

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

B. HANOZET

J.-L. JOLY

## **Applications bilinéaires compatibles avec un opérateur hyperbolique**

*Annales de l'I. H. P., section C*, tome 4, n° 4 (1987), p. 357-376

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1987\\_\\_4\\_4\\_357\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1987__4_4_357_0)

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section C » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Applications bilinéaires compatibles avec un opérateur hyperbolique

par

**B. HANOZET et J.-L. JOLY**

Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,  
Unité associée au C.N.R.S. n° 226,  
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — Étant donné un système hyperbolique et une forme bilinéaire  $q$  sur  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ , à tout couple  $(u, v)$  de solutions libres du système, on associe la fonction  $q(u, v)(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . On introduit différentes notions de compatibilité de la forme  $q$  avec le système différentiel, en liaison avec l'étude du comportement asymptotique, ponctuel ou intégral de  $q(u, v)(t, \cdot)$  quand  $|t|$  tend vers l'infini.

*Mots clés :* Applications compatibles, systèmes hyperboliques, comportement asymptotique, compacité par compensation.

**ABSTRACT.** — To each pair  $(u, v)$  of solutions of  $\mathcal{L}u=0$ , where  $\mathcal{L}$  is an  $N \times N$  hyperbolic system, we can associate the function  $q(u, v)(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , with  $q$  a given bilinear form on  $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ . The asymptotic behaviour of  $q(u, v)(t, \cdot)$  when  $|t|$  grows to infinity allows us to introduce several families of bilinear forms (which we call compatible with the system  $\mathcal{L}$ ) which define a weaker coupling.

## INTRODUCTION

Soit  $\mathcal{L}$  un opérateur du premier ordre à coefficients matriciels constants

$$\mathcal{L}(\partial) = \sum_{i=0}^n B_i \partial_{x_i} \quad B_i \in \mathcal{M}_{M, N}(\mathbb{C}),$$

de symbole

$$\mathcal{L}(\xi) = \sum_{i=0}^n \xi_i B_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dans des articles maintenant classiques, F. Murat [10] et L. Tartar [13] ont montré que certaines formes bilinéaires  $q$  sur  $\mathbb{C}^N$ , à savoir celles qui possèdent la propriété de compatibilité suivante avec  $\mathcal{L}$  :

(C<sub>0</sub>) Pour tout  $\xi \neq 0$ ,  $\text{Ker } \mathcal{L}(\xi)$  est un sous-espace isotrope pour  $q$ , c'est-à-dire  $q(\text{Ker } \mathcal{L}(\xi), \text{Ker } \mathcal{L}(\xi)) = 0$ ,

avaient des propriétés remarquables de continuité faible dans un sous-espace de  $L^2$ .

Dans le même ordre d'idée, nous avons montré dans [7] et [8] que ces formes [que nous nommerons (C<sub>0</sub>) compatibles] permettaient de définir des applications :  $(u, v) \mapsto q(u, v)$  continues de  $\{u \in (H_{loc}^s)^N, \mathcal{L}(\partial)u \in (H_{loc}^t)^M\}^2$  dans un espace de Sobolev convenable, ceci même pour des valeurs *strictement négatives* de  $s$ . Cette notion de compatibilité qui permet de distinguer dans le domaine d'un opérateur des « produits » plus réguliers que les autres est susceptible de généralisations à d'autres espaces du type  $H^{s,p}$  ou Besov [1] ou à des opérateurs à coefficients variables [6]. Elle peut s'interpréter aussi en termes de spectre singulier polarisé [11].

Lorsque l'opérateur  $\mathcal{L}$  est hyperbolique par rapport à une des variables que nous désignerons par  $t$

$$\mathcal{L} = I \partial_t + \sum_{i=1}^n A_i \partial_{x_i}$$

il a été noté dans [8] que, sous certaines hypothèses de régularité sur  $\mathcal{L}$  (caractéristiques simples en particulier), les formes C<sub>0</sub> compatibles possédaient, relativement au problème de Cauchy pour  $\mathcal{L}$ , une autre propriété remarquable; de façon caractéristique ce sont celles qui définissent l'interaction quadratique ponctuellement le plus faible possible lorsque  $|t| \mapsto +\infty$ .

Toujours pour les opérateurs hyperboliques réguliers, A. Bachelot [2] a remarqué que la compatibilité  $(C_0)$  était caractérisée par une propriété d'équirépartition de l'énergie.

Cependant, des exemples très simples, à caractéristiques de multiplicité variable, montrent que  $(C_0)$  n'est pas toujours la bonne notion pour le problème de Cauchy.

Dans ce travail, nous proposons diverses propriétés de compatibilité, plus naturelles que  $(C_0)$  dans le cadre du problème de Cauchy hyperbolique. Elles sont définies au paragraphe 1 et comparées à  $(C_0)$ . Deux exemples sont donnés au paragraphe suivant, le troisième et dernier paragraphe étant consacré au comportement asymptotique ponctuel remarqué dans [8]. Les deux exemples considérés au paragraphe 2 donnent lieu à l'existence globale d'une solution de  $\mathcal{L}u = q(u)$  et à l'existence d'un opérateur de diffusion si  $q$  est compatible avec  $\mathcal{L}$  et si les données initiales sont suffisamment petites ([9], [5], [14]).

