ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DOMINIQUE SCHNEIDER

Polynômes trigonométriques et marches aléatoires multidimensionnelles : application à la théorie ergodique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 36, n° 5 (2000), p. 617-646

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_2000__36_5_617_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques 36, 5 (2000) 617–646

Polynômes trigonométriques et marches aléatoires multidimensionnelles : application à la théorie ergodique

par

Dominique SCHNEIDER [1]

Université de Picardie Jules Verne, L.A.M.F.A. UPRES-A 6119, 33, rue Saint Leu, F-80039 Amiens cedex 01, France

Manuscrit reçu le 12 juillet 1999, révisé le 25 janvier 2000

RÉSUMÉ. – Considérons $\{S_k, k \geqslant 0\}$ une marche aléatoire d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, somme partielle des k premiers termes d'une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués á valeurs dans $\mathbb{Z}^d, d \geqslant 1$, et possèdant un moment d'ordre δ $(\delta > 0)$. Etant donnée une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{T}^d$, le tore de dimension d nous obtenons une majoration de $\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k\rangle\|_{2,\nu(d\alpha)}$. Les méthodes aléatoires reposent sur des inégalités de découplement pour des vecteurs gaussiens á valeurs réelles. Nous appliquons ensuite ces résultats en théorie ergodique : étant donné un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, où T opère sur l'ensemble X en définissant une action de $\mathbb{Z}^d$ telle que $T\mu = \mu$, pour tout $f \in L^2(\mu)$ nous donnons des conditions sur la mesure spectrale de T afin d'obtenir la convergence μ-presque-sûre de la suite $\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f \circ T^{S_k(\omega)},\ N \geqslant 1\}$, et ceci pour tout $\omega \in \Omega_o$, avec $P(\Omega_o) = 1$ universel. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – Let $\{S_k, k \geqslant 0\}$ be a random walk define on the probability space $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ as the partial sum of the k first terms of a sequence of I.I.D. random vectors $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqslant 1)$ valued, with δ $(\delta > 0)$

[1] E-mail: dominique.schneider@u-picardie.fr.

positive moment. Given any probability measure ν on the torus $\mathbb{T}^d$ we give an upper bound for $\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k\rangle\|_{2,\nu(d\alpha)}$. We use random methods based on decoupling inequalities for random Gaussian processes. We apply these results in ergodic theory: given any dynamical system $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ such that $T\mu = \mu$, for all $f \in L^2(\mu)$ we give conditions on the spectral measure of T to obtain μ-almost sure convergence of the ergodic average $\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f \circ T^{S_k(\omega)},\ N \geqslant 1\}$ universally for the random walk.

Key words: Spectral lemma, Ergodic averages, Gaussian processes, Random walk, Almost sure convergence, Van der Corput inequality

1. INTRODUCTION — RÉSULTATS PRINCIPAUX

Considérons un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, supposé complet, sur lequel nous définissons une suite $\{S_k,\ k \geqslant 0\}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, comme suit :

Soit une suite de vecteurs aléatoires $\{X_k,\ k \geqslant 0\}$ indépendants et équi-répartis. Posons $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et $S_0 = 0$. La suite $\{S_k,\ k \geqslant 0\}$ est une marche aléatoire d-dimensionnelle ancrée en zéro qui modélise l'état d'une particule errante à l'instant k. Nous supposons cette marche aléatoire à valeurs entières sur chacune de ses d composantes. Nous noterons aussi $X_1^{(1)}, \ldots, X_1^{(d)}$ les d coordonnées du vecteur aléatoire X_1 supposées indépendantes entre elles.

DÉFINITION 1. – *On appelle pas du réseau de la marche aléatoire le d-multi-entier maximal (sur chaque composante) $h = (h_1, \ldots, h_d)$ tel que*

$$\frac{1}{h} \cdot X_1 = \left(\frac{X_1^{(1)}}{h_1}, \ldots, \frac{X_1^{(d)}}{h_d}\right)$$

soit également un multi-entier. Si $h = (1, \ldots, 1)$, la promenade est dite non-réticulée.

Nous constatons immédiatement que h est confondu avec le multi-P.G.C.D. des multi-entiers k tels que $P(X_1 = k) > 0$.

DÉFINITION 2. – *Soit* $\{\nu_j,\ j \geqslant 0\}$ *la suite de variables aléatoires représentant les instants de première arrivée de la marche aléatoire au point* $j \in \mathbb{Z}^d$:

$$\nu_j = \inf\{n > 0\colon\ S_n = j\}.$$

Si $S_n \neq j$ *pour tout entier n, on pose* $\nu_j = +\infty$.

On dit que la marche aléatoire est récurrente si $P(\nu_0 < +\infty) = 1$.

Nous convenons donc de nous placer dans le cas d'une marche aléatoire non-réticulée : nous supposerons toujours que les valeurs essentielles prises par la suite $\{S_k,\ k \geqslant 0\}$, engendrent tout le groupe $\mathbb{Z}^d$. Par conséquent, comme les valeurs du vecteur X_0 engendrent tout $\mathbb{Z}^d$, la fonction caractéristique du vecteur X_0 (la transformée de Fourier de la loi de X_0) notée

$$\forall \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d, \quad \Phi_{X_0}(\alpha) = \mathbb{E}\big(\exp 2i\pi \langle \alpha, X_0\rangle\big),$$

prendra la valeur 1 si et seulement si $\alpha = 0$ modulo $\mathbb{Z}^d$ avec $\langle \alpha, X_0\rangle = \sum_{j=1}^d \alpha_j X_0^{(j)}$.

En revanche, nous ne faisons pas d'hypothèse particulière concernant la récurrence de la marche aléatoire. Par convenance pour le lecteur, nous rappelons deux résultats classiques concernant les marches aléatoires :

THÉORÈME. – *Pour qu'une marche aléatoire non-réticulée soit récurrente, il est nécessaire et suffisant que*

$$\int\limits_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d} \mathcal{R}e \frac{1}{1 - \Phi_{X_0}(\alpha)}\, d\alpha = +\infty.$$

THÉORÈME (Atkinson [9, p. 34]). – *En dimension* $d = 1$, *si la suite de variables aléatoires identiquement distribuées* $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ *est ergodique et intégrable,* $\mathbb{E}|X_0| < \infty$, *alors nous avons l'équivalence suivante* :

$$\{S_n,\ n \geqslant 0\} \text{ est récurrente si et seulement si } \mathbb{E}X_0 = 0.$$

Remarque. – Si les variables X_n sont indépendantes et identiquement distribuées, alors la suite $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ est ergodique.

Dans ce travail nous supposerons que $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ est une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ $(d \geqslant 1)$ vérifiant :

Il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}\|X_1\|_{\mathbb{R}^d}^{\delta} < \infty$ et de plus $\inf_{k\in\Lambda_d} P(X_1 = k) > 0$, avec

$$\Lambda_d = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0,1)\} \subset \mathbb{Z}^d.$$

On pourra par exemple choisir $\mathbb{E}\|X_1\|_{\mathbb{R}^d}^{\delta}$ de la façon suivante $\mathbb{E}\sup_{j=1}^{d} |X_1^{(j)}|^{\delta}$. Nous convenons de noter $\mathcal{H}$ ce groupe d'hypothèses.

Nous notons $\mathbb{T}^d$ le tore muni d'une mesure de probabilité ν arbitraire. Nous nous proposons de majorer des expressions de la forme suivante :

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi \langle \alpha, S_k\rangle \right\|_{2,\nu}.$$

Nous montrons :

RÉSULTAT A. – *Dans les conditions $\mathcal{H}$, il existe un ensemble Ω_0 mesurable presque sûr tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel, il existe une variable aléatoire positive $\mathcal{K}_\varepsilon$, finie pour tout $\omega \in \Omega_0$, pour laquelle nous avons la majoration suivante, pour tout N grand, tout $H \leqslant N-1$, tout $\eta > 0$ supposé petit et pour toute mesure de probabilité ν :*

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi \langle \alpha, S_k\rangle \right\|_{2,\nu}^2 = \mathrm{O}\left[\frac{1}{H} + 2\cdot\frac{H}{N} + 2\cdot\mathcal{K}_\varepsilon \cdot H^{1+\varepsilon}\cdot\frac{\log N}{\sqrt{N}} + \frac{\nu(]-\eta,\eta]^d)}{2} + \frac{2^d C_0}{\eta^4 H}\right],$$

où C_0 est une constante absolue.

