définition des index algébriques. S'il arrive que le déterminant H s'annule pour un ensemble non vide d'instants $t$, on peut remplacer les produits de Hilbert $(.,.)_0$ et $(.,.)_1$ par les produits :

$$(x, y)_{0,H}:=(|H|x, y)_0 \tag{16.1}$$
$$(x, y)_{1,H}:=(|H|^{-1}J\dot{x}, J\dot{y})_0 \tag{16.2}$$

et les espaces $L^2$ et $H^1$ par les domaines de leurs formes quadratiques respectives. On a alors *modifié les Hilberts de base*, on laisse les *produits de Krein inchangés*, et dans les structures de Krein ainsi obtenues on peut refaire la construction des index algébriques.

La condition A (6) est en revanche *essentielle*, elle garantit la *continuité* des quotients.

*Remarque* 2. — On distingue un cas particulier important, celui où H est pour tout *t défini positif.* Dans ce cas $\langle .,. \rangle_{1,H}$ est en fait un produit de Hilbert. Les valeurs propres négatives de $A_1$ sont alors numérateur-positives, donc dénominateur-négatives, et $m_{1,T}$ devient le nombre de carrés négatifs de la forme $Q(x) \equiv \langle x, x \rangle_{1,H} - \langle x, x \rangle_{1/2}$.

C'est en fait *l'index de Morse* défini en ([$E_1$], III, (40), p. 22 ligne − 10). (*Voir également* [Br1] et [Br2]). Le problème étudié dans ces articles amène à considérer cet index en dehors de la condition (12), ce qui le rend partiellement *indéterminé* (déterminé à $2m$ près). On lève l'indétermination en introduisant une *convention.* En l'occurence, elle porte sur la façon de comptabiliser les carrés nuls de la forme quadratique Q, c'est-à-dire les valeurs propres infinies de $A_1$, qui, sans la condition A (6), devient discontinu.

## C. Liens entre les index

Le but de cette section est de comparer les divers types d'index introduits plus haut. Pour ce faire, nous commençons par remarquer que leurs définitions s'appliquent sans problème lorsque H est seulement une fonction $L^1$ du temps, (moyennant, le cas échéant, une modification des Hilberts de base), mais que pour parler de $i_T$ on doit avoir $n \geqq 2$. On introduit ensuite l'arc $\lambda H$, où $\lambda$ décrit $[-1, 1]$ et H est l'hamiltonien du système A (1). On désigne par $M_\lambda(T)$ l'endomorphisme terminal du système donné par $\lambda H$.

Nous formulons les hypothèses suivantes :

H1 : La fonction de $\lambda$, $i_T(\lambda H)$ est constante sur $[-1, 1]$ sauf en un nombre fini de points, où elle n'est pas définie, et au voisinage desquels elle est discontinue.

H2 : Lorsque $\lambda$ traverse un tel point de saut, situé ailleurs qu'en $\lambda = 0$, les valeurs propres de $M_\lambda(T)$ ne peuvent traverser la valeur 1 que deux par deux.

H3 : Au voisinage d'un point de saut non nul, les deux valeurs propres qui traversent 1 sont d'un côté sur le cercle unité et de l'autre hors du cercle unité.

LEMME 1. — *L'hypothèse qui réunit* H1, H2 et H3 *est générique pour la topologie* $L^1$. □

*Démonstration.* — La construction d'une petite perturbation $L^1$-continue rendant H soumis à ces trois hypothèses ne présente pas de difficulté lorsqu'on dispose des théorèmes ([YS], III, 1.5, p. 167, ligne − 10 et 2.10, p. 191, ligne − 17). Ils permettent aussi d'assurer que la propriété de vérifier les trois hypothèses est stable par petite perturbation $L^1$-continue. □

LEMME 2. — *Sous les hypothèses* H1, H2 *et* H3, *les fonctions de* $\lambda$ $i_T(\lambda H)$ *et* $m_{1/2,T}(\lambda H)$ *ont le même domaine de définition, sont donc non définies aux mêmes endroits, sont discontinues en ces mêmes endroits, et y sautent de la même quantité.* □

Lorsque $\lambda$ décrit seulement $]0, 1]$, cela vaut aussi pour $m_{1,T}(\lambda H)$. □

*Démonstration.* — On commence par comparer les *domaines de définition.* $i_T$ et $m_{1/2,T}$ sont définis pour tous les systèmes hamiltoniens n'ayant pas de solutions T-périodiques et pour ceux-là seulement. Leurs domaines coïncident donc. Celui de $m_{1,T}$ est plus grand, puisqu'il se compose des systèmes hamiltoniens n'ayant pas de solutions T-périodiques non constantes. Toutefois, sous les hypothèses H1, H2 et H3, cette différence ne joue qu'au point $\lambda=0$, d'ailleurs, les domaines de $m_{1,T}(\lambda H)$ et des deux autres fonctions de $\lambda$ coïncident.

On traite maintenant la question de la *continuité.* Nous allons établir que les fonctions $m_{1,T}(\lambda H)$ et $m_{1/2,T}(\lambda H)$ ne peuvent présenter de discontinuité sur leurs domaines de définition respectifs : comme le produit dénominateur du quotient $A_{1/2}$ où $A_1$ n'acquiert pas d'espace nul lorsque $\lambda$ varie sur le domaine, les signes de Krein des directions propres restent constants. Pour qu'il y ait discontinuité, il faudrait donc qu'une valeur propre de ce quotient traverse zéro. Mais c'est impossible, car les valeurs propres nulles de $A_{1/2}$ restent immobiles, et $A_1$ n'en a pas.