**I. — DIVERSES NOTIONS DE COMPATIBILITÉ**

Soit  $\mathcal{L}$  un opérateur différentiel de la forme :

$$\mathcal{L} = I \partial_t + \sum_{i=1}^n A_i \partial_{x_i}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où  $A_i \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ . On fait sur  $\mathcal{L}$  les hypothèses d'hyperbolicité suivantes : on suppose que la matrice :

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i A_i, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

se diagonalise sous la forme :

$$A(\xi) = \sum_{k=1}^p c_k(\xi) \pi_k(\xi) \tag{1.1}$$

avec  $p \leq N$  indépendant de  $\xi \neq 0$ ,  $c_k(\xi) \in \mathbb{R}$ ,  $\pi_k(\xi) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , vérifiant :

$$\pi_k(\xi) \cdot \pi_l(\xi) = \delta_{kl} \pi_k(\xi), \quad I = \sum_{k=1}^p \pi_k(\xi) \tag{1.2 a}$$

$$c_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}), \quad \pi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathcal{M}_N(\mathbb{C})) \quad (1.2b)$$

$$c_k \neq c_l \quad \text{si } k \neq l. \quad (1.2c)$$

Les fonctions  $c_k$  sont homogènes de degré 1,  $\pi_k$  homogènes de degré 0. Remarquons que le rang de chaque projecteur  $\pi_k$  est constant puisque d'une part il est s. c. i. en vertu de (1.2b) et que, d'autre part, la somme des rangs des  $\pi_k$  est égale à  $N$  d'après (1.2a). Remarquons aussi que (1.2c) signifie que si  $k \neq l$ , il existe  $\xi \neq 0$  tel que  $c_k(\xi) \neq c_l(\xi)$ . Par conséquent l'entier  $p$  qui figure dans (1.1) est minimal, ce qui rend l'écriture (1.1) unique à une permutation des indices près. Fondamentalement, la propriété d'hyperbolicité résulte de ce que le spectre de  $A(\xi)$  est réel; la formule (1.1) qui dit que  $A(\xi)$  est diagonalisable est une propriété de régularité supplémentaire. On notera toutefois que malgré (1.2c) et le fait que les  $\pi_k$  soient de rang constant, les valeurs propres de  $A(\xi)$  ne sont pas en général de multiplicité constante, car rien ne s'oppose à ce que divers  $c_k(\xi)$  coïncident pour des valeurs particulières de  $\xi$ .

Si on a de plus :

$$c_1(\xi) > c_2(\xi) > \dots > c_p(\xi), \quad \xi \neq 0 \quad (1.3)$$

on dit que  $\mathcal{L}$  est fortement hyperbolique; dans ce cas les  $p$  valeurs propres distinctes ont une multiplicité constante.

Soit  $\varphi \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$ ; la solution  $u$  du problème de Cauchy

$$\mathcal{L}u = 0; \quad u(0, x) = \varphi(x) \quad (1.4)$$

s'écrit :

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^p u_k(t, x) \quad (1.5)$$

avec

$$u_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle - itc_k(\xi)} \pi_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

où

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx.$$

Soit  $q$  une forme bilinéaire sur  $\mathbb{C}^N$ . A chaque couple  $(u, v)$  de solutions de (1.4) correspondant à des conditions initiales  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n))^N$ , la forme  $q$  associe la fonction  $q(u, v)$  définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  par :

$$q(u, v)(t, x) = \sum_{k, l=1}^p q(u_k(t, x), v_l(t, x)) \tag{1.7 a}$$

$$q(u_k(t, x), v_l(t, x)) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\Phi_{kl}(t, x, \xi, \eta)} q(\pi_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \pi_l(\eta) \hat{\psi}(\eta)) d\xi d\eta \tag{1.7 b}$$

$$\Phi_{kl}(t, x; \xi, \eta) = \langle x, \xi + \eta \rangle - t(c_k(\xi) + c_l(\eta)). \tag{1.7 c}$$

Clairement, le comportement asymptotique, quand  $|t| \rightarrow \infty$ , de chaque terme  $q(u_k, v_l)$  dépend de l'ensemble des points critiques de la phase  $\Phi_{kl}$ .

Si on s'intéresse au comportement ponctuel, c'est-à-dire à  $q(u, v)(t, x)$ , l'ensemble critique qui intervient est pour  $k, l$  fixé

$$S_1^{kl} = \{ \xi \neq 0, \eta \neq 0; \exists (t, x) \text{ tels que } \nabla_{\xi\eta} \Phi_{kl} = 0 \} \\ = \{ \xi \neq 0, \eta \neq 0; c_k(\xi) = c_l(\eta) \}.$$

Si on s'intéresse au comportement de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^n} q(u, v)(t, x) dx$  les ensembles critiques intéressants sont les :

$$S_2^{kl} = \{ \xi \neq 0, \eta \neq 0; \exists t \text{ tel que } \nabla_{x\xi\eta} \Phi_{kl} = 0 \} \\ = \{ \xi \neq 0, \eta \neq 0; \xi + \eta = 0, c_k(\xi) = c_l(\eta) \}.$$

Tenant compte de (1.7 a), le théorème de la phase stationnaire laisse prévoir que le comportement pour  $|t|$  grand de  $q(u, v)$  ou de  $\int_{\mathbb{R}^n} q(u, v) dx$  sera *a priori* meilleur si  $q$  vérifie les propriétés suivantes, pour tout  $k$  et  $l$  :

$$(C_i)_{kl} \quad \forall (\xi, \eta) \in S_i^{kl}, \quad q(\pi_k(\xi), \pi_l(\eta)) = 0$$

et ceci pour  $i=1$  ou  $i=2$ .

DÉFINITION. — On dit que  $q$  est compatible avec  $\mathcal{L}$  au sens  $(C_i)$   $i=1, 2$ , si  $q$  vérifie  $(C_i)_{k, l}$  pour tout  $k$  et  $l$ .

Il est clair que si  $q$  vérifie  $(C_1)$ , elle vérifie  $(C_2)$ .