Ainsi sur tout compact $\mathcal{C}$ de $\mathbb{T}^d$ ne contenant pas 0, nous aurons, pour tout η suffisamment petit (dépendant du compact) :

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{C}} \left| \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi \langle \alpha, S_k\rangle \right| = \mathrm{O}\left[\frac{1}{H} + 2\cdot\frac{H}{N} + 2\cdot\mathcal{K}_\varepsilon \cdot H^{1+\varepsilon}\cdot\frac{\log N}{\sqrt{N}} + \frac{2^d C_0}{\eta^4 H}\right]^{1/2}.$$

Cette estimation généralise un résultat de Blum et Cogburn de 1975 (cf. [1]).

Afin d'établir une démonstration du résultat énoncé ci-dessus, nous estimons l'ordre de grandeur asymptotique uniforme de la croissance de certains noyaux aléatoires réliés aux problèmes évoqués.

RÉSULTAT B. – *Considérons une suite de* $\{X_k, k \geqslant 1\}$ *vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués, à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$. *Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\|X_1\|_{\mathbb{R}^d}^{\delta} < \infty$. *Alors dans ces conditions, nous avons :*

$$\sup_{h\geqslant 1}\left[\frac{1}{h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right]$$
$$<\infty,$$

avec la convention : $S_k^h = X_{k+1} + \cdots + X_{k+h}$ *et* $\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{j=1}^d \alpha_j\cdot\beta_j$ *pour tout élément* α *et* β *de* $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

Nous donnons une preuve de ce résultat dans la Section 3, à l'aide d'une inégalité de découplement très récente de X. Fernique, concernant les fonctions aléatoires gaussiennes. L'ensemble des outils probabilistes est rassemblé également dans la Section 3.

Comme application, les estimations précédentes constituent le cadre aléatoire dans lequel nous nous plaçons afin d'étudier des propriétés de convergence ponctuelle de moyennes ergodiques échantillonnées. Nous précisons maintenant ce point de vue.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, c'est-à-dire la donnée d'un espace probabilisé $(X, \mathcal{A}, \mu)$, d'une transformation T mesurable bijective sur X ; nous supposons de plus que cette action de $\mathbb{Z}^d$ est telle que $T\mu = \mu$.

Nous nous intéressons au comportement asymptotique μ-presque partout de la suite :

$$\left\{A_N^{\omega}f = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\circ T^{S_k(\omega)},\ N \geqslant 1\right\}, \tag{1}$$

pour $f \in L^2(\mu)$, $\omega \in \Omega$ et $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, $k \geqslant 1$, et $S_0 = 0$, avec $\{X_k,\ k \geqslant 0\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

Soit $\mathcal{E}_0$ le sous-espace vectoriel fermé dans $L^2(\mu)$ des fonctions fixes sous l'action de T. Il est évident que pour la marche aléatoire S_k, nous avons : $A_N^{\omega}f = f$, μ-presque partout, pour tout élément ω de Ω et pour tout f appartenant à $\mathcal{E}_0$. Nous étudions donc (1) lorsque f est un élément de l'orthogonal de $\mathcal{E}_0$. Nous savons que dans ce cas la mesure spectrale de l'opérateur T au point f, notée μ_f, ne charge pas 0, c'est-à-dire vérifie : $\mu_f(\{0\}) = 0$.

Bien évidemment le problème majeur est de savoir pour quels ω la suite (1) converge μ-presque partout. Ceci conduit naturellement aux notions suivantes :

DÉFINITION. – *Une suite de vecteurs aléatoires* $S = \{S_k,\ k \geqslant 0\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{Z}^d$*, d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$*, est universellement* 2*-représentative en moyenne* (*respectivement, universellement* 2*-représentative*)*, s'il existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *presque sûr tel que, pour tout* $\omega \in \Omega_0$*, nous avons :*

Pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$*, pour tout* $f \in L^2(\mu)$*,* $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{S_k(\omega)}$ *existe au sens* $L^2(\mu)$ (*respectivement, au sens presque-partout*).

Dans cette situation l'auteur a montré (cf. [8] 1997) :

THÉORÈME ([8]). – *Soit* $X = \{X_k,\ k \geqslant 0\}$ *une suite de vecteurs aléatoires indépendants, identiquement distribués, à valeurs dans* $\mathbb{Z}^d$ *et d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$*. Supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\|X_1\|_{\mathbb{R}^d}^{\delta} < \infty$*.*

Alors la suite de vecteurs aléatoires $S = \{\sum_{j=0}^{k} X_j,\ k \geqslant 0\}$ *est universellement* 2*-représentative en moyenne.*

Très récemment en 1998, M. Lemanczyk, E. Lesigne, F. Parreau, D. Volny et M. Wierdl ont établit une généralisation de ce théorème (cf. [11]) en le sens suivant :

THÉORÈME. – *Soit* $X = \{X_k,\ k \geqslant 0\}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{Z}$ *et d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$*. Pour tout k,* $X_k(\omega) = F(B^k\omega)$ *où* F *est une fonction* $\mathcal{B}$*-mesurable et* B *une transformation agissant sur* Ω *et préservant la mesure de probabilité* P*.*

Alors la marche aléatoire des sommes de Birkhoff $S = \{\sum_{j=0}^{k} X_j,\ k \geqslant 0\}$ *est universellement* 2*-représentative en moyenne dans la classe des systèmes dynamiques doucement mélangeants.*

Remarque. – C'est également vrai dans tout L^p pour $p \geqslant 1$.

Il existe des extensions des deux théorèmes précédents concernant le mode de convergence presque-sûre, M. Lacey, K. Petersen, D. Rudolph et M. Wierdl ont montré (cf. [12, Théorème 5]) dans la situation où $d = 1$ et $\delta = 2$ le théorème suivant :

THÉORÈME. – *Soit* $X = \{X_k,\ k \geqslant 1\}$ *une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées, telle que* $\mathbb{E}X_1 \neq 0$ *et* $\mathbb{E}(X_1)^2 < \infty$*. Alors, il existe* $\Omega_0 \subset \Omega$ *presque sûr, tel que pour tout* $\omega \in \Omega_0$ *nous avons :*

Pour tout système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$, pour tout $f \in L^2(\mu)$,

$$\mu\left\{y\colon \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)}y\right) \textit{ existe}\right\} = 1. \tag{2}$$

La suite $\{S_k, k \geqslant 0\}$ est universellement 2-représentative.

Nous nous proposons de chercher des extensions de ces travaux, en dimension d quelconque, sous une hypothèse plus faible d'existence de moment de petit ordre $\delta > 0$ de la suite de vecteurs aléatoires. Dans ce cas, nous remarquons que le théorème précédent nous indique qu'il ne sera pas possible de trouver un résultat de convergence presque-sûre vrai pour tout f, à cause de la condition de centrage de la suite de vecteurs aléatoires directement reliée, dans ce cas, à la récurrence ou à la non-récurrence de la marche aléatoire. En effet, dans [12, Théorème 4] il est montré le résultat suivant :

THÉORÈME. – *Soit $X = \{X_k,\ k \geqslant 1\}$ une suite de variables indépendantes, identiquement distribuées prenant les valeurs $+1$ ou -1 avec la probabilité $1/2$. Alors avec probabilité 1, la marche aléatoire $\{S_k,\ k \geqslant 0\}$ (qui est récurrente) est une mauvaise suite pour le théorème ergodique, dans le sens suivant : étant donné un système dynamique mesuré $(Y, \mathcal{A}, \mu, T)$ non atomique, il existe un élément f de $L^1(\mu)$ tel que la suite des moyennes*

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)}y\right),\ N \geqslant 1\right\} \tag{3}$$

diverge μ-presque partout.

