

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION C

J.-P. RAYMOND

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en calcul des variations

Annales de l'I. H. P., section C, tome 4, n° 2 (1987), p. 169-202

http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1987__4_2_169_0

© Gauthier-Villars, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section C* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpc>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions en calcul des variations

par

J.-P. RAYMOND

Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

RÉSUMÉ. — On s'intéresse au problème de Calcul des Variations dans \mathbb{R} :

$$\mathcal{P}(a, b, \alpha, \beta) : \text{Inf} \left\{ \int_b^a f(t, x(t), x'(t)) dt \mid x \in W^{1,q}(a, b), x(a) = \alpha, x(b) = \beta \right\},$$

avec $1 < q < \infty$ et f régulière mais non convexe.

On démontre que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, il existe une extrémale γ du problème relaxé $\mathcal{P}\mathcal{R}$ telle que l'intégrande définissant $\mathcal{P}\mathcal{R}$ soit affine en $\gamma'(t)$ et strictement convexe en $\gamma(t)$ pour tout t appartenant à un intervalle inclus dans $[a, b]$.

On en déduit une condition nécessaire et suffisante sur f pour que \mathcal{P} admette au moins une solution quelles que soient les conditions aux limites (théorème 6.11).

On étudie ensuite la généricité des hypothèses faites sur f , (théorème 7.3).

Mots-clés : Calcul des variations, C. N. S. d'Existence de solutions, Problème relaxé (ou Relaxation), Problèmes non convexes, Champs hamiltoniens.

ABSTRACT. — We consider the problem of Calculus of Variations in \mathbb{R} :

$$\mathcal{P}(a, b, \alpha, \beta) : \text{Inf} \left\{ \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \mid x \in W^{1,q}(a, b), x(a) = \alpha, x(b) = \beta \right\},$$

with $1 < q < \infty$ and f regular but non convex.

We prove that if \mathcal{P} does not admit a solution, there exist an extremal γ of the relaxed problem $\mathcal{P}\mathcal{R}$ such that the integrand which determine $\mathcal{P}\mathcal{R}$

is affine in $\gamma'(t)$ and strictly convex in $\gamma(t)$ for all t of some interval included in $[a, b]$.

Then, we obtain a necessary and sufficient condition for \mathcal{P} to admit at least one solution for every boundary conditions (theorem 6.11). We next study the genericity of assumptions on f (theorem 7.3).

1. INTRODUCTION

Le premier grand théorème d'existence en Calcul des Variations est dû à L. Tonelli ([16]). Il établit l'existence de solutions absolument continues pour un problème de Calcul des Variations dans lequel l'intégrande est coercive et convexe en x' et régulière en (t, x, x') .

En l'absence de convexité en x' , la fonctionnelle définissant \mathcal{P} n'est pas faiblement s. c. i. et \mathcal{P} peut ne pas avoir de solution. Différents résultats d'existence ont été prouvés dans le cadre non convexe. Le premier concerne des intégrandes ne dépendant que de t et de x' [11] [2] [13] [9] [10].

Dans le cas où l'intégrande ne dépend pas explicitement de t , I. Ekeland donne dans [5] une C. N. S. d'existence de solutions. Il étudie les discontinuités du champ hamiltonien associé au problème et montre que la non existence de solution pour le problème est lié à un certain type de discontinuité.

Dans [8], F. Klock effectue une classification complète des discontinuités du champ hamiltonien pour un problème homogène et autonome dans lequel x est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Dans cet article, on suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

$$(1.1) \quad f \in C^n(\mathbb{R}^3) \quad \text{avec} \quad n \geq 4.$$

(1.2) Il existe une fonction continue a et des constantes c_1, c_2 , et b positives telles que l'on ait :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad c_2 |y|^q \leq f(t, x, y) \leq a(t) + b |x|^q + c_1 |y|^q.$$

(1.3) Il existe des constantes c_3 et c_4 positives telles que l'on ait :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) \right| \leq c_3 |f(t, x, y)| + c_4.$$

Lorsque (1.1) et (1.2) sont vérifiées, I. Ekeland et R. Téman ont montré dans [6] qu'il était possible d'associer à \mathcal{P} un problème « régularisé s. c. i. », appelé problème relaxé, noté $\mathcal{P}\mathcal{R}$, admettant des solutions et tel que l'on ait $\text{Min}(\mathcal{P}\mathcal{R}) = \text{Inf}(\mathcal{P})$.

$\mathcal{P}\mathcal{R}(a, b, \alpha, \beta)$ est défini par :

$$\text{Inf} \left\{ \int_a^b f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \mid x \in W^{1,q}(a, b), x(a) = \alpha, x(b) = \beta \right\}$$

où $f^{**}(t, x, \cdot)$ est la bipolaire de $f(t, x, \cdot)$ [6] (cf. fig. 1.5).

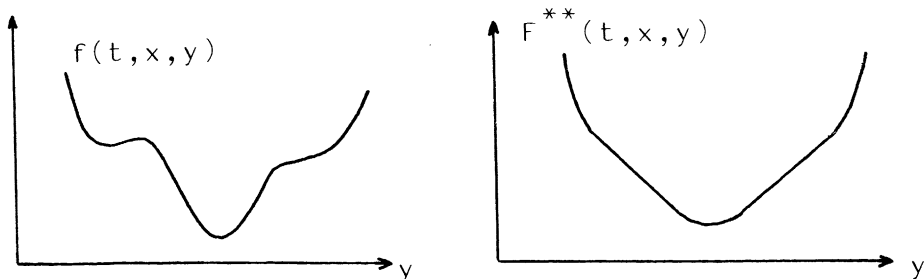


FIG. 1.5. — Représentations graphiques de $f(t, x, \cdot)$ et de $f^{**}(t, x, \cdot)$.

De plus, dans [14], on donne la C. N. S. d'optimalité suivante :

- (1.4) x est solution de \mathcal{P} si et seulement si x est solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ et pour presque tout t de $[a, b]$, on a :

$$f(t, x(t), x'(t)) = f^{**}(t, x(t), x'(t)).$$

Les estimations (1.2) et (1.3) nous permettront de montrer que les solutions de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ vérifient le principe du maximum. (On n'aura pas de phénomène du type Lavrentiev, cf. [17].)

L'étude des discontinuités du champ hamiltonien d'un problème autonome, développée par I. Ekeland dans [5], conduit à stratifier l'espace des phases. Les différentes strates y sont décrites à l'aide de modèles locaux.

Pour le problème étudié ici, l'intégrande dépendant explicitement de t , il est « naturel » de stratifier l'espace des phases élargi.

L'introduction de f^{**} nous permet d'obtenir des équations des différentes strates. Le rôle joué par le problème relaxé est fondamental. La question essentielle que l'on se pose est la suivante :

Quelle est la nature des solutions de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ lorsque \mathcal{P} n'admet pas de solution? On montre que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, toute solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ séjourne sur une courbe appelée « courbe critique minimum ».

Cette courbe critique minimum d'équation $x = \gamma(t)$ est définie par une fonction notée G et vérifie :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t, \gamma(t)) = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t, \gamma(t)) > 0 \quad \text{et} \quad f^{**}(t, \gamma(t), \cdot) \text{ est affine en } \gamma'(t).$$

En termes de champ hamiltonien, cela correspond au cas où la trajectoire de l'espace des phases élargi, associée à une solution x de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, séjourne sur une certaine strate.

Cette notion de courbe critique minimum permet de donner une interprétation commune aux phénomènes de discontinuités du champ hamiltonien mises en évidence dans [5] et aux hypothèses faites dans [2] (cf. paragraphe 8).

NOTATIONS. — Dans toute la suite, $f_y(t, x, y)$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à y au point (t, x, y) . On donne le même type de signification à toute fonction indiquée par les lettres t, x, y , les variables figurant en indices indiquant les variables par rapport auxquelles on dérive la fonction.

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE f^{**}

Seules les hypothèses 1.1 et 1.2 sont nécessaires à l'obtention des résultats de ce paragraphe.

On a démontré dans [14] que f^{**} et f_y^{**} appartiennent à $C^0(\mathbb{R}^3)$.

DÉFINITION 2.1. — $\Omega = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid f(t, x, y) \neq f^{**}(t, x, y) \}$.

Remarque. — f et f^{**} étant continues, Ω est ouvert.

DÉFINITION 2.2. — Soit $\bar{y} \in \mathbb{R}$, on note $\Omega(\bar{y})$ la réunion de tous les pavés ouverts inclus dans Ω , de la forme :

$$] \bar{t} - \varepsilon_1, \bar{t} + \varepsilon_1 [\times] \bar{x} - \varepsilon_2, \bar{x} + \varepsilon_2 [\times] \bar{y} - \varepsilon_3, \bar{y} + \varepsilon_4 [,$$

où \bar{t}, \bar{x} sont des réels quelconques et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ sont strictement positifs.

PROPOSITION 2.3. — Pour tout \bar{y} de \mathbb{R} , $\Omega(\bar{y})$ est ouvert. Si (t, x, y) appartient à $\Omega(\bar{y})$, le segment d'extrémités (t, x, y) et (t, x, \bar{y}) est inclus dans $\Omega(\bar{y})$.

Preuve. — $\Omega(\bar{y})$ est ouvert car réunion de pavés ouverts.

Soit $(t, x, y) \in \Omega(\bar{y})$, il existe $\bar{t}, \bar{x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ tels que (t, x, y) appartienne au pavé $] \bar{t} - \varepsilon_1, \bar{t} + \varepsilon_1 [\times] \bar{x} - \varepsilon_2, \bar{x} + \varepsilon_2 [\times] \bar{y} - \varepsilon_3, \bar{y} + \varepsilon_4 [$ et tels que ce pavé soit inclus dans $\Omega(\bar{y})$.

Ce pavé contient le segment d'extrémités (t, x, y) et (t, x, \bar{y}) , la proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 2.4. — Il existe un sous-ensemble de \mathbb{R} , noté \mathbb{F} , au plus dénombrable, tel que l'on ait : $\Omega = \bigcup_{\bar{y} \in \mathbb{F}} \Omega(\bar{y})$.

Preuve. — Il est clair que l'on a : $\Omega = \bigcup_{\bar{y} \in \mathbb{R}} \Omega(\bar{y})$.

Du recouvrement de Ω par les ouverts $\Omega(\bar{y})$, on peut extraire un sous-recouvrement au plus dénombrable, la proposition en découle. \square

PROPOSITION 2.5. — Si (t, x, y) appartient à $\Omega(\bar{y})$, on a :

$$f_y^{**}(t, x, y) = f_y^{**}(t, x, \bar{y}).$$

Preuve. — Soit $(t, x, y) \in \Omega(\bar{y})$, le segment d'extrémités (t, x, y) et (t, x, \bar{y}) est inclus dans $\Omega(\bar{y})$ et donc aussi dans Ω . Notons S ce segment. $f^{**}(t, x, \cdot)$ est affine en tout point z tel que (t, x, z) appartienne à S (car dans ce cas $(t, x, z) \in \Omega$).

On en déduit que $f_y^{**}(t, x, y) = f_y^{**}(t, x, \bar{y})$. \square

3. STRATIFICATION DE L'ESPACE DES PHASES ÉLARGI

Lorsque \mathcal{P} n'admet pas de solution, d'après (1.4), pour toute solution x de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ il existe un sous-ensemble de $[a, b]$, de mesure non nulle, sur lequel on a $f(t, x(t), x'(t)) \neq f^{**}(t, x(t), x'(t))$.

Il est facile de montrer que lorsque l'on a $f(t, x, y) \neq f^{**}(t, x, y)$, la fonction \mathcal{H} définie par

$$\mathcal{H}(t, x, p, y) = py - f(t, x, y)$$

atteint son maximum en au moins deux points.

Cette fonction s'appelle pseudo-hamiltonien [4]. En contrôle optimal p s'appelle variable adjointe de y . Compte tenu de l'hypothèse (1.2), $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint toujours son maximum.

Lorsque la fonction $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum en plusieurs points, on dit qu'elle présente une multisingularité. La classification topologique de ces multisingularités conduit à une stratification « naturelle » de l'espace des phases élargi (i. e., l'espace décrit par (t, x, p)).

