ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE FOUGÈRES

Hypercontractivité et isopérimétrie gaussienne. Applications aux systèmes de spins

Annales de l'I. H. P., section B, tome 36, n^o 5 (2000), p. 647-689
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_2000__36_5_647_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques 36, 5 (2000) 647–689

Hypercontractivité et isopérimétrie gaussienne. Applications aux systèmes de spins

par

Pierre FOUGÈRES [1]

Laboratoire de Statistique et Probabilités, 118, route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex, France

Manuscrit reçu le 11 Octobre 1999, révisé le 17 Avril 2000

RÉSUMÉ. – Nous établissons ici l'existence d'une inégalité isopérimétrique gaussienne pour tout générateur de diffusion hypercontractif réversible sur une variété riemannienne compacte. Dans le cadre de la mécanique statistique, le contrôle de la constante de log-Sobolev assure celui de la constante d'isopérimétrie pour la dynamique de Glauber des spins continus en portée infinie. Nous en déduisons des propriétés de déviation par rapport à la moyenne et à une médiane pour des contractions telles que la magnétisation moyenne, liées à la convergence exponentielle issue des grandes déviations. Pour un générateur hypercontractif réversible sur un ensemble fini, nous obtenons une inégalité de type isopérimétrique plus faible que l'inégalité de Bobkov mais suffisante pour engendrer une inégalité isopérimétrique ensembliste. Nous établissons cette inégalité pour des modèles de mécanique statistique à spins discrets de portée infinie là où a lieu la décroissance exponentielle des corrélations © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

[1] E-mail : pfougere@cict.fr.

1. INTRODUCTION

Pour approximer et étudier certaines mesures, on introduit des semi-groupes de Markov ergodiques. Si la mesure à étudier est invariante (ou mieux réversible) pour le semi-groupe, on obtient des informations sur la vitesse de convergence vers la moyenne en s'assurant que le semi-groupe possède une régularité analytique traduite par des inégalités faisant intervenir l'énergie, l'entropie, ou les moyennes de la racine du carré du champ. Nous considèrerons ici les inégalités de trou spectral, de Sobolev logarithmiques et enfin, celles dont nous établirons l'existence en mécanique statistique, les inégalités isopérimétriques. Les relations existant entre ces inégalités font l'objet de nombreuses études (cf. par exemple [1] et [4] dans un cadre général, [15] en mécanique statistique).

Les inégalités de Sobolev logarithmiques ont largement prouvé leur efficacité en mécanique statistique (cf. [13,14]). Leur existence a été étudiée pour des modèles de mécanique statistique à fibre compacte au début des années 90 par D.W. Stroock et B. Zegarlinski (cf. [23,19, 20,24]) et plus récemment pour des modèles à fibre non compacte par Yoshida (cf. [22]). Elles renforcent entre autres l'inégalité de trou dans le spectre : pour un potentiel à portée finie et invariant par translation, Holley, Stroock et Zegarlinski ont obtenu la convergence exponentielle de la dynamique de Glauber pour toute condition extérieure ξ vers l'unique mesure de Gibbs $\boldsymbol{\mu}$, non plus seulement dans L^2 mais en norme uniforme (cf. [14,21]).

Dans un cadre plus général, l'hypercontractivité fournit des constantes de convergence plus fines que l'existence d'un trou spectral (cf. [10]).

L'isopérimétrie décrit une relation entre la mesure d'un ensemble et celle de son bord : $\eta(\mu(A)) \leqslant \mu_s(\partial A)$. L'isopérimétrie gaussienne correspond à la fonction isopérimétrique $\eta = \mathcal{U} = \phi' \circ \phi^{-1}$ où ϕ est la fonction de répartition d'une variable gaussienne. Suivant S. Bobkov, on peut introduire une forme fonctionnelle de l'inégalité isopérimétrique (cf. [7] et [8]) qui lui est équivalente, à savoir que pour toute $f \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs dans [0, 1],

$$\mathcal{U}\left(\int f\,d\gamma\right) \leqslant \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + |\nabla f|^2}\,d\gamma. \tag{1}$$

Dans leurs travaux sur l'isopérimétrie gaussienne pour un générateur de diffusion de dimension infinie (cf. [4]), D. Bakry et M. Ledoux ont montré que, dans ce cadre, l'isopérimétrie fonctionnelle entraîne l'hypercontractivité. L'isopérimétrie gaussienne en diffusion apporte ceci de plus que la loi de toute contraction au sens du carré du champ, i.e telle que $\Gamma(f) \leqslant 1$, est alors une contraction de gaussienne.

L'importance du critère Γ_2 pour assurer l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique dans les modèles de mécanique statistique a été exhibée par E.A. Carlen et D.W. Stroock (cf. [9]). Le résultat général sur l'implication de l'hypercontractivité par la condition Γ_2 (i.e, l'inégalité de courbure-dimension $CD(R, \infty)$ pour une constante $R > 0$) est dû à D. Bakry et M. Emery (cf. [3]). Carlen et Stroock ont souligné son adéquation avec les modèles de mécanique statistique la liant aux propriétés du potentiel d'interaction via une condition suffisante de courbure strictement positive : une décroissance l^1 assez forte des variations secondes du potentiel.

D'autre part, dans [4], D. Bakry et M. Ledoux s'attachent à l'étude des liens entre hypercontractivité et isopérimétrie. En dimension infinie, sous l'hypothèse de courbure réelle (et non plus strictement positive) du semi-groupe, l'hypercontractivité donne une isopérimétrie gaussienne amoindrie à savoir, pour tout A borélien,

$$\mathcal{U}\big(\mu(A)\big) \leqslant c\mu_s(\partial A)$$

où c est une constante > 0 dite constante d'isopérimétrie.

Nous renforçons ici ce résultat en obtenant pour les diffusions hypercontractives sur les variétés compactes une inégalité isopérimétrique fonctionnelle du même type que celle de S. Bobkov.

Nous étendons la méthode utilisée aux générateurs hypercontractifs réversibles sur un ensemble fini, pour lesquels nous obtenons une inégalité fonctionnelle plus faible que l'inégalité (1) (voir le Paragraphe 2.4 pour plus de détails).

Pour les modèles de mécanique statistique à fibre continue, s'appuyant sur la démarche de E.A. Carlen et D.W. Stroock, on peut exhiber une condition sur le potentiel engendrant le contrôle, même négatif cette fois, de la courbure indépendamment de la taille de la boîte finie considérée. Sous cette condition et dans le cas d'une diffusion, le contrôle de la constante de Sobolev logarithmique est équivalent à celui de la constante d'isopérimétrie gaussienne.

On rejoint ici les travaux de E. Laroche (cf. [15]) dans lesquels, étendant les résultats de D.W. Stroock et B. Zegarlinski à des potentiels de portée infinie, l'auteur lie sous une condition de décroissance exponentielle des variations secondes du potentiel (recoupant notre condition de décroissance l^1) le contrôle du trou spectral à celui de la constante de Sobolev logarithmique et à une condition de mélange faible : toutes ces propriétés du modèle sont alors équivalentes. Vu ce qui précède, le contrôle de la constante d'isopérimétrie gaussienne est encore équivalent, sous la condition de décroissance exponentielle des interactions, à l'une quelconque de ces propriétés.

Pour les modèles de mécanique statistique discrets, nous utilisons ce raisonnement pour obtenir l'inégalité isopérimétrique fonctionnelle introduite au Paragraphe 2.4. B. Zegarlinski a récemment démontré que pour les modèles à fibre discrète et à portée finie, une inégalité isopérimétrique (1) a lieu pour la mesure de Gibbs sous la condition de mélange de Dobrushin et Schlosman (cf. [25]). Notre résultat transposé dans ce cadre est plus faible, mais la preuve que nous en donnons est conceptuellement simple, étant basée sur une méthode de semi-groupes, et laisse entrevoir un espoir d'obtenir une inégalité isopérimétrique fonctionnelle du type Bobkov pour tout générateur hypercontractif en courbure minorée de constante indépendante de la taille de l'ensemble fini sous-jacent.

2. ISOPÉRIMÉTRIE FONCTIONNELLE GAUSSIENNE POUR LES SEMI-GROUPES HYPERCONTRACTIFS

2.1. Le critère Γ_2

Ce paragraphe expose brièvement certaines notions et notations utilisées dans l'étude des semi-groupes de Markov et tirées de [1] où l'hypercontractivité est traitée dans un cadre général. Nous renvoyons à cette référence pour de plus amples détails.

Tout d'abord, quelques précisions sur les semi-groupes que nous étudierons. Nous imposons au générateur la régularité suivante : on suppose que le domaine de L dans $L^2(\mu)$ contient une algèbre de fonctions bornées $\mathcal{A}$ comme sous-espace dense stable par L et par l'action des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. $\mathcal{A}$ est de plus supposée satisfaire à une condition technique de convergence pour la topologie du domaine. Ces conditions sont bien sûr remplies lorsque L est un générateur de Markov sur un ensemble fini ou une diffusion sur une variété compacte. Les algèbres $\mathcal{A}$ sont alors respectivement l'algèbre de toutes les fonctions et l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

Soit donc L le générateur d'un semi-groupe markovien sur $L^2(\mu)$ de domaine $\mathcal{D}$.

On lui associe canoniquement un opérateur bilinéaire $\Gamma(.,.)$ sur l'algèbre $\mathcal{A}$,

$$\Gamma(f,g) = 1/2\big(L(fg) - fL(g) - gL(f)\big).$$

$\Gamma(.,.)$ est dit *carré du champ* de L.

Lorsque l'espace ambiant est une variété M et que L est un opérateur différentiel du second ordre elliptique sans terme constant, on peut munir la variété d'une structure riemannienne $(M,(g_{ij}))$ définie à partir des coefficients d'ordre 2 de l'opérateur pour laquelle L s'écrit $L = \Delta + X$ où X est un champ de vecteurs. Les opérateurs réversibles pour les mesures de densité $\exp\phi$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, par rapport à la mesure riemannienne sont tels que $X = \nabla\phi$. Dans ce cadre, le carré du champ s'écrit $\Gamma(f,g) = \langle\nabla f, \nabla g\rangle$ i.e. $\Gamma(f) = \Gamma(f,f) = \|\nabla f\|^2$.

De la même manière, on construit l'opérateur $\Gamma_2(.,.)$ à l'aide du générateur L et du carré du champ $\Gamma_2(f,g) = 1/2(L\Gamma(f,g) - \Gamma(f,Lg) - \Gamma(Lf,g))$. Cet opérateur apparaît de façon naturelle lorsque l'on s'intéresse aux variations de certaines quantités englobant le semi-groupe P_t, son générateur et son carré du champ. Plus particulièrement, on peut être amené à désirer une relation de commutation entre Γ et P_t. La relation

$$\Gamma(P_t f) \leqslant \mathrm{e}^{-2\mathcal{R}t} P_t\big(\Gamma(f)\big) \tag{2}$$

est équivalente à la croissance de la fonction $F(s) = \mathrm{e}^{-2\mathcal{R}s} P_s(\Gamma(P_{t-s}f))$ entre 0 et t. La positivité de $F'(s)$ n'est autre que la relation

$$\Gamma_2(P_{t-s}f) \geqslant \mathcal{R}\Gamma(P_{t-s}f).$$

La condition

$$\Gamma_2 \geqslant \mathcal{R}\Gamma$$

sera dite *critère de coubure $\mathcal{R}$ et de dimension infinie $CD(\mathcal{R},\infty)$* ou plus simplement *critère Γ_2*.

Dans le cas générique où $L = \Delta + \nabla\phi$ sur une variété riemannienne, le critère Γ_2 se transcrit dans son aspect géométrique par la

PROPOSITION 2.1.1 (cf. [1] Sect. 6). – *Soient ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété riemannienne (M,g) et $L = \Delta + \nabla\phi$ le générateur de Markov associé. Le critère $CD(\mathcal{R},\infty)$ pour L est équivalent à la condition*

$$Ric(L) = Ric(M) - \nabla\nabla\phi \geqslant \mathcal{R}g$$

en tant que formes quadratiques. Ici $Ric(M)$ est la courbure de Ricci et $\nabla\nabla\phi$ la hessienne de ϕ.

Cela signifie en fait que la plus petite valeur propre $\rho_0(x)$ de la forme quadratique $Ric(L)(x)$ est supérieure à $\mathcal{R}$.

2.2. L'inégalité pseudo-isopérimétrique de Bakry–Ledoux

Dans [4], Bakry et Ledoux déduisent de l'inégalité de log-Sobolev, une inégalité fonctionnelle *pseudo-isopérimétrique* au sens où elle fait intervenir une racine du carré du champ :

THÉORÈME 2.2.1 (cf. [4], Thm. 4.1). – *Soit L un générateur de Markov symétrique par rapport à μ de constante d'hypercontractivité $\rho_0 > 0$ et de courbure $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de fonctions introduite plus haut. Alors, pour toute f dans $\mathcal{A}$ à valeurs dans* $[0,1]$ *et tout* $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\|f\|_2^2 - \|f\|_{p(t)}^2 \leqslant C\sqrt{t}\int \sqrt{\Gamma(f)}\,d\mu \tag{3}$$

où $C > 0$ ne dépend que de $\mathcal{R}$ et $p(t) = 1 + \mathrm{e}^{-\rho_0 t}$.

Bakry et Ledoux soulignent le caractère isopérimétrique de ce résultat en en déduisant le

COROLLAIRE 2.2.1. – *Soit L un générateur symétrique pour la mesure $d\mu = \exp H dm$, de courbure $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ et de constante de log-Sobolev ρ. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de $\mathcal{R}$ et ρ telle que, pour tout A borélien,*

$$\mathcal{U}\big(\mu(A)\big) \leqslant C\mu_s(\partial A).$$

Remarque 2.2.1. –

- La preuve du Corollaire 2.2.1 est basée sur l'utilisation du Théorème 2.2.1 pour déduire une inégalité de la forme

$$\mu(A)\big[1 - \mu(A)^{(2/p(t))-1}\big] \leqslant C\sqrt{t}\mu_s(\partial A), \tag{4}$$

  pour tout borélien A. Nous obtiendrons au Paragraphe 2.3 une inégalité semblable, mais fonctionnelle cette fois, qui nous fournira la démonstration du Théorème 2.3.1.
- Une lecture attentive de la preuve du Théorème 2.2.1 permet de se convaincre que la propriété de diffusion imposée au générateur par

Bakry et Ledoux n'est pas nécessaire. La propriété de symétrie est en revanche cruciale.