PROPOSITION 1. 1. — Si  $q$  vérifie  $(C_1)$  ou  $(C_2)$  elle vérifie aussi :

$$(C_3) \quad \forall k, \quad \forall \xi \neq 0, \quad q(\pi_k(\xi), \pi_k(\xi)) = 0.$$

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que si  $q$  vérifie  $(C_2)$  elle vérifie aussi  $(C_3)$ . Comme  $A(-\xi) = -A(\xi)$ , on a :

$$A(-\xi) = \sum_{l=1}^p c_l(-\xi) \pi_l(-\xi) = -A(\xi) = \sum_{k=1}^p -c_k(\xi) \pi_k(\xi).$$

A cause de (1.2) et de l'unicité qui en résulte pour (1.1), à tout  $k$  on peut associer un unique  $l_k$  tel que :

$$c_{l_k}(-\xi) = -c_k(\xi), \quad \pi_{l_k}(-\xi) = \pi_k(\xi).$$

On a donc  $\nabla c_{l_k}(-\xi) = \nabla c_k(\xi)$  et par conséquent,

$$S_2^{l_k} = \{(\xi, -\xi) \neq 0\}.$$

Alors si  $q$  vérifie  $(C_2)$ , elle vérifie en particulier  $(C_2)_{k, l_k}$  pour tout  $k$ , donc  $q(\pi_k(\xi), \pi_{l_k}(-\xi)) = q(\pi_k(\xi), \pi_k(\xi)) = 0$ , pour tout  $k$ , ce qui est la condition  $(C_3)$ .

Avant de comparer les propriétés  $(C_1)$  et  $(C_2)$  à la propriété  $(C_0)$  que nous avons mentionnée dans l'introduction, remarquons d'abord que cette dernière signifie que les sous-espaces propres de  $A(\xi)$  sont tous isotropes pour  $q$ .

Précisément, si  $\lambda_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, r(\xi)$ , désignant les valeurs propres de  $A(\xi)$ , la propriété  $(C_0)$  s'écrit :

$$(C_0) \quad \forall j, \quad q\left(\sum_{c_k(\xi) = \lambda_j(\xi)} \pi_k(\xi), \sum_{c_k(\xi) = \lambda_j(\xi)} \pi_k(\xi)\right) = 0$$

on a alors,

PROPOSITION 1. 2. — Si  $\mathcal{L}$  est fortement hyperbolique les conditions  $(C_0)$ ,  $(C_2)$  et  $(C_3)$  sont équivalentes.

*Démonstration.* — La propriété d'hyperbolicité forte assure déjà que  $(C_0)$  et  $(C_3)$  sont équivalentes. La proposition résultera donc du fait que pour tout  $l \neq l_k$ ,  $S_2^{kl} = \emptyset$ . Soit donc  $(\xi, -\xi) \in S_2^{kl}$ , on a  $\nabla c_k(\xi) = \nabla c_l(-\xi)$ . Comme les fonctions  $c_k$  sont homogènes de degré 1, on en déduit que pour  $\xi \neq 0$  :

$$\langle \xi, \nabla c_k(\xi) \rangle = c_k(\xi) = \langle \xi, \nabla c_l(-\xi) \rangle = -c_l(-\xi)$$

mais la forte hyperbolicité de  $\mathcal{L}$  implique que l'égalité  $c_k(\xi) = -c_l(-\xi)$  ne peut avoir lieu pour un  $\xi$  particulier que si elle a lieu pour tout  $\xi \neq 0$ , ce qui impose  $l = l_k$ ; d'où le résultat.

Examinons maintenant un cas fréquent dans les applications où toutes les propriétés de compatibilité coïncident.

PROPOSITION 1.3. — *On suppose que  $\mathcal{L}$  est fortement hyperbolique et qu'il vérifie :*

$$\forall \xi \neq 0, \quad \forall k, \quad c_k(\xi) \neq 0, \tag{1.8 a}$$

$$\forall \xi \neq 0, \quad \forall k, \quad \text{rang}(\text{Hess } c_k(\xi)) = n - 1. \tag{1.8 b}$$

Alors les conditions  $(C_0)$  à  $(C_3)$  sont toutes équivalentes.

Avant de démontrer cette proposition, dégageons des propriétés géométriques des hypothèses (1.8 ab).

LEMME 1.4. — *Soit  $c(\xi)$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ , homogène de degré 1, telle que :*

$$\forall \xi \neq 0, \quad c(\xi) > 0, \tag{1.9 a}$$

$$\forall \xi \neq 0, \quad \text{rang}(\text{Hess } c(\xi)) = n - 1. \tag{1.9 b}$$

On note  $W$  l'image de  $S^{n-1}$  par l'application :

$$\xi \mapsto \nabla c(\xi). \tag{1.10}$$

Alors,

(i)  $W$  est une sous-variété régulièrement plongée de  $\mathbb{R}^n$  et (1.10) est un difféomorphisme de  $S^{n-1}$  sur  $W$ .

(ii) L'application réciproque de (1.10) est l'application de Gauss  $\gamma$  de  $W$  ( $\gamma$  associe à tout point de  $W$  la normale extérieure à  $\mathcal{W}$ , composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^n \setminus W$ ).

(iii)  $\mathcal{W}$  est un ensemble strictement convexe dont  $c$  est la fonction d'appui.

Démonstration du lemme 1.4. — Notons d'abord que l'homogénéité de  $c(\xi)$  implique que :

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial c}{\partial \xi_i}(\xi) = c(\xi) \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 c}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) \cdot \xi_i = 0 \tag{1.12}$$

et que, par suite,  $(n-1)$  est le rang maximal de la matrice hessienne de  $c(\xi)$ .

Le point (i) résulte du lemme suivant (voir aussi [12]).

LEMME. — L'application  $C^\infty T : \xi \mapsto |\nabla c(\xi)|^{-1} \nabla c(\xi)$  est un difféomorphisme de la sphère  $S^{n-1}$ .

En effet, de (1.9 a) et (1.11) on tire :

$$\langle T(\xi), \xi \rangle > 0;$$

par suite  $T(\xi) \neq T(-\xi)$  et donc  $T$  est surjective; d'autre part,  $T(\xi) \neq -\xi$  donc le degré de  $T$  vaut 1; par ailleurs (1.9 b) implique que  $T$  est un difféomorphisme local donc global puisque le degré de  $T$  vaut 1. Le point (ii) résulte de 1.12, l'orientation étant conséquence de (1.11) et (1.9 a).