DÉFINITION 3.1.

$$\Sigma_0 = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet un maximum global non dégénéré} \}$$

$$\Sigma_1 = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet deux maxima globaux non dégénérés} \}.$$

On pose $\Sigma_2 = \Sigma_2^c \cup \Sigma_2^b$ avec

$$\Sigma_2^c = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet trois maxima globaux non dégénérés} \}$$

$$\Sigma_2^b = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet un maximum global associé à une singularité de codimension 2} \}.$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_3^c \cup \Sigma_3^{bc} \text{ avec}$$

$$\Sigma_3^c = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet quatre maxima globaux non dégénérés} \}$$

$$\Sigma_3^{bc} = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet un maximum global non dégénéré et un maximum global associé à une singularité de codimension 2} \}.$$

Pour plus de détails, on peut consulter [5].

La figure ci-dessous illustre les propos précédents.

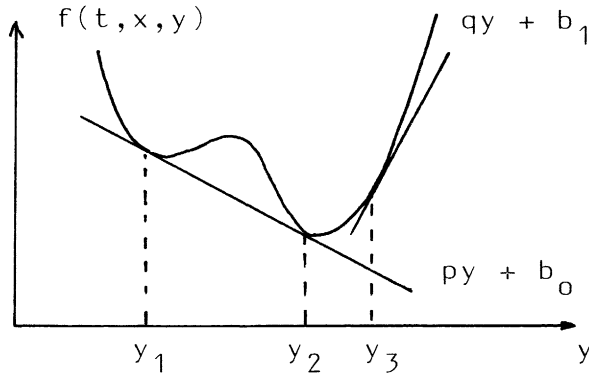


FIG. 3.1.

Dans le cas de la figure ci-dessus, $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum aux deux points y_1 et y_2 , tandis que $\mathcal{H}(t, x, q, \cdot)$ atteint son maximum au seul point y_3 .

Remarque. — La codimension d’une multisingularité de $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$

est définie par (3.1) $\text{codim } \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) = k - 1 + \sum_{i=1}^k c_i$, où k est le nombre

de points distincts y_i , pour $i = 1, \dots, k$, en lesquels $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum et c_i est la codimension de la singularité associée à $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ au point y_i . Avec cette définition, on a :

$$\Sigma_i = \{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet une multisingularité de codimension } i \}.$$

PROPOSITION 3.2. — Σ_0 est un ouvert non vide de \mathbb{R}^3 .

Preuve. — Classique, nous la laissons au soin du lecteur. \square

Si (t, x, p) est un point de Σ_1 , il existe y_1 et y_2 tels que l’on ait :

$$py_1 - f(t, x, y_1) = py_2 - f(t, x, y_2) = \underset{y \in \mathbb{R}}{\text{Max}} \mathcal{H}(t, x, p, y).$$

On en déduit que si (t, x, p) est un point de Σ_1 , il existe y_1 et y_2 tels que l'on ait :

$$(3.2) \quad p = f_y(t, x, y_1), \quad p = f_y(t, x, y_2), \quad py_1 - f(t, x, y_1) - py_2 + f(t, x, y_2) = 0.$$

Le système (3.2) est un système d'équations paramétriques de Σ_1 —.

Remarquons de plus que l'on a $f_y^{**}(t, x, y) = f_y(t, x, y_1)$ lorsque y appartient à $[y_1, y_2]$.

DÉFINITION 3.3.

$$\begin{aligned} \Omega_1(\bar{y}) &= \{ (t, x, y) \in \Omega(\bar{y}) \mid (t, x, f_y^{**}(t, x, y)) \in \Sigma_1 \} \\ P\Omega_1(\bar{y}) &= \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in \mathbb{R}, (t, x, y) \in \Omega_1(\bar{y}) \}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4. — Σ_1 est soit vide, soit une sous-variété de codimension 1 dans \mathbb{R}^3 , admettant localement des équations de la forme :

$$p = f_y^{**}(t, x, \bar{y}) \quad \text{avec} \quad \bar{y} \in \mathbb{F}.$$

Les ensembles $\Omega_1(\bar{y})$ et $P\Omega_1(\bar{y})$ sont ouverts.

Preuve. — Soit (t_0, x_0, p_0) un point de Σ_1 . $\mathcal{H}(t_0, x_0, p_0, \cdot)$ atteint son maximum en deux points critiques non dégénérés y_{01} et y_{02} . Il existe \bar{y} dans \mathbb{F} et des voisinages V_0, V_1, V_2, W_0 respectivement de $(t_0, x_0), y_{01}, y_{02}, p_0$ tels que l'on ait :

$$\forall (y, y', t, x) \in (V_1 \times V_2 \times V_0), \quad y < \bar{y} < y' \quad \text{et} \quad (t, x, \bar{y}) \in \Omega(\bar{y}).$$

$$\forall (y, t, x) \in (V_1 \cup V_2) \times V_0, \quad f_{yy}(t, x, y) > 0.$$

$$\forall y \in \mathbb{R} / (V_1 \cup V_2), \quad \forall (t, x) \in V_0, \quad \forall p \in W_0,$$

$$\mathcal{H}(t, x, p, y_{01}) > \mathcal{H}(t, x, p, y) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(t, x, p, y_{02}) > \mathcal{H}(t, x, p, y).$$

On en déduit que pour tout (t, x, p) de $V_0 \times W_0$, $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ ne peut atteindre son maximum que dans $V_1 \cup V_2$. De plus, dans V_1 , ce maximum ne peut être atteint qu'en au plus un point car pour tout y de V_1 , on a $f_{yy}(t, x, y) > 0$. Il en est de même pour V_2 .

Si (t, x, p) est un point de $(V_0 \times W_0) \cap \Sigma_1$, $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum en deux points y_1 et y_2 tels que l'on ait :

$$y_1 \in V_1, \quad y_2 \in V_2 \quad \text{et} \quad y_1 < \bar{y} < y_2.$$

On a donc $p = f_y(t, x, y_1) = f_y(t, x, y_2) = f_y^{**}(t, x, \bar{y})$.

La première partie de la proposition est donc démontrée.

Pour démontrer que $\Omega_1(\bar{y})$ est ouvert, il suffit de constater que si (t_0, x_0, y_0) appartient à $\Omega_1(\bar{y})$, il existe y_{01} et y_{02} tels que l'on ait :

$$\bar{y} \in]y_{01}, y_{02}[, \quad y_0 \in]y_{01}, y_{02}[, \quad f_y(t_0, x_0, y_{01}) = f_y^{**}(t_0, x_0, \bar{y}) = f_y(t_0, x_0, y_{02}),$$

et tels que $\mathcal{H}(t_0, x_0, f_y^*(t_0, x_0, \bar{y}), \cdot)$ atteigne son maximum en y_{01} et y_{02} .

On montre ensuite que $\Omega_1(\bar{y})$ est voisinage de chacun de ses points, par un raisonnement analogue à celui qui précède.

$P\Omega_1(\bar{y})$ est ouvert, car c'est la projection d'un ouvert. \square

Pour simplifier l'étude de notre problème, on est amené à faire l'hypothèse suivante :

- (3.3) Pour $i = 0, 1, 2, 3$, Σ_i est soit vide, soit une sous-variété de codimension i dans \mathbb{R}^3 .

$$\text{Pour } i = 0, 1, 2, \Sigma_{i+1} \subset \bar{\Sigma}_i \text{ et } \mathbb{R}^3 = \bigcup_{i=0}^3 \Sigma_i.$$

Nous justifierons dans une certaine mesure, cette hypothèse au paragraphe 7.

Avec cette hypothèse, on peut démontrer que Σ_2^c est constituée de branches, chacune d'elles étant adhérente à trois strates de Σ_1 , notées Σ_1^{12} , Σ_1^{13} , Σ_1^{23} . Les strates Σ_1^{ij} sont telles que si (t, x, p) est un point de Σ_1^{ij} , $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum en deux points $y_i(t, x, p)$ et $y_j(t, x, p)$, avec $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$. De plus, si (t_0, x_0, p_0) est un point de Σ_2^c et si on note $y_i(t_0, x_0, p_0)$ la limite de $y_i(t, x, p)$ quand (t, x, p) appartient à Σ_1^{ij} et tend vers (t_0, x_0, p_0) , $\mathcal{H}(t_0, x_0, p_0, \cdot)$ atteint son maximum aux trois points distincts $y_i(t_0, x_0, p_0)$ avec $i = 1, 2, 3$.

On a par exemple une configuration du type suivant :

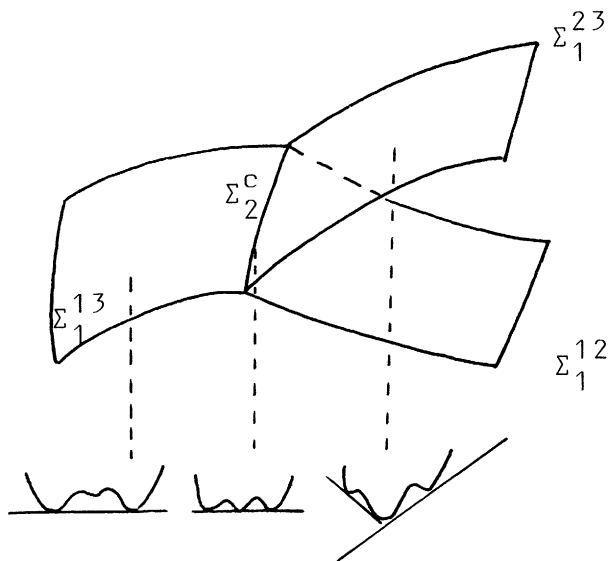


FIG. 3.4.

Les représentations graphiques de $f(t, x, \cdot)$ correspondantes à différents points de Σ_1 et Σ_2 sont données ci-dessus.

Il est possible de définir Σ_2^c comme l'intersection de prolongements réguliers de Σ_1 . L'ensemble défini par

$$\{(t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{H}(t, x, p, \cdot) \text{ admet deux maxima locaux non dégénérés}\}$$

est une sous-variété de codimension 1 dans \mathbb{R}^3 . Cette sous-variété contient Σ_1 , dans le cas de la figure 3.4, elle prolonge Σ_1^{12} , Σ_1^{23} et Σ_1^{13} au-delà de Σ_2^c . Notons $\tilde{\Sigma}_1^{12}$, $\tilde{\Sigma}_1^{23}$, $\tilde{\Sigma}_1^{13}$ ces prolongements. La branche de Σ_2^c , frontière des Σ_1^{ij} , est alors l'intersection des $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$.

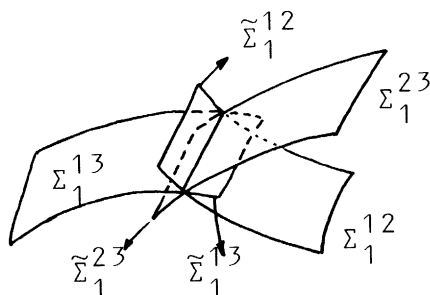


FIG. 3.5.

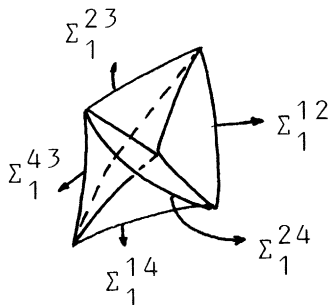
Notons $y_i(t, x, p)$ et $y_j(t, x, p)$ les deux points en lesquels $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ admet un maximum local lorsque (t, x, p) appartient à $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$.

On définit la fonction \tilde{f}^{ij} de la façon suivante :

$\tilde{f}^{ij}(t, x, \cdot)$ est identique à $f(t, x, \cdot)$ en dehors de l'intervalle $]y_i(t, x, p), y_j(t, x, p)[$ et $\tilde{f}^{ij}(t, x, \cdot)$ est affine et continue sur $[y_i(t, x, p), y_j(t, x, p)]$.

On peut démontrer que $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$ admet des équations locales de la forme $p = \tilde{f}_y^{ij}(t, x, \bar{y})$ avec $\bar{y} \in \mathbb{F} \cap]y_i(t, x, p), y_j(t, x, p)[$.