D'aprés le récent travail de Barthe et Maurey (cf. [6]), l'inégalité isopérimétrique ensembliste entraîne en diffusion l'inégalité isopérimétrique fonctionnelle. Le Corollaire 2.2.1 assure donc de l'existence d'une inégalité isopérimétrique fonctionnelle pour toute diffusion hypercontractive sur une variété riemannienne. Nous en donnons maintenant une preuve entièrement fonctionnelle (ne faisant pas appel à la formule de co-aire).

2.3. Hypercontractivité et isopérimétrie pour les diffusions

Pour la mesure gaussienne, S. Bobkov a déduit de l'isopérimétrie ensembliste l'inégalité isopérimétrique fonctionnelle (cf. [8]). Sa démonstration était fondée sur une tensorisation par une gaussienne en dimension un et par l'application de l'inégalité ensembliste à un ensemble du produit judicieusement choisi. Cette idée est à la base de notre résultat principal :

THÉORÈME 2.3.1. – *Soit L un générateur de diffusion hypercontractif de mesure réversible μ sur une variété riemannienne compacte. Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ la courbure et ρ la constante de log-Sobolev de L. Alors, il existe une constante c ne dépendant que de $\mathcal{R}$ et ρ, telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans* $[0, 1]$,

$$\mathcal{U}\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + c^2|\nabla f|^2}\,d\mu. \tag{5}$$

Remarque 2.3.1. – L'hypothèse de courbure minorée est cruciale. On peut trouver dans [4] un exemple de générateur hypercontractif qui ne vérifie pas (5).

La preuve de ce théorème consiste en deux étapes. Tout d'abord, nous montrerons le

LEMME 2.3.1. – *Sous les mêmes hypothèses que le Théorème* 2.3.1, *il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\mathcal{U}\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant c\int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + |\nabla f|^2}\,d\mu, \tag{6}$$

pour toute $f \in \mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0, 1]$.

L'inégalité (6) présente un défaut majeur : ce n'est pas une inégalité tendue (i.e. les fonctions constantes ne réalisent pas l'égalité). Obtenir une inégalité tendue présente une grande importance pour l'étude des propriétés ergodiques du semi-groupe. En effet, pour un générateur satisfaisant à une inégalité tendue, les seules fonctions invariantes sont les constantes (cf. [1], Proposition 2.2) ce qui assure l'ergodicité du semi-groupe. Mais cette faiblesse du Lemme 2.3.1 peut être corrigée facilement grâce à un argument déjà utilisé par Bakry et Ledoux dans [4] pour déduire de l'inégalité isopérimétrique $\mathcal{U}(\int f\,d\mu) \leqslant \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + c|\nabla f|^2}\,d\mu$ une inégalité de log-Sobolev et plus récemment par Barthe et Maurey (cf. [6]) pour établir l'équivalence des inégalités isopérimétriques ensembliste et fonctionnelle pour les mesures à densité sur $\mathbb{R}^n$. Ceci consiste à tirer de l'inégalité d'origine une régularité de la loi de f sous μ et à en déduire l'inégalité voulue (log-Sobolev ou isopérimétrique) pour μ grâce à l'inégalité de même forme pour la mesure gaussienne appliquée à la variable aléatoire canonique sur $(\mathbb{R}, \gamma)$ de même loi que f. Ceci permet de remarquer un comportement intéressant des inégalités isopérimétriques gaussiennes fonctionnelles : l'inégalité non tendue entraîne l'inégalité tendue. C'est ce qu'exprime le

LEMME 2.3.2. – *Soit L un générateur de Markov sur une variété riemannienne compacte M et μ une mesure sur M telle que, pour toute fonction C^∞ f sur M à valeurs dans* $[0, 1]$,

$$\mathcal{U}\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant c \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + \Gamma(f)}\,d\mu$$

alors l'inégalité tendue (pour la même constante c) a également lieu i.e.

$$\mathcal{U}\left(\int f\,d\mu\right) \leqslant \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f) + c^2\Gamma(f)}\,d\mu.$$

Preuve du Lemme 2.3.1. – L'idée est d'appliquer l'inégalité (3) sur $M \times \mathbb{R}$ muni de la mesure produit $\mu \otimes \gamma$ au générateur $\bar{L} = L + L_{O.U.}$ produit de L et d'un générateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que le semi-groupe d'Ornstein–Uhlenbeck (cf. [1]) admet la mesure gaussienne γ pour mesure réversible, est de courbure 1 et de constante de log-Sobolev 2. $\bar{L}$ est donc de courbure $\bar{R} \geqslant \min(1, R)$ et de constante de log-Sobolev $\bar{\rho} \leqslant \max(2, \rho)$. Le Théorème 2.2.1 conduit alors à l'inégalité

$$\|g\|^2_{2,\mu\otimes\gamma} - \|g\|^2_{p(t),\mu\otimes\gamma} \leqslant \bar{C}\sqrt{t} \int \sqrt{\bar{\Gamma}(g)}\,d\mu \otimes \gamma \qquad (7)$$

que nous appliquons à la fonction $g(x,s) = \mathbb{1}_{\{\phi(s)\leqslant f(x)\}}$, où ϕ désigne la fonction de répartition de la mesure gaussienne. g étant une indicatrice,

$$\|g\|_2^2 = \|g\|_p^p = \mu\otimes\gamma\big(\phi(s)\leqslant f(x)\big) = \mu(f),$$

où $\mu(f)$ désigne l'intégrale de f par μ. Et d'autre part, $\bar{L}$ étant un générateur de diffusion,

$$\sqrt{\bar{\Gamma}(g)}(x,s) = |\bar{\nabla} g|(x,s) = \delta_{f(x)}\big(\phi(s)\big)\sqrt{\big(\phi'(s)\big)^2 + |\nabla f|^2(x)}, \quad (8)$$

d'après la règle de la chaîne. On en déduit aisément que

$$\int \gamma(ds)\big|\bar{\nabla} g(x,s)\big| = \sqrt{\mathcal{U}^2\big(f(x)\big) + |\nabla f|^2(x)}$$

et (7) se réduit finalement à

$$\mu(f)\big[1-\mu(f)^{(2/p(t))-1}\big] \leqslant \bar{C}\sqrt{t}\mu\Big(\sqrt{|\nabla f|^2 + \mathcal{U}^2(f)}\Big). \quad (9)$$

L'argument qui suit a été utilisé par Bakry et Ledoux dans [4] pour la preuve du Corollaire 2.2.1. On peut tout d'abord supposer que $\mu(f) > 0$, l'inégalité étant triviale sinon, puis que $0 < \mu(f) < 1/2$ par symétrie de $\mathcal{U}$ par rapport à $1/2$. On s'appuie alors sur le fait que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\big(2/p(t)\big) - 1 \geqslant 1/2\big(\rho_0 \mathrm{e}^{-\rho_0}\big)t.$$

Les deux termes s'annulant en 0, cela découle de l'inégalité sur les dérivées qui est elle-même assurée puisque, pour $t \leqslant 1$, $\mathrm{e}^{-\rho_0 t} \geqslant \mathrm{e}^{-\rho_0}$ et, comme $t \geqslant 0$, $1 + \mathrm{e}^{-\rho_0 t} \leqslant 2$. Posons $\beta = 1/2\,(\rho_0 \mathrm{e}^{-\rho_0})$. L'inégalité (9) conduit alors à

$$\mu(f)\frac{1-\exp(-\beta\log(1/\mu(f))t)}{\sqrt{t}} \leqslant \bar{C}\mu\Big(\sqrt{|\nabla f|^2 + \mathcal{U}^2(f)}\Big). \quad (10)$$

Mais maintenant, pour $u = \beta\log(1/\mu(f))$,

$$\frac{1-\exp(-ut)}{\sqrt{t}} \geqslant \sqrt{t}\exp(-ut)$$

et, optimisant ce dernier terme, on voit que le meilleur comportement déduit de (10) est en $\mu(f)\sqrt{\log(1/\mu(f))}$. Ce comportement est atteint pour tout $t = (\alpha \log(1/\mu(f)))^{-1}$. Nous n'avons plus qu'à fixer α pour que t soit inférieur à 1 (on peut prendre $\alpha = 2$). D'où

$$\mu(f)\sqrt{\log\frac{1}{\mu(f)}} \leqslant C'\mu\Big(\sqrt{|\nabla f|^2 + \mathcal{U}^2(f)}\Big)$$

pour une constante C' ne dépendant que de la courbure et de la constante de Sobolev logarithmique. Vue l'équivalence, en 0, $\mathcal{U}(x) \sim x\sqrt{2\log(1/x)}$, cette inégalité se résume à l'inegalité isopérimétrique (6) pour une constante c ne dépendant toujours que de $\bar{R}$ et $\bar{\rho}$. □

Remarque 2.3.2. – Il faudrait bien sûr en toute rigueur remplacer les indicatrices $\mathbb{1}_{\{\phi(s)\leqslant f(x)\}}$ considérées par des approximations $\psi_\varepsilon(\phi(s) - f(x))$ pour une famille $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0,1]$ convergeant presque sûrement vers $\mathbb{1}_{]-\infty,0]}$ et telle que $(|\psi_\varepsilon{}'|)_\varepsilon$ converge faiblement vers δ_0, la mesure de Dirac en 0. On peut l'obtenir en considérant une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,2]$ et d'intégrale 1 et en posant $\varphi_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon\varphi(x/\varepsilon)$, puis $\psi_\varepsilon(x) = 1 - \int_{-\infty}^x \varphi_\varepsilon(u)\,du$.

Preuve du Lemme 2.3.2. – Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs dans $[0,1]$. Quitte à se placer sur $M \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de la mesure gaussienne, (l'inégalité non tendue se tensorisant avec la gaussienne !) et à considérer

$$f_\varepsilon(x,u) = \left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2} f(x) + \varepsilon u,$$

on peut, comme le font remarquer Bakry et Ledoux, supposer que la loi de f est à densité strictement positive $F'(x)$, où F est la fonction de répartition de la loi de f (voir le Paragraphe 3.3 pour de plus amples détails).

Nous appliquons l'inégalité (6) aux composées de f et des translations $\psi_{\varepsilon,r} = \psi_\varepsilon \circ \tau_r$ de la fonction ψ_ε introduite précédemment. Lorsque ε tend vers 0, vu que $|\psi'_{\varepsilon,r}|$ converge faiblement vers δ_r, on obtient

$$\mathcal{U}\big(F(r)\big) \leqslant c\theta(r)F'(r) \tag{11}$$

où $\theta(r) = \mathbb{E}(\sqrt{\Gamma(f)}/f = r)$ est une version de l'espérance conditionnelle de $\sqrt{\Gamma(f)}$ sachant f. Or, il est montré dans [6] comment déduire de cette inégalité une inégalité isopérimétrique tendue. Posant $k = F^{-1} \circ \phi$, k est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R},\gamma)$ de même loi que f et l'inégalité (11) nous assure que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $k'(s) \leqslant c\,\theta(k(s))$. Appliquant à k l'inégalité isopérimétrique (1) vérifiée pour la gaussienne et se souvenant que la loi de k n'est autre que la loi de f, on en déduit que

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) \leqslant \int \sqrt{\big(\mathbb{E}(\mathcal{U}(f)/f)\big)^2 + \big(\mathbb{E}(c\sqrt{\Gamma(f)}/f)\big)^2}\,d\mu.$$

Suivant Barthe et Maurey, nous concluons grâce à l'inégalité de Minkowski pour les espérances conditionnelles

$$\sqrt{\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y)^2} \leqslant \mathbb{E}\big(\sqrt{X^2+Y^2}\big). \qquad \square$$

2.4. Hypercontractivité et isopérimétrie fonctionnelle sur un ensemble fini

La propriété de diffusion $\Gamma(\psi(f)) = (\psi'(f))^2\Gamma(f)$ utilisée précédemment n'est pas réalisée lorsque les processus étudiés ne prennent qu'un nombre discret de valeurs. C'est en particulier le cas lorsqu'on s'intéresse aux propriétés ergodiques d'une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble fini. Néanmoins, la méthode exposée dans le cas continu pour obtenir l'isopérimétrie gaussienne à partir de l'inégalité de log-Sobolev est en partie transposable au cas discret. Elle fournit une inégalité fonctionnelle du type isopérimétrique d'une forme un peu différente, généralement plus faible que l'inégalité de Bobkov mais suffisante pour engendrer une inégalité isopérimétrique ensembliste.

Soit F un ensemble fini, μ une mesure de probabilités sur F et soit $(\alpha^y)_{y\in F}$ une famille de fonctions positives sur F. Le générateur de Markov défini par

$$Lf(x) = \langle \alpha, \nabla f\rangle(x) := \sum_{y\in F} \alpha^y(x)\nabla^y f(x) \tag{12}$$

est supposé réversible par rapport à μ (cf. Paragraphe 4.1 pour de plus amples détails et une condition de réversibilité). Le carré du champ de L n'est autre que

$$2\Gamma(f)(x) = \langle \alpha, |\nabla f|^2\rangle(x) = \sum_{y\in F} \alpha^y(x)\big|f(x) - f(y)\big|^2.$$

2.4.1. Inégalité du type isopérimétrie fonctionnelle

Introduisons quelques notations. Soient f une fonction sur F, m une valeur de f et $x \in F$. Nous considérerons la quantité $\beta(f,x,m)$ définie comme suit. Si $m < f(x)$, $\beta(f,x,m)$ est la différence des racines carrées de

$$\sum_{\leqslant m} \overset{\text{déf.}}{=} 1/2 \sum_{y\in F;\, f(y)\leqslant m} \alpha^y(x) \quad \text{et de} \quad \sum_{<m} \overset{\text{déf.}}{=} 1/2 \sum_{y\in F;\, f(y)<m} \alpha^y(x).$$

Symétriquement, si $m > f(x)$, on définit

$$\beta(f,x,m) = \sqrt{\sum_{\geqslant m}} - \sqrt{\sum_{>m}}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 2.4.1. – *Soit L un générateur sur F réversible par rapport à μ de courbure $\mathcal{R}$ vérifiant une inégalité de log-Sobolev de constante ρ i.e. que, pour toute fonction f sur F,*

$$Ent_\mu(f^2) \leqslant \rho \int \Gamma(f)\, d\mu$$

alors L vérifie une inégalité isopérimétrique gaussienne de la forme

$$\mathcal{U}\Big(\int f\, d\mu\Big) \leqslant c \int \big(\mathcal{U}(f) + \Xi(f)\big)\, d\mu, \tag{13}$$

pour toute fonction f sur F à valeurs dans $[0,1]$, *où la constante c ne dépend que de $\mathcal{R}$ et ρ, et où*

$$\Xi(f)(x) = \sum_{m\in f(F)} \big|f(x) - m\big| \beta(f,x,m).$$

Remarque 2.4.1. – Rappelons que

$$Ent_\mu(f^2) = \int f^2 \log(f^2)\, d\mu - \int f^2\, d\mu \log\Big(\int f^2\, d\mu\Big).$$

Ce résultat est un résultat intermédiaire duquel découlerons dans la suite des inégalités du type isopérimétrique, l'une ensembliste, l'autre fonctionnelle.