Reste à traiter la question de la *valeur des sauts.* Soit $\lambda_1 \neq 0$ un point de saut. D'après H3, les valeurs propres de $M_\lambda(T)$ ont un comportement non analytique en $\lambda$, donc en $\lambda_0$ il se forme un bloc de Jordan pour la valeur propre un. *Aussi la dimension de l'espace des solutions* T-*périodiques vaut-elle un.* Les sauts de $m_{1/2,T}(\lambda H)$ et $m_{1,T}(\lambda H)$ valent donc un en valeur absolue. Par ailleurs, H3 assure directement que le saut de $i_T(\lambda H)$ vaut un en valeur absolue. Il ne reste donc plus qu'à comparer les signes de ces différents sauts. On a pour cela recours à la formule ([YS], III, 1.5, (1.20 *a*), p. 169, ligne − 8) que nous recopions

$$\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = \frac{i\rho_0}{\langle a(\lambda_0), a(\lambda_0)\rangle}\int_0^T \left(\frac{\partial H(t, \lambda_0)}{\partial \lambda} x(t, \lambda_0), x(t, \lambda_0)\right) dt \qquad (1)$$

où $\rho$ est valeur propre de $M_\lambda(T)$ située sur le cercle unité et de multiplicité 1, où

$$x(t, \lambda) = M_\lambda(t)\, a(\lambda) \qquad (2)$$

$M_\lambda(.)$ étant l'arc résolvant de $H(., \lambda)$ que nous prenons égal à $\lambda H(.)$, et $a(\lambda_0)$ est le vecteur propre de $\lambda_0 . \langle .,. \rangle$ est défini en I.C(15).

D'après H3, il existe un demi-voisinage du point de saut $\lambda_1$ tel que les valeurs propres tendant vers 1 soient sur le cercle unité. On choisit $\lambda_0$ dans ce demi-voisinage et on le fait tendre vers $\lambda_1$. Cela permet d'établir que les sauts en $\lambda_1$ de $i_T(\lambda H)$ et de $m_{1/2, T}(\lambda H)$ sont de même signe. Pour étendre l'égalité à $m_{1, T}(\lambda H)$ on utilise l'équation hamiltonienne elle-même :

$$J \frac{dx}{dt}(t, \lambda_1) = H(t) x(t, \lambda_1) \tag{3}$$

On établit par ailleurs que le saut ayant lieu en $\lambda = 0$ est le même pour $i_T(\lambda H)$ et pour $m_{1/2, T}(\lambda H)$. Pour $|\lambda|$ petit, toutes les valeurs propres de $A_{1/2}$ sont strictement positives sauf une valeur propre nulle de multiplicité $2n$, dont l'espace propre est celui des fonctions constantes. Toujours pour $|\lambda|$ petit, on évalue facilement la signature de cette valeur propre nulle et l'on trouve que c'est la signature de $\bar{H}$, la moyenne de l'hamiltonien. Or sous les hypothèses H1, H2 et H3, la formule recopiée en (1) montre que cette signature n'est autre que la limite

$$\lim_{\lambda \to 0+} i_T(\lambda H) \tag{4}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Ces deux lemmes permettent d'obtenir le résultat central du présent article.

THÉORÈME 1. — *On appelle système hamiltonien linéaire* T-*périodique un système de la forme* A (1) *vérifiant* A (2) *et* A (3). *Alors :*

Ceux de ces systèmes qui ne vérifient pas la condition A (6) n'ont ni index $i_T$ ni index $m_{1/2, T}$.

Ceux de ces systèmes qui vérifient la condition A (6) ont les trois types d'index $i_T$, $m_{1/2, T}$ et $m_{1, T}$ et de plus ces index satisfont aux égalités

$$m_{1/2, T}(H) = i_T(H) \tag{5.1}$$

$$m_{1, T}(H) = i_T(H) - \lim_{\lambda \to 0+} i_T(\lambda H). \quad \square \tag{5.2}$$

*Remarque* 1. — On voit sur ces formules que l'index $m_{1/2, T}$ a un comportement plus régulier que l'index $m_{1, T}$. C'est la conséquence du fait, souligné dans l'énoncé du lemme B.1, que l'espace nul $E_1$ de $\langle .,. \rangle_{1, H} - \langle .,. \rangle_{1/2}$ est la somme *directe ou non directe* de deux espaces privilégiés pour le problème, $\mathbb{R}^{2n}$ et l'espace E des solutions T-périodiques, alors que l'espace nul de $\langle .,. \rangle_{1.2} - \langle .,. \rangle_{0, H}$ est tout simplement le second de ces espaces privilégiés, E. La dimension de ce second espace nul $E_2$ s'évalue donc plus simplement que celle du premier, $E_1$, puisqu'on n'a pas à tenir compte de l'éventuelle intersection de E et de $\mathbb{R}^{2n}$.

*Remarque* 2. — Dans le cas où H est défini positif, la formule (5.2) redonne le théorème 4 de [Br1], selon lequel l'index standard est égal à l'index de Morse plus $n$. Comme on l'a remarqué plus haut, $m_{1,\mathrm{T}}$ devient dans ce cas l'index de Morse de [E1], [E2], [Br1], quant à la limite de (5.2), il est clair qu'elle se réduit dans ce cas au nombre $n$.

## D. Extension des index

Il résulte de leur définition que les index $m_{1/2,\mathrm{T}}=i_{\mathrm{T}}$, (respectivement $m_{1,\mathrm{T}}$), ne sont pas définis lorsque le système hamiltonien A(1) admet une solution T-périodique, (respectivement une solution T-périodique non constante). Les dénominateurs des quotients de p. p. s. qui servent à définir les index de Morse ont alors au moins un carré nul, comme on s'en rend compte en écrivant que la solution périodique vérifie l'équation d'Euler-Lagrange directe (respectivement réciproque). En ce qui concerne la définition de $i_{\mathrm{T}}$, c'est la condition B(6) qui n'est plus satisfaite. Le vecteur tangent à l'orbite de la solution en $t=0$ est alors dans le noyau de $\mathrm{M}(\mathrm{T})-\mathrm{I}$. Les index restent cependant très généralement définis, c'est-à-dire, ils le sont partout sauf sur un domaine de codimension un.