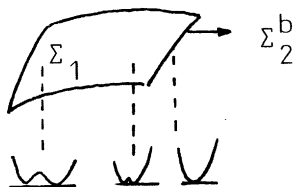
Σ_3^c est constituée de points isolés, chacun d'eux est adhérent à 4 branches de Σ_2^c et 6 strates de Σ_1 . Voir figure ci-dessous.



La strate cachée est Σ_1^{13} .

Le point « central » est un point de Σ_3^c .

Σ_2^b est une frontière commune à Σ_1 et à Σ_0 .



Représentations de $f(t, x, \cdot)$ correspondantes à des points de Σ_1 et des points de Σ_2^b sont données ci-dessus.

Les points de Σ_3^{bc} sont communs à une branche de Σ_2^b et une branche de Σ_2^c . Nous allons voir que les points $y_i(t, x, p)$ en lesquels $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum lorsque (t, x, p) appartient à Σ_1 , définissent des fonctions régulières en (t, x) .

DÉFINITION 3.5. — Soient (t, x, p) un point de Σ_1 et y un réel tels que l'on ait $p = f_y^{**}(t, x, y)$. On note $k(t, x, y)$ et $l(t, x, y)$ les deux points en lesquels $\mathcal{H}(t, x, p, \cdot)$ atteint son maximum.

k et l sont choisis de façon que l'on ait : $k(t, x, y) < l(t, x, y)$.

Remarque. — Pour tout z de $[k(t, x, y), l(t, x, y)]$, on a :

$$k(t, x, y) = k(t, x, z), \quad l(t, x, y) = l(t, x, z) \quad \text{et} \quad f_y^{**}(t, x, z) = f_y^{**}(t, x, y).$$

PROPOSITION 3.6. — Les fonctions $k(\cdot, \cdot, \bar{y})$ et $l(\cdot, \cdot, \bar{y})$ sont de classe C^{n-1} sur $P\Omega_1(\bar{y})$.

Preuve. — Donnée dans [15], démonstration de la proposition 3.2.

PROPOSITION 3.7. — f^{**} et f_y^{**} sont de classe C^{n-1} sur $\Omega_1(\bar{y})$.

Pour tout (t, x, y) et (t, x, z) de $\Omega_1(\bar{y})$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f^{**}(t, x, y) &= f^{**}(t, x, z) + f_y^{**}(t, x, \bar{y})(y - z) \\ f_x^{**}(t, x, y) &= f_x^{**}(t, x, z) + f_{yx}^{**}(t, x, \bar{y})(y - z) \\ f_t^{**}(t, x, y) &= f_t^{**}(t, x, z) + f_{yt}^{**}(t, x, \bar{y})(y - z). \end{aligned}$$

Preuve. — Pour (t, x, y) appartenant à $\Omega_1(\bar{y})$, on a :

$$f_y^{**}(t, x, y) = f_y^{**}(t, x, \bar{y}) = f_y(t, x, k(t, x, \bar{y})).$$

La fonction : $(t, x, y) \rightarrow f_y(t, x, k(t, x, \bar{y}))$ est de classe C^{n-1} sur $\Omega_1(\bar{y})$, il en est donc de même pour f_y^{**} .

La première égalité découle de ce que $f^{**}(t, x, \cdot)$ est affine sur $[k(t, x, \bar{y}), l(t, x, \bar{y})]$ et de ce que y et z appartiennent à $]k(t, x, \bar{y}), l(t, x, \bar{y})[$. Les deux autres s'obtiennent par dérivation de la première. En posant $z = \bar{y}$ dans la première égalité, on déduit que f^{**} est de classe C^{n-1} sur $\Omega_1(\bar{y})$. \square

4. ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ DE f^{**} . ESTIMATIONS DE f_y^{**} ET f_x^{**}

PROPOSITION 4. 1. — f^{**} est de classe C^1 au voisinage d'un point (t, x, y) tel que $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ appartienne à $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2^b$.

Si (t_0, x_0, y_0) est un point pour lequel $(t_0, x_0, f_y^{**}(t_0, x_0, y_0))$ appartient à $\Sigma_2^b \cup \Sigma_3$, il existe un voisinage V_0 de (t_0, x_0, y_0) tel que l'on ait :

(4.1) pour (t, x_1, y) et (t, x_2, y) deux points de V_0 ,

$$|f^{**}(t, x_1, y) - f^{**}(t, x_2, y)| \leq M |x_1 - x_2|,$$

avec $M = \text{Sup} \{ f_x^{**}(t, x, y) | (t, x, y) \in V_0, (t, x, f_y^{**}(t, x, y)) \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2^b \}$.

Preuve. — *1^{re} étape* : Le résultat de régularité est évident si $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ est un point de Σ_0 , et il découle de la proposition 3. 7 si (t, x, y) appartient à Ω et si $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ appartient à Σ_1 .

2^e étape : Si $(t_0, x_0, f_y^{**}(t_0, x_0, y_0))$ appartient à Σ_1 , si (t_0, x_0, y_0) appartient à $\text{Fr}(\Omega(\bar{y}))$ et si l'on a par exemple $y_0 = k(t_0, x_0, \bar{y})$, (le cas où $y_0 = l(t_0, x_0, \bar{y})$ se traite de façon analogue), d'après la proposition 3. 7, il existe un voisinage V_0 de (t_0, x_0, y_0) tel que l'on ait : pour tout (t, x, y) de $V_0 \cap \Omega(\bar{y})$, $f^{**}(t, x, y) = f(t, x, k) + f_y^{**}(t, x, \bar{y})(y - k)$ avec $k = k(t, x, \bar{y})$.

Par dérivation, on obtient :

$$f_x^{**}(t, x, y) = f_x(t, x, k) + f_{yx}^{**}(t, x, \bar{y})(y - k).$$

Par passage à la limite, cette égalité reste vraie sur $\overline{V_0 \cap \Omega(\bar{y})}$. On en déduit que f_x^{**} est continue au voisinage de (t_0, x_0, y_0) . On démontrerait de même la continuité de f_t^{**} . f^{**} est donc de classe C^1 au voisinage de (t_0, x_0, y_0) . En fait, les dérivées f_{tt}^{**} , f_{xx}^{**} , f_{tx}^{**} existent et sont continues au voisinage de (t_0, x_0, y_0) . Par contre f_{yy}^{**} , f_{yx}^{**} et f_{yt}^{**} ne sont pas définies en (t_0, x_0, y_0) . On a en effet : $f_{yy}^{**}(t_0, x_0, y) = 0$ si (t_0, x_0, y) appartient à $\Omega(\bar{y})$ et $f_{yy}^{**}(t_0, x_0, y_0) > 0$.

3^e étape : Si $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ appartient à Σ_2^b , on a $f_x^{**}(t, x, y) = f_x(t, x, y)$. Il est facile de vérifier que f_x^{**} est continue au voisinage de ce point et qu'il en est de même pour f_t^{**} . f^{**} est donc de classe C^1 au voisinage d'un tel point.

4^e étape : Soit $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ un point de Σ_2^c , appartenant à la frontière de trois strates Σ_1^{ij} . Ce point est donc commun aux prolongements $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$ et les fonctions \tilde{f}^{ij} sont de classe C^1 au voisinage de (t, x, y) . La majoration 4.1 en découle.

Un raisonnement analogue nous permettrait de conclure pour les points de Σ_3 . \square

On a démontré dans [15] que f_y^{**} vérifie l'estimation :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad |f_y^{**}(t, x, y)| \leq g_1(t, x) + g_2(t, x) |y|^{q-1},$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions continues.

PROPOSITION 4.2. — Au voisinage d'un point (t, x, y) pour lequel $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ appartient à $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2^b$, f_x^{**} vérifie l'estimation :

$$|f_x^{**}(t, x, y)| \leq (c_3 + 1) |f^{**}(t, x, y)| + c_4,$$

où c_3 et c_4 sont les constantes de (1.3).

Preuve. — Lorsque $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ est un point de $\Sigma_0 \cup \Sigma_2^b$, le résultat découle de (1.3) et de l'égalité $f_x^{**}(t, x, y) = f_x(t, x, y)$.

Examinons le cas où $(t, x, f_y^{**}(t, x, y))$ est un point de Σ_1 . Supposons que l'on ait $f_y^{**}(t, x, k) \geq 0$, où $k = k(t, x, y)$.

De la proposition 3.7, on déduit :

$$f_x^{**}(t, x, y) = f_x(t, x, k) + f_y(t, x, k)(y - k).$$

Étant donné que $f_y(t, x, k)(y - k)$ est positif, l'estimation (1.3) nous donne : $|f_x^{**}(t, x, y)| \leq c_3 f(t, x, k) + c_4 + f_y(t, x, k)(y - k)$.

Comme l'on a $f^{**}(t, x, y) = f(t, x, k) + f_y(t, x, k)(y - k)$, on obtient l'estimation désirée.

Le cas où $f_y^{**}(t, x, k)$ est négatif, se traite de façon analogue en posant $f_x^{**}(t, x, y) = f_x(t, x, l) + f_y(t, x, l)(y - l)$. \square

5. TRAJECTOIRE DE PHASES DE \mathcal{PR}

Les résultats de régularité obtenus au paragraphe 4, ainsi que les estimations faites sur f_x^{**} et f_y^{**} permettent de dire que les solutions de \mathcal{PR} vérifient le principe du maximum (théorème 3 de [3]). On a donc :

PROPOSITION 5.1. — Si x est une solution de \mathcal{PR} , il existe une fonction p , presque partout dérivable, telle que l'on ait :

$$(5.1) \quad p'(t) \in \partial_x f^{**}(t, x(t), x'(t))$$

et
$$p(t)x'(t) - f^{**}(t, x(t), x'(t)) = \text{Max}_{y \in \mathbb{R}} p(t)y - f^{**}(t, x(t), y)$$

pour presque tout t de $[a, b]$.

$\partial_x f^{**}(t, x(t), x'(t))$ désigne le gradient généralisé de $f^{**}(t, \cdot, x'(t))$ en $x(t)$ ([4]).

Remarque. —
$$\text{Max}_{y \in \mathbb{R}} py - f^{**}(t, x, y) = \text{Max}_{y \in \mathbb{R}} \mathcal{H}(t, x, p, y).$$

DÉFINITION 5.2. — Si x est une solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, le couple (x, p) vérifiant (5.1) sera appelé bisolution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$.

L'ensemble $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ est une trajectoire de l'espace des phases élargi, appelée trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$.

PROPOSITION 5.3. — Si \mathcal{P} n'admet pas de solution, pour toute bisolution (x, p) de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, il existe \bar{y} dans \mathbb{F} tel que l'ensemble

$$\{ t \in [a, b] \mid (t, x(t), p(t)) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2^c \text{ et } (t, x(t), x'(t)) \in \Omega(\bar{y}) \}$$

soit de mesure non nulle.

Preuve. — Si $(t, x(t), p(t))$ est un point de $\Sigma_0 \cup \Sigma_2^b$, on a

$$f(t, x(t), x'(t)) = f^{**}(t, x(t), x'(t)).$$

De plus les points de Σ_3 sont isolés. Une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ ne rencontrera donc Σ_3 qu'en des instants isolés. La C. N. S. d'optimalité (1.4) nous permet donc de dire que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, l'ensemble

$$\{ t \in [a, b] \mid (t, x(t), p(t)) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2^c \text{ et } (t, x(t), x'(t)) \in \Omega \}$$

est de mesure non nulle.

Ω étant réunion dénombrable des $\Omega(\bar{y})$, avec \bar{y} dans \mathbb{F} , la proposition en découle. \square

Le problème de l'existence de solution pour \mathcal{P} se ramène donc au problème de l'intersection des trajectoires de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ avec $\Sigma_1 \cup \Sigma_2^c$. Si une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ rencontre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2^c$ en un point, sans qu'il y ait contact tangent, ce point est isolé. On en déduit que si \mathcal{P} n'a pas de solution, toute trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ rencontre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2^c$ en des points de contact tangent. Ceci nous amène à caractériser ces conditions de contact. On obtient une caractérisation des contacts tangents indépendante de x' , elle ne dépend que de t et de $x(t)$. Ceci nous conduit à stratifier l'espace du couple (t, x) .