Preuve. – On considère comme dans le cas continu le générateur produit $\bar{L}$ sur $(F\times\mathbb{R}, \mu\otimes\gamma)$ de L et d'un générateur d'Ornstein–Uhlenbeck. Comme dans le cas diffusif, $\bar{L}$ est de constante de log-Sobolev $\bar{\rho} \leqslant \max(2,\rho)$ et de courbure $\bar{R} \geqslant \min(1,R)$ (pour se convaincre que la courbure se tensorise, on peut par exemple voir [2] où il est montré que la condition Γ_2 est équivalente à l'inégalité de trou spectral pour les noyaux définis par le semi-groupe ; il est bien connu que cette inégalité se tensorise). On applique comme précédemment l'inégalité *pseudo-isopérimétrique* (3) du Théorème 2.2.1 à la fonction $g(x,s) = \mathbb{1}_{\{\phi(s)\leqslant f(x)\}}$. On a toujours $\|g\|_2^2 - \|g\|_{p(t)}^2 = \mu(f)[1-\mu(f)^{(2/p(t))-1}]$. La difficulté nouvelle réside dans le terme $\int\sqrt{\bar{\Gamma}(g)}\,d\mu\otimes\gamma$. Le point important est que la formule de la chaîne (8) n'est plus valable dans ce cadre. Les carrés du champ en s et x se comportent de manière différente. D'une part,

$$\Gamma_s(g)(x,s) = \delta_{f(x)}^2\big(\phi(s)\big)(\phi')^2(s)$$

et d'autre part

$$\Gamma_x(g)(x,s) = \frac{1}{2}\sum_{y\neq x}\alpha^y(x)\,\mathbb{1}_{]f(x)\wedge f(y),f(x)\vee f(y)]}\circ\phi(s).$$

La notation $\delta_{f(x)}^2$ est à comprendre comme le carré des dérivées ${\psi_\varepsilon}'$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ approximant $\mathbb{1}_{]-\infty,f(x)]}$ comme dans la Remarque 2.3.2. Nous resterons ici à ce niveau formel pour ne pas alourdir les notations. Nous affirmons que

$$\int\sqrt{\Gamma_s(g)+\Gamma_x(g)}\,d\gamma = \mathcal{U}\big(f(x)\big) + \Xi(f)(x). \tag{14}$$

Tout d'abord, l'intégrale du carré du champ produit n'est autre que

$$\int_0^1 \sqrt{\Gamma_{\text{cont}}(u)+\Gamma_{\text{disc}}(u)}\,du$$

pour, d'une part,

$$\Gamma_{\text{cont}}(u) \overset{\text{déf.}}{=} \delta_{f(x)}^2(u)\mathcal{U}^2(u)$$

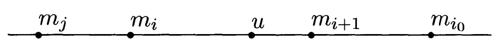
et d'autre part

$$\Gamma_{\text{disc}}(u) \overset{\text{déf.}}{=} 1/2\sum_{y\neq x}\alpha^y(x)\,\mathbb{1}_{]f(x)\wedge f(y),f(x)\vee f(y)]}(u).$$

Nous scindons alors l'intégrale suivant les intervalles formés par les différentes valeurs de f, $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$. Remarquons que $\delta_{f(x)}^2$ étant localisée en $f(x)$, $\Gamma_{\text{cont}}(u)$ n'apporte de contribution qu'au voisinage de $m_{i_0} = f(x)$. Soit $i < i_0$. Sur $[m_i, m_{i+1}[$, l'intégrale se réduit alors à

$$\int_{m_i}^{m_{i+1}} \sqrt{1/2 \sum_{j<i_0} \alpha_j \mathbb{1}_{[m_j, m_{i_0}]}(u)}\, du = (m_{i+1} - m_i) \sqrt{1/2 \sum_{j \leqslant i} \alpha_j}$$
$$\stackrel{\text{déf.}}{=} (m_{i+1} - m_i) \sqrt{\sum_{\leqslant m_i}}$$

où l'on a posé $\alpha_j = \sum_{y \in F;\, f(y) = m_j} \alpha^y(x)$. Ceci découle du fait que, si $u \in [m_i, m_{i+1}[$, alors $u \in [m_j, m_{i_0}[$ ssi $1 \leqslant j \leqslant i$.

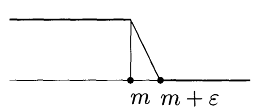


La contribution sur $]m_i, m_{i+1}]$ pour $i \geqslant i_0$ se traite de manière similaire (pour $]m_{i_0}, m_{i_0+1}]$ il faut plutôt considérer l'intervalle $]m_{i_0} + \varepsilon, m_{i_0+1}]$ et faire tendre ε vers 0).

La contribution en $f(x)$ (ou plutôt sur $[f(x), f(x) + \varepsilon]$) est différente. Il s'agit d'évaluer

$$\int_{\text{Voisinage de } f(x)} \sqrt{\delta^2_{f(x)}(u) \mathcal{U}^2(u) + \text{cte}}\, du.$$

Retranscrit pour des fonctions $\psi_\varepsilon(u)$ approximant $\mathbb{1}_{\{u \leqslant m\}}$ i.e. $\psi_\varepsilon(u) = \mathbb{1}_{\{u \leqslant m\}} + (1 - \frac{1}{\varepsilon}(u - m)) \mathbb{1}_{]m, m+\varepsilon[}(u)$,



cela donne

$$\int_m^{m+\varepsilon} \sqrt{(\psi_\varepsilon')^2(u) \mathcal{U}^2(u) + \text{cte}}\, du = \frac{1}{\varepsilon} \int_m^{m+\varepsilon} \sqrt{\mathcal{U}^2(u) + \varepsilon^2 \text{cte}}\, du$$

qui converge vers $\mathcal{U}(m)$ quand $\varepsilon \to 0$. Regroupant toutes les contributions, on obtient

$$\int \sqrt{\bar{\Gamma}(g)}\, d\mu \otimes \gamma = \mathcal{U}(f(x)) + \sum_{i<i_0} (m_{i+1} - m_i) \sqrt{\sum_{\leqslant m_i}}$$

$$+\sum_{i\geqslant i_0}(m_{i+1}-m_i)\sqrt{\sum_{\geqslant m_i}}.$$

Une intégration par partie d'Abel conduit alors à (14). On obtient finalement une inégalité de la forme

$$\mu(f)\left[1-\mu(f)^{(2/p(t))-1}\right]\leqslant C\sqrt{t}\mu\big(\mathcal{U}(f)+\Xi(f)\big).$$

L'argument développé dans la preuve du Théorème 2.3.1 pour déduire d'une inégalité de cette forme l'isopérimétrie fonctionnelle s'applique encore pour donner l'inégalité (13). □

2.4.2. Comparaison avec l'isopérimétrie gaussienne de Bobkov

Le terme $\Xi(f)$ de l'inégalité (13) fait intervenir une somme sur les différentes valeurs de la fonction. On peut, en considérant plutôt une somme sur les points de F, obtenir une inégalité comparable avec le pendant discret de l'inégalité isopérimétrique (1). C'est ce à quoi nous nous attelons maintenant.

Choisissons une numérotation des éléments de F (i.e. $F=\{x_i/i=1,\dots,q\}$) qui soit compatible avec la fonction f au sens où les $f_i:=f(x_i)$ vérifient $f_i\leqslant f_{i+1}$ (les f_i ne sont pas forcément distinctes). Notons $\alpha_i^j=\alpha^{x_j}(x_i)$. Facilement, notant

$$h(j)=\begin{cases}\sum_{1\leqslant l\leqslant j}\alpha_i^l & \text{si } 1\leqslant j<i,\\ \sum_{j+1\leqslant l\leqslant q}\alpha_i^l & \text{si } q>j\geqslant i,\end{cases}$$

et $h(0)=h(q)=0$, on voit que

$$\Xi(f)(x)=\sum_{j=1,\dots,q}|f_i-f_j|\left|\sqrt{h(j)}-\sqrt{h(j-1)}\right|.$$

Remarque 2.4.2. – Pour une indicatrice (ou pour toute fonction à deux valeurs), $\Xi(f)$ coïncide avec $\sqrt{\Gamma(f)}$ et donc l'inégalité fonctionnelle que nous avons obtenue permet de retrouver l'inégalité isopérimétrique ensembliste du Corollaire 2.2.1.

Dans l'optique de la mécanique statistique, la question qui se pose est de savoir si $\Xi(f)$ se compare à $\sqrt{\Gamma(f)}$ indépendamment du cardinal de F. On peut répondre par la négative à cette question. Cela provient de la remarque suivante. On peut tout d'abord se ramener à ne comparer ces quantités qu'en un point x_i où f atteint son maximum. Si l'on pose alors $u_k=|f_i-f_k|=f_i-f_k$ et $v_k=h(k)$, on est ramené à comparer, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \geqslant 0$ décroissante et toute suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \geqslant 0$ telle que $v_0 = 0$, les deux quantités

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right)\right)^2 \tag{15}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2(v_k - v_{k-1}), \tag{16}$$

indépendamment de n.

Tout d'abord, il n'est pas très difficile de montrer que (16) est inférieur à (15). En effet, développant le carré dans (15),

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right)\right)^2 \\
&\quad= \sum_{k=1}^{n} u_k^2\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right)^2 \\
&\qquad+ 2\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right) \sum_{1\leqslant l<k} u_l\left(\sqrt{v_l} - \sqrt{v_{l-1}}\right)
\end{aligned}$$

que l'on peut minorer aisément par

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2\left\{\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}\right) \underbrace{\sum_{1\leqslant l<k} \left(\sqrt{v_l} - \sqrt{v_{l-1}}\right)}_{=\sqrt{v_{k-1}}}\right\}$$

puisque (u_k) est décroissante. Reste alors à remarquer que, vue l'égalité $a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$, le terme entre crochets n'est autre que $v_k - v_{k-1}$.

En revanche, (15) ne peut être dominé par (16). Il suffit pour s'en assurer de considérer l'exemple $u_k = 1/k$ et $v_k = k^2$ pour lequel (15) se comporte en $(\log n)^2$ tandis que (16) est en $\log n$.

Remarquons toutefois que l'on peut contrôler (15) par (16) pour peu que les dynamiques considérées aient un nombre uniformément borné de voisins. C'est le cas en particulier des laplaciens discrets sur un réseau $\mathbb{Z}^d/n$. Cela découle aisément de l'inégalité de Cauchy–Schwarz : posant

$$\Upsilon(f)(x) = \left\langle\sqrt{\alpha}, |\nabla f|\right\rangle(x) = \sum_{y\in F} \sqrt{\alpha^y(x)}\left|f(x) - f(y)\right|,$$

on a

$$\begin{aligned}\Xi(f)(x) \leqslant \Upsilon(f)(x) &= \sum_{y \in Vois(x)} \sqrt{\alpha^y(x)}\,|f(x) - f(y)| \\ &\leqslant \sqrt{\mathbf{Card}\big(Vois(x)\big)}\,\sqrt{\Gamma(f)}(x)\end{aligned}$$

où $Vois(x) := \{y/\alpha^y(x) \neq 0\}$ est l'ensemble des voisins de x.

2.4.3. Tension de l'inégalité

L'inégalité (13) conduit à

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) \leqslant c\int \big(\mathcal{U}(f) + \Upsilon(f)\big)\,d\mu. \tag{17}$$

Afin de tendre cette inégalité, nous suivons la démarche que nous avons déjà utilisée à cette fin dans le cas des diffusions. Notre inégalité (17) induit une régularité de la variable $k = G^{-1} \circ \phi$ de même loi que f sur $(\mathbb{R}, \gamma)$ (G désigne la fonction de répartition de la loi de f et $G^{-1}(u) = \inf(t \in \mathbb{R}/G(t) \geqslant u)$ est son inverse généralisé). L'inégalité isopérimétrique pour la gaussienne appliquée à k (ou plutôt à une approximation de k) jointe à cette régularité de k donne alors l'inégalité isopérimétrique pour la loi de f :

LEMME 2.4.1. – *Soit $L = \langle \alpha, \nabla f\rangle$ un générateur de Markov sur un ensemble fini F et μ une mesure sur F telle que, pour toute fonction f sur F à valeurs dans* $[0, 1]$,

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) \leqslant c\int \big(\mathcal{U}(f) + \Upsilon(f)\big)\,d\mu,$$

où $\Upsilon(f) = \langle \sqrt{\alpha}, |\nabla f|\rangle$. Alors l'inégalité tendue (pour la même constante c) a également lieu i.e.

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) \leqslant \int \big(\mathcal{U}(f) + c\Upsilon(f)\big)\,d\mu.$$

Finalement, on obtient le

THÉORÈME 2.4.2. – *Soit L un générateur hypercontractif sur F réversible par rapport à μ de courbure $\mathcal{R}$ et de constante de log-Sobolev ρ comme dans le Théorème* 2.4.1 *alors il existe une constante $c > 0$ ne* *dépendant que de $\mathcal{R}$ et ρ telle que*

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) \leqslant \int \big(\mathcal{U}(f) + c\Upsilon(f)\big)\,d\mu, \tag{18}$$

pour toute f à valeurs dans $[0, 1]$.

Preuve du Lemme 2.4.1. – Nous aurons besoin d'un lemme combinatoire qui met en lumière le rôle générique de l'inégalité isopérimétrique pour la gaussienne.