En fait, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir f comme la fonction indicatrice d'un ensemble de mesure plus petite que ε, telle que :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)}y\right) = 1,\ \mu\text{-}p.p. \quad \textit{et}$$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(T^{S_k(\omega)}y\right) = 0,\ \mu\text{-}p.p.$$

Nous cherchons donc des conditions sur la mesure spectrale de T au point f, donc sur f, afin d'obtenir des propriétés de convergence presque-sûre, pour de petits moments, indépendamment de la dimension

d fixée. Nous cherchons aussi des vitesses de convergence au sens de la moyenne quadratique. Ces deux problèmes sont liés comme nous le verrons.

Avec les notations précédentes, nous obtenons :

RÉSULTAT C. – *Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}\|X_1\|_{\mathbb{R}^d}^{\delta} < \infty$ et que $\inf_{k \in \Lambda_d} P(X_1 = k) > 0$, avec $\Lambda_d = \{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,\ldots,0,1)\} \subset \mathbb{Z}^d$.*

Alors il existe un ensemble Ω_0 mesurable, $P(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout élément ω de Ω_0 fixé, nous ayons :

Pour tout système dynamique mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, tout élément f de $L^2(\mu) \cap \mathcal{E}_0^{\perp}$ vérifiant il existe $\beta > 0$ tel que

$$\int_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \inf_{i=1}^{d} \frac{1}{|\alpha_i|^{\beta}} \mu_f(d\alpha) < \infty,$$

nous avons :

$$\mu\left\{x\colon \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(T^{S_k(\omega)}x\right) = 0\right\} = 1. \tag{4}$$

COROLLAIRE C. – *Supposons que la mesure spectrale μ_f de T au point f soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$: $\mu_f \ll \lambda$. Alors la dérivée de Radon–Nikodym $\frac{d\mu_f}{d\lambda}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Si de plus il existe un réel $t > 0$ tel que $\frac{d\mu_f}{d\lambda} \in L^{1+t}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d, \lambda)$, alors :*

$$\mu\left\{x\colon \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(T^{S_k(\omega)}x\right) = 0\right\} = 1.$$

Remarque. – Le fait que $\frac{d\mu_f}{d\lambda}$ soit intégrable par rapport à λ résulte simplement du constat que la mesure de Borel μ_f est bornée.

Les outils développés précédemment permettent par exemple d'affirmer que pour des opérateurs ergodiques à spectre de Lebesgue continu, nous avons la vitesse de convergence suivante (en dimension $d = 1$) :

pour tout $f \in L^2(\mu)$, $\int f d\mu = 0$,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{S_k} \right\|_{2,\mu} = \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N^{1/24}}\right).$$

2. DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS A ET C

Par souci de clarté pour le lecteur, nous rappelons un certain nombre d'outils utiles pour établir les Résultats A et C. Nous commençons par l'inégalité classique de Van der Corput :

INÉGALITÉ DE VAN DER CORPUT ([10]). – *Si* $(u_n)_{0\leqslant n<N}$ *est une famille finie de N éléments d'un espace de Hilbert* $\mathcal{H}i$ *et si H est un entier compris entre* 0 *et* $N-1$, *alors nous avons* :

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}u_k\right\|_{\mathcal{H}i}^2 \leqslant \frac{N+H}{N^2(H+1)}\sum_{k=0}^{N-1}\|u_k\|_{\mathcal{H}i}^2 + 2\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot A(N,h),$$

où $A(N,h)=\mathcal{R}e(\sum_{k=0}^{N-h-1}\langle u_{k+h},u_k\rangle_{\mathcal{H}i})$.

Cette inégalité se démontre simplement en écrivant

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}u_k\right\|_{\mathcal{H}i}^2 = \left\|\frac{1}{N}\sum_{k=-H}^{N-1}\left(\frac{1}{H+1}\sum_{h=0}^{H}u_{k+h}\right)\right\|_{\mathcal{H}i}^2,$$

avec la convention $u_k=0$ si $k<0$ ou $k\geqslant N$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz (voir à ce propos [10]).

LEMME SPECTRAL. – *Soit T une contraction d'un espace de Hilbert* $\mathcal{H}i$, *et soit* $p(x)$ *un polynôme défini sur le cercle unité* $D=\{x \mid x\in\mathbb{C}, \mid x\mid=1\}$. *Alors pour tout f appartenant à* $\mathcal{H}i$, *il existe une mesure borélienne positive bornée sur D, notée* μ_f, *telle que nous ayons* :

$$\|p(T)f\|_{\mathcal{H}i}^2 \leqslant \int_D |p(x)|^2\mu_f(dx).$$

Ce résultat découle du théorème de Bochner que U. Krengel étend aux contractions d'espace de Hilbert (Cf. [9, Proposition 3.1, p. 94]) et d'un argument de dilation introduit par Sz.-Nagy et Foias.

LEMME 1. – *Soit* $\{f_n,\, n\geqslant 1\}$ *une suite de fonctions positives et mesurables, définies sur un espace mesuré* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *avec* $\mu(X)=1$. *Pour tout* $\rho>1$, *nous désignons par* $\mathcal{N}_\rho$ *l'index partiel* $\{[\rho^k],\ k\in\mathbb{N}\}$.

Supposons que pour tout $\rho > 1$ fixé,

$$\mu\left\{x\colon \lim_{\substack{N\to\infty\\ N\in\mathcal{N}_\rho}} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \text{ existe}\right\} = 1.$$

Alors pour tout $\rho > 1$, cette limite est la même, disons L, et nous avons :

$$\mu\left\{x\colon \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) = L(x)\right\} = 1.$$

Commençons par établir le Résultat A.

Soit ν une mesure de probabilité définie sur $\mathbb{T}^d$. Soit H tel que $1 \leqslant H \leqslant N-1$, appliquant l'inégalité de Van der Corput avec $\mathcal{H}i = \{\mathbb{T}^d, \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \nu\}$ et $u_k = \exp 2i\pi\langle\alpha, S_k\rangle$ avec $0 \leqslant k \leqslant N-1$, nous obtenons la majoration

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi\langle\alpha, S_k\rangle\right|^2 \nu(d\alpha) \leqslant I_1 + I_2, \tag{5}$$

avec

$$I_1 = \frac{N+H}{N(H+1)}\nu(\mathbb{T}^d),$$

$$I_2 = 2\cdot\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\mathcal{R}e\int_{\mathbb{T}^d}\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k^h\rangle\nu(d\alpha),$$

où $S_k^h = X_{k+1} + \cdots + X_{k+h}$.

Nous commençons par le traitement de la quantité I_2 que nous écrivons :

$$\begin{aligned} I_2 = 2\cdot\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}&\sum_{h=1}^{H}(H+1-h).(N-h)\\ &\cdot\mathcal{R}e\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{N-h}\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k^h\rangle\,\nu(d\alpha)\cdot \end{aligned} \tag{6}$$

Faisons intervenir la fonction caractéristique du vecteur aléatoire X_0 notée $\Phi_{X_0}(\alpha) = \mathbb{E}(\exp 2i\pi\langle\alpha, X_0\rangle)\cdot$ Ceci nous permet de décomposer I_2 en la somme : $I_2 = I_{2,1} + I_{2,2}$ avec

$$I_{2,1} = 2 \cdot \frac{N+H}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h).(N-h) \cdot \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} \Phi_{S_k^h}(\alpha)\nu(d\alpha)$$

et

$$I_{2,2} = \frac{2(N+H)}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h).(N-h) \cdot \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{N-h} \sum_{k=0}^{N-h-1} e^{2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle} - \mathbb{E}e^{2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}\, \nu(d\alpha).$$