PROPOSITION 5.4. — Si la trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$, est tangente à Σ_1 à l'instant t_0 , il existe \bar{y} de \mathbb{F} tel que l'on ait :

$$f_x^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - f_{y_i}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - f_{y_x}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y})\bar{y} = 0.$$

Preuve. — Parler de contact tangent en un point (t_0, x_0, p_0) de Σ_1 , suppose évidemment qu'en ce point x et p soient dérivables, ou au moins

admettent une dérivée à droite ou une dérivée à gauche. On peut alors parler de contact tangent à droite de t_0 ou à gauche de t_0 . Ce qui suit recouvre ces trois possibilités. Soient $(t_0, x(t_0), p(t_0))$ un point en lequel la trajectoire est tangente à Σ_1 et $p = f_y^{**}(t, x, \bar{y})$ une équation de Σ_1 au voisinage de ce point.

On a : $p'(t_0) \in \partial_x f^{**}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) = \{ f_x^{**}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) \}$. De plus, le vecteur $(-f_{y_i}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}), -f_{y_x}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}), -1)$ est normal à Σ_1 , et le vecteur $(1, x'(t_0), p'(t_0))$ est tangent à la trajectoire à l'instant t_0 . On en déduit l'égalité :

$$(5.2) \quad f_x^{**}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) - f_{y_i}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - f_{y_x}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y})x'(t_0) = 0.$$

En outre, la dérivée de l'application :

$$y \rightarrow f_x^{**}(t_0, x(t_0), y) - f_{y_i}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - f_{y_x}^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y})y$$

est nulle sur l'intervalle $]k(t_0, x(t_0), \bar{y}), l(t_0, x(t_0), \bar{y})[$.

Cette application est donc constante sur $[k(t_0, x(t_0), \bar{y}), l(t_0, x(t_0), \bar{y})]$.

Étant donné que l'on a : $p(t_0) = f_y^{**}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) = f_y^{**}(t_0, x(t_0), \bar{y})$, on en déduit que $x'(t_0)$ appartient à $[k(t_0, x(t_0), \bar{y}), l(t_0, x(t_0), \bar{y})]$.

On peut donc remplacer $x'(t_0)$ par \bar{y} dans l'égalité 5.2 et la proposition est démontrée. \square

DÉFINITION 5.5. — Dans tout pavé W_0 de centre (t_0, x_0) inclus dans $P\Omega_1(\bar{y})$, on peut définir des fonctions notées G de la façon suivante :

$$(5.3) \quad G(t, x) = f^{**}(t, x, \bar{y}) - f_y^{**}(t, x, \bar{y}) - f_y^{**}(t, x, \bar{y}) - \int_{x_0}^x f_{iy}^{**}(t, r, \bar{y}) dr.$$

Remarque. — Deux fonctions G , toutes deux définies au voisinage d'un point, diffèrent d'une constante à cause du choix arbitraire de x_0 .

Par contre, $G_x(t, x)$ est parfaitement défini et ne dépend pas de (t_0, x_0) . La proposition 5.4 peut s'énoncer de la façon suivante :

Si la trajectoire $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ est tangente à Σ_1 à l'instant t_0 , il existe une fonction G définie au voisinage de $(t_0, x(t_0))$ par (5.3) et telle que l'on ait : $G_x(t_0, x(t_0)) = 0$.

Les contacts tangents avec Σ_2^c feront intervenir les fonctions \tilde{f}^{ij} . Si W_0 est un pavé ouvert de centre (t_0, x_0) , sur lequel $p = \tilde{f}_y^{ij}(t, x, \bar{y})$ est une équation de $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$, \tilde{G}^{ij} est définie sur W_0 par :

$$\tilde{G}^{ij}(t, x) = f^{ij}(t, x, \bar{y}) - f_y^{ij}(t, x, \bar{y}) - \int_{x_0}^x f_{iy}^{ij}(t, r, \bar{y}) dr.$$

Les fonctions \tilde{G}^{ij} sont des prolongements de G . Nous utiliserons indifféremment dans la suite la notation \tilde{G} pour G ou pour \tilde{G}^{ij} , lorsque cela sera plus simple.

PROPOSITION 5.6. — La fonction \tilde{G} vérifie les égalités suivantes :

$$\tilde{G}(t, x) = f(t, x, y_i) - \frac{f(t, x, y_j) - f(t, x, y_i)}{y_j - y_i} y_i - \int_{x_0}^x \frac{f_i(t, r, y_j) - f_i(t, r, y_i)}{y_j - y_i} dr,$$

$$\tilde{G}_x(t, x) = f_x(t, x, y_j) - \frac{f_x(t, x, y_j) - f_x(t, x, y_i)}{y_j - y_i} y_i - \frac{f_i(t, x, y_j) - f_i(t, x, y_i)}{y_j - y_i}.$$

Si on a $\tilde{G} = \tilde{G}^{ij}$, y_i et y_j sont les points en lesquels $\mathcal{H}(t, x, \tilde{f}_y^{ij}(t, x, \bar{y}), \cdot)$ atteint un maximum global.

Preuve. — Supposons $\tilde{G} = G$. De la proposition 3.7, on déduit les égalités :

$$f_y^{**}(t, x, \bar{y}) = (f(t, x, k) - f^{**}(t, x, \bar{y}))(k - \bar{y})^{-1}$$

$$f_{yx}^{**}(t, x, \bar{y}) = (f_x(t, x, k) - f_x^{**}(t, x, \bar{y}))(k - \bar{y})^{-1}$$

$$f_{yi}^{**}(t, x, \bar{y}) = (f_i(t, x, k) - f_i^{**}(t, x, \bar{y}))(k - y)^{-1}, \text{ où } k = k(t, x, \bar{y}).$$

Par substitution, dans les expressions de G et de G_x et en passant à la limite lorsque \bar{y} tend vers $l(t, x, \bar{y})$, on obtient le résultat souhaité (on a en effet $y_i = k$ et $y_j = l$).

La démonstration est similaire dans le cas où $\tilde{G} = \tilde{G}^{ij}$. Il faut alors commencer par établir l'analogie de la proposition 3.7 pour \tilde{f}^{ij} et procéder comme précédemment. \square

D'après le théorème des Fonctions Implicites, si l'on a $\tilde{G}_{xx}(t_0, x(t_0)) \neq 0$ et $\tilde{G}_x(t_0, x(t_0)) = 0$, l'équation $\tilde{G}_x(t, x(t)) = 0$ admet localement une solution unique.

Cette remarque nous conduit à classer les singularités de la fonction \tilde{G} .

DÉFINITION 5.7. — On suppose que \tilde{G} est défini sur un pavé ouvert W_0 , on pose :

$$\sigma_0(\bar{y}) = \{ (t, x) \in W_0 \mid \tilde{G}_x(t, x) \neq 0 \}.$$

$$\sigma_1(\bar{y}) = \{ (t, x) \in W_0 \mid \tilde{G}_x(t, x) = 0, \tilde{G}_{xx}(t, x) \neq 0 \}$$

$$\sigma_2(\bar{y}) = \{ (t, x) \in W_0 \mid \tilde{G}_x(t, x) = 0, \tilde{G}_{xx}(t, x) = 0, \tilde{G}_{xxx}(t, x) \neq 0 \}$$

$$\sigma_\infty(\bar{y}) = \left\{ (t, x) \in W_0 \mid (t, x) \notin \bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \right\}.$$

Dans les définitions précédentes, \bar{y} indique la dépendance de \tilde{G} en \bar{y} . On notera σ_i à la place de $\sigma_i(\bar{y})$ lorsque cela ne pose pas de problème.

On peut démontrer que σ_0 est un ouvert de \mathbb{R}^2 et que σ_1 est soit vide, soit une sous-variété de codimension 1 dans \mathbb{R}^2 (c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites).

σ_2 est en général une sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^2 . (Le démon-

trer effectivement nécessiterait de poser des conditions supplémentaires sur les dérivées \tilde{G}_{xx} et \tilde{G}_{xt} .)

Nous justifierons au paragraphe 7, l'hypothèse suivante :

- (5.4) . σ_2 est soit vide, soit une réunion de points isolés dans \mathbb{R}^2 .
 . σ_∞ est une réunion finie, éventuellement vide, de fermés simplement connexes, d'intérieurs non vides, de frontières de classe C^1 sauf en un nombre fini de points en lesquels le cône normal, (cf. [4]) est une partie propre de \mathbb{R} . (On élimine les points de rebroussements.)
 . $\sigma_1 \times \mathbb{R}$ et $\text{Fr}(\sigma_\infty) \times \mathbb{R}$ ne rencontrent Σ_2^c qu'en des points isolés.

Remarque. — La variété $\Sigma_1 \cap (\sigma_1(\bar{y}) \times \mathbb{R})$ permet de définir une trajectoire $(t, \gamma(t), p(t))_{t \in [t_0, t_1]}$ telle que l'on ait $p(t) = f_y^{**}(t, \gamma(t), \bar{y})$. Les points de cette trajectoire pour lesquels on a $(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \notin \Omega(\bar{y})$, vérifient : $f(t, \gamma(t), \gamma'(t)) = f^{**}(t, \gamma(t), \gamma'(t))$. Nous nous intéresserons donc uniquement aux parties de la courbe pour lesquelles on a $(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \in \Omega(\bar{y})$.

Dans ce cas, le couple (γ, p) vérifie localement le système 5.1.

6. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES D'EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR \mathcal{P}

Nous allons voir que lorsque \mathcal{P} n'admet pas de solution, pour toute solution x de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, il existe un intervalle $[t_0, t_1]$ sur lequel $f^{**}(t, x(t), \cdot)$ est affine en $x'(t)$. En d'autres termes, la trajectoire associée à x séjourne sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2^c$ durant l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Dans ce cas, on peut écrire sur $[t_0, t_1]$, la fonctionnelle de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ à l'aide d'une intégrande (qui n'est autre que G) ne dépendant plus de $x'(t)$, dépendant seulement de $(t, x(t))$.

Les points critiques non dégénérés de $G(t, \cdot)$ définissent la strate σ_1 . Les branches de σ_1 correspondent soit à des minima locaux, soit à des maxima locaux de $G(t, \cdot)$.

Nous allons montrer que le seul cas pour lequel \mathcal{P} n'admet pas de solution est celui où les trajectoires de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ séjournent sur $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ et où G_{xx} est strictement positive. (Les branches de σ_1 correspondantes sont celles des minima locaux de $G(t, \cdot)$).

C'est donc l'absence de convexité en $x'(t)$ et la stricte convexité en $x(t)$ qui caractérise l'inexistence de solution.

PROPOSITION 6.1. — Soit $x = \gamma(t)$ une équation de σ_1 telle que $(t, \gamma(t), \gamma'(t))$ appartienne à $\Omega_1(\bar{y})$. Les trajectoires de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ sont de classe C^1 par morceaux au voisinage d'un point de $\Sigma_1 \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_1(\bar{y}) \times \mathbb{R} \right)$.

De plus, si une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ est tangente à $\Sigma_1 \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i(\bar{y}) \times \mathbb{R} \right)$ en deux points suffisamment proches, elle séjourne sur $\Sigma_1 \cap (\sigma_1(\bar{y}) \times \mathbb{R})$ entre ces deux points.

Preuve. — Le résultat de régularité est évident pour les points de Σ_1 ne vérifiant pas l'équation $p = f_y^{**}(t, x, \bar{y})$ et pour les points de $\Sigma_1 \cap (\sigma_0(\bar{y}) \times \mathbb{R})$.

En effet, dans ces deux cas, les trajectoires de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ ne sont pas tangentes à Σ_1 et le point de contact (i. e. : le point de discontinuité du vecteur tangent à la trajectoire) est isolé.

On supposera dans la suite que les points de Σ_1 vérifient l'équation $p = f_y^{**}(t, x, \bar{y})$.

Soit $(t_0, x(t_0), p(t_0))$ un point d'une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ appartenant à $\Sigma_1 \cap (\sigma_1(\bar{y}) \times \mathbb{R})$.