Il est cependant parfois nécessaire de parler d'index définis absolument partout. Les prolongements les plus naturels des index se construisent moyennant le choix conventionnel d'un signe.

DÉFINITION 1. — On pose

$$f^{+}(\mathrm{H})=\lim_{\varepsilon\to 0+} f(\mathrm{H}+\varepsilon \mathrm{I}) \tag{1.1}$$

$$f^{-}(\mathrm{H})=\lim_{\varepsilon\to 0-} f(\mathrm{H}-\varepsilon \mathrm{I}) \tag{1.2}$$

où I désigne le système dont l'hamiltonien vaut constamment l'identité de $\mathbb{R}^{2n}$, et où $f$ désigne $i_{\mathrm{T}}$, $m_{1/2,\mathrm{T}}$ ou $m_{1,\mathrm{T}}$, pour une période strictement positive T quelconque. □

On a le

LEMME 1. — *Si* $f=i_{\mathrm{T}}=m_{1/2,\mathrm{T}}$, *alors*

1. $f^{+}$ *et* $f^{-}$ *sont définis pour tous les* H *continus* T-*périodiques,*
2. $f^{+}$ *et* $f^{-}$ *coïncident avec* $f$ *sur son domaine de définition,*
3. *l'ensemble des* H *étant muni de sa structure d'ordre naturelle,* $f^{+}$ *est continue vers le haut et* $f^{-}$ *est continue vers le bas.* □

*Démonstration.* — Le 1 et le 2 découlent facilement de la formule citée en C(1) ainsi que des résultats C(5), le 3 est trivial. □

LEMME 2. — *Dans le « cas convexe » où* H *est défini positif, l'index de Morse utilisé dans* [E1] *et* [E2] *est* $m_{1,\mathrm{T}}^{-}$ [*et donc* $(i_{\mathrm{T}}^{-}-n)$ *ou encore* $(m_{1/2,\mathrm{T}}^{-}-n)$ *d'après* (5)]. □

*Démonstration.* — Cet index compte les carrés négatifs non nuls de $I-\frac{\langle .,. \rangle_{1/2}}{\langle .,. \rangle_{1,H}}$ et n'est donc pas affecté par une perturbation décroissante de H. Le lemme 1 ci-dessus et la remarque 2 de C permettent alors de conclure que c'est $m^{-}_{1,T}$. □

## III. INDEX CONTINU, INDEX ITÉRÉS

### A. Index continu

On nomme $R_t$ la fonctionnelle qui, étant donné l'hamiltonien H, donne $M(t)$, la valeur en $t$ de son arc résolvant. En particulier $R_T$ donne la résolvante de l'hamiltonien. Ces fonctionnelles s'explicitent formellement :

$$M(t)=R_t(H) \tag{1.1}$$

$$R_t(H)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\square_n(t)}\prod_{i=n}^{1}(-JH(t_i)) \tag{1.2}$$

où

$$\square_n(t)=\{(t_1, \ldots, t_n)\in\mathbb{R}^n/0\leqq t_i\leqq t_{i+1}\leqq t,\ i\in\mathbb{N}_{n-1}\} \tag{1.3}$$

On vérifie immédiatement que les $M(t)$ ainsi définis résolvent bien formellement les équations II.A (5). Il apparaît également qu'elles ont un sens dès lors que

$$H\in L^1(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\ \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n};\ \mathbb{R}^{2n})) \tag{2}$$

qui généralise la condition II.A (3) où le $L^1$ était remplacé par C. En affaiblissant (2) on peut *a fortiori* remplacer C par $L^p$, ce qui constitue toujours une généralisation de II.3.A. On a de plus le :

LEMME 1. — *Les* $R_t$ *sont* $C^\infty$ *sur* $L^1$. □

*Démonstration.* — Dans la somme (1.2), le terme d'ordre $n$ a la régularité d'une (puissance $n$-ième de) forme linéaire continue et est donc indéfiniment dérivable. Une majoration simple, utilisant que le volume de $\square_n(t)$ est $t^n/n!$, permet de transmettre cette propriété à la somme de la série. □

On introduit maintenant l'espace $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z};\ \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n};\ \mathbb{R}^{2n})) \tag{3.1}$$

son produit de Hilbert canonique (.,.) :

$$(H_1, H_2)=\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr}(H_1(t)\,H_2(t))\,dt \tag{3.2}$$

et le produit pseudo-scalaire $\langle .,. \rangle$

$$\langle H_1, H_2 \rangle = -\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{tr}\,(JH_1(t)\,JH_2(t))\,dt \tag{3.3}$$

[Le facteur de normalisation n'est pas celui de ([Br1] 5).].

Il est immédiat de vérifier que l'espace et les deux produits forment une structure de Krein, que l'on note encore $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H} = \{\mathscr{H};\ (.,.);\ \langle .,. \rangle\} \tag{4}$$

On munit $\mathscr{H}$ d'une structure d'ordre partiel :

Définition 1. — Soient $H_1$, $H_2$ deux éléments de $\mathscr{H}$. On dit que $H_1$ est supérieur à $H_2$ au sens strict (au sens large) si presque partout en $t$ $H_1(t) - H_2(t)$ est définie positive (positive). On dit que $H_1$ et $H_2$ sont comparables au sens strict (large) si l'un des deux est supérieur à l'autre en ce sens. □

Avec cette définition on a trivialement le

Lemme 2. — *Si* $H_1$ *est comparable à zéro au sens strict* (*large*) *et que* $H_2$ *est orthogonal à* $H_1$ *pour* $(.,.)$ *ou pour* $\langle .,. \rangle$, alors $H_2$ *n'est pas comparable à zéro au sens large* (*strict*). *Si* $(H_1, H)$ *ou* $\langle H_1, H \rangle$ *garde le même signe quand* H *décrit le cône des hamiltoniens strictement positifs, alors* $H_1$ *est positif au sens large.* ■

On rappelle qu'une valeur propre d'un endomorphisme symplectique est dite indéfinie si elle est multiple, sur le cercle unité, et que sa signature de Krein comporte les deux signes (c'est l'application de la définition (4) de I.D. au cas en question).