Les X_k étant indépendants et identiquement distribués, nous avons :

$$\forall \alpha \in \mathbb{T}^d, \quad \Phi_{S_k^h}(\alpha) = \left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= 2 \cdot \frac{N+H}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h).(N-h) \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} \left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h \nu(d\alpha) \\ &= 2 \cdot \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{N+H}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h).(N-h) \left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h \right] \nu(d\alpha). \end{aligned}$$

Ce que l'on décompose encore en :

$$\begin{aligned} I_{2,1} = 2 \cdot \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} &\left[\frac{N+H}{N^2(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h).\Big[(N-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h \right. \\ &\left. - N\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\Big] \right] \nu(d\alpha) \\ &+ 2 \cdot \mathcal{R}e \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{N+H}{N(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h) \left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h \right] \nu(d\alpha). \end{aligned} \tag{7}$$

Ce que nous convenons d'écrire :

$$I_{2,1} = I_{2,1,1} + I_{2,1,2}. \tag{8}$$

En tenant compte du fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^d$, et pour tout entier $h \geqslant 1$, $|[\Phi_{X_0}(\alpha)]^h| \leqslant 1$, nous majorons le terme $I_{2,1,1}$ comme suit :

$$|I_{2,1,1}| \leqslant 2\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot h\int_{\mathbb{T}^d}\left|\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\right|\nu(d\alpha)$$

$$\leqslant 2\cdot\nu\left(\mathbb{T}^d\right)\frac{N+H}{N(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot\frac{h}{N}.$$

Par conséquent, comme $h \leqslant H < N$, nous obtenons sans difficulté la majoration :

$$|I_{2,1,1}| \leqslant 4\cdot\nu\left(\mathbb{T}^d\right)\cdot\frac{H}{N}. \tag{9}$$

Considérons maintenant l'expression $I_{2,1,2}$.

$$I_{2,1,2} = 2\mathcal{R}e\int_{\mathbb{T}^d}\left[\frac{N+H}{N(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\right]\nu(d\alpha)$$

$$= \left(2\frac{N+H}{N}\right)\mathcal{R}e\int_{\mathbb{T}^d}\left[\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\right]\nu(d\alpha).$$

Etudions précisément la moyenne de Césaro d'ordre 2 de la suite $\{[\Phi_{X_0}(\alpha)]^h,\ h \geqslant 1\}$, c'est-à-dire :

$$\left\{\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h,\ H \geqslant 1\right\}.$$

Ecrivons cette suite sous la forme de H sommes partielles de suites géométriques,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(H+1)^2}\big(\Phi_{X_0}^H + \Phi_{X_0}^{H-1} &+ \cdots + \Phi_{X_0}\\ \Phi_{X_0}^{H-1} &+ \cdots + \Phi_{X_0}\\ &\cdots\\ &\qquad\Phi_{X_0}\big).\end{aligned}$$

Comme nous supposons que $\Phi_{X_0}(\alpha) = \mathbb{E}(\exp 2i\pi\langle\alpha, X_0\rangle)$ est égale à 1 si et seulement si $\alpha = 0$ modulo $\mathbb{Z}^d$, nous avons :

$$\forall\alpha \in \mathbb{T}^d,\ \alpha \neq 0, \quad \left|\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\right| \leqslant \frac{1}{(H+1)^2}\left|\frac{1}{1-\Phi_{X_0}(\alpha)}\right| \cdot \left[H + \frac{4}{|1-\Phi_{X_0}(\alpha)|}\right].$$

Nous en déduisons que pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^d$, $\alpha \neq 0$:

$$\left|\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\left[\Phi_{X_0}(\alpha)\right]^h\right| \leqslant \frac{6}{H \cdot |1-\Phi_{X_0}(\alpha)|^2}. \tag{10}$$

Fixons maintenant un nombre $\eta > 0$, supposé petit. Nous définissons alors les ensembles disjoints suivants : $Q_1^d =]-\eta, \eta]^d$ et Q_2^d tels que :

$$\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d = Q_1^d \cup Q_2^d.$$

Ceci nous permet de décomposer l'intégrale $I_{2,1,2}$ sur Q_1^d et sur Q_2^d. En vertu du point (10) nous obtenons la majoration :

$$|I_{2,1,2}| \leqslant \nu\left(Q_1^d\right) + \frac{24}{H}\int_{Q_2^d} \frac{1}{|1-\Phi_{X_0}(\alpha)|^2}\nu(d\alpha). \tag{10a}$$

Nous présentons maintenant un lemme technique :

LEMME 2. – *Notons* $\Lambda_d = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$. *Supposons que* $\inf_{k\in\Lambda_d} P(X_1 = k) > 0$. *Alors, il existe une constante C telle que* :

$$\forall\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d - \{0\}, \quad \inf_{j=1}^{d} \frac{|\alpha_j|^2}{|1-\Phi_{X_0}(\alpha)|} \leqslant C.$$

Démonstration. – Fixons $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d - \{0\}$, $k \in \Lambda_d$, puis écrivons :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\left(1-\Phi_{X_0}(\alpha)\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} P(X_1 = k)(1-\cos 2\pi\langle\alpha,k\rangle)\\ &= 2\cdot\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} P(X_1 = k)\sin^2\pi\langle\alpha,k\rangle\\ &\geqslant 2\cdot P(X_1 = k)\sin^2\pi\langle\alpha,k\rangle.\end{aligned}$$

Sachant que $|\sin\pi x| \geqslant |x|$ pour $|x| \in [0, \frac{1}{2}]$, nous avons :

$$\mathcal{R}e\big(1 - \Phi_{X_0}(\alpha)\big) \geqslant 2 \cdot P(X_1 = k)\langle\alpha, k\rangle^2,$$

car $|\langle\alpha, k\rangle| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \Lambda_d$. Posons $C^{-1} = \inf_{k\in\Lambda_d} 2P(X_1 = k)$. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{R}e\big(1 - \Phi_{X_0}(\alpha)\big) \geqslant C^{-1} \inf_{k\in\Lambda_d} \langle\alpha, k\rangle^2.$$

L'expression $(1 - \Phi_{X_0}(\alpha))$ ne s'annulant qu'en zéro, il vient :

$$\forall\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d - \{0\}, \quad \inf_{j=1}^{d} \frac{|\alpha_j|^2}{|1 - \Phi_{X_0}(\alpha)|} \leqslant C.$$

Ceci démontre le Lemme 2. □

Nous utilisons le Lemme 2 pour obtenir le lemme suivant :

LEMME 3. –

$$\int\limits_{Q_2^d} \frac{1}{|1 - \Phi_{X_0}(\alpha)|^2}\, \nu(d\alpha) \leqslant \frac{2^d C^2}{\eta^4} \nu(\mathbb{T}^d).$$

Démonstration. – Considérons la partition de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ en les 2^d quadrants $\mathcal{Q}_l$, $l = 1, \ldots, 2^d$. Nous avons ainsi :

$$\forall\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d, \quad 1 = \sum_{l=1}^{2^d} I_{\mathcal{Q}_l}(\alpha).$$

Par suite, en vertu du Lemme 2, il existe une constante C telle que nous ayons :

$$\int\limits_{Q_2^d} \frac{1}{|1 - \Phi_{X_0}(\alpha)|^2}\, \nu(d\alpha) \leqslant C^2 \sum_{l=1}^{2^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} I_{Q_2^d \cap \mathcal{Q}_l}(\alpha) \frac{1}{\inf_{j=1}^d |\alpha_j|^4}\, \nu(d\alpha).$$

Fixons l'entier l. Sur $Q_2^d \cap \mathcal{Q}_l$ nous avons : $\inf_{j=1}^d |\alpha_j| \geqslant \eta$. Ceci démontre le Lemme 3. □

Le lemme précédent permet de majorer l'expression (10a) par :

$$|I_{2,1,2}| \leqslant \nu(]-\eta,\eta]^d) + \frac{242^d C^2}{\eta^4 H}\nu(\mathbb{T}^d). \tag{10b}$$

Ainsi nous majorons $I_{2,1}$ à l'aide de (9) et (10b) par

$$|I_{2,1}| \leqslant \frac{4\cdot H}{N}\cdot \|f\|^2_{2,\mu} + \nu(]-\eta,\eta]^d) + \frac{242^d C^2}{\eta^4 H}\nu(\mathbb{T}^d), \tag{11}$$

pour tout entier $1 \leqslant H \leqslant N-1$ et tout réel positif η petit.