Démontrons le point (iii). Soit  $\xi \in S^{n-1}$ , on a :

$$c(\xi) = \sup_{x \in \mathcal{W}} \langle x, \xi \rangle. \quad (1.13)$$

En effet,  $\sup_{x \in \mathcal{W}} \langle x, \xi \rangle$  est atteint sur  $W$  en un ensemble de points où la normale extérieure est égale à  $\xi$ , de (ii) il résulte que cet ensemble est réduit à l'unique point  $\nabla c(\xi)$  et (1.13) découle de (1.11). La fonction  $c(\xi)$  est donc convexe et l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{W}$  est :

$$\overline{\text{CO}}(\mathcal{W}) = \{ x; \forall \xi \in S^{n-1}, \langle x, \xi \rangle \leq c(\xi) \}$$

Montrons que  $\overline{\mathcal{W}} \supset \overline{\text{CO}}(\mathcal{W})$ . Soit  $x_0 \notin \overline{\mathcal{W}}$  et  $y_0 \in W$  tel que  $|x_0 - y_0| = \text{dist}(x_0, \overline{\mathcal{W}})$ . Il existe alors  $\lambda > 0$  tel que  $x_0 - y_0 = \lambda \gamma(y_0) = \lambda \xi_0$ .

On a donc :

$$\langle x_0, \xi_0 \rangle > \langle y_0, \xi_0 \rangle = \langle \nabla c(\xi_0), \xi_0 \rangle = c(\xi_0)$$

et par suite,  $x_0 \notin \overline{\text{CO}}(\mathcal{W})$  d'où la conclusion.

Démonstration de la proposition 1.3. — Notons  $W_k$  l'image de  $S^{n-1}$  par :

$$\xi \rightarrow \nabla c_k(\xi)$$

et  $\mathcal{W}_k$  la composante connexe bornée (elle contient 0) de  $\mathbb{R}^n \setminus W_k$ .

$W_k$  définit la  $k$ -ième nappe du cône d'onde de  $\mathcal{L}$ .

$\mathcal{L}$  étant strictement hyperbolique, on a :

$$\forall \xi \neq 0, \quad c_1(\xi) > c_2(\xi) > \dots > c_p(\xi).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} c_{p+1-k}(-\xi) &= -c_k(\xi) \\ \nabla c_{p+1-k}(-\xi) &= \nabla c_k(\xi) \\ \pi_{p+1-k}(-\xi) &= \pi_k(\xi) \end{aligned}$$

et aussi

$$W_{p+1-k} = W_k.$$

Si  $n \geq 2$ , pour des raisons de connexité de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$  est pair, chaque fonction  $c_k$  garde un signe constant, les  $\frac{p}{2}$  premières sont positives, les suivantes négatives :

$$\forall \xi \neq 0, \quad c_1(\xi) > \dots > c_{p/2}(\xi) > 0 > c_{(p/2)+1}(\xi) > \dots > c_p(\xi).$$

Si  $n = 1$ , la situation est la même si  $p$  est pair mais si  $p$  est impair la fonction  $c_{[p/2]+1}$  change de signe et  $W_{[p/2]}$  est réduit à un seul point. Le cône d'onde de  $\mathcal{L}$  est ainsi formé de  $[p/2]$  nappes régulières distinctes avec, éventuellement, une nappe supplémentaire réduite à une seule droite si  $n = 1$  et  $p$  est impair.

Supposons  $n \geq 2$  ou plus généralement  $p$  entier pair. Comme on a :

$$\forall \xi \neq 0, \quad c_1(\xi) > c_2(\xi) > \dots > c_{p/2}(\xi) > 0$$

on déduit du lemme 1.4 que :

$$\mathcal{W}_1(\xi) \supset \mathcal{W}_2(\xi) \supset \dots \supset \mathcal{W}_{p/2}(\xi).$$

Comme  $S_1^{kl} = \{ \xi \neq 0, \eta \neq 0; \nabla c_k(\xi) = \nabla c_l(\eta) \}$ , il est clair que :

$$\begin{aligned} S_1^{kl} &= \emptyset \quad \text{si } l \neq k, \quad l \neq p+1-k \\ S_1^{kl} &= \{ (\xi, \xi), \xi \neq 0 \} \\ S_1^{k, p+1-k} &= \{ (\xi, -\xi), \xi \neq 0 \}. \end{aligned}$$

La condition  $(C_1)$  est donc équivalente à  $(C_3)$  puisque  $\pi_k(\xi) = \pi_{p+1-k}(-\xi)$  d'où la proposition 1.3. Le cas  $n = 1$  et  $p$  impair ne pose pas de problème car  $\pi_{[p/2]+1}$  est indépendant de  $\xi$ .

*Remarque 1.5.* — Il y a des exemples de systèmes fortement hyperboliques qui possèdent une valeur propre  $c_{k_0}$  identiquement nulle, et qui, par conséquent, ne vérifient pas (1.8 a). Cependant, si les autres valeurs

propres  $c_k$ ,  $k \neq k_0$ , vérifient (1.8a) et (1.8b) et si on ne s'intéresse qu'aux solutions non stationnaires du problème de Cauchy, c'est-à-dire aux solutions telles que :

$$\pi_{k_0}(\xi) \hat{\phi}(\xi) \equiv 0$$

donc telles que :

$$u_{k_0} \equiv 0$$

alors on est ramené au cadre de la proposition 1.3.

Cette remarque s'applique en particulier lorsqu'on écrit une équation scalaire sous forme de système et qu'on introduit de façon artificielle la vitesse nulle, ainsi qu'on le verra dans le paragraphe suivant à propos de l'opérateur des ondes.

## II. — EXEMPLES

1° La proposition 1.3 s'applique en particulier aux systèmes modélisant la propagation d'ondes dans un milieu homogène et isotrope, puisque dans ce cas les fonctions  $c_k$  sont radiales, donc de la forme  $\alpha_k |\xi|$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et vérifient par conséquent les propriétés (1.7). On trouvera des exemples correspondant à cette situation dans [7]. Contentons-nous, ici, d'examiner le cas de l'équation des ondes, ce qui nous permettra aussi d'illustrer la remarque 1.5.