Définition 2 :

$$\mathscr{I} = \{M \text{ symplectique, } \det(I - M) \neq 0\} \tag{5.1}$$
$$\mathscr{D} = \{M \text{ symplectique sans valeur propre indéfinie}\} \tag{5.2}$$
$$I = \{H \in \mathscr{H},\ R_T(H) \in \mathscr{I}\} \tag{5.3}$$
$$D = \{H \in \mathscr{H},\ R_T(H) \in \mathscr{D}\} \tag{5.4}$$

I est donc le domaine de définition de l'index $m_{1/2,\,T}$, donc de $i_T$ si $n \geqq 2$, sans les extensions introduites en II.D. Comme d'autre part la valeur propre 1 d'un endomorphisme symplectique est forcément indéfinie, on a

$$\mathscr{D} \subset \mathscr{I} \tag{6.1}$$
$$D \subset I. \tag{6.2}$$

On nommera I le *domaine standard* et D le *domaine de gradient*.

Définition 3. — On appelle *index continu*, et on note $l$, la fonctionnelle définie sur $\mathscr{H}$ par la détermination continue de l'argument du déterminant de Krein de la résolvante de l'hamiltonien valant 0 en $H = 0$ :

$$e^{il(H)} = \mathrm{Detk} \circ R_T(H) \tag{6.1}$$

$$l(0)=0. \quad \square \tag{6.2}$$

On est alors en mesure de démontrer les résultats annoncés en ([Br1], théorèmes 2 et 3).

THÉORÈME 1. — *Les complémentaires dans $\mathcal{H}$ de* I *et* D *sont localement réunions d'hypersurfaces différentielles. Les vecteurs normaux à ces hypersurfaces pour le produit de Hilbert, comme ceux normaux pour le produit de Krein, sont comparables à zéro* (*au sens large*). $\square$

*Démonstration.* — $R_T$ est d'après le lemme 1 $C^\infty$ pour la topologie $L^1$, donc *a fortiori* $C^1$ pour celle de $\mathcal{H}$. On va montrer qu'elle est de plus uniformément coercive, c'est-à-dire que la norme de sa différentielle ne tombe jamais en dessous d'une certaine constante. Notons par $\mathbf{1} \in H$ la fonction valant constamment l'identité :

$$\mathbf{1} = 1_{\mathbb{R}/T\mathbb{Z}} \cdot I_{2n}. \tag{7}$$

On tire de ([YS], III, 1, p. 169, 1.4)

$$DR_T(H_0) \times H = i R_T(H_0) \int_0^T (R_t(H_0))^{-1} G^{-1} H (R_t(H_0))\, dt \tag{8}$$

où $G = iJ$ et $DR_T \times H$ signifie $\frac{\partial}{\partial \lambda} R_T(H_0 + \lambda H)_{(\lambda=0)}$. Faisant dans (8) $H = \mathbf{1}$ on obtient, en utilisant que les $R_t$ sont symplectiques, que

$$DR_T(H_0) \times \mathbf{1} = -TR_T(H)\,J. \tag{9}$$

Si $\| \ \|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n})$, elle atteint son minimum sur les endomorphismes symplectiques en une constante $k_0$ non nulle. La norme dans $L^q$ de la différentielle de $R_T$ valant

$$\sup_{H \in L^p} \| DR_T \times H \| \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{10}$$

Elle est en particulier minorée par $\frac{kT}{\|\mathbf{1}\|_{L^p}}$, ce qui prouve l'uniforme coercivité dans tous les $L^p$ et en particulier dans $\mathcal{H}$. Mais alors, comme $\mathcal{I}$ et $\mathcal{D}$ sont des réunions finies d'hypersurfaces différentiables, il en va localement de même pour leurs images réciproques par $R_T$, qui sont I et D.

Il reste à montrer que les directions normales à ces hypersurfaces sont comparables à zéro. Soit H un vecteur arbitraire supérieur à zéro au sens strict et $H_0$ un point appartenant à une hypersurface. D'après (6.2) on a de toute façon $H_0 \subset D^c$. D'après ([YS], III, 4, 3, théorème I, 167 *b*, p. 208), en perturbant $H_0$ dans la direction de H, on quitte $D^c$. Comme H décrit tout le cône des hamiltoniens strictement positifs, lequel est connexe, le produit de H par un vecteur normal en $H_0$ garde un signe constant.

D'après le lemme 2, ce vecteur normal est comparable à zéro au sens large. □

Nous allons justifier pourquoi D s'appelle le domaine de gradient par le :

THÉORÈME 2. — *Le domaine de différentiabilité de* $l$ *coïncide avec* D. *Si l'on choisit le produit de Krein* $\langle\, .,.\, \rangle$, *le carré du gradient de* $l$ *est égal au nombre de valeurs propres de la résolvante* $M(T)=R_T(H)$ *qui sont de module* 1.

$$\langle \nabla l, . \rangle = D\, l \tag{11.1}$$

$$\langle \nabla l, \nabla l \rangle = ((\mathrm{Sp}\, M(T)) \cap U) \tag{11.2}$$

*où* D *désigne la différentielle et* U *le cercle unité.* [*La formule* (11.2) *correspond à* ([Br1], 7]).