Revenons maintenant à l'estimation de l'expression $I_{2,2}$, c'est-à-dire :

$$2\cdot\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h).(N-h)$$
$$\cdot\mathcal{R}e\int_{\mathbb{T}^d}\frac{1}{N-h}\sum_{k=0}^{N-h-1}\left(e^{2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle} - \mathbb{E}e^{2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}\right)\nu(d\alpha).$$

A l'aide du Résultat B, nous connaissons l'ordre de grandeur de la croissance de l'expression

$$\left\{\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle - \mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle,\ N\geqslant 1\right\}, \tag{12}$$

pour tout h fixé. Plus précisément, nous avons le contrôle suivant de (12) :

$$\sup_{h\geqslant 1}\left[\frac{1}{h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in\mathbb{T}^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle - \mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right] < \infty.$$

Considérons la suite $\{\mathcal{K}_h,\ h\geqslant 1\}$ de variables aléatoires positives définie par

$\forall\omega\in\Omega$,

$$\mathcal{K}_h(\omega) = \frac{1}{h}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in\mathbb{T}^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h(\omega)\rangle - \mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}$$

L' estimation précédente permet de majorer $I_{2,2}$. En effet,

$$|I_{2,2}| \leqslant 2\cdot\frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot\frac{h(N-h)}{\sqrt{(N-h)}}$$
$$\cdot\sqrt{\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}\cdot\mathcal{K}_h\cdot\nu(\mathbb{T}^d).$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
|I_{2,2}| &\leqslant 2\cdot \frac{N+H}{N^2(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot h\sqrt{(N-h)} \\
&\quad \cdot \sqrt{\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}\cdot \mathcal{K}_h\cdot \nu(\mathbb{T}^d) \\
&\leqslant 4\cdot \frac{H}{N(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\cdot\sqrt{N} \\
&\quad \cdot \sqrt{\log(H+2)\cdot\log(N+2)}\cdot \mathcal{K}_h\cdot \nu(\mathbb{T}^d) \\
&\leqslant 4\cdot \frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\mathcal{K}_h\cdot\left\{\frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}}\cdot H\cdot\nu(\mathbb{T}^d)\right\}.
\end{aligned}
$$

Il apparaît donc naturellement la suite des moyennes de Césaro du deuxième ordre :

$$
\left\{\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\mathcal{K}_h,\, H\geqslant 1\right\}.
$$

Nous appliquons le Lemme 4 (Section 3 de ce travail) à la suite $\{\mathcal{K}_h,\ h\geqslant 1\}$. Soit $\varepsilon>0$. Quitte à ne tenir compte que des valeurs rationnelles de ce paramètre, que l'on supposera petites, nous savons donc qu'il existe un ensemble mesurable Ω_0 presque sûr, indépendant du choix du système dynamique, tel que pour tout $\omega\in\Omega_0$, et pour tout $\varepsilon>0$ rationnel,

$$
\sup_{N\geqslant 1}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mathcal{K}_k(\omega)}{k^{\varepsilon}}\right|<+\infty.
$$

Nous remarquons qu'il en sera de même pour la moyenne de Césaro du deuxième ordre.

En écrivant la majoration

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\mathcal{K}_h\cdot\left\{\frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}}\cdot H\cdot\nu(\mathbb{T}^d)\right\} \\
&\quad\leqslant \frac{1}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\frac{\mathcal{K}_h}{h^{\varepsilon}}\cdot\left\{\frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}}\cdot H^{1+\varepsilon}\cdot\nu(\mathbb{T}^d)\right\}
\end{aligned}
$$

et en combinant ceci avec ce qui précède, nous obtenons

$$|I_{2,2}| \leqslant 4 \cdot \mathcal{K}_\varepsilon \cdot \nu(\mathbb{T}^d) \cdot H^{1+\varepsilon} \cdot \frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}},$$

$$\text{avec } \mathcal{K}_\varepsilon = \sup_{H \geqslant 1} \left[\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \frac{\mathcal{K}_h}{h^\varepsilon}\right]. \tag{13}$$

Des points (6) à (13) nous déduisons la majoration globale suivante pour l'expression :

$$\int_{\mathbb{T}^d} \left|\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp 2i\pi \langle \alpha, S_k\rangle\right|^2 \nu(d\alpha) \leqslant |I_1| + |I_2| \leqslant |I_1| + |I_{2,1}| + |I_{2,2}|$$
$$\leqslant |I_1| + |I_{2,1,1}| + |I_{2,1,2}| + |I_{2,2}|.$$

Comme

$$|I_1| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{H+1} \cdot \nu(\mathbb{T}^d),$$

il vient pour tout $1 \leqslant H \leqslant N-1$ et tout $\eta > 0$ petit :

$$|I_1| + |I_{2,1,1}| + |I_{2,1,2}| + |I_{2,2}|$$
$$\leqslant 2 \cdot \frac{1}{H+1} \cdot \nu(\mathbb{T}^d) + 4 \cdot \frac{H}{N} \cdot \nu(\mathbb{T}^d) + \nu(]-\eta, \eta]^d) + \frac{242^d C^2}{\eta^4 H} \nu(\mathbb{T}^d)$$
$$+ 4 \cdot \mathcal{K}_\varepsilon \cdot \nu(\mathbb{T}^d) \cdot H^{1+\varepsilon} \cdot \frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}}.$$

Ceci démontre le Résultat A. □

Démonstration du Résultat C.

En appliquant le Résultat A, nous obtenons via le lemme spectral

$$\left\|\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{S_k}\right\|_{2,\mu}^2$$
$$\leqslant 2 \cdot \|f\|_{2,\mu}^2 \left[\frac{1}{H+1} + 2 \cdot \frac{H}{N} + 2 \cdot \mathcal{K}_\varepsilon H^{1+\varepsilon} \cdot \frac{\log(N+2)}{\sqrt{N}} \right.$$
$$\left. + \frac{\mu_f(]-\eta, \eta]^d)}{2\|f\|_{2,\mu}^2} + \frac{12 \cdot 2^d C^2}{\eta^4 H}\right],$$

où μ est la mesure invariante sous T et μ_f la mesure spectrale de T au point $f \in L^2(\mu)$. De plus, par hypothèse, nous savons que $\mu_f(\{0\}) = 0$.

Notons

(i) $H = H(N) = [\log^\delta(N)]$, $N \geqslant 2$, avec $\delta > 2$ que nous désignerons ultérieurement.

(ii) $\eta = \eta(H) = 1/H^{\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ que nous fixerons ultérieurement.

Nous écrirons donc $\eta = \eta(N) = \eta \circ H(N), N \geqslant 2$. Il est alors aisé de constater que lorsque N parcourt les index partiels géométriques $\mathcal{N}_{\rho} = \{[\rho^k],\ k \in \mathbb{N}\}$, $\rho > 1$, pour tout $\delta > 2$ et tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$, la série de terme général

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{S_k} \right\|_{2,\mu}^2,$$

est convergente dès que

$$\forall \rho > 1, \quad \sum_{N \in \mathcal{N}_{\rho}} \mu_f\big([-\eta \circ H(N), \eta \circ H(N)]^d\big) < \infty.$$

Le problème est donc entièrement déterministe : le comportement aléatoire de la suite de vecteurs $\{S_k,\ k \geqslant 1\}$ étant complètement absorbé par le Résultat B. Afin de démontrer l'estimation ci-dessus, nous allons "resommer" cette série à termes positifs.

Fixons $\rho > 1$, et étudions la série : $\sum_{k \geqslant 2} \mu_f([-\eta \circ H([\rho^k]), \eta \circ H([\rho^k])]^d)$. Pour alléger les notations posons $a_k = \eta \circ H([\rho^k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Nous constatons que a_k est de l'ordre de $k^{-\delta\varepsilon}$.