On a les égalités suivantes : $x(t_0) = \gamma(t_0)$ et $G_x(t, \gamma(t)) = 0$, $G_{xx}(t, \gamma(t))\gamma'(t) + G_{xt}(t, \gamma(t)) = 0$ dans un voisinage de t_0 .

Supposons que l'on ait $G_{xx}(t_0, \gamma(t_0)) > 0$. (Le cas négatif se traite de façon analogue.) Étant donné que l'on a : $k(t, \gamma(t), \bar{y}) < \gamma'(t) < l(t, \gamma(t), \bar{y})$, il existe des nombres M et ε strictement positifs tels que l'on ait :

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \varepsilon], \quad \forall y \notin]k(t, \gamma(t), \bar{y}), l(t, \gamma(t), \bar{y})[, \\ G_{xx}(t, x(t))y + G_{xt}(t, x(t)) > M > 0.$$

On en déduit que si la trajectoire $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ quitte $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ à l'instant t_1 de l'intervalle $\left[t_0, t_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right]$, on a :

$$\forall t \in [t_1, t_0 + \varepsilon], \quad \frac{d}{dt} G_x(t, x(t)) > M \quad \text{et} \quad G_x(t_1, x(t_1)) = 0.$$

Cette trajectoire ne rencontrera donc à nouveau $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ que pour t supérieur à $t_0 + \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe un voisinage V_0 de t_0 tel que l'ensemble $\{ t \in V_0 \mid (t, x(t), p(t)) \in \Sigma_0 \}$ soit une réunion finie d'intervalles ouverts et tel que l'ensemble $\left\{ t \in V_0 \mid (t, x(t), p(t)) \in \Sigma_1 \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \times \mathbb{R} \right) \right\}$ soit une réunion finie d'intervalles fermés.

Les deux assertions de la proposition en découlent. \square

PROPOSITION 6.2. — Les trajectoires de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ ne rencontrent $\Sigma_2 \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \times \mathbb{R} \right)$ qu'en des points isolés.

Preuve. — Dans ce cas, les strates σ_i sont définies par les singularités d'une fonction \tilde{G}^{ij} , elle-même associée à une strate $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$ et à une fonction \tilde{f}^{ij} . Dans cette preuve, \tilde{G} , $\tilde{\Sigma}_1$, \tilde{f} désigneront respectivement \tilde{G}^{ij} , $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$ et \tilde{f}^{ij} . Comme dans le cas de Σ_1 , si une trajectoire $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ est tangente à Σ_2^c , donc aussi à $\tilde{\Sigma}_1$, à l'instant t_0 , on a :

$$p'(t_0) - \tilde{f}_{yx}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - \tilde{f}_{yx}(t_0, x(t_0), \bar{y})x'(t_0) = 0$$

et

$$p'(t_0) \in \partial_x f^{**}(t_0, x(t_0), x'(t_0)).$$

Mais ici, $\partial_x f^{**}$ n'est pas réduit à une seule valeur.

Cependant, si la trajectoire quitte $\tilde{\Sigma}_1$ à l'instant t_0 , on a :

$$p'(t_0) = \tilde{f}_x(t_0, x(t_0), x'(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f_x^{**}(t, x(t), x'(t)).$$

($p'(t_0)$ désigne éventuellement la dérivée à droite de p en t_0). Comme dans le cas de Σ_1 , on a :

$$\tilde{f}_x(t_0, x(t_0), \bar{y}) - \tilde{f}_{yx}(t_0, x(t_0), \bar{y}) - \tilde{f}_{yx}(t_0, x(t_0), \bar{y})\bar{y} = 0.$$

Pour des raisons analogues à celles développées dans la preuve de la proposition 6.1, une trajectoire qui rencontre $\tilde{\Sigma}_1 \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \times \mathbb{R} \right)$ ne peut que séjourner sur $\tilde{\Sigma}_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ ou rencontrer $\tilde{\Sigma}_1$ en des points isolés. Ceci étant vrai pour les trois strates $\tilde{\Sigma}_1^{ij}$ qui contiennent Σ_2^c , il en est de même lorsqu'une trajectoire rencontre $\Sigma_2^c \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \times \mathbb{R} \right)$. On en déduit que la seule possibilité pour une trajectoire de séjourner sur $\Sigma_2^c \cap \left(\bigcup_{i=0}^2 \sigma_i \times \mathbb{R} \right)$, est de séjourner sur $\Sigma_2^c \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$. Ceci est exclu par l'hypothèse 5.7, la proposition est donc démontrée. \square

PROPOSITION 6.3. — Soient x_0 et x_1 deux réels. Il existe une constante c_0 ne dépendant que de x_0 et de x_1 telle que, pour toute fonction x de $W^{1,q}(t_0, t_1)$ vérifiant $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ et vérifiant $(t, x(t)) \in P\Omega_1(\bar{y})$, pour t dans l'intervalle $[t_0, t_1]$, on ait :

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t)) dt + c_0.$$

L'égalité est réalisée si et seulement si, pour presque tout t de $[t_0, t_1]$, $(t, x(t), x'(t))$ appartient à $\Omega_1(\bar{y})$.

Dans l'énoncé précédent G est définie par :

$$G(t, x) = f^{**}(t, x, \bar{y}) - f_y^{**}(t, x, \bar{y})\bar{y} - \int_{x_0}^x f_{ty}^{**}(t, r, \bar{y})dr.$$

LEMME 6.4. — Pour toute fonction x de $W^{1,q}(t_0, t_1)$ vérifiant

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (t, x(t)) \in P\Omega_1(\bar{y}),$$

l'application $t \rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} f_y^{**}(t, r, \bar{y})dr$ est presque partout dérivable sur $[t_0, t_1]$ et sa dérivée est :

$$f_y^{**}(t, x(t), \bar{y})x'(t) + \int_{x_0}^{x(t)} f_{ty}^{**}(t, r, \bar{y})dr.$$

La preuve du lemme est classique, nous la laissons au soin du lecteur. \square

Preuve de la proposition 6.3. — Par convexité de $f^{**}(t, x(t), \cdot)$, on a :

$$(6.1) \quad \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t))dt \\ \geq \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), \bar{y}) + f_y^{**}(t, x(t), \bar{y})x'(t) - f_y^{**}(t, x(t), \bar{y})\bar{y}dt.$$

L'égalité est réalisée dans (6.1) si et seulement si :

pour presque tout t de $[t_0, t_1]$, $(t, x(t), x'(t)) \in \overline{\Omega_1(\bar{y})}$.

En effet dans ce cas, $f^{**}(t, x(t), \cdot)$ est affine en $x'(t)$.

Du lemme 6.4, on déduit :

$$\int_{t_0}^{t_1} f_y^{**}(t, x(t), \bar{y})x'(t)dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(- \int_{x_0}^{x(t)} f_{ty}^{**}(t, r, \bar{y})drdt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x(t)} f_y^{**}(t, r, \bar{y})dr \right) dt \right) \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x(t)} f_{ty}^{**}(t, r, \bar{y})drdt + \int_{x_0}^{x_1} f_y^{**}(t, r, \bar{y})dr.$$

En posant $c_0 = \int_{x_0}^{x_1} f_y^{**}(t, r, \bar{y})dr$ et en reportant l'égalité précédente dans

$$(6.1), \text{ on obtient : } \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t))dt \geq \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t))dt + c_0. \quad \square$$

PROPOSITION 6.5. — Si une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ séjourne sur $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ durant l'intervalle $[t_0, t_1]$, alors on a :

$$\forall t \in [t_0, t_1], \quad G_{xx}(t, x(t)) > 0.$$

Preuve. — Soit $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition. On pose $x_0 = x(t_0)$ et $x(t_1) = x_1$, x est alors solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_1, x_0, x_1)$. De plus, on a l'égalité :

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t)) dt + c_0,$$

où c_0 ne dépend que des conditions aux limites (proposition 6.3).

On en déduit que x est aussi solution du problème

$$\text{Inf} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t)) dt \mid x \in \mathbb{W}^{1,q}(t_0, t_1), (t, x(t), x'(t)) \in \Omega_1(\bar{y}), \right. \\ \left. x(t_0) = x_0 \text{ et } x(t_1) = x_1 \right\}.$$

La fonction x vérifie donc les conditions d'optimalité du premier et du second ordre de ce problème, elles s'écrivent :

$$G_x(t, x(t)) = 0 \text{ et } G_{xx}(t, x(t)) \geq 0.$$

Étant donné que sur $[t_0, t_1]$, $G_{xx}(t, x(t))$ est différent de 0, la proposition est démontrée. \square

DÉFINITION 6.6. — On appelle courbe critique minimum associée à l'intégrande f , une courbe de classe C^1 définie sur un intervalle $[t_0, t_1]$ par l'équation $x = \gamma(t)$ et vérifiant :

$$\forall t \in [t_0, t_1], (t, \gamma(t), \gamma'(t)) \in \Omega_1(\bar{y}) \quad G_x(t, \gamma(t)) = 0 \text{ et } G_{xx}(t, \gamma(t)) > 0.$$

PROPOSITION 6.7. — Si $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$ est une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ tangente à $(\sigma_\infty \times \mathbb{R}) \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ en deux instants t_0 et t_1 suffisamment proches et si $(t_0, x(t_0), x'(t_0))$ appartient à $\Omega(\bar{y})$, alors il existe une solution \bar{x} de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ telle que l'on ait :

$$\forall t \notin]t_0, t_1[, \bar{x}(t) = x(t)$$

et presque tout t de $[t_0, t_1]$, $f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = f^{**}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))$.

COROLLAIRE 6.8. — Si \mathcal{P} n'admet pas de solution, il existe une courbe critique minimum associée à f et définie sur un intervalle inclus dans $[a, b]$.

Preuve du corollaire. — Des propositions 5.3, 6.1, 6.2, on déduit que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, toute trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ rencontre

$$[\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})] \cup [(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap (\sigma_\infty \times \mathbb{R})].$$

Si une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ rencontre $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap (\sigma_\infty \times \mathbb{R})$ sans qu'il y ait contact tangent, les points de contact sont isolés. Lorsqu'il y a deux points de contact tangent suffisamment proches, la proposition 6.7 nous montre qu'il est alors possible de modifier la trajectoire entre ces deux

points de façon que l'on ait toujours une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ et que de plus la condition $f(t, x(t), x'(t)) = f^{**}(t, x(t), x'(t))$ soit vérifiée entre ces deux points.

On en déduit que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, toute trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ rencontre $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$. Les propositions 5.3, 6.1, 6.5 permettent alors de conclure. \square

Preuve de la proposition 6.7. — Supposons qu'une trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, $(t, x(t), p(t))_{t \in [a, b]}$, soit tangente à la frontière de $(\sigma_x \times \mathbb{R}) \cap \Sigma_1$ aux instants t_0 et t_1 . Compte tenu de l'hypothèse (5.4) faite sur la frontière de σ_∞ , le cas des points de $\text{Fr}((\sigma_x \times \mathbb{R}) \cap \Sigma_2^c)$ ne se pose pas, car de tels points sont toujours isolés.

Le cas de points intérieurs à $(\sigma_\infty \times \mathbb{R}) \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_2^c)$ est plus simple et reprend uniquement certains arguments de la preuve qui suit.

Pour parler de contacts tangents, il faut qu'aux points correspondants la frontière de σ_∞ soit de classe C^1 . De plus, la tangente à la frontière de σ_∞ en t_0 ne peut pas être parallèle à la droite d'équation $t = 0$, car sinon le contact ne serait pas tangent ($x'(t_0) \neq \infty$).