Soient $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite croissante de réels compris entre 0 et 1 (non forcément distincts), et $(a_i)_{i=1,\dots,n-1}$ une suite croissante de réels et soit

$$h(s) = \sum_{i=1,\dots,n} f_i\,\mathbb{1}_{[a_{i-1},a_i[}(s)$$

la fonction en escalier sur $\mathbb{R}$ correspondante (on a posé $a_0 = -\infty$ et $a_n = +\infty$). On approxime h par la fonction

$$h_\varepsilon(s) = f_1 + \sum_{i=1,\dots,n-1} (f_{i+1} - f_i)\tilde{\psi}_{a_i,\varepsilon}(s)$$

où $\tilde{\psi}_{a,\varepsilon}(s) = (\frac{1}{\varepsilon}(s-a)+1)\mathbb{1}_{]a-\varepsilon,a[}(s) + \mathbb{1}_{]a,+\infty]}(s)$ approxime l'indicatrice de $[a, +\infty]$. Appliquant l'inégalité (1) à h_ε, on obtient, faisant tendre ε vers 0 :

LEMME 2.4.2. –

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}\Big(\sum_{i=1,\dots,n} f_i\big(\phi(a_i) - \phi(a_{i-1})\big)\Big)\\ &\quad\leqslant \sum_{i=1,\dots,n} \mathcal{U}(f_i)\big(\phi(a_i) - \phi(a_{i-1})\big) + \sum_{i=1,\dots,n-1} \phi'(a_i)|f_{i+1} - f_i|\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathcal{U}\Big(\int h\,d\gamma\Big) - \int \mathcal{U}(h)\,d\gamma \leqslant \sum_{i=1,\dots,n-1} \phi'(a_i)|f_{i+1} - f_i|.$$

Soit maintenant f une fonction définie sur F et soit G la fonction de répartition de sa loi. Il est bien connu que, si G^{-1} est son inverse généralisé, G^{-1} définit une variable aléatoire, sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, de même loi que f. Il vient que $k := G^{-1} \circ \phi$, définie sur $(\mathbb{R}, \gamma)$, a même loi que f. Or, si $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ désignent les valeurs de f (distinctes cette fois) rangées par ordre croissant, $p_i := \mu(f = f_i)$, $p_0 = 0$ et, pour $i = 0, \ldots, n$, $\beta_i = \sum_{k=0}^{i} p_i$, posons, pour $i \in \mathbb{R}$

$$k(s) = \sum_{i=1,\ldots,n} f_i \mathbb{1}_{]\phi^{-1}(\beta_{i-1}),\phi^{-1}(\beta_i)]}(s).$$

Appliquant le Lemme 2.4.2 à k, il vient

$$\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) - \int \mathcal{U}(f)\,d\mu \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}(\beta_i)|f_{i+1} - f_i|. \tag{19}$$

Il nous reste à exploiter l'information contenue dans l'inégalité (13). Pour ce faire, nous l'appliquons à la fonction $\psi_i \circ f$ où $\psi_i := \mathbb{1}_{]-\infty, f_i]}$.

On voit aisément que $\int \psi_i \circ f\,d\mu = \sum_{j=1}^{n} \psi_i(f_j)\mu(f = f_j) = \sum_{j \leqslant i} p_j = \beta_i$ et $\mathcal{U}(\psi_i(f)) = 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(\beta_i) &\leqslant c \int \Upsilon\big(\psi_i(f)\big)\,d\mu \\
&\leqslant c \sum_{x,y \in F} \big|\psi_i\big(f(x)\big) - \psi_i\big(f(y)\big)\big| \sqrt{\alpha^y(x)}\mu(x) \\
&\leqslant c \sum_{\substack{x \in F \\ f(x) \leqslant f_i}} \mu(x) \sum_{\substack{y \in F \\ f(y) > f_i}} \sqrt{\alpha^y(x)} \\
&\quad + c \sum_{\substack{x \in F \\ f(x) > f_i}} \mu(x) \sum_{\substack{y \in F \\ f(y) \leqslant f_i}} \sqrt{\alpha^y(x)} \\
&\leqslant c \sum_{\substack{x,y \in F \\ f(x) \leqslant f_i < f(y)}} \big(\mu(x)\sqrt{\alpha^y(x)} + \mu(y)\sqrt{\alpha^x(y)}\big).
\end{aligned}$$

Et insérant ceci dans (19),

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}\Big(\int f\,d\mu\Big) - \int \mathcal{U}(f)\,d\mu \\
&\leqslant c \sum_{i=1}^{n-1} |f_{i+1} - f_i| \sum_{\substack{x,y \in F \\ f(x) \leqslant f_i < f(y)}} \big(\mu(x)\sqrt{\alpha^y(x)} + \mu(y)\sqrt{\alpha^x(y)}\big) \\
&\leqslant c \sum_{\substack{x,y \in F \\ f(x) < f(y)}} \big(\mu(x)\sqrt{\alpha^y(x)} + \mu(y)\sqrt{\alpha^x(y)}\big) \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f(x) \leqslant f_i < f(y)}} (f_{i+1} - f_i)
\end{aligned}$$

$$\leqslant c \sum_{\substack{x,y\in F\\ f(x)<f(y)}} \big(\mu(x)\sqrt{\alpha^y(x)} + \mu(y)\sqrt{\alpha^x(y)}\big)\big(f(y) - f(x)\big)$$

$$\leqslant c \sum_{x,y\in F} \mu(x)\sqrt{\alpha^y(x)}\big|f(y) - f(x)\big| \leqslant c \int \Upsilon(f)\, d\mu,$$

ce qui termine la preuve. □

3. INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE POUR LES MODÈLES CONTINUS EN MÉCANIQUE STATISTIQUE

Dans les modèles de mécanique statistique, un état d'équilibre est obtenu comme limite faible de mesures dites *mesures de Gibbs en volume fini à conditions extérieures fixées*. Génériquement, les courbures des dynamiques associées à ces mesures sont minorées uniformément, ce qui permet de déduire du Théorème 2.3.1 le contrôle uniforme de la constante d'isopérimétrie gaussienne pour ces mesures dès que celui de la constante de log-Sobolev est assuré, ou encore d'après [24,20,15] lorsque les corrélations décroissent exponentiellement. C'est l'objet du présent paragraphe.

3.1. Contrôle de la courbure

Contrôle des constantes pour les systèmes de spins

On considère un système de spins continus sur le réseau $\mathbb{Z}^\nu$. Les spins sont décrits par une variété riemannienne compacte M et l'espace des configurations est $M^{\mathbb{Z}^\nu}$. Les interactions sont décrites par un potentiel $(\mathcal{J}_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^\nu$. Étant donnée une partie finie Λ, $\mathcal{J}_\Lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(M^\Lambda)$ considérée comme une fonction sur $M^{\mathbb{Z}^\nu}$ ne dépendant que des spins sur Λ. Sur la variété M^Λ décrivant un sous-système fini, la mesure d'équilibre de conditions extérieures ξ est

$$\mu_\Lambda^\xi(dx_\Lambda) = \big(Z_\Lambda^\xi\big)^{-1} \exp H_\Lambda^\xi(x_\Lambda) m^{\otimes\Lambda}(dx_\Lambda),$$

où m est la mesure riemannienne de M et Z_Λ^ξ est une constante de normalisation. $H_\Lambda^\xi(x_\Lambda) = \sum_{\substack{F\cap\Lambda\neq\emptyset\\ F\in\mathcal{F}}} \mathcal{J}_F(x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c})$ est l'hamiltonien associé au potentiel. Le potentiel est supposé absolument sommable i.e. que, pour tout $i \in \mathbb{Z}^\nu$,

$$\|\mathcal{J}\|_i := \sum_{\substack{A \in \mathcal{F} \\ A \ni i}} \|\mathcal{J}_A\|_\infty < \infty$$

(cf. [12] p. 29).

La dynamique de Glauber en volume fini associée est le semi-groupe de générateur $L_\Lambda = \Delta_\Lambda + \nabla\phi_\Lambda$, où $\phi_\Lambda = H_\Lambda^\xi$, de mesure réversible μ_Λ^ξ. Δ_Λ désigne l'opérateur de Laplace–Beltrami sur M^Λ. Les propriétés d'ergodicité et de vitesse de convergence de ce semi-groupe vers sa mesure d'équilibre sont décrites par une étude analytique : l'existence d'un trou spectral fournit la convergence $L^2(\mu_\Lambda^\xi)$ exponentielle, celle d'une inégalité de Sobolev logarithmique des informations plus précises sur la vitesse de convergence. Le problème fondamental auquel on est confronté pour appliquer ces résultats à l'étude des mesures de Gibbs est en un certain sens de pouvoir étendre ces inégalités au système infini. Pour ce faire, on doit contrôler les constantes intervenant dans les inégalités en volume fini Λ indépendamment de la taille de Λ.

Contrôle de la courbure pour les systèmes de spins continus

E.A. Carlen et D.W. Stroock (cf. [9]) ont fourni une condition sur le potentiel d'interaction $(\mathcal{J}_A)_{A\in\mathcal{F}}$ garantissant le contrôle positif de la courbure $\Gamma_2^{\Lambda,\xi} \geqslant \mathcal{R}_{\Lambda,\xi}\Gamma^{\Lambda,\xi}$ i.e de la plus petite valeur propre du $(0,2)$ tenseur $Ric(L_\Lambda^\xi)$ sur M^Λ. M étant compacte, celle-ci est minorée sur chaque M^Λ. La condition de Carlen et Stroock avait pour but d'obtenir un contrôle de la constante de Sobolev logarithmique via un contrôle strictement positif de la courbure. Elle contient donc certaines exigences techniques dont nous nous abstiendrons. Notre condition est quelque peu plus générale. Elle traite de la régularité d'une famille $(\phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Avant de l'énoncer, rappelons qu'une matrice $(\gamma(i,j))_{i,j\in\mathbb{Z}^\nu}$ définit naturellement un opérateur sur l'espace des fonctions à support fini sur $\mathbb{Z}^\nu$ par $(\gamma f)(i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^\nu}\gamma(i,j)f(j)$, $f\in\mathcal{C}_0$.

Condition $(\partial^2(\phi_\Lambda)l^2)$. – Il existe un opérateur borné de $l^2(\mathbb{Z}^\nu)$, $(\gamma(i,j))$, tel que, pour toute famille $(X^{(i)})_{i\in\mathbb{Z}^\nu}$ de champs de vecteurs, toute partie finie Λ de $\mathbb{Z}^\nu$ et tout couple (i,j) de sites dans $\mathbb{Z}^\nu$,

$$\sup_{x_\Lambda\in M^\Lambda} \nabla_{(i)}\nabla_{(j)}\phi_\Lambda(x_\Lambda)\big(X^{(i)},X^{(j)}\big) \leqslant \gamma(i,j)\big\|X^{(i)}\big\|\big\|X^{(j)}\big\|.$$

$\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}\phi_\Lambda$ désigne le bloc (i,j) de la hessienne de ϕ_Λ.

Sous cette condition, l'argument de Holley–Stroock s'applique et on obtient un contrôle de la courbure sous la forme du

THÉORÈME 3.1.1. – *Soient* $(\phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ *une famille de densités* $\mathcal{C}^\infty$ *satisfaisant à la condition* $(\partial^2(\phi_\Lambda)l^2)$ *et* P_t^Λ *le semi-groupe associé de générateur* $L_\Lambda = \Delta_\Lambda + \nabla\phi_\Lambda$ *et de mesure réversible* $\mu_\Lambda(dx_\Lambda) = (Z_\Lambda)^{-1}\exp\phi_\Lambda(x_\Lambda)m^{\otimes\Lambda}(dx_\Lambda)$. *Il existe un* $\mathcal{R}\in\mathbb{R}$ *tel que, pour chaque partie finie* Λ *de* $\mathbb{Z}^\nu$,

$$L_\Lambda \textit{ vérifie } CD(\mathcal{R},\infty) \quad \textit{i.e.} \quad Ric\big(M^\Lambda\big) - \nabla\nabla\phi_\Lambda \geqslant \mathcal{R}g_\Lambda.$$

$\mathcal{R}$ *ne dépend que de la norme* $\|\gamma\|_{2\to2}$ *et de la plus petite valeur propre* β *de* $Ric(M)$.

Preuve. – Considérant l'expression explicite de $\nabla\nabla\phi_\Lambda$, on est plongé dans $l^2(\mathbb{Z}^\nu)$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz permet alors de conclure :

$$\begin{aligned}\nabla\nabla\phi_\Lambda\big(X^\Lambda,X^\Lambda\big) &= \sum_{i,j\in\Lambda}\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}\,\phi_\Lambda\big(X^{(i)},X^{(j)}\big)\\ &\leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^\nu}\gamma(i,j)f(i)f(j)\end{aligned}$$

où $f\in l^2(\mathbb{Z}^\nu)$ est donnée par

$$f(i)=\begin{cases}\|X^{(i)}\| & \text{si } i\in\Lambda,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

D'où,

$$\nabla\nabla\phi_\Lambda\big(X^\Lambda,X^\Lambda\big)\leqslant\sum_{i\in\mathbb{Z}^\nu}\gamma f(i)\,f(i)=\langle\gamma f,f\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^\nu)}.$$

Par Cauchy–Schwarz,

$$\nabla\nabla\phi_\Lambda\big(X^\Lambda,X^\Lambda\big)\leqslant\|\gamma f\|_2\|f\|_2\leqslant\|\gamma\|_{2\to2}\|f\|_2^2=\|\gamma\|g_\Lambda\big(X^\Lambda,X^\Lambda\big).$$

En conséquence, $-\|\gamma\|g_\Lambda(X^\Lambda,X^\Lambda)\leqslant-\nabla\nabla\phi_\Lambda(X^\Lambda,X^\Lambda)$ et, par suite,

$$Ric\big(M^\Lambda\big)-\nabla\nabla\phi_\Lambda\geqslant\big(\beta-\|\gamma\|\big)g_\Lambda$$

où $\beta\in\mathbb{R}$ est la plus petite valeur propre de $Ric(M)$ relativement à g. □

Conditions sur le potentiel d'interaction

Les densités $(\phi_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ sont données en mécanique statistique par le potentiel par l'intermédiaire de l'hamiltonien

$$H_\Lambda^\xi(x_\Lambda)=\sum_{\substack{A\cap\Lambda\neq\emptyset\\ A\in\mathcal{F}}}\mathcal{J}_A(x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c}).$$

On peut introduire diverses conditions sur le potentiel ou sur l'hamiltonien assurant que les $\phi_\Lambda^\xi=H_\Lambda^\xi$ vérifient la condition $(\partial^2(\phi_\Lambda)l^2)$ indépendamment de ξ. La première est inspirée de [9], la seconde de [15].

Soit $(\mathcal{J}_A)_{A\in\mathbb{Z}^\nu}$ un potentiel d'interaction. On supposera dans la suite qu'il satisfait à l'une quelconque des deux conditions suivantes :

Condition (*Pot.* 1). – Pour tout couple de sites $k,l\in\mathbb{Z}^\nu$ et tous champs de vecteurs $X^{(k)}\in\chi(M^{(k)})$ *et* $X^{(l)}\in\chi(M^{(l)})$,

$$\sup_{x\in M^{\mathbb{Z}^\nu}}\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}\\ \{k,l\}\subseteq F}}\left|\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}\mathcal{J}_F(x)\big(X^{(k)},X^{(l)}\big)\right|\leqslant\gamma(k,l)\|X^{(k)}\|\|X^{(l)}\|$$

où $(\gamma(k,l))$ détermine un opérateur borné de $l^2(\mathbb{Z}^\nu)$.

Notons $\|\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}H\|_u$ la norme uniforme sur $M^{\{k,l\}}$ de la norme de Hilbert–Schmidt de la forme bilinéaire $\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}H_{\{k,l\}}$.