Considérons une suite $\{D_k^d,\ k \geqslant 1\}$ d'ensembles μ_f-mesurables, disjoints et de réunion contenue dans $\mathbb{T}^d$ définie par :

Pour tout entier k, notons $D_k^d = \{\alpha \in \mathbb{T}^d$ tels que $\forall i = 1, \ldots d,\ \alpha_i \in [-a_k, a_k]$ et tels qu'il existe $i = 1, \ldots d,\ |\alpha_i| > a_{k+1}\}$. Ces ensembles sont disjoints et nous avons :

$$\bigcup_{k \geqslant 2} D_k^d \subset \mathbb{T}^d.$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\sum_{k \geqslant 2} \mu_f\big([-a_k, a_k]^d\big) = \sum_{k \geqslant 2} k \cdot \mu_f\big(D_k^d\big) = \sum_{k \geqslant 2} \int_{D_k^d} k \cdot \mu_f(d\alpha).$$

Introduisant la fonction Ψ à valeurs positives, définie sur $\mathbb{T}^d$ par $\Psi(0) = 0$ et

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \Psi(\alpha) = \frac{2}{\log \rho} \inf_{i=1}^{d} \frac{1}{|\alpha_i|^{1/\delta \cdot \varepsilon}}$$

nous obtenons la majoration :

$$\sum_{k\geqslant 2}\mu_f([-a_k,a_k]^d)\leqslant\sum_{k\geqslant 2}\int_{D_k^d}\Psi(\alpha)\cdot\mu_f(d\alpha)\leqslant\int_{\mathbb{T}^d}\Psi(\alpha)\cdot\mu_f(d\alpha).$$

Or, par hypothèse, il existe $\beta>0$ tel que

$$\int_{\mathbb{T}^d}\inf_{i=1}^{d}\frac{1}{|\alpha_i|^\beta}\mu_f(d\alpha)<\infty.$$

Il suffit alors de fixer $\delta>2$ et $\varepsilon\in]0,\frac{1}{4}[$ tels que $\beta=1/\delta\cdot\varepsilon$. Nous en déduisons que Ψ est μ_f-intégrable et donc que la série est convergente.

Sans restreindre la généralité, quitte à supposer f positive, en vertu du Lemme 1, nous obtenons :

$$\mu\left\{x\colon\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f\left(T^{S_k(\omega)}x\right)=0\right\}=1.$$

Ce résultat étant compris pour tout ω fixé dans l'ensemble Ω_0.

Ceci termine la démonstration du Résultat C. $\square$

Nous discutons maintenant la question de la vitesse de convergence des moyennes ergodiques itérées par des marches aléatoires. Pour ce faire nous fixons $0<\varepsilon<1$ et posons $\eta=1/H^{\varepsilon/4}$. Sous ces hypothèses, il n'est pas difficile de voir que pour $H<N$:

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f\circ T^{S_k}\right\|_{2,\mu}^2$$
$$=\mathrm{O}\left(H^{1+\varepsilon}\cdot\frac{\log N}{\sqrt{N}}+\frac{1}{H^{1-\varepsilon}}+\mu_f\left(\left[-\frac{1}{H^{\varepsilon/4}},\frac{1}{H^{\varepsilon/4}}\right]^d\right)\right).$$

Supposons maintenant que $H^4=N$. Ceci nous fournit l'estimation :

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f\circ T^{S_k}\right\|_{2,\mu}^2=\mathrm{O}\left(\frac{\log N}{N^{(1-\varepsilon)/4}}+\mu_f\left(\left[-\frac{1}{N^{\varepsilon/16}},\frac{1}{N^{\varepsilon/16}}\right]^d\right)\right).$$

Supposons enfin que la mesure spectrale μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et que sa densité est continue (à priori elle n'est qu'intégrable). Alors pour $\varepsilon = 2/3$:

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^{S_k} \right\|_{2,\mu} = \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log N}}{N^{1/24}} \right).$$

Remarque. – Notre estimation ne permet pas d'obtenir une vitesse en $\sqrt{N}$.

3. OUTILS GAUSSIENS

Nous commençons par donner deux inégalités de découplement de fonctions aléatoires gaussiennes et un résultat permettant de majorer des fonctions aléatoires gaussiennes à partir de leur mesure spectrale sur $\mathbb{R}^+$. Nous rappellons un théorème de Slépian–Fernique. Puis nous énonçons et démontrons le Lemme 4, utilisé dans la Section 2. Enfin nous établissons le Résultat B.

THÉORÈME 4 ([7]). – *Soit T un ensemble supposé fini ou bien dénombrable. Soit de plus $\{T_k,\ k \in [1,n]\}$ un recouvrement de T. Notons $X = \{X(t),\ t \in T\}$ une fonction aléatoire gaussienne sur T. Notons S l'ensemble $\{s \in T^n\colon\ \forall k \in [1,n],\ s_k \in T_k\}$.*

Alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}\Big\{ \sup_{k\in[1,n]} \Big[\sup_{t\in T_k} X(t) - \mathbb{E} \sup_{t\in T_k} X(t)\Big]\Big\} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sup_{s\in S}\Big\{\mathbb{E}\Big[\sup_{k\in[1,n]} X(s_k)\Big]\Big\}.$$

Nous trouvons une preuve de ce théorème dans le Chapitre 1 intitulé "*Les techniques sphériques, lois zéro-un, intégrabilité, évaluation de lois gaussiennes*", Théorème 1.6, pages 24 et 25 dans [7].

THÉORÈME 5 ([4]). – *Soit $\{G_k,\ k \geqslant 1\}$ une suite de vecteurs gaussiens à valeurs dans un espace de Banach $(B, \|\cdot\|)$. Alors :*

$$\mathbb{E} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|G_k\| \leqslant K_1 \Big\{ \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\|G_k\| + \mathbb{E} \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k \sigma_k| \Big\},$$

où $\{\lambda_k,\ k \geqslant 1\}$ est une suite isonormale, K_1 une constante universelle et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_k = \sup_{f\in B',\, \|f\|\leqslant 1} \big\|\langle G_k, f\rangle\big\|_2.$$

THÉORÈME 6 ([2]). – *Soit g une fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles, stationnaire, séparable et continue en moyenne quadratique. De plus, notons m sa mesure spectrale associée sur* $\mathbb{R}^+$*, telle que :*

$$\mathbb{E}[| g(s) - g(t) |^2] = 2\int (1 - \cos 2\pi u(s-t))\, m(du).$$

Alors :

$$\mathbb{E} \sup_{\alpha\in[0,1]} g(\alpha) \leqslant K_2 \left\{ \left[\int \min(u^2, 1)\, m(du) \right]^{1/2} + \int \left[m\{]\exp x^2, \infty[\} \right]^{1/2} dx \right\},$$

où K_2 *est une constante universelle.*

THÉORÈME 7 (Slépian–Fernique [6]). – *Soient T une ensemble fini de cardinal n, X et Y deux vecteurs gaussiens à valeurs dans* $\mathbb{R}^T$*,* d_X *et* d_Y *les écarts associés (c'est-à-dire, par exemple* $d_Y(s,t) = \sqrt{\mathbb{E}|Y(s) - Y(t)|^2}$*, pour s et t deux éléments de T).*

Supposons que :

$$\forall (t,s) \in T \times T, \quad d_Y(s,t) \leqslant d_X(s,t).$$

Dans ces conditions, nous avons aussi :

$$\mathbb{E} \sup_{t\in T} Y(t) \leqslant \mathbb{E} \sup_{t\in T} X(t).$$

Nous trouvons une démonstration de ce Théorème dans [6], Chapitre 2 "*Comparaison de fonctions aléatoires gaussiennes*", pages 17 et suivantes.

Commençons par déterminer un lemme probabiliste résultant du Lemme 1.