*Démonstration.* — D'après le lemme 1 de I.D si la résolvante est élément de $\mathscr{D}$, le déterminant de Krein est différentiable sur son voisinage. D'après le lemme 1 de la précédente section, $R_T$ aussi. Donc $e^{il}$ aussi et par suite $l$ sont différentiables. Le domaine de différentiabilité de $l$ contient donc D. Pour voir qu'il ne l'excède pas, on applique à $H_0 \in D^c$ une perturbation strictement croissante linéaire arbitraire, de paramètre $\lambda$.

$$\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \to H_0 + \lambda H, \qquad H > 0. \tag{12}$$

D'après ([YS], III, 4, 3, théorème I, 167 *b*) cette perturbation déforme les blocs de Jordan d'ordre $q$ en communiquant aux valeurs propres une vitesse d'ordre $\sqrt[q]{\lambda}$. De plus, pour $\lambda<0$ ou pour $\lambda>0$ on a sur U deux valeurs propres de signe contraire et de mouvement contraire. Ils contribuent au mouvement de $l$ d'un terme de croissance, si $\lambda>0$, de décroissance, si $\lambda<0$, qui n'est pas dérivable en $\lambda$. Par conséquent, si la résolvante n'est pas diagonalisable, $l$ ne peut être différentiable en l'hamiltonien.

Si la résolvante est diagonalisable, on se ramène aisément à l'étude en zéro de l'exemple I.D (11)-(12) : il n'y a pas non plus différentiabilité.

Reste à établir la formule (11.2). Remarquons d'abord que les endomorphismes symplectiques sans valeurs propres multiples sur le cercle unité sont denses dans $\mathscr{D}$. Les hamiltoniens donnant lieu à de telles résolvantes sont par suite denses dans D, grâce au lemme 1, et la forme de $\nabla l$ peut être établie sur ces seuls hamiltoniens, elle vaudra sur tout D.

Désignons par $P_+(0)$ [resp. $P_-(0)$] le projecteur Krein-orthogonal dans $\mathbb{C}^{2n}$ sur la somme des espaces invariants de valeurs propres Krein positives (resp. Krein négatives) du cercle unité. On définit $P_+(t)$ [resp. $P_-(t)$] par

$$P_+(t) = M^{-1}(t)\, P_+(0)\, M(t) \tag{13.1}$$

$$P_-(t) = M^{-1}(t)\, P_-(0)\, M(t) \tag{13.2}$$

avec toujours $M(t)=R_t(t).P_+(.)$ et $P_-(.)$ sont donc deux boucles T-périodiques de projecteurs Krein-orthogonaux. La différence $P_+(.)-P_-(.)$ définit donc une boucle d'opérateurs Krein-hermitiens et imaginaires purs [parce que les $M(t)$ sont symplectiques]. Aussi la boucle

$$\begin{aligned} g\quad \mathbb{R}/T\mathbb{Z} &\to \mathscr{L}(\mathbb{C}^{2n}; \mathbb{C}^{2n}) \\ t &\to G(P_+(t)-P_-(t)) \end{aligned} \tag{14}$$

est-elle à valeurs Hilbert-hermitiennes et réelles (donc Hilbert-symétriques). On peut remplacer dans (14) $\mathbb{C}^{2n}$ par $\mathbb{R}^{2n}$ et $g$ est un élément de $\mathscr{H}$.

Par ailleurs, lorsque la résolvante $R_T(H_0)=M(T)$ est à valeurs propres simples, la formule citée en II.C (1) montre immédiatement que la différentielle de L en $H_0$ s'écrit :

$$\nabla l(H_0)\times H=\langle g, H\rangle \tag{15}$$

ce qui, comme nous l'avons dit, entraîne que $\nabla l=g$ sur tout D. Or

$$\begin{aligned} \langle g, g\rangle &= (P_+(.)-P_-(.), P_+(.)-P_-(.)) \\ &= \overline{P_+(.)}+\overline{P_-(.)} \\ &= \#((\operatorname{Sp} M(t))\cap U). \quad \square \end{aligned} \tag{16}$$

Ce théorème entraîne le

COROLLAIRE 1. — *Le domaine de forte stabilité est caractérisé par la condition* $\langle g, g\rangle=2n$. $\square$

Le théorème de stabilité directionnelle ([YS], III, 6, 2, p. 239) peut alors être vu comme un corollaire du théorème 1. Comme les vecteurs normaux aux hypersurfaces délimitant le domaine où $\langle \nabla l, \nabla l\rangle=2n$ sont comparables à zéro, il suit qu'un hamiltonien $H_0$ compris entre deux autres hamiltoniens $H_1$ et $H_2$ sera forcément fortement stable si le segment $[H_1, H_2]$ l'est aussi

$$\begin{aligned} &(\forall \lambda\in[0, 1], \langle \nabla l, \nabla l\rangle_{\lambda H_1+(1-\lambda)H_2}=2n) \\ &\quad \text{et } (H_1<H_0<H_2) \\ &\Rightarrow \quad (\langle \nabla l, \nabla l\rangle_{H_0}=2n). \end{aligned} \tag{17}$$

Posons pour $H_0\in D^c$

$$\Delta_{0+}=\lim_{\lambda_1\to 0+} \langle \nabla l(H_0+\lambda_1 \mathbf{1}), \nabla l(H_0+\lambda_1 \mathbf{1})\rangle \tag{18.1}$$

$$\Delta_{0-}=\lim_{\lambda_2\to 0+} \langle \nabla l(H_p-\lambda_2 \mathbf{1}), \nabla l(H_0-\lambda_2 \mathbf{1})\rangle \tag{18.2}$$

$$\Delta_{-+}=\lim_{\substack{\lambda_1\to 0+\\ \lambda_2\to 0+}} \langle \nabla l(H_0+\lambda_1 \mathbf{1})-\nabla l(H_0-\lambda_2 \mathbf{1}), \nabla l(H_0+\lambda_1 \mathbf{1})-\nabla l(H_0-\lambda_2 \mathbf{1})\rangle. \tag{18.3}$$

En vertu du théorème 2, les deux premières limites sont bien définies, entières, paires et positives. On a de plus le

THÉORÈME 3. — (*a*) *La limite* (18.3) *est bien définie et indépendante de l'ordre entre* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$.