Soit  $v$  solution dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  de :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v &= 0 \\ v(0) &= v_0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0) &= v_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Posons  $u_0 = \frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $u_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Le problème (2.1) conduit au système d'équation :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i} = 0$$

et aux conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= v_1 \\ \varphi_i &= \frac{\partial v_0}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{2.2}$$

La matrice A (ξ) du système s'écrit :

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_1 & -\xi_2 & \dots & -\xi_n \\ -\xi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\xi_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et on a, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$A(\xi) = 0 \cdot \pi_0(\xi) + |\xi| \pi_+(\xi) - |\xi| \pi_-(\xi)$$

où  $\pi_0(\xi)$  est le projecteur orthogonal sur  $(0, \xi^\perp)$ ,  $\pi_+(\xi)$  le projecteur orthogonal sur le vecteur  $(|\xi|, -\xi)$  et  $\pi_-(\xi)$  le projecteur orthogonal sur le vecteur  $(|\xi|, \xi)$ . Les conditions initiales (2.2) vérifient  $\pi_0(\xi) \varphi(\xi) = 0$  et, en vertu de la remarque (1.4), on peut donc appliquer la proposition 1.3 puisque des vitesses  $\pm|\xi|$  satisfont évidemment (1.8). Les formes bilinéaires  $q$  vérifiant  $(C_i)$  sont donc caractérisées par :

$$q(\pi_\pm(\xi), \pi_\pm(\xi)) = 0.$$

Notons

$$\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{bmatrix}$$

la matrice de la forme bilinéaire,  $q_{00} \in \mathbb{C}$ ,  $q_{11} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $q_{01} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ ,  $q_{10} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

Ces deux relations donnent :

$$q_{00} |\xi|^2 \pm (q_{01} \xi + {}^t \xi q_{10}) |\xi| + {}^t \xi q_{11} \xi = 0$$

donc

$$\begin{aligned} q_{01} + {}^t q_{10} &= 0 \\ {}^t \xi q_{11} \xi &= -q_{00} |\xi|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice de  $q$  est la somme d'une matrice antisymétrique quelconque et d'une matrice proportionnelle à

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$$

si on ne s'intéresse qu'à la forme quadratique associée à  $q$ , on a donc :

$$q(u, u) = u_0^2 - \sum_{i=1}^n u_i^2$$

et en revenant à la fonction  $v$  on trouve :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - (\nabla_x v)^2$$

c'est-à-dire le lagrangien associé à l'opérateur des ondes  $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ . Le cas de la dimension 1 d'espace se traite aussi en posant :

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ u_- &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

ce qui conduit au système suivant pour  $u = (u_+, u_-)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Donc

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{bmatrix} = \xi\pi_+ - \xi\pi_-$$

où  $\pi_+$  (resp.  $\pi_-$ ) est le projecteur sur le premier axe (resp. second axe). Les propriétés sont vérifiées et les formes bilinéaires ont pour matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Les produits autorisés sont donc de la forme  $u_+ u_-$  ce qui, revenant à  $v$ , conduit évidemment encore au lagrangien. On a donc

PROPOSITION 2.1. — *Les formes compatibles au sens  $(C_0)$  ou  $(C_1)$  ou  $(C_2)$  avec l'opérateur des ondes  $\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta$  sont proportionnelles à  $u_t^2 - |\nabla_x u|^2$ .*

2° Voyons maintenant un exemple assez différent, à caractéristique de multiplicités variables, et où les hessiennes des vitesses  $c_k(\xi)$  sont toutes identiquement nulles, donc de rang maximal égal à  $n - 1$  seulement si  $n = 1$ . Pour cet exemple où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est découpé, la matrice  $A(\xi)$  est diagonale et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \langle c_1, \xi \rangle & & & & \\ & & & 0 & \\ & & \dots & & \\ 0 & & & & \\ & & & & \langle c_N, \xi \rangle \end{bmatrix}$$

avec  $c_i \in \mathbb{R}^n$ , pour  $i = 1, \dots, N$ .

Notons  $c_{k_1}, \dots, c_{k_p}$  les vecteurs distincts. La matrice  $A(\xi)$  s'écrit sous la forme (1.1) :

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^p \langle c_{k_i}, \xi \rangle \pi_{k_i}$$

avec  $\pi_{k_i} = \sum_{c_j=c_{k_i}} P_j$ ,  $P_j$  étant le projecteur sur la  $j$ -ième coordonnée de  $\mathbb{C}^N$ .

En dimension  $n = 1$ , l'opérateur  $\mathcal{L}$  vérifie les hypothèses de la propriété (1.3); ce n'est plus vrai pour  $n \geq 2$  et, dans ce cas, seule la forme identiquement nulle vérifie la propriété  $(C_0)$ . En effet, quels que soient  $i$  et  $j$

éléments de  $\{1, \dots, N\}$ , il existe toujours  $\xi \neq 0$  tel que  $\langle c_i - c_j, \xi \rangle = 0$  et par conséquent pour vérifier  $(C_0)$ ,  $q$  doit satisfaire :

$$q(P_i, P_j) = 0, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}$$

donc  $q = 0$ . Plus précisément, on a :

**PROPOSITION 2.2.** — Soit  $\mathcal{L}$  l'opérateur défini par (2.3). Si  $n=1$ , les compatibilités  $(C_i)$ ,  $i=0, 1, 2, 3$  sont toutes équivalentes. Si  $n \geq 2$ , seule la forme nulle est compatible au sens  $(C_0)$ , mais les compatibilités  $(C_i)$ ,  $i=1, 2, 3$  sont équivalentes.

Une forme  $q(u, v) = \sum_{i, j=1}^N a_{ij} u_i v_j$  est compatible avec  $\mathcal{L}$  au sens  $(C_i)$ ,  $i=1, 2, 3$  si et seulement si  $a_{ij} = 0$  dès que  $c_i = c_j$ ; c'est sous ces hypothèses qu'il est établi dans [5] que le problème de Cauchy admet des solutions globales pour des données petites.