Condition (*Pot.* 2). – Il existe un opérateur borné de $l^2(\mathbb{Z}^\nu)$ de matrice $(\gamma(k,l))$ tel que, pour tout couple de sites $k,l\in\mathbb{Z}^\nu$,

$$\|\nabla_{(k)}\nabla_{(l)}H\|_u\leqslant\gamma(k,l).$$

Montrons brièvement que la condition (*Pot.* 2) entraîne $(\partial^2H_\Lambda^\xi l^2)$ uniformémént en $\xi\in M^{\mathbb{Z}^\nu}$.

Sous (*Pot.* 2), soient $i,j\in\mathbb{Z}^\nu$, $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}^\nu}$ une famille de champs de vecteurs et Λ une partie finie du réseau. Vu que $H_\Lambda^\xi\in\mathcal{C}_\Lambda^\infty$ ne dépend que des spins sur Λ, on peut supposer que $i,j\in\Lambda$.

Alors,

$$\begin{aligned}\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}H_\Lambda^\xi(.)&=\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}\sum_{\substack{F\cap\Lambda\neq\emptyset\\ F\in\mathcal{F}}}\mathcal{J}_F(.\,\xi_{\Lambda^c})\\&=\sum_{\substack{F\cap\Lambda\neq\emptyset\\ F\in\mathcal{F}}}\nabla_{(i)}\nabla_{(j)}\mathcal{J}_F(.\,\xi_{\Lambda^c})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{F \supseteq \{i,j\} \\ F \in \mathcal{F}}} \nabla_{(i)} \nabla_{(j)} \mathcal{J}_F(.\,\xi_{\Lambda^c}) \quad (\mathrm{car}\, \mathcal{J}_F \in \mathcal{C}_F^{\infty}).$$

Et donc,

$$\nabla_{(i)} \nabla_{(j)} H_\Lambda^\xi(.) = \nabla_{(i)} \nabla_{(j)} \sum_{\substack{F \supseteq \{i,j\} \\ F \in \mathcal{F}}} \mathcal{J}_F(.\,\xi_{\Lambda^c}) = \nabla_{(i)} \nabla_{(j)} H_{\{i,j\}}^\xi(.).$$

Finalement,

$$\nabla_{(i)} \nabla_{(j)} H_\Lambda^\xi(.) \left(\frac{X^{(i)}}{\|X^{(i)}\|}, \frac{X^{(j)}}{\|X^{(j)}\|} \right) \leqslant \|\nabla_{(i)} \nabla_{(j)} H\|_u \leqslant \gamma(i,j)$$

ce qui n'est autre que $(\partial^2 H_\Lambda^\xi l^2)$.

COROLLAIRE 3.1.1. – *Soit un potentiel d'inteaction satisfaisant l'une des conditions* (*Pot.* 1) *ou* (*Pot.* 2). *Alors il existe* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $\Lambda \in \mathcal{F}$, *toute condition extérieure* ξ,

$$Ric\big(L^{\Lambda,\xi}\big) \geqslant \mathcal{R} g_\Lambda.$$

Remarque 3.1.1. – La matrice $(\gamma(k,l))$ décrit la dépendance par rapport au site l de la variation du potentiel au site k. Il est naturel de considérer que c'est une fonction de la distance entre les spins k et l dans $\mathbb{Z}^\nu$. Lorsque $\gamma(i,j) = \gamma(i-j)$ où $\gamma \in l^1(\mathbb{Z}^\nu)$, par l'inégalité de Young pour la convolution, la matrice $(\gamma(i,j))$ définit un opérateur borné de $l^2(\mathbb{Z}^\nu)$.

3.2. Isopérimétrie gaussienne pour les systèmes de spins continus

Dans la précédente section, nous avons abouti à des conditions raisonnables sur le potentiel permettant d'affirmer que pour de nombreux modèles continus la courbure de la dynamique de Glauber est bornée inférieurement dans $\mathbb{R}$. Or, cette condition renforce le contrôle de la constante de Sobolev logarithmique dans les cas où celui-ci est assuré : d'aprés le Théorème 2.3.1, on a alors le contrôle de la constante d'isopérimétrie. C'est ce que traduit le

THÉORÈME 3.2.1. – *Soit* $(\mathcal{J}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^\nu}$ *un potentiel d'interaction sur l'espace de configuration* $M^{\mathbb{Z}^\nu}$ *où* M *est une variété riemannienne compacte, potentiel satisfaisant à l'une des conditions* (*Pot.* 1) *ou* (*Pot.* 2).

Supposons de plus qu'on ait le contrôle de la constante de Sobolev logarithmique pour les mesures $\mu_\Lambda^\xi(dx_\Lambda)$ à savoir l'existence d'un $c' > 0$ tel que, pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}$, toute condition extérieure ξ et toute $f_\Lambda \in \mathcal{C}_\Lambda^\infty$, on ait

$$Ent_{\mu_\Lambda^\xi}(f_\Lambda^2) \leqslant c' \int |\nabla f_\Lambda|^2 \, d\mu_\Lambda^\xi.$$

Alors, il existe une constante c telle que, pour tout volume fini Λ, toutes conditions extérieures ξ et toute $f_\Lambda \in \mathcal{C}_\Lambda^\infty$ à valeurs dans $[0, 1]$,

$$\mathcal{U}\left(\int f_\Lambda \, d\mu_\Lambda^\xi\right) \leqslant \int \sqrt{\mathcal{U}^2(f_\Lambda) + c^2 |\nabla f_\Lambda|^2} \, d\mu_\Lambda^\xi.$$

On a identifié les mesures μ_Λ^ξ sur M^Λ et $\mu_\Lambda^\xi \otimes \delta_{\xi_{\Lambda^c}}$ sur $M^{\mathbb{Z}^\nu}$. On rappelle que

$$Ent_{\mu_\Lambda^\xi}(f^2) := \int f_\Lambda^2 \log f_\Lambda^2 \, d\mu_\Lambda^\xi - \int f_\Lambda^2 \, d\mu_\Lambda^\xi \log\left(\int f_\Lambda^2 \, d\mu_\Lambda^\xi\right).$$

Preuve. – Sous l'une des deux conditions (*Pot.* 1) ou (*Pot.* 2), la famille $(H_\Lambda^\xi)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ des hamiltoniens vérifie $(\partial^2 H_\Lambda^\xi l^2)$ et le semi-groupe associé, qui n'est autre que la dynamique de Glauber, satisfait donc à une inégalité $CD(\mathcal{R}, \infty)$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ ne dépendant ni de Λ ni de ξ. Le Théorème 2.3.1 s'applique donc à chaque L_Λ^ξ avec les mêmes constantes. □

Ce résultat étend les travaux de E. Laroche (cf. [15]) sur les modèles continus : il était déjà connu que pour les modèles de portée infinie à décroissance exponentielle des variations secondes de l'hamiltonien, *le contrôle du trou dans le spectre, la condition de mélange de Dobrushin–Schlosman et le contrôle de la constante de Sobolev-logarithmique sont tous équivalents*. La condition (*Pot.* 2) étant assurée dans ces modèles, on peut affirmer que *le contrôle de la constante d'isopérimétrie est encore équivalent à l'une quelconque de ces propriétés*.

3.3. Déviations du spin moyen par rapport à sa moyenne et à une médiane

Modèle d'Ising et convergence exponentielle du spin moyen

La convergence exponentielle du spin moyen vers sa moyenne dans la région d'unicité de la phase pour le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^\nu$ est étudiée en détail par R. Ellis (cf. [11]). Nous donnons ici un bref aperçu des résultats qui y sont présentés. Désignons par $\frac{S_\Lambda}{|\Lambda|} = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in\Lambda} x_k$ le spin moyen sur la boîte $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ ($x_k \in \{-1; 1\}$). Dans la région d'unicité de la phase (i.e. pour un champ extérieur $h \neq 0$ ou, pour $h = 0$, quand l'inverse de la température est inférieur à sa valeur critique $0 < \beta < \beta_c$), nous noterons $\mu_{\beta,h}$ la mesure de Gibbs en volume infini. $\mu_{\beta,h}$ est l'unique limite faible quand Λ tend vers $\mathbb{Z}^\nu$ des mesures de Gibbs en volume fini $\mu_{\Lambda,\beta,h,\xi}(dx_\Lambda) = (Z^\xi_{\Lambda,\beta,h})^{-1} \exp(-\beta H^\xi_{\Lambda,h}(x_\Lambda))\, dx_\Lambda$ pour l'hamiltonien

$$H^\xi_{\Lambda,h}(x_\Lambda) = -\sum_{i,j\in\Lambda} J(i-j)x_i x_j - \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ j\in\Lambda^c}} J(i-j)x_i\xi_j - h\sum_{i\in\Lambda} x_i.$$

h est le champ extérieur agissant sur les spins et ξ est la condition extérieure i.e. les spins hors de Λ interagissant avec la configuration x_Λ. Le terme hors interaction de l'hamiltonien est le produit de h par la magnétisation totale sur Λ. Cette forme très particulière de l'hamiltonien lie la transition de phase sur les mesures à un autre phénomène critique, la magnétisation spontanée i.e. l'existence d'une discontinuité en $h = 0$ de la magnétisation spécifique

$$m(\beta, h) = \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^\nu} \int \frac{S_\Lambda}{|\Lambda|} \mu_{\Lambda,\beta,h,\xi}(dx_\Lambda),$$

(indépendante de la configuration extérieure ξ). Comme la mesure de Gibbs en volume infini est invariante par translation et ergodique, il vient

$$m(\beta, h) = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^\nu}} x_0\, \mu_{\beta,h}(dx).$$

Pour $h \neq 0$ ou $h = 0$ et $\beta < \beta_c$, cette magnétisation n'est autre que

$$m(\beta, h) = -\frac{\partial\Psi}{\partial h}(\beta, h)$$

où $\Psi(\beta, h) = \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^\nu} \frac{1}{|\Lambda|}\Psi(\Lambda, \beta, h, \xi)$ est l'énergie libre spécifique, l'énergie libre sur Λ étant donnée par

$$\Psi(\Lambda, \beta, h, \xi) = -\beta^{-1} \log Z^\xi_{\Lambda,\beta,h}.$$

Pour $\beta > \beta_c$, la différentiabilité de Ψ en $h = 0$ est rompue et

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial h}(\beta, 0_+) = m(\beta, 0_+) > m(\beta, 0) = 0 > -\frac{\partial\Psi}{\partial h}(\beta, 0_-) = m(\beta, 0_-).$$

L'énergie libre est encore la bonne quantité thermodynamique à considérer lorsqu'on s'intéresse aux propriétés de grandes déviations de la loi du spin moyen $S_\Lambda/|\Lambda|$ sous $\mu_{\beta,h}$. L'énergie libre des lois de $S_\Lambda/|\Lambda|$, i.e. la limite des log-Laplace spécifiques de S_Λ, à savoir $c_{\beta,h}(t) := \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^\nu} \frac{1}{|\Lambda|}\log(\int \exp(tS_\Lambda)\,d\mu_{\beta,h})$ n'est autre que

$$c_{\beta,h}(t) = \beta\big(\Psi(\beta, h + t/\beta) - \Psi(\beta, h)\big)$$

qui est différentiable en 0 dans la région d'unicité de la phase. Cela conduit à un principe de grandes déviations de fonction de taux

$$I_{\beta,h}(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\big(tz - c_{\beta,h}(t)\big)$$

et, par conséquent, à la convergence exponentielle du spin moyen sous $\mu_{\beta,h}$ vers $m(\beta,h)$. Cette convergence signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A = A(\varepsilon) > 0$ telle que, pour toute boîte Λ de cardinal assez grand, on ait

$$\mu_{\beta,h}\big(|S_\Lambda/|\Lambda| - m(\beta,h)| > \varepsilon\big) \leqslant \mathrm{e}^{-A|\Lambda|}. \tag{20}$$

La détermination de la meilleure constante A_∞ pour laquelle (20) est vérifiée pour toute $A < A_\infty$ est assurée par le principe de grandes déviations. La connaissance de cette vitesse optimale de convergence exponentielle est théoriquement donnée par celle de $\Psi(\beta,h)$:

$$A_\infty = \inf_{\{|z-m(\beta,h)|\geqslant\varepsilon\}} I_{\beta,h}(z).$$

Concentration de la mesure

Les inégalités de concentration de la mesure dérivées des inégalités de Sobolev logarithmique d'une part et de l'isopérimétrie gaussienne d'autre part donnent des résultats similaires de déviations par rapport à la moyenne et à la médiane. Les vitesses de convergence exponentielle obtenues, bien que non optimales en général, sont maintenant exprimées explicitement à l'aide des constantes de log-Sobolev et d'isopérimétrie. La convergence exponentielle y est de plus valable pour tout $|\Lambda|$ ce qui supprime l'inconvénient du caractère asymptotique de (20). Mais ces résultats s'expriment en volume fini la moyenne considérée dépendant de la boîte considérée et ne comportent donc pas en eux-mêmes de propriétés *ergodiques* de la loi du spin moyen.

L'argument par lequel une inégalité de concentration se déduit de l'inégalité de log-Sobolev est dû à Herbst. Il consiste en fait à obtenir une majoration quadratique du logarithme de la transformée de Laplace. Ce qui conduit à

$$\mu\left(\left|f-\int f\,d\mu\right|\geqslant r\right)\leqslant 2\exp(-r^2/(C\kappa)) \tag{21}$$

où C désigne la constante de log-Sobolev et f est une fonction κ lipschitzienne. Remarquons que ceci ne prend de réelle signification que pour r grand. Voir [16,18] pour plus de détails.

Supposons maintenant satisfaite l'isopérimétrie gaussienne fonctionnelle (5). Rappelons qu'alors ([4], Thm. 3.2.) la loi ν d'une Γ-contraction f est l'image par une contraction k de la gaussienne γ (i.e. $\nu=k[\gamma]$). On peut en déduire une inégalité de concentration par des arguments fonctionnels de la manière suivante.

Un cas simple est celui où la loi ν de f est à densité strictement positive. Dans ce cas, la fonction de répartition F_ν de ν est inversible et, par un procédé classique, la loi image $F_\nu[\nu]$ est la mesure de Lebesgue sur [0, 1]. Comme on a de même $\phi[\gamma]=\lambda_{|[0,1]}$, on voit facilement que $\nu=k[\gamma]$ où $k=F_\nu^{-1}\circ\phi$.