LEMME 4. – *Notons* $\{Z_h,\ h \geqslant 1\}$ *une suite de variables aléatoires positives et intégrables d'espace d'épreuves* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$*, vérifiant :*

$$\sup_{h\geqslant 1} \mathbb{E} Z_h < +\infty.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un ensemble $\Omega_0(\varepsilon)$ $\mathcal{B}$-mesurable de probabilité 1 *tel que pour tout $\omega \in \Omega_0(\varepsilon)$ nous ayons* :

$$\sup_{H\geqslant 1}\left|\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h(\omega)}{h^{\varepsilon}}\right| < +\infty.$$

Démonstration. – Par hypothèse il existe une constante positive $K < \infty$ telle que : $\forall h \geqslant 1$, $\mathbb{E}Z_h \leqslant K$. Fixons $\varepsilon > 0$ que l'on suppose petit (le résultat en sera d'autant plus exploitable). Nous avons ainsi : $\forall h \geqslant 1$, $\mathbb{E}\frac{Z_h}{h^{\varepsilon}} \leqslant \frac{K}{h^{\varepsilon}}$. Ceci étant encore valable au sens de Césaro, c'est-à-dire :

$$\forall H \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h}{h^{\varepsilon}}\right) \leqslant \frac{K}{H^{\varepsilon}}.$$

Pour tout $\rho > 1$, nous désignons par $\mathcal{N}_\rho = \{[\rho^k],\ k \in \mathbb{N}\}$ un index partiel.

Nous avons ainsi, pour tout $\rho > 1$ fixé :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{H\in\mathcal{N}_\rho}\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h}{h^{\varepsilon}}\right] \leqslant K\sum_{H\in\mathcal{N}_\rho}\frac{1}{H^{\varepsilon}} < +\infty.$$

Par conséquent :

$$P\left\{\omega\colon\ \lim_{\substack{H\to\infty\\ H\in\mathcal{N}_\rho}}\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h(\omega)}{h^{\varepsilon}} = 0\right\} = 1.$$

Le Lemme 1 permet de conclure. □

Nous démontrons maintenant le Résultat B. Nous cherchons donc à établir l'estimation suivante :

$$\sup_{h\geqslant 1}\left[\frac{1}{h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k^h\rangle - \mathbb{E}\exp 2i\pi\langle\alpha, S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right] < \infty. \tag{14}$$

Nous proposons une preuve en deux étapes. La première consiste en une réduction de l'estimation permettant de la rattacher à une évaluation gaussienne, la deuxième étudie plus précisément cette dernière.

Etape 1. Posons $S_k' = X_1' + \cdots + X_k'$, où la suite $\{X_k',\ k \geqslant 0\}$ est une copie indépendante de la suite de vecteurs $\{X_k, k \geqslant 0\}$. En vertu de l'inégalité de Jensen, (14) résultera de

$$\sup_{h\geqslant 1}\left[\frac{1}{h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right]$$
$$<\infty. \tag{15}$$

Cette démarche consiste donc à grossir l'espace aléatoire d'intégration afin de régulariser le plus possible les expressions rencontrées.

Fixons $h\geqslant 1$. La forme de $S_k^h = X_{k+1}+\cdots+X_{k+h}$ nous conduit naturellement à faire varier l'indice k suivant une progression arithmétique de raison h de sorte que les vecteurs aléatoires S_k^h correspondants soient indépendants par blocs de longueur multiple de h.

Nous introduisons donc, pour chaque h fixé, la partition $\{I_1^h,\ldots,I_h^h\}$ de l'ensemble $\mathbb{N}^*$, définie par $I_m^h=\{m+h\cdot r,\ r\in\mathbb{N}\}$ où m est un entier fixé entre 1 et h. De plus, pour tout entier $M\geqslant 2$, nous notons : $I_m^h(M)=I_m^h\cap[1,M-1]$.

LEMME 5. – *Soient* $\{g_k,\ k\geqslant 0\}$ *et* $\{g_k',\ k\geqslant 0\}$ *deux suites indexées sur* $\mathbb{N}$ *indépendantes, de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois* $\mathcal{N}(0,1)$. *Supposons de plus que ces suites sont indépendantes de la suite de vecteurs* $\{X_k,\ k\geqslant 0\}$. *Alors* (15) *sera réalisée dès que* :

$$\sup_{h\geqslant 1}\sup_{m=1,\ldots,h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}\frac{|\sum_{k\in I_m^h(N-h)}g_k\cdot\cos 2\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}$$
$$+\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}g_k'\cdot\sin 2\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}<\infty. \tag{16}$$

Démonstration. – Considérons la famille symétrique de fonctions aléatoires de la variable α, pour h et m fixés :

$$\{\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle,\ \alpha\in[0,1]^d,k\in I_m^h\}.$$

Si $\{\varepsilon_k,\ k\geqslant 0\}$ est une suite de variables aléatoires de Rademacher (prenant -1 ou 1 comme valeur avec probabilité $1/2$), deux à deux indépendantes, indépendante des suites de vecteurs aléatoires X et X', nous savons que $\{\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle,\ k\in I_m^h\}$ et

$$\{\varepsilon_k\cdot[\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle],\ k\in I_m^h\}$$

ont même loi.

Ainsi nous écrivons :

$$\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\frac{|\sum_{k=0}^{N-h-1}\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}$$

$$=\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{m=1}^h[\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\{\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle\}]}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^h\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\{\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle\}}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|.$$

h et m étant fixés, nous majorons ce qui précède en utilisant la symétrie des fonctions aléatoires ci-dessus :

$$\leqslant\sum_{m=1}^h\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\varepsilon_k\cdot\{\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle-\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^{'h}\rangle\}}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|$$

$$\leqslant 2\sum_{m=1}^h\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\varepsilon_k\cdot\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|.$$

Par conséquent afin de vérifier (15) il suffira de montrer

$$\sup_{h\geqslant1}\left[\frac1h\sum_{m=1}^h\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\varepsilon_k\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|\right]<\infty.$$

En fait, nous montrerons plus exactement que nous avons :

$$\sup_{h\geqslant1}\sup_{m=1,\dots,h}\mathbb{E}\sup_{N>h}\sup_{\alpha\in]\frac12,\frac12]^d}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)}\varepsilon_k\exp 2i\pi\langle\alpha,S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot\log(h+2)\cdot\log(N-h+2)}}\right|<\infty. \tag{17}$$

Ceci termine la procédure de symétrisation du problème.

Nous allons à présent appliquer le principe de contraction (cf. [14], page 169, pour le détail de ce principe, voir aussi [13] et [15]). De façon simple, ce principe repose sur le fait suivant : considérons $\{g_k,\ k\geqslant 0\}$ et $\{g_k^{'},\ k\geqslant 0\}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de lois $\mathcal{N}(0,1)$. Le principe de contraction s'appuie sur le fait suivant : $\{g_k,\ k\geqslant 0\}$ et $\{\varepsilon_k\cdot|g_k|,\ k\geqslant 0\}$ ont même loi. Il en va demême pour la suite $\{g_k^{'},\ k\geqslant 0\}$.

En supposant de plus, que ces suites sont indépendantes de la suite de vecteurs $\{X_k,\ k\geqslant 0\}$ ce principe nous affirme que (17) résultera de (16).

Ceci termine la preuve du Lemme 5. □

Etape 2. Nous établissons le point (16).