### III. — COMPATIBILITÉ ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE PONCTUEL

On suppose  $\mathcal{L}$  fortement hyperbolique et satisfaisant les propriétés (1.8). Si  $\varphi \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$  est un paquet d'onde régulier, c'est-à-dire si  $\varphi$  a une transformée de Fourier dans  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0))^N$ , on vérifie d'abord que la solution correspondante possède une décroissance en  $O(t^{-(n+1)/2})$  pour la norme uniforme en  $x \in \mathbb{R}^n$  et on précise le comportement de cette solution au voisinage de chaque nappe du cône d'onde de  $\mathcal{L}$ ; c'est l'objet de la proposition 3.2 ci-après. Par conséquent, si  $u$  et  $v$  sont des solutions correspondant à des paquets d'ondes réguliers,  $q(u, v)$  décroît en général en  $O(t^{-n+1})$ . La compatibilité de  $q$  avec  $\mathcal{L}$  permet d'obtenir une meilleure décroissance, plus précisément :

**PROPOSITION 3.1.** — On suppose  $n \geq 2$  et  $\mathcal{L}$  fortement hyperbolique satisfaisant (1.8). Pour qu'une forme bilinéaire  $q$  soit compatible avec  $\mathcal{L}$  il faut et il suffit que, pour tout couple  $(u, v)$  de solutions du problème de Cauchy, avec  $u(0, \cdot)$  et  $v(0, \cdot)$  paquets d'ondes réguliers, on ait :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |q(u, v)(t, x)| = O(t^{-n}) \quad (|t| \rightarrow \infty). \quad (3.1)$$

On précise tout d'abord le comportement de chaque fonction :

$$u_k(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it \langle x/t, \xi \rangle - c_k(\xi)} \pi_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi$$

au voisinage de la nappe correspondante du cône d'onde de  $\mathcal{L}$ .

De façon générale, comme au lemme 1.4, on introduit une fonction  $c(\xi)$ ,  $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ , homogène de degré 1, vérifiant :

$$\forall \xi \neq 0, \quad c(\xi) > 0 \tag{1.9 a}$$

$$\forall \xi \neq 0, \quad \text{rang}(\text{Hess } c(\xi)) = n - 1 \tag{1.9 b}$$

et on reprend les notations du lemme 1.4. Soit aussi :

$$\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathcal{M}_N(\mathbb{C})), \text{ homogène de degré } 0 \tag{3.2}$$

$$f \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0))^N. \tag{3.3}$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  on introduit :

$$I(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it \langle y, \xi \rangle - c(\xi)} \pi(\xi) f(\xi) d\xi \tag{3.4 a}$$

qui s'exprime aussi en coordonnées polaires par :

$$I(t, y) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{it\rho \langle y, \omega \rangle - c(\omega)} \pi(\omega) f(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\omega). \tag{3.4 b}$$

Le comportement asymptotique quand  $|t| \rightarrow \infty$  de  $I(t, y)$  dépend des points critiques de la phase  $\Phi(t, y, \xi) = \langle y, \xi \rangle - c(\xi)$ . D'après (3.2), (3.3) cette phase est  $C^\infty$  dans un voisinage du compact qui porte l'amplitude  $\pi(\xi) f(\xi)$ , elle-même  $C^\infty$ . Si le paramètre  $y$  n'appartient pas à  $W$  ( $y \neq \nabla c(\xi)$ ,  $\xi \in S^{n-1}$ ) la phase n'admet pas de point critique. Par conséquent, par le procédé habituel d'intégration par parties, on vérifie aisément que  $I(t, y)$  a une décroissance rapide en  $t$  et, ceci, uniformément pour  $y$  parcourant un fermé ne rencontrant pas  $W$ .

Si le paramètre  $y$  appartient à  $W$  [alors il existe  $\xi(y)$  unique dans  $S^{n-1}$  tel que  $y = \nabla c(\xi)$ ,  $\xi(y) = \gamma(y)$  où  $\gamma$  est l'application de Gauss] la phase  $\Phi$  stationne en tout point  $\xi = \lambda \xi(y)$ ,  $\lambda > 0$ . Ces points critiques sont dégénérés puisque  $\text{Hess}_\xi \Phi (= -\text{Hess } c(\xi))$  n'est pas de rang  $n$ , ils sont sur la variété critique  $\{\xi \mid \xi = \lambda \gamma(y)\}$  qui est non dégénérée (cf. [3]) à cause de (1.9 a),

(1.9 b) et (1.12). Par suite, pour  $y \in W$  on a :

$$I(t, y) \sim \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{(n-1)/2} \pi(\gamma(y)) a_0(y) \quad (3.5 a)$$

avec

$$a_0(y) = e^{i(\pi/4)\sigma} \int_0^{+\infty} f(\lambda\gamma(y)) |\det(\text{Hess } c(\lambda\gamma(y)))|_{\gamma(y)^\perp}^{-1/2} d\lambda \quad (3.5 b)$$

[ $\sigma$  est la signature de  $\text{Hess } c(\lambda\gamma(y))|_{\gamma(y)^\perp}$ ].

Pour étudier le comportement de  $I(t, y)$  au voisinage de  $W$  nous allons utiliser (3.4 b).