L'inégalité isopérimétrique gaussienne fonctionnelle implique alors que, si $\Gamma(f)\leqslant\kappa$, $\|k\|_{Lip}\leqslant c\sqrt{\kappa}$ où c est la constante d'isopérimétrie (cf. [4]). Remarquons que l'unique médiane de f n'est autre que $m=k(0)$. Il vient, notant $u_r^+=k^{-1}(m+r)$ et $u_r^-=k^{-1}(m-r)$,

$$\mu(|f-m|\geqslant r)=\nu(|x-m|\geqslant r)=\gamma(]-\infty,u_r^-])+\gamma([u_r^+,+\infty[).$$

Et, comme $\|k\|_{Lip}\leqslant c\sqrt{\kappa}$ et $k(0)=m$, $u_r^+\geqslant\frac{r}{c\sqrt{\kappa}}$ et $u_r^-\leqslant-\frac{r}{c\sqrt{\kappa}}$. Par suite,

$$\mu(|f-m|\geqslant r)\leqslant 2\left(1-\phi\left(\frac{r}{c\sqrt{\kappa}}\right)\right)\leqslant\frac{2c\sqrt{\kappa}}{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2c^2\kappa}},$$

puisque $\gamma([r,+\infty[)\leqslant\frac{1}{r}\int_r^\infty x\gamma(dx)\leqslant\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-r^2/2}$. Finalement,

$$\mu(|f-m|\geqslant r)\leqslant\frac{2c\sqrt{\kappa}}{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2c^2\kappa}}. \tag{22}$$

Nous ne supposons plus maintenant la loi de f absolument continue. L'inégalité isopérimétrique gaussienne fonctionnelle étant stable par tensorisation, on l'obtient sur $(E\times\mathbb{R},\mu\otimes\gamma)$ pour la constante $\tilde{c}=\max(c,1)$. On applique ce qui vient d'être fait pour les lois ν_ε de $f_\varepsilon(x,u)=(1-\varepsilon^2)^{1/2}f(x)+\kappa\,\varepsilon u$. $(\nu_\varepsilon)_\varepsilon$ converge faiblement vers ν. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient une $c\sqrt{\kappa}$-contraction k_ε telle que $\nu_\varepsilon = k_\varepsilon[\gamma]$. Vu que $\|k'_\varepsilon\| \leqslant c\sqrt{\kappa}$ p.s., k'_ε est dans la boule de $L^2(dx)$ de rayon $c\sqrt{\kappa}$ qui est faiblement compacte. Il existe donc une sous-suite $k'_{1/\tilde{n}}$ convergeant faiblement vers g telle que $\|g\|_2 \leqslant c\sqrt{\kappa}$. De plus, les médianes m_ε de ν_ε étant toutes dans un même compact de $\mathbb{R}$, on peut également en extraire une sous-suite convergeante, disons vers m. m est alors une médiane de ν. Posant

$$k(x) = m + \int_{[0,x]} g(u)\,du,$$

on voit que k est une $c\sqrt{\kappa}$-contraction, que $\nu = k[\gamma]$ et que $k(0) = m$. C'est tout ce dont nous avons besoin pour obtenir (22).

En outre, on peut déduire de la concentration par rapport à une médiane (22) des constantes explicites pour la concentration par rapport à la moyenne.

Application au spin moyen

On considère maintenant un système de spins continus comme introduit dans la section 3.1. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur M de carré du champ borné, i.e. telle que $|\nabla f|$ soit borné, disons par 1. On considère le spin moyen associé $\frac{1}{|\Lambda|} S_\Lambda(x_\Lambda)$, où $S_\Lambda(x_\Lambda) = \sum_{k\in\Lambda} f(x_k)$. Un calcul facile montre que

$$\Gamma_\Lambda\left(\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in\Lambda} f(x_k)\right) = \frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{k\in\Lambda}\Gamma(f)(x_k) \leqslant \frac{1}{|\Lambda|}.$$

L'équation (22) montre alors que, si c désigne la constante d'isopérimétrie gaussienne,

$$\mu_\Lambda^\xi\left(\left|\frac{S_\Lambda}{|\Lambda|} - m_{\Lambda,\xi}\right| \geqslant r\right) \leqslant \frac{2c}{r\sqrt{|\Lambda|}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2|\Lambda|}{2c^2}}$$

pour une médiane $m_{\Lambda,\xi}$ de $S_\Lambda/|\Lambda|$. Et d'autre part, suivant (21), si C désigne la constante de log-Sobolev,

$$\mu_\Lambda^\xi\left(\left|\frac{S_\Lambda}{|\Lambda|} - \bar{m}_{\Lambda,\xi}\right| \geqslant r\right) \leqslant 2\exp(-r^2|\Lambda|/C)$$

où $\bar{m}_{\Lambda,\xi}$ est la moyenne de $S_\Lambda/|\Lambda|$ sous μ_Λ^ξ.

4. SPINS DISCRETS ET ISOPÉRIMÉTRIE

4.1. Cadre général et définitions

Les générateurs

Soit F un ensemble fini de cardinal $|F| = q$. Un générateur de Markov L sur F est totalement déterminé par une matrice $(L_{ab})_{a,b\in F}$: $Lf(a) = \sum_{b\in F} L_{ab}\, f(b)$ où, pour tout $b \neq a$, $L_{ab} \geqslant 0$ et $\sum_{b\in F} L_{ab} = 0$. On dira dans la suite que deux points a et b sont *voisins* si $L_{ab} > 0$. Tout générateur peut être décrit de manière équivalente à l'aide du gradient discret de la façon suivante.

Toute famille $\alpha = (\alpha^b(.))_{b\in F}$ de fonctions positives sur F détermine un générateur

$$L^\alpha f(a) = \langle \alpha, \nabla f\rangle_{\mathbb{R}^q}(a) = \sum_{b\in F} \alpha^b(a)\nabla^b f(a)$$

où le gradient discret est donné par le vecteur de $\mathbb{R}^q$

$$\nabla f(a) = \left(\nabla^b f(a)\right)_{b\in F} \quad \text{avec } \nabla^b f(a) = f(b) - f(a).$$

On a ainsi une correspondance univoque entre les classes de familles α, modulo coïncidence des $\alpha^a(.)$ sauf éventuellement en a, et les générateurs sur F. Il suffit de fixer

$$\alpha^b(a) = \begin{cases} L_{ab} & \text{si } b \neq a, \\ \text{n'importe quoi} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le générateur L^α s'obtient à partir d'un noyau $K(.,.)$, (i.e. $L = K - Id$) si, pour tout $a \in F$, $\sum_{b\neq a} \alpha^b(a) \leqslant 1$. Dans ce cas, $K(a,b) = \alpha^b(a)$ si $b \neq a$.

Remarque 4.1.1. – La condition générale pour que L soit réversible pour une mesure μ chargeant tous les points (i.e. $d\mu = \exp H\, dm$ où m est la mesure uniforme) est la relation de commutation

$$\forall a, b \in F, \quad \alpha^b(a) = \exp \nabla^b H(a)\alpha^a(b).$$

Dans le cas où F est à deux éléments, $\langle \alpha, \nabla.\rangle = \beta \,.\, \bar{\nabla}$ avec $\bar{\nabla} f(.) = \nabla^{\tau(.)} f(.) = f \circ \tau - f$ et $\beta = \alpha^{\tau(.)}(.)$, τ échangeant les deux éléments. La condition se résume alors à

$$\beta = \beta \circ \tau \exp \bar{\nabla} H$$

ce qui, compte tenu que, ici, $\beta + \beta \circ \tau$ est constant, n'est autre que $\beta = c \exp \frac{\bar{\nabla} H}{2}$ (cf. [5]).

Construction sur un produit fini

Les processus sur les produits finis F^Λ, $\Lambda \in \mathcal{F}$, sur lesquels nous porterons notre attention sont construits en considérant deux configurations $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ sur F^Λ comme voisines si elles ne diffèrent qu'en un site. Le processus dans l'état $\boldsymbol{i}$ ne peut atteindre l'état $\boldsymbol{j}$ que si $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{j}$ sont voisins, le noyau de transition étant alors donné par un noyau sur F au site où les configurations diffèrent. Explicitememt, ce semi-groupe admet pour générateur $L_\Lambda f = \sum_{k \in \Lambda} \bar{L}_k f$, avec $\bar{L}_k f(x) = L_k[f(x._k(.))](x_k)$, où L_k est un générateur sur F et où la configuration $x._k b$ est égale à x sauf au site k où elle prend la valeur b.

L_Λ ainsi obtenu sera dit *produit* des L_k.

Pour que ce semi-groupe soit réversible pour $m^{\otimes\Lambda}$, il suffit que, sur la fibre, les L_k soient réversibles pour m. Si chaque L_k s'obtient à partir du même noyau $K(.,.)$, cela revient à la condition $K(x,y)m(x) = K(y,x)m(y)$ ou encore, si m est la mesure uniforme, à la symétrie de K.

Etablissons à ce stade des notations utiles pour l'étude des générateurs précédents. Etant donnée une configuration x, nous noterons tout d'abord $\tau_k^b(x)$ la configuration $x._k b$. Si, sur chaque $k \in \Lambda$, est donné un générateur L_k associé à la famille α_k de fonctions sur F, le produit L sur F^Λ des L_k s'écrit

$$Lf = \sum_{(k,b) \in \Lambda \times F} \alpha_k^b \nabla_k^b f = \sum_{k \in \Lambda} \langle \alpha_k, \nabla_k f \rangle_k$$

où $\nabla_k^b f := f \circ \tau_k^b - f$ et $\langle \alpha_k, \nabla_k f \rangle_k(x) := \sum_{b \in F} \alpha_k^b(x_k) \nabla_k^b f(x)$.

En fait, les processus auxquels nous aurons affaire sont un peu plus généraux. Nous les appellerons des *quasi-produits*. Ils sont construits de la même manière mais avec un semi-groupe sur F au site k pouvant dépendre de la configuration hors de k i.e.

$$L_k f(x) = L_k^{x_{\Lambda - \{k\}}} \left[f\left(x._k(.)\right) \right](x_k).$$

L s'écrit comme précédemment $Lf = \sum_{k \in \Lambda} \langle \alpha_k, \nabla_k f \rangle_k$, α_k étant maintenant une famille $(\alpha_k^b(.))_{b \in F}$ de fonctions sur F^Λ.

4.2. Contrôle de la courbure pour les systèmes discrets

Rappelons deux propriétés du gradient discret qui le distinguent du gradient usuel. Tout d'abord, la formule de Leibnitz discrète,

$$\nabla_k(fg) = \nabla_k f \,.\, g + \nabla_k g \,.\, f + \nabla_k f \,.\, \nabla_k g \tag{23}$$
$$= \nabla_k f \,.\, g + f \circ \tau_k \,.\, \nabla_k g. \tag{24}$$

Enfin, la dérivation de la fonction exponentielle,

$$\mathrm{e}^{-H}\nabla_k(\mathrm{e}^H) = \mathrm{e}^{(\nabla_k H)} - 1. \tag{25}$$

Ces égalités sont bien sûr entendues dans $\mathbb{R}^F$.

Opérateur Γ_2 d'un générateur quasi-produit

De par la forme de L ($L = \sum_{k\in\Lambda}\langle\alpha_k, \nabla_k.\rangle$) et la définition de Γ, la formule de Leibnitz pour le gradient discret assure que

$$2\Gamma(f,g) = \sum_{k\in\Lambda}\langle\alpha_k, \nabla_k f \,.\, \nabla_k g\rangle_k$$

où $(\nabla_k f \,.\, \nabla_k g)^b := \nabla_k^b f \,.\, \nabla_k^b g$.

Rappelons qu'on note, pour deux vecteurs $X_k = (X_k^b)_{b\in F}$ et Y_k de $\mathbb{R}^q$ au site k, $\langle X_k, Y_k\rangle_k = \sum_{b\in F} X_k^b Y_k^b$. Ce produit scalaire jouera dans les calculs, en parallèle avec le cas continu, le rôle de la métrique riemannienne au site k.

Alors,

$$\begin{aligned}4\Gamma_2(f,f) &= L\big(2\Gamma(f,f)\big) - 2\big(2\Gamma(f,Lf)\big)\\ &= \sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_k, \nabla_k\big\langle\alpha_l, (\nabla_l f)^2\big\rangle_l\big\rangle_k\\ &\quad - 2\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_l, \nabla_l f \,.\, \nabla_l\langle\alpha_k, \nabla_k f\rangle_k\big\rangle_l.\end{aligned}$$

Appliquant la formule de Leibnitz, on obtient, par linéarité,

$$\nabla_k\big(\langle\alpha_l, \beta_l\rangle_l\big) = \langle\nabla_k\alpha_l, \beta_l\rangle_l + \langle\alpha_l\circ\tau_k, \nabla_k\beta_l\rangle_l$$

et, en outre,

$$\nabla_k\big[(\nabla_l f)^2\big] = 2\nabla_l f \,.\, \nabla_k\nabla_l f + (\nabla_k\nabla_l f)^2.$$

D'où,

$$\begin{aligned}4\Gamma_2(f,f) = {}&\sum_{k\in\Lambda}\big\langle L\alpha_k, (\nabla_k f)^2\big\rangle_k + \sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_k, \big\langle\alpha_l\circ\tau_k, (\nabla_k\nabla_l f)^2\big\rangle_l\big\rangle_k\\ &+ 2\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_k, \langle\alpha_l\circ\tau_k, \nabla_l f \,.\, \nabla_k\nabla_l f\rangle_l\big\rangle_k\end{aligned}$$

$$-2\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle \alpha_l,\nabla_l f\,.\,\langle\alpha_k\circ\tau_l,\nabla_l\nabla_k f\rangle_k\big\rangle_l$$
$$-2\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle \alpha_l,\nabla_l f\,.\,\langle\nabla_l\alpha_k,\nabla_k f\rangle_k\big\rangle_l.$$

Remarque 4.2.1. – La relation de commutation du gradient $\nabla_k^b\nabla_l^c f = \nabla_l^c\nabla_k^b f$ est fausse en toute généralité dans le cas discret. En effet, $\nabla_k^b\nabla_k^c f = -\nabla_k^b f$ diffère en général de $\nabla_l^c\nabla_k^b f$ si $b\neq c$.

Contrôle de la courbure

Afin de majorer, à une constante près indépendante de Λ, le module de la forme quadratique Γ_2^Λ par Γ^Λ, nous allons procéder en plusieurs étapes. Tout d'abord, comparer les deux formes $\sum_{k\in\Lambda}\langle L\alpha_k,(\nabla_k f)^2\rangle_k$ et $\sum_{k,l\in\Lambda}\langle\alpha_l,\nabla_l f\,.\,\langle\nabla_l\alpha_k,\nabla_k f\rangle_k\rangle_l$ avec $\Gamma^\Lambda(f,f)$. Ceci ne présente pas de difficultés particulières et impose simplement de pouvoir contrôler α_k uniformément et $\nabla_l\alpha_k$ par une fonction l^1 de la distance de k à l. L'étape suivante consiste à regrouper les autres membres de Γ_2^Λ à l'aide de la méthode de Gauss de réduction en somme de carrés. Cela nous permettra de conclure sous les mêmes conditions de contrôle.