Remarquons que l'on a $\gamma'(t_0) = x'(t_0)$ et $x'(t_0) \in]k(t_0, x(t_0), \bar{y}), l(t_0, x(t_0), \bar{y})[$. On supposera que sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, la frontière de σ_x admet une équation de la forme $x = \gamma(t)$, où γ est de classe C^1 . On suppose également que σ_∞ est situé au-dessous de la frontière et qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait :

$$\forall \xi \in [0, \eta], \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (t, \gamma(t) - \xi) \in \sigma_\infty, \\ (t, \gamma(t), \gamma'(t)) \in \Omega_1(\bar{y}) \quad \text{et} \quad \gamma(t) - \eta \leq x(t).$$

Compte tenu de l'hypothèse 5.4, on peut supposer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $G_x(t, \gamma(t) + \delta)$ garde un signe constant pour (t, δ) appartenant à $[t_0, t_1] \times]0, \delta_0]$. Montrons que l'on a $G_x(t, \gamma(t) + \delta) > 0$. Raisonnons par l'absurde, supposons que l'on ait $G_x(t, \gamma(t) + \delta) < 0$. (Le cas $G_x(t, \gamma(t) + \delta) = 0$ est exclu.) Si $|t_0 - t_1|$ est suffisamment petit, il existe une fonction z définie sur $[t_0, t_1]$ telle que l'on ait :

$$\forall t \in]t_0, t_1[, \quad (t, z(t), z'(t)) \in \Omega_1(\bar{y}) \quad \gamma(t) \leq z(t) < \gamma(t) + \delta_0 \\ x(t) < z(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = z(t_0), \quad x(t_1) = z(t_1).$$

De la proposition (6.3), on déduit qu'il existe c_0 tel que l'on ait :

$$(6.2) \quad \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t)) dt + c_0$$

$$\text{et} \quad \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, z(t), z'(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} G(t, z(t)) dt + c_0.$$

Par différence, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, z(t), z'(t))dt \\ \geq \int_{t_0}^{t_1} G_x(t, z(t) + \theta(t)(x(t) - z(t)))(x(t) - z(t))dt > 0, \end{aligned}$$

où $\theta(t) \in]0, 1 [$.

Ceci est en contradiction avec le fait que x soit solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$, on a donc démontré que $G_x(t, \gamma(t) + \delta)$ est positif pour (t, δ) dans $[t_0, t_1] \times]0, \delta_0]$. Il existe une fonction \bar{x} égale à x en dehors de l'intervalle $]t_0, t_1 [$ et telle que l'on ait :

pour presque tout t de $]t_0, t_1 [$, $\bar{x}'(t) = k(t, \bar{x}(t), \bar{y})$ ou $\bar{x}'(t) = l(t, \bar{x}(t), \bar{y})$, $\forall t \in]t_0, t_1 [$, $\gamma(t) - \eta \leq \bar{x}(t) \leq \gamma(t)$.

Pour prouver l'existence d'une telle fonction \bar{x} , on peut soit utiliser le théorème 3.1.6 de [4] soit construire \bar{x} de la façon suivante :

sur $[t_0, s_1]$, on pose $\bar{x}'(t) = k(t, \bar{x}(t), \bar{y})$, s_1 est choisi de façon que l'on ait $s_1 \leq t_1$, $\bar{x}(t) \in [\gamma(t) - \eta, \gamma(t)]$ et $\bar{x}(s_1) = \gamma(s_1) - \eta$.

sur $[s_1, s_2]$, on pose $\bar{x}'(t) = l(t, \bar{x}(t), \bar{y})$ avec $s_2 \leq t_1$, $\bar{x}(t) \in [\gamma(t) - \eta, \gamma(t)]$ et $\bar{x}(s_2) = \gamma(s_2)$.

On construit de proche en proche une fonction \bar{x} dont la dérivée sera successivement égale à $k(t, \bar{x}(t), \bar{y})$ et à $l(t, \bar{x}(t), \bar{y})$. Le procédé de construction est fini car

$|k(t, \gamma(t) - \xi, \bar{y})|$ et $|l(t, \gamma(t) - \xi, \bar{y})|$ sont uniformément bornés pour (t, ξ) dans $[t_0, t_1] \times [0, \eta]$.

Il est facile de réaliser l'égalité $\bar{x}(t_1) = \gamma(t_1)$. (Il suffit d'utiliser le procédé précédent en partant de t_1 vers t_0 et de choisir un point de raccordement.)

De la proposition 6.3, on déduit :

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} G(t, \bar{x}(t))dt + c_0,$$

où c_0 est la constante de (6.2).

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, x(t), x'(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f^{**}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))dt \\ \geq \int_{t_0}^{t_1} G_x(t, \bar{x}(t) + \theta(t)(x(t) - \bar{x}(t)))(x(t) - \bar{x}(t))dt, \quad \text{avec } \theta(t) \in]0, 1 [. \end{aligned}$$

Si on a $x(t) \geq \gamma(t)$, alors $G_x(t, \bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x})$ est positif.

Si on a $x(t) < \gamma(t)$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\gamma(t) - \eta < \bar{x}(t) + \theta(t)(x(t) - \bar{x}(t)) < \gamma(t).$$

On a dans ce cas : $(t, \bar{x}(t) + \theta(t)(x(t) - \bar{x}(t))) \in \sigma_\infty$. On en déduit que

$$G_x(t, \bar{x}(t) + \theta(t)(x(t) - \bar{x}(t))) = 0.$$

Dans tous les cas on a : $G_x(t, \bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x}) \geq 0$. La fonction \bar{x} est donc solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$. \square

On a démontré que si \mathcal{P} n'admet pas de solution, il existe une courbe critique minimum associée à f .

La proposition suivante établit une réciproque.

PROPOSITION 6.9. — S'il existe une courbe critique minimum, associée à f et définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ par l'équation $x = \gamma(t)$, alors il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout η de l'intervalle $]0, \eta_0]$, γ soit l'unique solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta))$ et tel que $\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta))$ n'admette pas de solution.

LEMME 6.10. — Soit γ une fonction de $C^1(t_0, t_1)$. Pour tout ε de \mathbb{R}_+^* , il existe η_0 de \mathbb{R}_+^* tel que pour tout η de $]0, \eta_0]$, toute solution x de $\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta))$ satisfasse :

$$\text{Sup}_{t_0 \leq t \leq t_0 + \eta} |x(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon.$$

Preuve. — Ce lemme est une extension du lemme 5.3 de [5].

Nous reprenons ici l'idée de la démonstration.

Soit x une solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta))$, on a :

$$\int_{t_0}^{t_0 + \eta} f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_0 + \eta} f^{**}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

On note $M = \text{Sup}_{t \in [t_0, t_0 + \eta]} f^{**}(t, \gamma(t), \gamma'(t))$.

Compte tenu de l'estimation 1.2, on a :

$$(6.3) \quad C_2 \int_{t_0}^{t_0 + \eta} |x'(t)|^q dt \leq \eta \cdot M.$$

Si $|x'(t)| \leq 1$, alors $|x'(t)| - 1 \leq 0 \leq |x'(t)|^q$ et si $|x'(t)| > 1$, $|x'(t)| \leq |x'(t)|^q$.

Dans tous les cas, on a $|x'(t)| - 1 \leq |x'(t)|^q$.

(6.3) devient alors $C_2 \int_{t_0}^{t_0 + \eta} |x'(t)| dt - C_2 \eta \leq \eta M$, soit encore

$$\int_{t_0}^{t_0 + \eta} |x'(t)| dt \leq \eta \left(\frac{M}{C_2} + 1 \right).$$

Compte tenu des majorations suivantes pour $t \in [t_0, t_0 + \eta]$:

$$|x(t) - x(t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t x'(\theta) d\theta \right| \leq \int_{t_0}^{t_0+\eta} |x'(t) dt| \leq \eta \left(\frac{M}{C_2} + 1 \right),$$

$$|x(t) - \gamma(t)| \leq |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - \gamma(t_0)| + |\gamma(t_0) - \gamma(t)|$$

et de la régularité de γ , le lemme est démontré.

Démonstration de la proposition 6.9. — On peut facilement montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall (t, \delta) \in [t_0, t_1] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \quad G_{xx}(t, \gamma(t) + \delta, \bar{y}) > 0 \quad \text{et} \quad (t, \gamma(t) + \delta, \bar{y}) \in \Omega(\bar{y}).$$

Soit η un réel de $]0, \eta_0]$, où η_0 est défini par le lemme 6.10, dans lequel γ sera la fonction définissant la courbe critique minimum.

D'après la proposition 6.3, pour toute solution x de

$$\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta)),$$

on a :

$$(6.4) \quad \int_{t_0}^{t_0+\eta} f^{**}(t, x(t), x'(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_0+\eta} G(t, x(t)) dt + C_0$$

où C_0 ne dépend que de $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t_0 + \eta)$.

Or γ est l'unique solution du problème strictement convexe :

$$\text{Inf} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\eta} G(t, x(t)) dt + C_0 \mid x \in W^{1,q}(t_0, t_0 + \eta), x(t_0) = \gamma(t_0), \right. \\ \left. x(t_0 + \eta) = \gamma(t_0 + \eta) \quad \text{et} \quad \gamma(t) - \varepsilon \leq x(t) \leq \gamma(t) + \varepsilon \right\}.$$

(En effet γ vérifie l'équation d'Euler de ce problème : $G_x(t, x(t), \bar{y}) = 0$ et ce problème est strictement convexe étant donné que $G_{xx}(t, x, \bar{y}) > 0$ pour $\gamma(t) - \varepsilon \leq x \leq \gamma(t) + \varepsilon$.)

De plus, d'après la proposition 6.3 :

$$\int_{t_0}^{t_0+\eta} G(t, \gamma(t)) dt + C_0 = \int_{t_0}^{t_0+\eta} f^{**}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Ceci prouve avec (6.4) que γ est l'unique solution de

$$\mathcal{P}\mathcal{R}(t_0, t_0 + \eta, \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \eta)).$$

γ n'est pas solution de \mathcal{P} étant donné que

$$f(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \neq f^{**}(t, \gamma(t), \gamma'(t)) \quad \text{sur} \quad [t_0, t_0 + \eta]. \quad \square$$

Avec le corollaire 6.8 et la proposition 6.9, on a démontré le :

THÉORÈME 6.11. — Soit f une fonction vérifiant les hypothèses 1.1 à 1.3, 3.3, 5.4, une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toutes conditions aux limites (a, b, α, β) , le problème $\mathcal{P}(a, b, \alpha, \beta)$ admette des solutions est qu'il n'existe pas de courbe critique minimum.

7. GÉNÉRICITÉ DES HYPOTHÈSES FAITES SUR f

Dans ce paragraphe, on pose $n = \infty$ et on note $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les estimations (1.2) et (1.3). On munit cet espace de la topologie de Whitney ([7]), c'est un espace métrique complet et donc un espace de Baire.

Nous dirons qu'une propriété est générique dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, ou encore vraie pour presque toutes les fonctions f de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, si l'ensemble des fonctions qui la satisfont contient un G_δ dense dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$.

PROPOSITION 7.1. — Il existe un G_δ de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, noté A^∞ , dense dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, tel que toute fonction f de A^∞ satisfasse l'hypothèse 3.3.

Preuve. — Nous laissons au lecteur le soin d'adapter la démonstration de la proposition 2.5 de [5] à notre problème.

PROPOSITION 7.2. — Il existe un G_δ de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, noté B^∞ , dense dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, tel que pour toute fonction f de B^∞ , on ait :

(7.1) pour tout i de $\{0, 1, 2\}$ la sous-variété σ_i définie dans un pavé ouvert W_0 (définition 5.7) est soit vide, soit une sous-variété de codimension i dans \mathbb{R}^2 .

$$\text{Pour tout } i \text{ de } \{0, 1\}, \sigma_{i+1} \subset \bar{\sigma}_i. \bigcup_{i=0}^2 \sigma_i = W_0.$$

(7.2) La sous-variété $\sigma_1 \times \mathbb{R}$ ne rencontre Σ_2^c qu'en des points isolés.

Remarque. — Les assertions de 7.1 impliquent que l'on a $\sigma_\infty = \phi$. Une fonction vérifiant (7.1), (7.2) satisfait donc l'hypothèse (5.4).

Preuve de la proposition 7.2. — Nous reprenons ici le même type de démonstration que dans [5] proposition 3.1.

Montrons tout d'abord l'existence d'un G_δ , noté D^∞ , dense dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que les fonctions de D^∞ satisfassent (7.1).