(*b*) *Elle est entière, positive et paire.*

(*c*) *Elle vérifie la relation du triangle avec les deux autres limites* (18.1) *et* (18.2), *c'est-à-dire*

$$|\Delta_{0+}-\Delta_{0-}| \leqq \Delta_{-+} \leqq \Delta_{0+}+\Delta_{0-}. \tag{19}$$

(*d*) *Si l'on considère la perturbation* (12), *le nombre de valeurs propres restant sur le cercle unité* U *de bout en bout, et donc s'y comportant de manière différentiable, est égal à* $\Delta_{0+}+\Delta_{0-}-\Delta_{-+}$. □

*Démonstration.* — Grâce aux théorèmes 1 et 2, on sait qu'on peut remplacer dans les limites (18) l'hamiltonien **1** par un hamiltonien strictement positif quelconque. Ce faisant, on se ramène au cas où les valeurs propres proches d'un des hamiltoniens perturbés sont simples. Soit $\lambda$ une telle valeur propre, on lui associe la boucle de projecteurs Krein symétriques $P_\lambda(t)$ définie de façon analogue à (13), avec $P_\lambda(0)$ le projecteur sur le $\lambda$-espace propre. Comme dans le théorème 2, on a alors que $g_\lambda(.)=G(P_\lambda(.)-P_{\bar\lambda}(.))$ est élément de $\mathscr{H}$. De plus, si $\mu\neq\lambda$ et $\mu\neq\bar\lambda$, $\langle g_\lambda, g_\mu\rangle=0$. D'après le lemme 1, les $M_\varepsilon(T)$ dépendent continûment dans $L^1$, et par suite dans $\mathscr{H}$, du paramètre de perturbation $\varepsilon$. Il en sera de même des $g_\lambda$ lorsque $\lambda$ évoluera de manière différentiable sur U avec $\varepsilon$.

Notons maintenant $\lambda(\varepsilon)$ et $g_{\lambda(\varepsilon)}$ pour expliciter la dépendance en $\varepsilon$. Il est facile de voir que

$$\forall\varepsilon_0>0,\quad \exists\varepsilon>0/\forall\varepsilon_1<\varepsilon,\quad \varepsilon_2<\varepsilon, \tag{20}$$

$$|\langle g_{\lambda(\varepsilon_1)}, g_{\lambda(\varepsilon_2)}\rangle| \leqq \varepsilon_0 \quad \text{si}\quad \mu(.)\neq\lambda(.)\quad \text{et}\quad \mu(.)\neq\bar\lambda(.). \tag{20.1}$$

et

$$|\langle g_{\lambda(\varepsilon_1)}, g_{\lambda(\varepsilon_2)}\rangle-1| \leqq \varepsilon_0 \quad \text{si}\quad \mu(.)=\lambda(.)\quad \text{ou}\quad \mu(.)=\bar\lambda(.). \tag{20.2}$$

Cela établit le (*d*). A partir du (*d*), les points (*a*), (*b*) et (*c*) s'établissent automatiquement. □

## B. Décomposition de Bott

On désigne par U le cercle unité de $\mathbb{C}$ muni de sa structure de groupe multiplicatif. $U_k$, $k\in\mathbb{N}^*$, est son sous-groupe constitué des racines $k$-ièmes de l'unité. On les munit de plus de leurs structures canoniques d'espaces probabilisés :

$$B\in\mathscr{P}(U_k)\to\mu_k(B)=\frac{1}{k}\#B \tag{1.1}$$

$$B \in \mathscr{T} \to \mu(B) = \frac{1}{2\pi} \int_U 1_B(e^{i\theta})\, d\theta \tag{1.2}$$

$\mathscr{T}$ étant la tribu des boréliens de U.

On aura besoin de complexifier les espaces de Hilbert et de Krein déjà introduits. Cela se fera sans changer les notations, sauf $\mathbb{R}^m$ qui devient $\mathbb{C}^m$. La manipulation des coordonnées complexes dans le calcul des produits se fait conformément à la convention I.C(13), par exemple la formule I.C(6.1) devient :

$$(f, g)_0 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \bar{g}(t)\, dt \tag{2}$$

On pose pour $\beta \in \{0, 1/2, 2\}$

$$H^\beta_{[k]} = H^\beta(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2n}) \tag{3}$$

avec $H^0 = L^2$, et bien sûr $H_{[1]} = H$, $H^2_{[1]} = L^2$.

Pour $k=1$ on retrouve les (complexifiés des) espaces de Sobolev introduits en I.C. Pour $k$ quelconque, les produits $(.,.)_\beta$ et $\langle .,. \rangle_{1/2}$ introduits en I.C sont *naturellement définis* sur $H^\beta_{[k]}$ et $H^{1/2}_{[k]}$.

On introduit les opérateurs de Bernouilli

$$\begin{aligned} S_{[k]}\, H_{[k]} &\to H_{[k]} \\ x(.) &\to x(.-T). \end{aligned} \tag{4}$$

$S_{[k]}$ (comme par suite ses puissances entières), est unitaire pour le produit $(.,.)_\beta$, qui est un produit de Hilbert. Il s'agit donc d'isométries. $S_{[k]}$ et ses puissances forment un groupe multiplificatif isomorphe à $U_k$, qui est le spectre de $S_{[k]}$. Conformément à [E1] et [E2] nous noterons $H^\beta_{[\omega]}$ le sous-espace propre de $S_{[k]}$ associé à $\omega \in U_k$. Comme les produits considérés sont de Hilbert, la somme orthogonale des sous-espaces propres est *directe* et constitue donc une *décomposition* de $H^\beta_{[\omega]}$, dite décomposition *de Bott.*

$$H^\beta_{[k]} = \underset{\omega \in U^\beta_k}{(+)} H^\beta_{[\omega]}. \tag{5}$$

On remarque que les $(S_{[k]})^m$ sont également unitaires pour le produit, de Krein faible cette fois, $(.,.)_{1/2}$ défini sur $H^{1/2}_{[k]}$.