En premier lieu, nous supposerons les α_k^Λ bornés uniformément indépendamment de Λ :

Condition $((\alpha^\Lambda)Unif.)$. – Il existe $R>0$ tel que, pour toute $\Lambda\in\mathcal{F}$, tout $b\in F$, tout $k\in\Lambda$ et tout $x\in F^\Lambda$,

$$\big|(\alpha^\Lambda)_k^b(x)\big|\leqslant R.$$

On se ramène ainsi à comparer les formes quadratiques avec la forme

$$\sum_{k\in\Lambda}\big\langle 1,(\nabla_k f)^2\big\rangle_k.$$

Pour ce faire, nous supposerons qu'il existe une fonction $\gamma\in l^1(\mathbb{Z}^\nu)$ telle que la condition suivante soit satisfaite

Condition $(\partial^1(\alpha^\Lambda)l^1)$. – Pour toute $\Lambda\in\mathcal{F}$, tous $b,c\in F$, tout $x\in F^\Lambda$, et tous $l,k\in\mathbb{Z}^\nu$,

$$\big|\nabla_l^c\big[(\alpha^\Lambda)_k^b\big](x)\big|\leqslant\gamma(l-k).$$

Nous aborderons plus loin la version potentiel de cette condition.

PROPOSITION 4.2.1. – *Pour toute famille de fonctions $(\alpha^\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ satisfaisant aux conditions $((\alpha^\Lambda)Unif.)$ et $(\partial^1(\alpha^\Lambda)l^1)$, les courbures des* *générateurs induits L^{α^Λ} sont minorées dans $\mathbb{R}$ indépendamment de Λ i.e.*

$$\exists \mathcal{R} \in \mathbb{R},\ \forall \Lambda \in \mathcal{F}, \quad \Gamma_2^{\alpha_\Lambda} \geqslant \mathcal{R}\Gamma^{\alpha_\Lambda}.$$

Preuve. – En ce qui concerne $|\sum_{k\in\Lambda}\langle L\alpha_k, (\nabla_k f)^2\rangle_k|$, il suffit de vérifier que $L\alpha_k$ est borné uniformément. On obtient, en omettant les indices Λ pour les α_k,

$$\begin{aligned}|L\alpha_k| = \left|\sum_{l\in\Lambda}\langle\alpha_l, \nabla_l\alpha_k\rangle_l\right| &\leqslant \sum_{l\in\Lambda}\big\langle|\alpha_l|, |\nabla_l\alpha_k|\big\rangle_l \\ &\leqslant R\sum_{l\in\Lambda}\gamma(l-k)\langle 1,1\rangle_l \leqslant R|F|\|\gamma\|_{l^1(\mathbb{Z}^\nu)}.\end{aligned}$$

Etudions maintenant le cas de la seconde forme quadratique. Le problème revient à trouver une constante C telle que, pour toute Λ et toute famille $(Y_k)_{k\in\Lambda}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^q$,

$$\left|\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_l, Y_l\,.\,\langle\nabla_l\alpha_k, Y_k\rangle_k\big\rangle_l\right| \leqslant C\sum_{k\in\Lambda}\big\langle 1, (Y_k)^2\big\rangle_k.$$

Or,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_l, Y_l\,.\,\langle\nabla_l\alpha_k, Y_k\rangle_k\big\rangle_l\right| \\ &\quad\leqslant \sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle|\alpha_l|, |Y_l|\,.\,\langle|\nabla_l\alpha_k|, |Y_k|\rangle_k\big\rangle_l \\ &\quad\leqslant R\sum_{k,l\in\Lambda}\gamma(k-l)\big\langle 1, |Y_l|\,.\,\langle 1, |Y_k|\rangle_k\big\rangle_l \\ &\quad\leqslant R\sum_{k,l\in\Lambda}\gamma(k-l)\big\langle 1, |Y_l|\rangle_l\,.\,\langle 1, |Y_k|\big\rangle_k \\ &\quad\leqslant R\big\langle\gamma * \langle 1, |Y_.|\rangle, \langle 1, |Y_.|\rangle\big\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^\nu)} \leqslant R\,\|\gamma\|_1\big\|\langle 1, |Y_.|\rangle\big\|_{l^2(\Lambda)}^2.\end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $\|\langle 1, |Y_.|\rangle\|_{l^2(\Lambda)}^2 = \sum_{k\in\Lambda}\langle 1, |Y_k|\rangle_k^2$ et que, par Cauchy–Schwarz, $\langle 1, |Y_k|\rangle_k^2 \leqslant |F|\langle 1, |Y_k|^2\rangle_k$.

Penchons nous sur les derniers termes à contrôler à savoir

$$\begin{aligned}&\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_k, \big\langle\alpha_l\circ\tau_k, (\nabla_k\nabla_l f)^2\big\rangle_l\big\rangle_k \\ &\qquad + 2\sum_{k,l\in\Lambda}\big\langle\alpha_k, \langle\alpha_l\circ\tau_k, \nabla_l f\,.\,\nabla_k\nabla_l f\rangle_l\big\rangle_k\end{aligned}$$

$$-2\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_l,\nabla_l f\,.\,\langle\alpha_k\circ\tau_l,\nabla_l\nabla_k f\rangle_k\right\rangle_l.$$

Pour des raisons techniques, nous isolons les termes diagonaux correspondants. On a vu que $\nabla_k^b\nabla_k^c f=-\nabla_k^b f$. En conséquence, ces termes se réduisent à

$$\sum_{k=\bar{k}}\left\langle\alpha_k,\left\langle\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k,(\nabla_k f)^2\right\rangle_{\bar{k}}\right\rangle_k-2\sum_{k=\bar{k}}\left\langle\alpha_k,\langle\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k,\nabla_{\bar{k}}f\,.\,\nabla_k f\rangle_{\bar{k}}\right\rangle_k$$

$$+2\sum_{k=\bar{k}}\left\langle\alpha_{\bar{k}},\nabla_{\bar{k}}f\,.\,\langle\alpha_k\circ\tau_{\bar{k}},\nabla_{\bar{k}}f\rangle_k\right\rangle_{\bar{k}}$$

$$=3\sum_{k=\bar{k}}\left\langle\alpha_k,(\nabla_k f)^2\,\langle\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k,1\rangle_{\bar{k}}\right\rangle_k-2\sum_{k=\bar{k}}\left\langle\alpha_k,\langle\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k,\nabla_{\bar{k}}f\rangle_{\bar{k}}\,.\,\nabla_k f\right\rangle_k.$$

Le module du premier terme se majore aisément par $R^2|F|\sum_{k\in\Lambda}\langle 1,(\nabla_k f)^2\rangle_k$ grâce à $((\alpha^\Lambda)Unif.)$. Quant au second, il suffit de voir que

$$\left|\left\langle\alpha_k,\langle\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k,\nabla_{\bar{k}}f\rangle_{\bar{k}}\,.\,\nabla_k f\right\rangle_k\right|$$

$$\leqslant\left\langle|\alpha_k|,\left\langle|\alpha_{\bar{k}}\circ\tau_k|,|\nabla_{\bar{k}}f|\right\rangle_{\bar{k}}\,.\,|\nabla_k f|\right\rangle_k$$

$$\leqslant R^2\left\langle 1,|\nabla_{\bar{k}}f|\right\rangle_{\bar{k}}\left\langle 1,|\nabla_k f|\right\rangle_k\leqslant R^2\left\langle 1,|\nabla_k f|\right\rangle_k^2\leqslant R^2|F|\left\langle 1,|\nabla_k f|^2\right\rangle_k.$$

Pour traiter les termes non diagonaux, on peut omettre les fonctions f et se ramener à des vecteurs X_{kl} symétriques et Y_l. Fixant x, on peut en effet déterminer une f telle que, pour tout $k\in\Lambda$, $\nabla_k f(x)=Y_k$ et, pour tout $k\neq l$, $\nabla_k\nabla_l f(x)=\nabla_l\nabla_k f(x)=X_{kl}$ i.e. une f dont les valeurs sont fixées sur les configurations différant de x en un ou deux sites. On supposera par commodité les X_{kl} définis pour chaque couple (k,l), imposant qu'ils s'annulent sur la diagonale.

Il vient,

$$\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_k,\left\langle\alpha_l\circ\tau_k,\,1/2\,(X_{kl})^2\right\rangle_l\right\rangle_k+2\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_k,\langle\alpha_l\circ\tau_k,Y_l\,.\,X_{kl}\rangle_l\right\rangle_k$$

$$=\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_k,\left\langle\alpha_l\circ\tau_k,1/2(X_{kl})^2+2Y_l\,.\,X_{kl}\right\rangle_l\right\rangle_k$$

$$=\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_k,\left\langle\alpha_l\circ\tau_k,(1/\sqrt{2}X_{kl}+\sqrt{2}Y_l)^2-2Y_l^2\right\rangle_l\right\rangle_k$$

$$\geqslant-2\sum_{k,l\in\Lambda}\left\langle\alpha_k,\left\langle\alpha_l\circ\tau_k,Y_l^2\right\rangle_l\right\rangle_k.$$

Il s'agit donc de majorer le module de cette dernière forme par

$$C\sum_{k\in\Lambda}\left\langle 1,(\nabla_k f)^2\right\rangle_k$$

ce qui est évident compte tenu de l'hypothèse $((\alpha^{\Lambda})Unif.)$

Enfin,

$$\sum_{k,l\in\Lambda}\langle\alpha_k,\langle\alpha_l\circ\tau_k,1/2(X_{kl})^2\rangle_l\rangle_k=\sum_{k,l\in\Lambda}\langle\alpha_l,\langle\alpha_k\circ\tau_l,1/2(X_{kl})^2\rangle_k\rangle_l$$

par symétrie de X_{kl}. Et le terme restant se traite de façon similaire. □

4.3. Dynamiques discrètes en mécanique statistique

Nous avons vu précédemment des conditions suffisantes pour que la courbure des quasi-produits $L^{\Lambda}=\sum_{k\in\Lambda}\langle\alpha_k,\nabla_k f\rangle_k$ soit minorée indépendamment de Λ. Nous considérons maintenant des quasi-produits particuliers utilisés en mécanique statistique et construits à l'aide du potentiel pour qu'ils soient réversibles par rapport à la mesure de Gibbs en volume fini. Nous donnons ensuite des conditions sur le potentiel d'interactions pour que ces quasi-produits aient une courbure minorée (dans $\mathbb{R}$).

La dynamique de Glauber

Il s'agit de la dynamique $Lf=\sum_{k\in\Lambda}\langle\alpha_k,\nabla_k f\rangle_k$ où

$$\alpha_k^b(x)=\mu_{\{k\}}^{x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c}}(b)=\frac{\exp H_{\{k\}}^{x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c}}(b)}{\sum_{c\in F}\exp H_{\{k\}}^{x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c}}(c)}.$$

Posant $H(x_\Lambda)=H_{\{k\}}^{x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c}}(x_k)$, il vient

$$\begin{aligned}\alpha_k^b(x)&=\frac{\exp H\circ\tau_k^b(x)}{\exp H(x)(1+\sum_{c\neq b}\exp(H\circ\tau_k^c(x)-H(x)))}\\&=\frac{\exp H\circ\tau_k^b(x)}{\exp H(x)(1+\sum_{c\neq b}\exp\nabla_k^c H(x))}\\&=\frac{\exp\nabla_k^b H(x)}{1+\sum_{c\neq b}\exp\nabla_k^c H(x)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\alpha_k^b(x)=\frac{\exp\nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)}{1+\sum_{c\neq b}\exp\nabla_k^c H_\Lambda^\xi(x)}\tag{26}$$

puisque, si $k\in\Lambda$, $\nabla_k^b H_{\{k\}}(x_\Lambda.\xi_{\Lambda^c})=\nabla_k^b H_\Lambda^\xi$. Cette dynamique est trés utilisée. On pourra par exemple consulter [15] pour l'étude du contrôle de la constante de log-Sobolev associée.

Dynamique produit induite par un noyau

Un processus simple sur un ensemble fini est celui qui, d'un point, saute indifféremment sur un point distinct au bout d'un certain temps exponentiel. Le processus de générateur $Lf = \int f\,dm - f$, où m est la mesure uniforme sur la fibre, en fournit un exemple. Lorsque l'on s'interesse à une étude plus fine de certains systèmes, on est amené à manipuler des semi-groupes qui englobent certaines propriétés de symétrie du modèle. Pour le rotateur plan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, identifié aux racines n-ième de l'unité sur le cercle S^1, le semi-groupe n'est pas donné par la mesure uniforme mais par un noyau $K(x, y)$: $Lf = \int f(y)K(.\,, dy) - f$. Le processus saute de x à $y \neq x$ au bout d'un temps exponentiel de paramètre $\lambda_x = \sum_{y\neq x} K(x, y)$ avec la probabilité $K(x, y)/\sum_{y\neq x} K(x, y)$. Cette probabilité peut être proportionnelle au cosinus de l'angle entre x et y. Le choix d'un noyau pour lequel, pour chaque x, la mesure $K(x, dy)$ est portée par $F - \{x\}$ présente l'avantage de normaliser les paramètres exponentiels à l'unité et d'exprimer les probabilités de transitions directement par le noyau.

Sur un ensemble fini, contrairement au cas des variétés compactes où toute diffusion réversible par rapport à $d\mu = \exp\phi\, dm$ s'écrit canoniquement $\Delta + \nabla\phi$ dans une métrique riemannienne associée, une certaine liberté est autorisée dans le choix du générateur. Ce qui est donné pour l'étude du système est principalement un carré du champ Γ, généralement réversible pour la mesure uniforme m sur la fibre finie F, et qui exprime l'étalement des valeurs d'une fonction autour de l'une d'entre elles. Cet opérateur induit un carré du champ Γ_Λ sur F^Λ. Les quantités effectivement significatives sont ses moyennes par rapport à une mesure de Gibbs en volume fini μ^ξ_Λ.

Une remarque simple permet toutefois de contourner le problème de la non-réversiblité par rapport à μ. Γ, réversible pour m, étant fixé, il existe un unique générateur de Markov L' réversible pour $d\mu = Z^{-1}\exp H\, dm$ tel que

$$\int \Gamma(f, g)\, d\mu = -\int L' fg\, d\mu = \int \Gamma'(f, g)\, d\mu. \tag{27}$$

Ecrivant Γ en fonction de L et utilisant la réversibiblité pour m de ce dernier, on obtient l'expression de L' en fonction de L :

$$L'f = 1/2\big[Lf + \exp(-H)\big(L(f\exp H) - fL(\exp H)\big)\big]. \tag{28}$$

Notre carré du champ de référence sera fourni par un noyau de transition $K(.,.)$ *symétrique*. Soit $Lf(x) = \int f(y)\, K(x,dy) - f(x)$ le générateur associé sur F et L_Λ le générateur produit sur F^Λ.