Si (t, x) est un point du pavé W_0 , de la proposition 5.6, on déduit qu'il existe y_1 et y_2 tel que l'on ait :

$$(y_2 - y_1)\tilde{G}_x(t, x) = y_2 f_x(t, x, y_1) - y_1 f_x(t, x, y_2) + f_t(t, x, y_1) - f_t(t, x, y_2).$$

On démontrerait de même l'égalité suivante :

$$(y_2 - y_1)\tilde{G}_{xx}(t, x) = y_2 f_{xx}(t, x, y_1) - y_1 f_{xx}(t, x, y_2) + f_{tx}(t, x, y_1) - f_{tx}(t, x, y_2).$$

On note ϕ l'application de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 - D)$ (où D est la

diagonale principale de \mathbb{R}^2) dans \mathbb{R}^5 qui à (f, t, x, p, y_1, y_2) fait correspondre

$$p - f_y(t, x, y_1), \quad p - f_y(t, x, y_2), \quad py_1 - f(t, x, y_1) - py_2 + f(t, x, y_2),$$

$$f_t(t, x, y_1) - f_t(t, x, y_2) + y_2 f_x(t, x, y_1) - y_1 f_x(t, x, y_2),$$

$$f_{tx}(t, x, y_1) - f_{tx}(t, x, y_2) + y_2 f_{xx}(t, x, y_1) - y_1 f_{xx}(t, x, y_2).$$

Si (t, x) est un point de σ_2 , il existe y_1, y_2 et p , avec $y_1 \neq y_2$, tels que l'on ait $\phi(f, t, x, p, y_1, y_2) = 0$.

On note ϕ_f l'application partielle à f constant,

$$\phi_f : t, x, p, y_1, y_2 \rightarrow \phi(f, t, x, p, y_1, y_2).$$

On a déjà montré que σ_0 est une sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^2 et que σ_1 est soit vide, soit une sous-variété de codimension 1. Pour démontrer 7.1, il suffit de montrer que pour presque toute fonction f , l'application ϕ_f est transversale à l'origine.

D'après les théorèmes de transversalité de Thom [1] ou [7] il suffit de démontrer que ϕ est elle-même transversale à l'origine.

« ϕ est transversale à l'origine » signifie qu'en tout point (f, t, x, p, y_1, y_2) vérifiant $\phi(f, t, x, p, y_1, y_2) = 0$, l'application tangente $T\phi$ est surjective. $T\phi$ est une application linéaire de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2 - \mathbf{D})$ dans \mathbb{R}^5 .

Pour démontrer que cette application est surjective, il suffit de montrer que l'application « dérivée partielle » par rapport à f est elle-même surjective.

En notant ϕ_{t,x,p,y_1,y_2} l'application partielle à (t, x, p, y_1, y_2) constant, on peut écrire :

$\phi_{t,x,p,y_1,y_2} = \delta \circ i$, où i est l'application qui à $f \in C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$ fait correspondre $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2)$ défini par :

$$\begin{aligned} a_1 &= f(t, x, y_1) & b_1 &= f_x(t, x, y_1) & c_1 &= f_y(t, x, y_1) & d_1 &= f_t(t, x, y_1) \\ a_2 &= f(t, x, y_2) & b_2 &= f_x(t, x, y_2) & c_2 &= f_y(t, x, y_2) & d_2 &= f_t(t, x, y_2) \\ e_1 &= f_{xx}(t, x, y_1) & f_1 &= f_{tx}(t, x, y_1) \\ e_2 &= f_{xx}(t, x, y_2) & f_2 &= f_{tx}(t, x, y_2) \end{aligned}$$

et δ est l'application de \mathbb{R}^{12} dans \mathbb{R}^5 qui à

$$(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2)$$

fait correspondre :

$$\begin{aligned} p - c_1, \quad p - c_2, \quad py_1 - a_1 - py_2 + a_2, \\ d_1 - d_2 + y_2 b_1 - y_1 b_2, \quad f_1 - f_2 + y_2 e_1 - y_1 e_2. \end{aligned}$$

$T\delta$ est l'opérateur de \mathbb{R}^{12} dans \mathbb{R}^5 dont la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & -y_1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & -y_1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 5. On en déduit que, i étant une submersion, l'application dérivée partielle de ϕ par rapport à f est surjective et donc $T\phi$ est aussi surjective. \square

Pour démontrer l'existence d'un G_δ dense dans $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, noté E^∞ , tel que toute fonction de E^∞ satisfasse 7.2, il suffit de remarquer que, si (t, x, p) est un point de $\Sigma_2^c \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$, il existe y_1, y_2, y_3 tels que l'on ait :

$$(7.3) \quad \begin{aligned} p - f_y(t, x, y_1) &= 0, & p - f_y(t, x, y_2) &= 0, & p - f_y(t, x, y_3) &= 0, \\ p y_1 - f(t, x, y_1) - p y_2 + f(t, x, y_2) &= 0, \\ p y_2 - f(t, x, y_2) - p y_3 + f(t, x, y_3) &= 0, \\ f_t(t, x, y_1) - f_t(t, x, y_2) + y_2 f_x(t, x, y_1) - y_1 f_x(t, x, y_2) &= 0. \end{aligned}$$

Par des arguments de transversalité analogues à ceux développés précédemment, on montre que les points (t, x, p) pour lesquels il existe y_1, y_2, y_3 vérifiant 7.3, sont isolés dans \mathbb{R}^3 .

On pose ensuite $B^\infty = D^\infty \cap E^\infty$ et la proposition est démontrée. \square

THÉORÈME 7.3. — Pour presque toute fonction f de $C_q^\infty(\mathbb{R}^3)$, une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toutes conditions aux limites (a, b, α, β) le problème $\mathcal{P}(a, b, \alpha, \beta)$ admette des solutions est qu'il n'existe pas de courbe critique minimum associée à f .

Preuve. — Toute fonction f de $A^\infty \cap B^\infty$ satisfait les hypothèses 1.1 à 1.3, 3.3 et 5.4 le théorème 6.11 nous permet alors de conclure. \square

8. EXEMPLES. APPLICATIONS

Exemple 1. — On pose $f(t, x, y) = \frac{(y^2 - 1)^2}{4} + \frac{1}{2}x^2 - \gamma(t)x$, avec γ de classe C^4 et $|\gamma'(t)| < 1$ pour tout t dans \mathbb{R} .

$$\text{On a } f^{**}(t, x, y) = \begin{cases} f(t, x, y) & \text{si et seulement si } y^2 \geq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \gamma(t)x & \text{si } y^2 \leq 1 \end{cases}.$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-1, +1[$. On pose $\mathbb{F} = \{0\}$

$$\sigma_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \gamma(t)\}, \quad \sigma_2 = \sigma_\infty = \phi, \quad k(t, x, 0) = -1, \\ l(t, x, 0) = +1, \quad \Sigma_1 = \{(t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid p = 0\}, \quad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \phi.$$

f vérifie les hypothèses 1.1 à 1.3, 3.3 et 5.4, on peut donc appliquer le théorème 6.11.

La courbe d'équation $x = \gamma(t)$ est une courbe critique minimum sur \mathbb{R} . On remarquera que si x est une solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ et si $f_{yy}^{**}(t, x(t), x'(t))$ n'est pas nul, alors on a :

$$f_{yy}^{**}(t, x(t), x'(t))x''(t) = x(t) - \gamma(t) \quad \text{et} \quad f_{yy}^{**}(t, x(t), x'(t)) > 0.$$

Cette remarque permet de déterminer la concavité des trajectoires. De plus $\mathcal{P}\mathcal{R}$ étant strictement convexe, pour toutes conditions aux limites, il admet une solution unique. On en déduit que \mathcal{P} n'admet pas de solution si et seulement si l'unique solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ séjourne sur la courbe critique minimum.

Les figures 8.1 à 8.3 illustrent différents cas dans lesquels \mathcal{P} n'admet pas de solution.

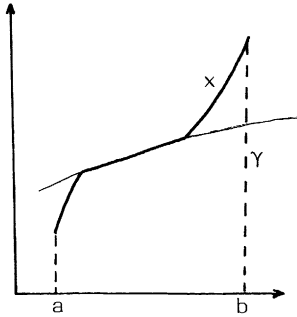


FIG. 8.1.

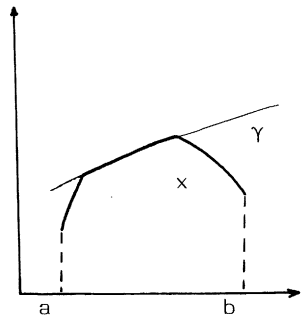


FIG. 8.2.

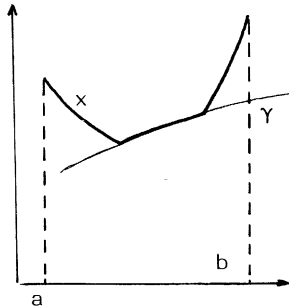


FIG. 8.3.

Dans les cas ci-dessous, la solution x de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ est aussi solution de \mathcal{P} .

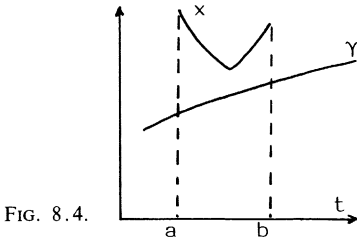


FIG. 8.4.

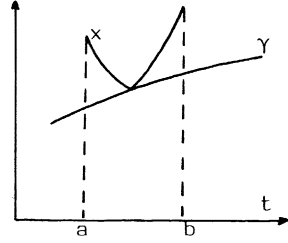


FIG. 8.5.

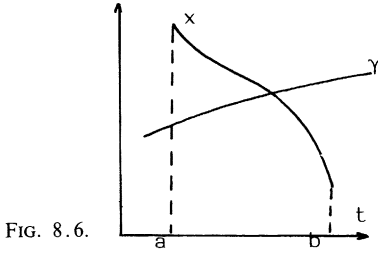


FIG. 8.6.

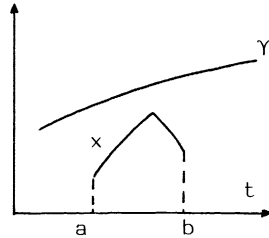


FIG. 8.7.

Allure des bitrajectoires correspondantes.

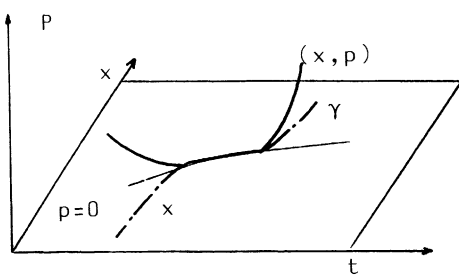


FIG. 8.8 (cas de la figure 8.1).

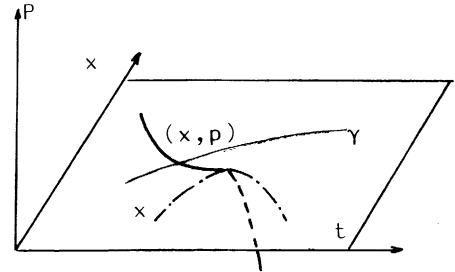


FIG. 8.9 (cas de la figure 8.7).

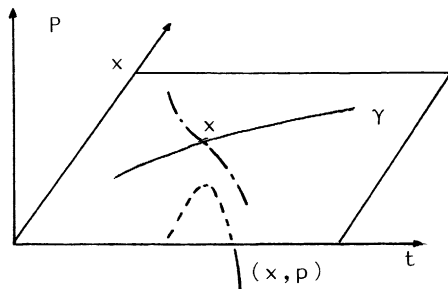


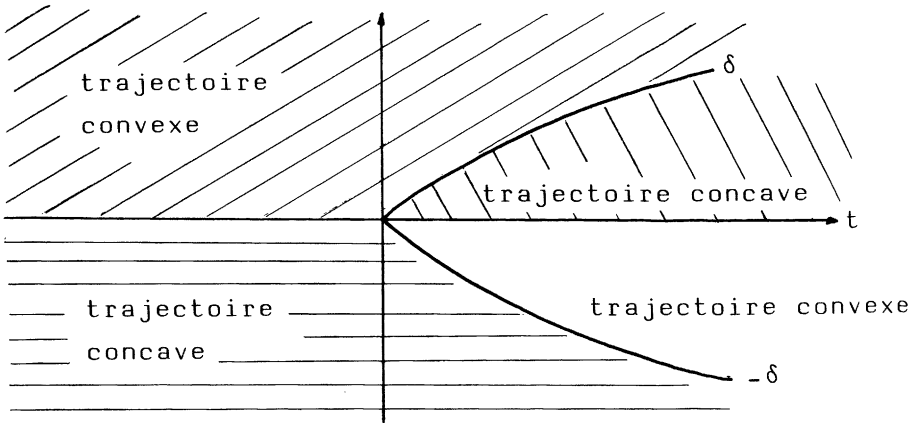
FIG. 8.10 (cas de la figure 8.6).