Considérons maintenant H une boucle T-périodique d'opérateurs symétriques de $\mathbb{R}^{2n}$ euclidiens, comme on l'a fait en II. De notre présent point de vue, il s'agit d'opérateurs hermitiens réels de $\mathbb{C}^{2n}$ hermitien. Mais si H est T-périodique, il est également $k$T-périodique et l'on peut munir $L^2_{[k]}$ et $H^1_{[k]}$ des produits de Krein faibles $\langle .,. \rangle_{0,H}$ et $\langle .,. \rangle_{1,H}$ formellement introduits en II.B (4) et (5). Il apparaît que les $S_{[k]}$ sont également unitaires pour ces produits, et donc que les $H_{[\omega]}$ sont en somme orthogonale pour eux.

Comme on sait d'après (5) que ces sommes sont directes, on obtient les décompositions en somme orthogonales directes suivantes :

$$L^2_{[k]} = \underset{\omega \in U_k}{\langle + \rangle_{0,H}} L^2_{[\omega]} \tag{6.1}$$

$$H^{1/2}_{[k]} = \underset{\omega \in U_k}{\langle + \rangle_{1/2}} H^{1/2}_{[\omega]} \tag{6.2}$$

$$H^1_{[k]} = \underset{\omega \in U_k}{\langle + \rangle_{1,H}} H^1_{[\omega]}. \tag{6.3}$$

En posant par convention que $\forall H$, $\langle .,. \rangle_{1/2,H} = \langle .,. \rangle_{1/2}$ on peut regrouper ces formules en

$$H^\beta_{[k]} = \underset{\omega \in U_k}{\langle + \rangle_{\beta,H}} H^\beta_{[\omega]}. \tag{7}$$

## C. Itération des index

Les espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z}$ peuvent être canoniquement plongés dans les espaces B (3) de fonctions sur $\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z}$. Donc les hamiltoniens T-périodiques peuvent être vus comme $k$T-périodiques et ont en tant que tels des index $f = m_{1/2,kT}$, $m_{1,kT}$, $i_{kT}$, et leurs extensions $f^+$ et $f^-$. On s'intéresse ici à l'expression de $m^\pm_{1/2,kT}$ en fonction de $m^\pm_{1/2,T}$ et de $M(T) = R_H(T)$.

LEMME 1. — *Si les arguments des valeurs propres unimodulaires de* M (T) *ne sont pas dans* $\pi\,\mathbb{Q}$, *alors*

$$m_{1/2,kT} = k m_{1/2,T} + \frac{1}{2} \sum_{\rho \in Sp(M(T))} \operatorname{sgk}(\rho) \left[ E\left(k F\left(\frac{\theta(\rho)}{2\pi}\right)\right) - E\left(k F\left(-\frac{\theta(\rho)}{2\pi}\right)\right) \right] \tag{1}$$

*où* E (*resp.* F) *désigne la partie entière* (*resp. fractionnaire*).

*Démonstration.* — On peut se ramener au cas où $n \geqq 2$ : si $n = 1$, on double artificiellement la dimension du problème en effectuant la somme biorthogonale directe

$$\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \langle (+) \rangle \mathbb{C}^2 \tag{2}$$

Pour $n \geqq 2$ on a donc $m_{1/2,kT} = i_{1/2,kT}$. On passe de façon standard au logarithme $L_0$ de M (T), en utilisant par exemple le lemme 2 de I.E, ou la formule (4.39) de ([YS], III, 4, 4, p. 211). Le logarithme est réel et Krein-antisymétrique. Si M (T) est diagonalisable on peut en déduire une famille $L_m$ de logarithmes indexés par $m \in \mathbb{Z}$ dont la trace de Krein vérifie

$$\operatorname{Trk}(L_m) = \operatorname{Trk}(L_0) + 2m. \tag{3}$$

Pour l'un des $m$, soit $m_0$, l'arc symplectique $t \in [0, T] \to M(t)$ est déformable à extrémités fixes en l'arc $\exp(t/T\,.\,L_{m_0})$. D'après [CZ], l'index standard est le même pour les deux arcs. Mais alors il est trivial que la propriété vaut aussi pour $t \in [0, k\mathrm{T}]$ et donc les $i_{k\mathrm{T}}$ se calculent directement sur l'arc $t \in [0, k\mathrm{T}] \to \exp(t/\mathrm{T}.\mathrm{L}_{m_0})$, ce qui donne la formule (1). Le résultat s'étend par densité au cas non diagonalisable.

Si l'une des valeurs propres unimodulaires de $\mathrm{M}(\mathrm{T})$ est dans $\pi\mathbb{Q}$, 1 sera valeur propre d'une certaine puissance entière de $\mathrm{M}(\mathrm{T})$ et l'index ne sera pas itérable pour tout $k$. Il faut alors recourir aux extensions $m^{+}_{1/2,\mathrm{T}}$ et $m^{-}_{1/2,\mathrm{T}}$ introduites en II.D.

On a besoin du :

LEMME 2. – *Un bloc de Jordan Krein-positif (resp. négatif) de* $\mathrm{M}(\mathrm{T})$ *émet deux valeurs propres sur le cercle unité quand l'hamiltonien est perturbé de façon strictement décroissante (resp. croissante) et zéro valeur propre quand l'hamiltonien est perturbé dans la direction opposée.*

*Démonstration.* – Grâce au théorème 1 de I.E, le signe de Krein d'un bloc s'écrit selon la formule I.E(15.3). Les notations sont d'ailleurs compatibles avec le calcul perturbatif de ([YS], III, 4.2, p. 206-207) où l'on perturbe l'hamiltonien de façon strictement croissante ou décroissante. Si $q$ est l'ordre du bloc, ce calcul conduit, par identification de séries entières de l'ordre 0 à l'ordre $q-1$, à un système de $q$ équations, le système (4.34). Dans ([Br2], p. 13), l'identification est poussée un cran plus loin, soit à l'ordre $q$, ce qui conduit à relier le signe de l'expression I.E(15.3) à l'émission ou à la non-émission d'un couple de valeurs propres sur le cercle unité U. □