La phase qui intervient dans l'intégrale par rapport à  $\rho$  n'admet de points critiques que si les paramètres  $y$  et  $\omega$  sont liés par :

$$\langle y, \omega \rangle - c(\omega) = 0 \quad (3.6)$$

c'est-à-dire s'il existe un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ , tangent à  $W$ , normal à  $\omega$  et contenant  $y$ . Si on intègre d'abord sur  $S^{n-1}$ , la phase admet toujours des points critiques quelles que soient les valeurs de  $y$  et  $\rho$ . En effet, ces points critiques sont caractérisés par :

$$(y - \nabla c(\omega))|_{\omega^\perp} = 0$$

ce sont donc les  $\omega$  qui caractérisent les normales extérieures à  $W$  passant par  $y$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , on construit le voisinage de  $W$  :

$$V(\varepsilon) = \{y; y = \nabla c(\omega) + \lambda\omega, |\lambda| < \varepsilon, \omega \in S^{n-1}\}.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, pour tout  $y \in V(\varepsilon)$  il existe  $\omega$  unique,  $\omega \in S^{n-1}$  tel que  $y = \nabla c(\omega) + \lambda\omega$ ; cet élément  $\omega$  est noté  $\theta(y)$ ,  $\theta$  est une application régulière de  $V(\varepsilon)$  sur  $S^{n-1}$  qui prolonge l'application de Gauss : pour  $y \in W$ ,  $\theta(y) = \gamma(y)$ .

Soit  $\omega \in S^{n-1}$ , on note  $R(\omega)$  le rayon de courbure minimal de  $W$  au point  $\nabla c(\omega)$  et  $R = \min_{\omega \in S^{n-1}} R(\omega) > 0$ . On choisit

$$0 < \varepsilon < R. \quad (3.8)$$

Le lemme suivant nous permet de localiser en fonction de  $y \in V(\varepsilon)$  les points critiques  $\omega$  vérifiant (3.7).

LEMME. — Soit  $\omega_0 \in S^{n-1}$  et  $y_0 = \nabla c(\omega_0) \in W$ . Pour  $y = y_0 + \lambda\omega_0$ ,  $\lambda > -\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  vérifiant (3.8), si  $\omega \neq \omega_0$  vérifie (3.7) on a :

$$\langle \omega_0, \omega \rangle < 0. \tag{3.9}$$

Preuve. — Si  $\lambda \geq 0$ ,  $y_0$  est la projection de  $y$  sur le convexe  $\mathcal{W}$ ; d'après le lemme 1.4 (iii) on a donc pour  $\omega \neq \omega_0$  :

$$\langle \omega_0, \nabla c(\omega) - \nabla c(\omega_0) \rangle < 0.$$

Comme  $\lambda \geq 0$  on a :

$$\langle \omega_0, \nabla c(\omega) - y \rangle < 0$$

par suite, si  $\omega$  vérifie (3.7) on a (3.9).

Si  $-\varepsilon < \lambda < 0$ , s'il existe  $\omega \neq \omega_0$  vérifiant (3.7) et  $\langle \omega_0, \omega \rangle \geq 0$ , la sphère centrée en  $\nabla c(\omega) + \lambda\omega$  tangente à  $W$  au point  $\nabla c(\omega)$  ne peut être intérieure à  $\mathcal{W}$  ce qui contredit (3.8), d'où le résultat.

Ainsi, pour  $y \in V(\varepsilon)$  l'ensemble des points critiques [vérifiant (3.7)] est formé de  $\theta(y)$  et d'un sous-ensemble de  $S^{n-1}$  contenu dans :

$$\{ \omega \in S^{n-1}; \langle \theta(y), \omega \rangle < 0 \}.$$

Cette observation permet de montrer qu'il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que, à chaque  $\omega_0 \in S^{n-1}$ , on puisse associer un recouvrement de  $S^{n-1}$  par deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  non vides réalisant les propriétés suivantes :

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad (\nabla c(\omega_0), \alpha) = \{ z; |z - \nabla c(\omega_0)| < \alpha \}$$

on a :

$$\text{pour } \omega \in \Omega_1, \quad \langle y, \omega \rangle - c(\omega) \leq -\beta \tag{3.10}$$

$$\theta(y) \text{ est le seul point vérifiant (3.7) dans } \Omega_2. \tag{3.11}$$

Avec une partition de l'unité  $\{ \chi_1, \chi_2 \}$  subordonnée à  $\{ \Omega_1, \Omega_2 \}$  on peut écrire  $I(t, y) = I_1(t, y) + I_2(t, y)$ . Dans  $I_1(t, y)$  on intègre d'abord en  $\rho$ , (3.10) montre qu'il n'y a pas de points critiques quand  $y \in \mathcal{V}(\nabla c(\omega_0), \alpha)$ . Par suite  $I_1(t, y)$  est à décroissance rapide en  $t$ , uniformément par rapport à  $y \in \mathcal{V}(\nabla c(\omega_0), \alpha)$  d'après (3.10). Dans  $I_2(t, y)$  on intègre d'abord en  $\omega$ . Pour  $y \in \mathcal{V}(\nabla c(\omega_0), \alpha)$  le seul point critique  $\theta(y)$  qui intervient est non

dégénéré puisque le rang de  $\text{Hess } c(\theta(y))|_{\theta(y)^\perp}$  est  $n-1$  donc maximal. Le théorème de la phase stationnaire donne alors :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} e^{it\rho \langle y, \omega \rangle - c(\omega)} \pi(\omega) f(\rho\omega) \chi_2(\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \left(\frac{2\pi}{t\rho}\right)^{(n-1)/2} e^{i(\pi/4)\sigma} e^{it\rho \langle y, \theta(y) \rangle - c(\theta(y))} \{ \pi(\theta(y)) f(\rho\theta(y)) \\ & \quad \times |\det \text{Hess } c(\theta(y))|_{\theta(y)^\perp}|^{-1/2} + g(t, \rho, y) \} \end{aligned}$$

où  $g(t, \rho, y) = O\left(\frac{1}{t\rho}\right)$ .