Exemple 2. — On pose $f(t, x, y) = \frac{(y^2 - 1)^2}{4} + \frac{1}{3}|x|^3 - \frac{1}{2}\delta(t)x^2$. On suppose que $\delta \in C^4(\mathbb{R})$, que $\forall t \in \mathbb{R}, |\delta'(t)| < 1, \delta(0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \delta(t) > 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_-^*, \delta(t) < 0$. On a $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-1, +1[$, on pose $\mathbb{F} = \{0\}$.

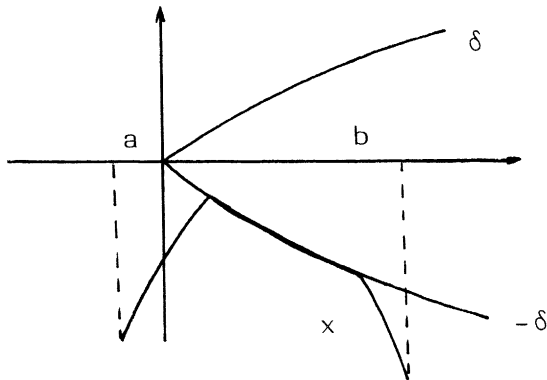
On a $\sigma_1(0) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x(|x| - \delta(t)) = 0\}, \sigma_2 = \{(0, 0)\}, \sigma_\infty = \phi$. $k(t, x, 0) = -1, l(t, x, 0) = +1, \Sigma_1 = \{(t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \mid p = 0\}, \Sigma_2 = \Sigma_3 = \phi$. f vérifie les hypothèses 1.1 à 1.3, 3.3 et 5.4.

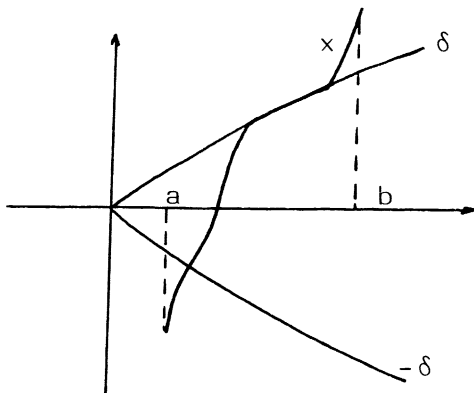
Il y a deux courbes critiques minima, les courbes d'équation $x = \delta(t)$ et $x = -\delta(t)$ définies sur \mathbb{R}_+^* .

Remarquons que $\mathcal{P}\mathcal{R}$ n'est pas convexe. Lorsque l'on a $f_y^{**}(t, x(t), x'(t)) \neq 0$, l'équation $f_{yy}^{**}(t, x(t), x'(t))x''(t) = x(t)(|x(t)| - \delta(t))$ permet de déterminer la concavité des trajectoires, on a une configuration du type suivant :



On donne ci-dessous l'allure de deux trajectoires correspondant à des cas pour lesquels \mathcal{P} n'a pas de solution.





Exemple 3. — On pose $f(t, x, y) = \frac{(y^2 - t^2)^2}{4} + \frac{1}{4}(x_+)^4$.

On rappelle que $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

On a $f^{**}(t, x, y) = \begin{cases} f(t, x, y) & \text{si } y^2 \geq t^2 \\ \frac{1}{4}(x_+)^4 & \text{si } y^2 < t^2 \end{cases}$.

$\Omega = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -|t| < y < |t|\}$, $k(t, x, 0) = -t$, $l(t, x, 0) = +t$.
 $\sigma_1 = \sigma_2 = \phi$ et $\sigma_\infty = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$.

f vérifie les hypothèses 1.1 à 1.3, 3.3 et 5.4.

Il n'y a pas de courbe critique minimum et \mathcal{P} admet des solutions pour toutes conditions aux limites.

Exemple 4. — Dans [4], p. 214, 215, F. H. Clarke donne l'exemple d'un problème de contrôle optimal s'écrivant sous la forme $\mathcal{P}(0, T, x_0, x_T)$ avec

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{\alpha}\right)^2 & \text{si } y \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{\beta}\right)^2 & \text{si } y < 0 \text{ où } \alpha > \beta > 0. \end{cases}$$

Bien que f ne vérifie pas les hypothèses de régularité (1.1) pour $x = 0$, nous allons voir que la C. N. S. du théorème 6.11 est encore applicable à ce problème.

Si x est négatif ou nul, $f(x, \cdot)$ est convexe. Si x est positif, $f(x, \cdot)$ n'est plus convexe.

Les points (t, x, p) de Σ_1 sont solutions du système d'équations paramétriques suivant :

$$(8.11) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{\alpha} \left(x + \frac{y_1}{\alpha} \right), & p = \frac{1}{\beta} \left(x + \frac{y_2}{\beta} \right) \\ p y_1 - f(x, y_1) = p y_2 - f(x, y_2) & \text{avec } y_1 > 0, y_2 < 0, x > 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$(8.12) \quad p = \frac{2x}{\alpha + \beta}, \quad y_1 = \frac{\alpha(\alpha - \beta)x}{\alpha + \beta}, \quad y_2 = \frac{\beta(\beta - \alpha)x}{\alpha + \beta}.$$

On a donc :

$$\Sigma_1 = \left\{ (t, x, p) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, p = \frac{2x}{\alpha + \beta} \right\}.$$

Il est facile de voir que $\Sigma_2 = \Sigma_3 = \phi$ et que $\mathbb{R}^3 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

De plus, on a

$$f^{**}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } x \leq 0 \text{ ou si } y \notin \left[\frac{\beta(\beta - \alpha)x}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} x \right] \\ \frac{2\beta^2 x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{2x}{\alpha + \beta} y & \text{si } x > 0 \text{ et si } y \in \left[\frac{\beta(\beta - \alpha)x}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} x \right]. \end{cases}$$

Remarquons que f^{**} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

De plus, on a $\Omega = \Omega(0) = \left\{ (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y \in \left[\frac{\beta(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta} x, \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} x \right] \right\}$
et f^{**} est de classe C^∞ sur Ω .

Ces résultats de régularité et l'égalité $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \mathbb{R}^3$ permettent d'affirmer que la C. N. S. du théorème 6.11 est applicable à ce problème.

Les points (t, x, p) de $\Sigma_1 \cap (\sigma_1 \times \mathbb{R})$ sont les points de Σ_1 vérifiant le système (8.11) et l'équation $G_x(x) = 0$. Cette dernière équation s'écrit ici $y_2 f_x(x, y_1) - y_1 f_x(x, y_2) = 0$ (conséquence de la proposition 5.6).

Étant donné que l'on a $f_x(x, y_1) = x + \frac{y_1}{\alpha}$ et que $f_x(x, y_2) = x + \frac{y_2}{\beta}$, avec (8.12) on obtient :

$$y_2 f_x(x, y_1) - y_1 f_x(x, y_2) = \frac{4x^2 \alpha \beta (\beta - \alpha)}{(\alpha + \beta)^2} < 0.$$

On en déduit que $\sigma_1 = \phi$ et que $\mathbb{R}^2 = \sigma_0$. Le problème $\mathcal{P}(0, T, x_0, x_T)$ admet donc des solutions.

Application au cas où f ne dépend pas de t .

On pose $f(t, x, y) = g(x, y)$. On suppose que f vérifie les hypothèses 1.1

à 1.3, 3.3 et 5.4. g ne dépendant pas de t , les strates σ_1 sont des droites parallèles à la droite d'équation $t = 0$.

Les seules courbes critiques minima sont, quand elles existent, des droites d'équation $x = \bar{y}$. La seule possibilité pour une trajectoire $(t, x(t))_{t \in [a, b]}$ de séjourner sur une courbe critique minimum est que $x'(t) = 0$.

Une courbe critique minimum est donc caractérisée par :

$$g(\bar{y}, 0) \neq g^{**}(\bar{y}, 0), \quad g_x^{**}(\bar{y}, 0) = 0, \quad g_{xx}^{**}(\bar{y}, 0) > 0.$$

On pourrait démontrer que ces conditions sont équivalentes à $(\bar{y}, g_y^{**}(\bar{y}, 0))$ est une singularité générique de type IC du champ hamiltonien associé au problème, au sens de l'article [5].

Le théorème 7.3 apparaît donc comme une extension au cas où l'intégrande dépend de la variable d'espace t du théorème 5.1 de [5].

Application au cas du problème à variables x et y séparées.

On pose $f(t, x, y) = g(t, y) + h(t, x)$.

Ce problème a été étudié dans [2] avec l'hypothèse :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad h_x(t, x) - g_{yy}^{**}(t, y) > \alpha > 0.$$

Remarquons que dans ce cas, on a :

$$G_x(t, x) = h_x(t, x) - g_{yy}^{**}(t, \bar{y}).$$

L'hypothèse précédente nous permet d'affirmer qu'aucune trajectoire de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ ne peut être tangente à Σ_1 . Donc, toute solution de $\mathcal{P}\mathcal{R}$ est aussi solution de \mathcal{P} et \mathcal{P} admet toujours des solutions.

L'hypothèse faite dans [2] apparaît comme une condition suffisante pour qu'il n'existe pas de courbe critique minimum associée à f .

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. Atteia pour son aide et ses encouragements durant la réalisation de ce travail, ainsi que I. Ekeland qui par ses critiques et remarques m'a permis d'améliorer grandement une première version de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ABRAHAM et J. ROBBIN, *Transversal Mappings and Flows*. W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] G. AUBERT et R. TAHRAOUI, Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations, *Journal of Differential Equations*, t. 33, n° 1, juillet 1979.
- [3] F. H. CLARKE, The generalized problem of Bolza. *SIAM J. Control and Optimization*, t. 14, n° 4, juillet 1976.
- [4] F. H. CLARKE, *Optimization and Non smooth Analysis*. Wiley Interscience, New York, 1983.

- [5] I. EKELAND, *Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations*. Publications Math. de l'I. H. E. S., n° 77, 1977.
- [6] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, 1974.
- [7] GOLUBITSKY et GUILLEMIN, *Stable mappings and their singularities*. Graduate texts in Mathematics, t. 14, 1973.
- [8] F. KLOK, Broken solutions of homogeneous variational problems, *Journal of Differential Equations*, t. 55, n° 1, octobre 1984, p. 101-134.
- [9] P. MARCELLINI, Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità, *Rendiconti Mat.*, t. 13, 1980, p. 271-281.
- [10] P. MARCELLINI, Proceedings of Congress on Mathematical theories of Optimization. Springer. *Lecture notes in Mathematics* n° 979.
- [11] C. OLECH, *Integrals of set valued functions and linear optimal control problems, colloque sur la théorie Mathématique du Contrôle optimal*, C. B. R. M., Vander Louvain, 1970, p. 109-125.
- [12] J. P. DEDIEU, *Condition nécessaire et suffisante d'optimalité en calcul des variations*. Séminaire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier (Toulouse), 1979-1980.
- [13] M. PRADEL, *Un théorème d'existence applicable en théorie de l'élasticité non linéaire*. Séminaire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier (Toulouse), 1979-1980.
- [14] J.-P. RAYMOND, *Thèse de 3^e cycle*, Toulouse, 1982.
- [15] J.-P. RAYMOND, *Exposé au Séminaire d'Analyse Numérique*, Université Paul-Sabatier (Toulouse), 1982-1983.
- [16] L. TONELLI, Sur une méthode directe du Calcul des variations, *Rend. Circ. Palermo*, t. 39, 1915, p. 233-264.
- [17] J. M. BALL et V. J. MIZEL, *One dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler-Lagrange Equation* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 4 juillet 1985)