Grâce au lemme 2, le lemme 1 se généralise en le :

THÉORÈME 1. – *Soit* $j^+$ *et* $j^-$ *les fonctions mesurables de* U *dans* $\mathbb{Z}$ *définies par :*

$$j^{+}(1) = m^{+}_{1/2,\mathrm{T}} \tag{4.1.1}$$

$$j^{-}(1) = m^{-}_{1/2,\mathrm{T}} \tag{4.1.2}$$

$$\forall \omega \in \mathrm{U} - \mathrm{Sp}(\mu(\mathrm{T})), \quad \frac{dj^{+}}{d\omega} = \frac{dj^{-}}{d\omega} = 0 \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} \forall \omega \in \mathrm{U} \cap \mathrm{Sp}(\mu(\mathrm{T})), \text{ de signature de Krein } (p, q), \\ \lim_{\varepsilon \to 0+} (j(\omega e^{i\varepsilon}) - j(\omega e^{-i\varepsilon})) = q - p \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered} \forall \omega \in \mathrm{U} \cap \mathrm{Sp}(\mu(\mathrm{T})), \\ j^{-}(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0-} j(e^{i\varepsilon}\omega) - \#\{\omega - \text{blocs} > 0\} \\ j^{+}(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0+} j(e^{i\varepsilon}\omega) - \#\{\omega - \text{blocs} < 0\}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Alors :

$$m^{+}_{1/2\,k\mathrm{T}} = \sum_{\omega^k = 1} j^{+}(\omega) = k \int_{\mathrm{U}} j^{+}\, \mu_k(dz) \tag{5.1}$$

$$m_{1/2,\,k\mathrm{T}}^{-}=\sum_{\omega^k=1} j^{-}(\omega)=k\int_{\mathrm{U}} j^{-}\,\mu_k(dz). \tag{5.2}$$

Les formules (5) restent bien sûr valables si l'on remplace les $j$ par leurs symétrisées $\tilde{j}$ :

$$\tilde{j}^{+}(\omega)=\frac{1}{2}(j^{+}(\omega)+j^{+}(\bar{\omega})) \tag{6.1}$$

$$\tilde{j}^{-}(\omega)=\frac{1}{2}(j^{-}(\omega)+j^{-}(\bar{\omega})).\quad \square \tag{6.2}$$

*Remarque.* — D'après le lemme 2 de II.D, l'index $m_{1/2,\,\mathrm{T}}^{-}$ est, à la constante $n$ près, celui utilisé dans [E1] et [E2]. Et dans ce cas, le présent théorème 1 n'est autre que celui de [Br1], et que celui de [Br2], p. 23.

Comme on l'a vu en B, les différents espaces $\mathrm{H}_{[\omega]}^{\beta}$ pour $\beta$ fixé égal à 0, 1/2, 1, sont orthogonaux entre eux lorsque $\omega$ décrit $\mathrm{U}_k$ pour toutes les formes quadratiques que nous avons distinguées [B (5) et B (7)]. En conséquence de quoi, leurs endormophismes quotients ne les couplent pas, or, on définit précisément les index à partir de ces quotients. C'est dire qu'on peut définir les index en question réduits à un $\mathrm{H}_{[\omega]}^{\beta}$ donné. Les (symétrisées des) fonctions $j$ du théorème 1 s'interprètent précisément comme ces index réduits ou partiels et il est par suite naturel que leur somme (5) redonne l'index proprement dit. Cette interprétation permet de démontrer le théorème 1 d'une autre manière. C'est ce qui a été fait dans le cas convexe en ([E1], IV).

COROLLAIRE 1. — *L'index continu s'exprime comme*

$$l=\lim_{k\to\infty}\frac{i_{k\mathrm{T}}^{\pm}}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{m_{\beta,\,k\mathrm{T}}^{\pm}}{k} \tag{7}$$

*pour* $\beta=1/2$ *ou* 1. $\square$

*Démonstration.* — Comme les $j$ sont Riemann intégrables, on peut appliquer dans (5) la convergence faible des $\mu_k$ vers $\mu$, ce qui prouve la coïncidence à une constante près. Cette constante est zéro, comme on le vérifie en prenant l'hamiltonien nul. $\square$

## RÉFÉRENCES


[AG] N. I. ACHIESER et I. M. GLASMAN, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie Verlag, Berlin, 1975.

[Be] A. BENSOUSSAN, *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, North Holland, 1982.

[Br1] V. BROUSSEAU, L'index d'un système hamiltonien linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I, n° 8, 1986, p. 351-354.

[Br2] V. BROUSSEAU, D.P. n° 8809 du Ceremade.

[CZ] C. CONLEY et E. ZEHNDER, Morse-type index for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, *Comm. P.A.M.*, vol. **37**, 1984, p. 207-253.

[E1] I. EKELAND, Une théorie de Morse pour les systémes hamiltoniens convexes, *Ann. Inst. Henri-Poincaré, Analyse non linéaire*, vol. **1**, 1984, p. 19-78.

[E2] I. EKELAND, An index theory for periodic solutions of convex hamiltonian systems, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **45,** 1986, p. 395-423.

[L1] H. LANGER, Spehtraltheorie linearer Operatoren in J-Raümen und einige Anwerdungen auf die Schar $L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C$, *Thèse d'Habilitation*, Technische Unversität Dresden, 1965.

[L2] H. LANGER, Invariante Teilraüme definisierbarer J-selbst-adjungreiten Operatoren, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI*, vol. 475, 1971.

[KL] M. G. KREIN et H. LANGER, Sur la fonction spectrale d'un opérateur autoadjoint dans un espace à métrique indéfinie (en russe), *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. **152,** 1963, p. 39-42.

[YS] V. YAKUBOVICK et V. STARZHINSKI, *Linear differential equations with periodic coefficients*, Halsted Press, Wiley, 1975.

(*Manuscrit reçu le* 29 *juin* 1989.)