L'opérateur symétrique pour la mesure $\exp H_\Lambda^\xi\, dm^{\otimes\Lambda}$ est alors, en omettant les indices, $L'f(x) = \sum_{k\in\Lambda} L'_k f(x)$, produit des L'_k associés aux L_k induits par L au site k. Ici

$$L'_k f(x) = 1/2\big[L_k f + \exp(-H)\big(L_k(f\exp H) - f L_k(\exp H)\big)\big]$$

avec $L_k f(x) = \langle K(x_k,.), \nabla_k f(x)\rangle$. Posant $\alpha_k^b(x) = K(x_k,b)$, L_k n'est autre que le générateur associé à la famille de fonctions α_k.

Ceci étant, la formule de Leibnitz discrète (23) et la formule (25) de dérivation discrète de l'exponentielle nous assurent que

$$\begin{aligned} L'_k f &= 1/2\big\langle \alpha_k, \big(1+\mathrm{e}^{\nabla_k H}\big)(\nabla_k f)\big\rangle_k \\ &= \left\langle \alpha_k \frac{1+\mathrm{e}^{\nabla_k H}}{2}, \nabla_k f\right\rangle_k = \langle \beta_k, \nabla_k f\rangle_k \end{aligned}$$

où $\beta_k^b(x) = K(x_k,b)(1+\mathrm{e}^{\nabla_k^b H(x)})/2$.

Finalement, L' n'est autre que le quasi-produit des générateurs associés, en chacun des sites $k\in\Lambda$, à la famille β_k.

Remarque 4.3.1. – La validité de ce calcul pour tout L^{α_k} initial ne doit pas faire oublier que L'_k n'a de signification réelle (i.e. les moyennes $\int \Gamma(f)\, d\mu$ et $\int \Gamma'(f)\, d\mu$ coincident) que lorsque L^{α_k} est réversible pour la mesure uniforme ou encore lorsque la matrice donnée par α_k est symétrique ($\alpha_k^b(a) = \alpha_k^a(b)$).

Conditions sur le potentiel et contrôle de la courbure

Nous allons maintenant examiner une condition suffisante sur le hamiltonien du système pour que les familles de fonctions $(\alpha^{\Lambda,\xi})_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ et $(\beta^{\Lambda,\xi})_{\Lambda\in\mathcal{F}}$ définissant respectivement la dynamique de Glauber et la dynamique $(L')_\Lambda^\xi$ associée à une dynamique produit L_Λ donnée par un noyau satisfassent aux conditions (α^Λ*Unif.*) et $(\partial^1(\alpha^\Lambda)l^1)$ pour l'une et (β^Λ*Unif.*) et $(\partial^1(\beta^\Lambda)l^1)$ pour l'autre.

Intéressons-nous tout d'abord au cas de $(L')_\Lambda^\xi$. Rappelons que

$$(\beta^{\Lambda,\xi})_k^b(x) = K(x_k,b)\frac{1+\mathrm{e}^{\nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)}}{2}.$$

$K(x_k,b)$ étant majoré par 1, la condition (β^Λ*Unif.*) est donnée dès que $\|\nabla_k^b H_\Lambda^\xi\|_u$ est bornée indépendament de $\Lambda\in\mathcal{F}$, $\xi\in F^{\mathbb{Z}^\nu}$, $k\in\Lambda$ et $b\in F$.

Nous supposerons dorénavant la condition suivante satisfaite :

Condition $(\partial^2 Hl^1)$. – *Il existe une fonction* $\gamma \in l^1(\mathbb{Z}^\nu)$ *telle que, pour tous* $b, c \in F$ *et tous* $k, l \in \mathbb{Z}^\nu$,

$$\left\|\nabla_l^c \nabla_k^b H_{\{k,l\}}\right\|_u \leqslant \gamma(k-l).$$

Cette condition couvre celle que nous venons de mentionner sur $\|\nabla_k^b H_\Lambda^\xi\|_u$ (considérer $k = l$ dans $\mathbb{Z}^\nu$).

D'autre part, elle engendre $(\partial^1(\beta^\Lambda)l^1)$. En effet, si $l \neq k$,

$$\begin{aligned}
2\nabla_l^c\left(\beta^{\Lambda,\xi}\right)_k^b(x) &= \nabla_l^c\left(K(._k, b)\left(1 + \mathrm{e}^{\nabla_k^b H_\Lambda^\xi(.)}\right)\right)(x) \\
&= K(x_k, b)\nabla_l^c\left(\mathrm{e}^{\nabla_k^b H_\Lambda^\xi(.)}\right)(x) \\
&= K(x_k, b)\,\mathrm{e}^{\nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)}\left(\mathrm{e}^{\nabla_l^c \nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)} - 1\right).
\end{aligned}$$

D'où, sous la condition $(\partial^2 Hl^1)$, vu que $K(.,.) \leqslant 1$ et que $\|\nabla_l^c \nabla_k^b H_\Lambda^\xi\|_u$ est borné par $\|\gamma\|_u$,

$$\begin{aligned}
2\left|\nabla_l^c\left(\beta^{\Lambda,\xi}\right)_k^b(x)\right| &\leqslant \mathrm{e}^{\gamma(0)}\left|\mathrm{e}^{\nabla_l^c \nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)} - 1\right| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{\gamma(0)+\|\gamma\|_u}\left|\nabla_l^c \nabla_k^b H_\Lambda^\xi(x)\right| \\
&\leqslant C\gamma(k-l).
\end{aligned}$$

Le cas $l = k$ s'obtient de la même manière.

Quant à la dynamique de Glauber, un calcul similaire utilisant de plus la formule discrète

$$\nabla_l^d\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-\nabla_l^d f}{f(f \circ \tau_l^d)}$$

nécessitée par la présence de la fonction de partition permet partant de l'expression (26) des α_k^b de prouver les conditions $(\alpha^\Lambda Unif.)$ et $(\partial^1(\alpha^\Lambda)l^1)$ à partir de $(\partial^2 Hl^1)$.

Finalement, nous avons prouvé le

THÉORÈME 4.3.1. – *Sous la condition d'existence d'une fonction* $\gamma \in l^1(\mathbb{Z}^\nu)$ *telle que, pour tous* $b, c \in F$ *et tous* $k, l \in \mathbb{Z}^\nu$,

$$\left\|\nabla_l^c \nabla_k^b H_{\{k,l\}}\right\|_u \leqslant \gamma(k-l)$$

la dynamique de Glauber et le générateur réversible associé à une dynamique produit L_Λ *donnée par un noyau ont leur courbure minorée indépendamment de la boîte finie* Λ *et de la condition extérieure* ξ *considérées.*

4.4. Isopérimétrie pour les systèmes de spins discrets

Le résultat obtenu dans la précédente section va nous permettre d'obtenir des inégalités isopérimétriques pour la mesure de Gibbs en volume infini sous deux conditions :

- le contrôle de la constante de Sobolev-logarithmique de la dynamique de Glauber,
- la condition $(\partial^2 Hl^1)$.

Le Théorème 4.3.1 nous permet de contrôler sous la condition $(\partial^2 Hl^1)$ la courbure des dynamiques réversibles en volume fini L'_Λ indépendamment de la taille de Λ. Aussi obtient-on le pendant discret du Théorème 3.2.1.

THÉORÈME 4.4.1. – *Soit $(\mathcal{J}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^\nu}$ un potentiel d'interaction sur l'espace de configuration $F^{\mathbb{Z}^\nu}$ où F est un ensemble fini, potentiel satisfaisant à la condition $(\partial^2 Hl^1)$.*

Supposons de plus qu'on ait le contrôle de la constante de Sobolev logarithmique pour les mesures

$$\mu_\Lambda(dx_\Lambda) = \left(Z_\Lambda^\xi\right)^{-1} \exp H_\Lambda^\xi(x_\Lambda) m^{\otimes\Lambda}(dx_\Lambda)$$

et les générateurs L_Λ^ξ définissant la dynamique de Glauber ou la dynamique réversible associée à une dynamique donnée par un noyau, à savoir l'existence d'un $c' > 0$ tel que, pour tout $\Lambda \in \mathcal{F}$, toute condition extérieure ξ et toute f définie sur F^Λ, on ait

$$Ent_{\mu_\Lambda^\xi}(f^2) \leqslant c' \int \Gamma_\Lambda^\xi(f)\, d\mu_\Lambda^\xi.$$

Alors, il existe une constante c telle que, pour tout volume fini Λ, toutes conditions extérieures ξ et toute fonction f sur F^Λ,

$$\mathcal{U}\left(\int f\, d\mu_\Lambda^\xi\right) \leqslant c \int \left(\mathcal{U}(f) + \Xi_\Lambda^\xi(f)\right) d\mu_\Lambda^\xi,$$

où $\Xi_\Lambda^\xi(f)$ est l'opérateur introduit dans le Théorème 2.4.1 *associé à la dynamique L_Λ^ξ. En conséquence, on a les inégalités ensembliste et fonctionnelle suivante : pour toute partie A_Λ de F^Λ,*

$$\mathcal{U}(\mu_\Lambda^\xi(A_\Lambda)) \leqslant c(\mu_\Lambda^\xi)_s(\partial A_\Lambda)$$

et, pour toute fonction f sur F^Λ,

$$\mathcal{U}\left(\int f\, d\mu_\Lambda^\xi\right) \leqslant \int \left(\mathcal{U}(f) + c\Upsilon_\Lambda^\xi(f)\right) d\mu_\Lambda^\xi$$

où l'on rappelle que

$$\Upsilon_\Lambda^\xi(f) = \sum_{k\in\Lambda} \left\langle \sqrt{(\alpha_\Lambda^\xi)_k}, |\nabla_k f| \right\rangle_k.$$

Les contrôles de la constante de Sobolev logarithmique pour la dynamique de Glauber ou la dynamique réversible associée à une dynamique donnée par un noyau sont équivalents. Aussi les travaux de Laroche s'appliquent-ils à notre étude. En effet, il y est établi que sous la condition de décroissance exponentielle de $\|\nabla_l^c \nabla_k^b H_\Lambda^\xi\|_u$, recoupant notre condition, le contrôle de la constante de log-Sobolev pour la dynamique de Glauber est équivalent à la condition de mélange de Dobrushin et Schlosman ou encore de mélange faible introduite dans [15].

Par conséquent, *sous la condition de décroissance exponentielle des variations secondes du potentiel, la condition de mélange pour le modèle implique le contrôle de la constante d'isopérimétrie ensembliste.* Pour un potentiel de portée finie sur un ensemble discret, B. Zegarlinski a récemment montré (cf. [25]) que l'on peut obtenir mieux : la condition de mélange fort de Dobrushin et Schlosman donne en fait dans ce cadre l'existence d'une inégalité isopérimétrique gaussienne fonctionnelle du même type que celle que nous avons obtenue pour des spins continus dans la Section 3.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer envers D. Bakry mes très sincères remerciements pour son aide constante et les longues discussions qui ont engendré cet article. Nombre d'idées lui en sont dues. Je remercie grandement M. Ledoux pour son aide, sa disponibilité et son intérêt pour ce travail. Merci à F. Malrieu et G. Scheffer pour leur écoute ainsi qu'à tous les doctorants du LSP pour l'agréable dynamique qui règne entre nous.

RÉFÉRENCES

[1] Bakry D., L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes, Ecole d'été de Probabilités de Saint Flour 1992, Lecture Notes in Math., Vol. 1581, Springer, 1994.

[2] Bakry D., On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups, in: Proceedings of the Taniguchi Symposium, Warwick, 1994.

[3] Bakry D., Emery M., Hypercontractivité des semi-groupes de diffusion, C. R. Acad. Sc. Paris, Série I 299 (15) (1984).

[4] Bakry D., Ledoux M., Lévy–Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator, Invent. Math. 123 (2) (1996) 259–281.

[5] Bakry D., Michel D., Sur les inégalités FKG, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse XI (2) (1990).

[6] Barthe F., Maurey B., Some remarks on isoperimetry of Gaussian type, Preprint, 1999.

[7] Bobkov S., A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure, J. Functional Analysis 135 (1996) 39–49.

[8] Bobkov S., An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space, Ann. Probab. 25 (1997) 206–214.

[9] Carlen E.A., Stroock D.W., An application of the Bakry–Emery criterion to infinite dimensional diffusions, Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Math., Vol. 1204, Springer, Berlin, 1986.

[10] Diaconis P., Saloff-Coste L., Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains, Ann. Appl. Probab. 6 (3) (1996) 695–750.

[11] Ellis R., Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 271, Springer, 1985.

[12] Georgii H.-O., Gibbs Measures and Phase Transitions, De Gruyter, Berlin, 1988.

[13] Holley R., Stroock D.W., Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models, J. Statist. Phys. 46 (4–5) (1987).

[14] Holley R., Stroock D.W., Uniform and L^2 convergence in one dimensional stochastic Ising models, Comm. Math. Phys. 123 (1989) 85–93.

[15] Laroche E., Hypercontractivité pour des systèmes de spins de portée infinie, Probab. Theory Related Fields 101 (1995) 89–132.

[16] Ledoux M., On Talagrand's deviation inequalities for product measures, ESAIM Probab. Statist. 1 (1995/97) 63–87.

[17] Ledoux M., Isoperimetry and Gaussian analysis, in: Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1994), Lecture Notes in Math., Vol. 1648, Springer, Berlin, 1996, pp. 165–294.

[18] Ledoux M., Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities, Preprint (To appear in: Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Math., Springer).

[19] Stroock D.W., Zegarlinski B., The logarithmic Sobolev inequality for continuous spin systems on a lattice, J. Functional Anal. 104 (1992) 299–326.

[20] Stroock D.W., Zegarlinski B., The equivalence of the logarithmic Sobolev inequality and the Dobrushin–Shlosman mixing condition, Comm. Math. Phys. 144 (2) (1992) 303–323.

[21] Stroock D.W., Zegarlinski B., On the ergodic properties of Glauber dynamics, J. Statist. Phys. 81 (5/6) (1995).
[22] Yoshida N., The equivalence of the log-Sobolev inequality and a mixing condition for unbounded spin systems on the lattice, Preprint, 1998.
[23] Zegarlinski B., Log-Sobolev inequalities for infinite one-dimensional lattice systems, Comm. Math. Phys. 133 (1) (1990) 147–162.
[24] Zegarlinski B., Dobrushin uniqueness theorem and logarithmic Sobolev inequalities, J. Functional Anal. 105 (1992) 77–111.
[25] Zegarlinski B., Isoperimetry for Gibbs measures, Preprint, 1999.