Intégrant ensuite en  $\rho$  on obtient :

$$I(t, y) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{(n-1)/2} \{ \pi(\theta(y)) a_0(t, y) + h(t, y) \} \quad (3.12 a)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0(t, y) &= e^{i(\pi/4)\sigma} \int_0^\infty e^{it\rho \langle y, \theta(y) \rangle - c(\theta(y))} f(\rho\theta(y)) \\ & \quad \times |\det \text{Hess } c(\rho\theta(y))|_{\theta(y)^\perp}|^{-1/2} d\rho \quad (3.12 b) \end{aligned}$$

$$h(t, y) = e^{i(\pi/1)\sigma} \int_0^\infty e^{it\rho \langle y, \theta(y) \rangle - c(\theta(y))} g(t, \rho, y) \rho^{(n-1)/2} d\rho \quad (3.12 c)$$

$$h(t, y) = O\left(\frac{1}{t}\right) \text{ uniformément par rapport à } y \in \mathcal{V}(\nabla c(\omega_0), \alpha). \quad (3.12 d)$$

On peut remarquer que, bien sûr, (3.12) implique (3.5) quand  $y \in W$  auquel cas  $\theta(y) = \gamma(y)$  et

$$\langle y, \theta(y) \rangle - c(\theta(y)) = \langle y, \gamma(y) \rangle - c(\gamma(y)) = 0.$$

On résume les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

**PROPOSITION 3.2.** — Soit  $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ , homogène de degré 1 vérifiant (1.9), soit  $\pi$  satisfaisant (3.2) et  $f \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0))^N$ , alors  $I(t, y)$  donné par (3.4) a les propriétés suivantes :

(i) Si  $y$  est dans un ensemble fermé ne rencontrant pas  $W$ ,  $I(t, y)$  est à décroissance rapide en  $t$  (uniformément par rapport à  $y$ ).

(ii) Il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $W$  et une application  $\theta$  de  $\mathcal{V}$  sur  $S^{n-1}$  régulière, prolongeant l'application de Gauss de  $W$  telle que, pour  $y \in \mathcal{V}$ , on ait :

$$I(t, y) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{(n-1)/2} (\pi(\theta(y)) a_0(t, y) + a_1(t, y))$$

où  $a_0(t, y)$  est donnée par (3.12 b) et  $a_1(t, y) = O\left(\frac{1}{t}\right)$  (uniformément par rapport à  $y \in \mathcal{V}$ ).

Démonstration de la proposition 3.1. — On a  $q(u, v) = \sum_{k, l=1}^p q(u_k, v_l)$  où  $u_k$  et  $v_l$  sont donnés par (1.6). La proposition 3.2 nous donne le premier terme des développements asymptotiques de  $u_k$  et  $v_l$ ; ces premiers termes pouvant être localisés dans des voisinages arbitrairement petits de  $W_k$  et  $W_l$ , pour  $l \neq k$ ,  $l \neq p+1-k$  on a :

$$q(u_k, v_l) = O(t^{-n})$$

et par suite :

$$q(u, v) = \sum_{k=1}^p q(u_k, v_k) + q(u_k, v_{p+1-k}) + O(t^{-n}).$$

De (3.12) on déduit que, de façon générale :

$$q(u_k, v_k) = C t^{-n+1} q\left(\pi_k\left(\theta_k\left(\frac{x}{t}\right)\right) a_0^k\left(\frac{x}{t}\right), \pi_k\left(\theta_k\left(\frac{x}{t}\right)\right) b_0^k\left(\frac{x}{t}\right)\right) + O(t^{-n}).$$

Comme par ailleurs  $\theta_{p+1-k} = -\theta_k$  on a aussi :

$$q(u_k, v_{p+1-k}) = C t^{-n+1} q\left(\pi_k\left(\theta_k\left(\frac{x}{t}\right)\right) a_0^k\left(\frac{x}{t}\right), \pi_k\left(\theta_k\left(\frac{x}{t}\right)\right) b_0^{p+1-k}\left(\frac{x}{t}\right)\right) + O(t^{-n}).$$

La conclusion découle ensuite de la proposition 1.3.

## RÉFÉRENCES

- [1] A. BACHELOT, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique*, vol. **46**, n° 1, 1987, p. 45-76.
- [2] A. BACHELOT, Équipartition d'énergie pour des systèmes hyperboliques et formes compatibles, *C. R. Acad. Sc.*, t. **301**, 1985, p. 573-576. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique*, vol. **46**, n° 1, 1987, p. 45-76.
- [3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II, *C. R. Acad. Sc.*, t. **276**, 1973, p. 1517-1519.
- [4] J. J. DUISTERMATT, *Fourier Integral Operators*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1973.
- [5] K. HAMDACHE, Existence globale et comportement asymptotique pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires en plusieurs variables d'espaces, *C. R. Acad. Sc.*, t. **297**, 1983, p. 619-66.
- [6] B. HANOZET, Applications bilinéaires compatibles avec un système à coefficients variables. Continuité dans les espaces de Besov, *Comm. in P.D.E.*, vol. **10**, (4), 1985, p. 433-465.
- [7] B. HANOZET et J. L. JOLY, Applications bilinéaires compatibles sur certains sous-espaces de type Sobolev, *C. R. Acad. Sc.*, t. **294**, 1982, p. 745-747. *Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux-I*, n° 8203.
- [8] B. HANOZET et J. L. JOLY, Bilinear Maps Compatible with a System, *Research Notes in Mathematics*, vol. **89**, Pitman, 1983, p. 208-217.
- [9] B. HANOZET et J. L. JOLY, Explosion pour des problèmes hyperboliques semi linéaires avec second membre non compatible, *C. R. Acad. Sc.*, t. **301**, 1985, p. 581-584. *Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux-I*, n° 8518.
- [10] F. MURAT, Compacité par compensation III, *Ann. scuola Norm. Sup. di Pisa*, vol. **8**, 1981, p. 69-102 et les articles précédents.
- [11] R. NATALINI, *Thèse, Université de Bordeaux-I* (1986).
- [12] R. S. STRICHARTZ, Asymptotic Behavior of Waves, *J. Funct. Anal.*, vol. **40**, 1981, p. 341-357.
- [13] L. TARTAR, Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations, *Research Notes in Mathematics* vol. **39**, Pitman, 1979, p. 136-212.
- [14] L. TARTAR, *Some Existence Theorems for Semilinear Hyperbolic Systems in One Space Variable*, M.R.C. Technical Summ. Report 2164, University of Wisconsin Madison, 1981.

(Manuscrit reçu le 14 février 1986.)