Fixons $h \geqslant 1$ et m un entier inférieur à h. Notons G fonction aléatoire vectorielle $\{G_N,\ N > h\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ par

$$G(\alpha, N) = \frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)} g_k \cdot \cos 2\pi \langle\alpha, S_k^h\rangle + g_k' \cdot \sin 2\pi \langle\alpha, S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot \log(h+2)\cdot \log(N-h+2)}}.$$

Le point (16) résultera d'une évaluation de

$$\mathbb{E} \sup_{N>h} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \left|G(\alpha, N)\right| < \infty$$

qui montrerait que

$$\sup_{h\geqslant 1} \sup_{m=1,\ldots,h} \mathbb{E} \sup_{N>h} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \left|G(\alpha, N)\right| < \infty. \tag{18}$$

Les entiers h et m étant fixés, commençons par étudier l'expression :

$$\mathbb{E} \sup_{N>h} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \left|G(\alpha, N)\right|. \tag{19}$$

Conditionnellement à la marche aléatoire, la fonction aléatoire vectorielle G est un vecteur aléatoire Gaussien. Ainsi, en vertu du Théorème 5, nous majorons (19) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{N>h} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} |G(\alpha, N)| \\
&\quad\leqslant K\Big\{E_X \sup_{N>h} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} |G(\alpha, N)| + \mathbb{E}\sup_{N>h} |\lambda_N \sigma_N|\Big\}
\end{aligned}$$

où $\{\lambda_N,\ N > h\}$ est une suite isonormale, K une constante universelle et pour tout $N > h$,

$$\sigma_N \leqslant \sqrt{\frac{\operatorname{card}(I_m^h(N-h))}{(N-h)\log(N-h+2)\log(h+2)}}.$$

En remarquant que

$$\forall h \geqslant 1,\ \forall m \leqslant h,\ \forall N > h,\quad \frac{\operatorname{card}(I_m^h(N-h))}{N-h} \leqslant 2,$$

nous obtenons sans difficulté l'estimation

$$\forall h \geqslant 1,\ \forall m \leqslant h,\ \forall N > h, \quad \sigma_N \leqslant \sqrt{\frac{2}{\log(N-h+2)}}.$$

Ceci permet d'en déduire que

$$\sup_{h\geqslant 1}\ \sup_{m=1,\ldots,h}\ \mathbb{E} \sup_{N>h} |\lambda_N \sigma_N| < \infty. \tag{20}$$

Par conséquent le point (18) résultera de

$$\sup_{h\geqslant 1}\ \sup_{m=1,\ldots,h}\ \mathbb{E}_X \sup_{N>h} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \frac{|\sum_{k\in I_m^h(N-h)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot \log(N-h+2)\cdot \log(h+2)}}$$

$$+ \frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)} g_k' \sin 2\pi \langle \alpha, S_k^h\rangle|}{\sqrt{(N-h)\cdot \log(N-h+2)\cdot \log(h+2)}} < \infty. \tag{21}$$

Les entiers h et m étant fixés, nous fixons l'entier $N > h$ et évaluons l'expression :

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha\in]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d} \left|G(\alpha)\right|,$$

où conditionnellement à la marche aléatoire,

$$G(\alpha) := \frac{\sum_{k\in I_m^h(N-h)} g_k \cos 2\pi \langle \alpha, S_k^h\rangle + g_k' \sin 2\pi \langle \alpha, S_k^h\rangle}{\sqrt{(N-h)\cdot \log(N-h+2)\cdot \log(h+2)}}.$$

est une fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles, stationnaire, séparable et continue en moyenne quadratique. Nous lui appliquons alors le Théorème 6.

Pour ce faire nous allons d'abord évaluer G à partir de ses marges, puis estimer individuellement celles-ci à l'aide du Théorème 6.

Considérons l'écart induit par $G(\alpha)$ sur $]\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$, $d \geqslant 1$, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$.

$$\forall (s,t) \in \left]\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d \times \left]\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d, \quad d_G^2(s,t) = \mathbb{E}\left|G(s) - G(t)\right|^2.$$

La stationnarité de G assure que :

$$d_G(s,t) \leqslant \sqrt{d}\sqrt{\sum_{j=1}^{d} d_G^{(j)^2}(s_j,t_j)},$$

où $d_G^{(j)}(s_j, t_j) = d_G(0, \ldots, 0, s_j, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)$.

Précisément, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant d$, $d_G^{(j)}(s_j, t_j)$ désigne la distance hilbertienne déterminant la loi la fonction aléatoire gaussienne

$$G^{(j)}(\alpha_j) = \frac{\sum_{k \in I_m^h(N-h)} g_k^{(j)} \cos 2\pi \alpha_j S_k^{h,(j)} + g_k^{'(j)} \sin 2\pi \alpha_j S_k^{h,(j)}}{\sqrt{(N-h) \cdot \log(N-h+2) \cdot \log(h+2)}},$$

où pour tout $j = 1, \ldots d$, $g_k^{h,(j)}$ et $g_k^{'h,(j)}$ sont des copies mutuellement indépendantes de g_k^h. Enfin, posons

$$d_{\tilde{G}}(s, t) = \sqrt{d} \sqrt{\sum_{j=1}^{d} d_G^{(j)^2}(s_j, t_j)}.$$

Cette distance détermine entièrement la fonction aléatoire gaussienne suivante :

$$\forall \alpha_j \in \left]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \widetilde{G}(\alpha_j) = \sqrt{d} \cdot \sum_{j=1}^{d} G^{(j)}(\alpha_j).$$

Par conséquent, par approximation de la modification à trajectoires continues et en vertu du Théorème 7, nous obtenons :

$$\mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d} G(\alpha) \leqslant \sqrt{d} \sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha_j \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} G^{(j)}(\alpha_j). \tag{22}$$

L'estimation (22) permet de contrôler $G(\alpha)$, $\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ à partir de ses marges $G^{(j)}(\alpha_j)$, $\alpha_j \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Nous définissons ensuite la mesure spectrale sur $\mathbb{R}^+$ associée à chacune de ses marges :

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant d, \quad m^{(j)} = \frac{1}{(N-h) \cdot \log(N-h+2) \cdot \log(h+2)} \cdot \sum_{k \in I_m^h(N-h)} \delta_{|S_k^{h,(j)}|},$$

où δ_{u_j} désigne la mesure de Dirac au point $u_j \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi en vertu du Théorème 6, la majoration

$$\sup_{h \geqslant 1} \sup_{m=1,\ldots,h} \mathbb{E}_X \sup_{N > h} \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d} \left| G_m^h(\alpha) \right| < \infty,$$

sera vérifiée dès lors que les deux familles de conditions suivantes seront vérifiées en posant

$$a_{N,h} = \frac{1}{(N-h)\cdot\log(N-h+2)\cdot\log(h+2)}$$

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant d, \quad \sup_{h\geqslant 1}\sup_{m=1,\dots,h} \mathbb{E}_X \sup_{N>h}[a_{N,h}]^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k\in I_m^h(N-h)} \min\left[(S_k^{h,(j)})^2, 1\right] \right\}^{1/2} < \infty, \tag{23a}$$

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant d, \quad \sup_{h\geqslant 1}\sup_{m=1,\dots,h} \mathbb{E}_X \sup_{N>h}[a_{N,h}]^{1/2} \cdot \int_0^\infty \left\{ \sum_{k\in I_m^h(N-h)} \mathbf{1}_{\{|S_k^{h,(j)}|>\exp x^2\}} \right\}^{1/2} dx < \infty. \tag{23b}$$

La condition (23a) est trivialement satisfaite.
En remarquant que

$$\forall k \in I_m^h, \quad \mathbf{1}_{\{|S_k^{h,(j)}|>\exp y^2\}}(x) \leqslant \mathbf{1}_{\{\sup_{i\in I_m^h(k)}|S_i^{h,(j)}|>\exp y^2\}}(x),$$

nous majorons le membre de gauche de (23b) par l'expression :

$$\sup_{h\geqslant 1}\sup_{m=1,\dots,h} \mathbb{E}_X \sup_{N>h}\left[\frac{1}{(N-h)\cdot\log(N-h+2)\cdot\log(h+2)}\right]^{1/2} \times M\big(N, (S_k^{h,(j)})_{k\in I_m^h}\big),$$

où $M = M(N, (S_k^{(j)})_{k\in I_m^h})$ est tel que

$$M \leqslant \sum_{k\in I_m^h(N-h)} \left[\sqrt{\log^+\big(\sup_{i\in I_m^h(k)}|S_i^{h,(j)}|\big)} - \sqrt{\log^+\big(\sup_{i\in I_m^h(k-1)}|S_i^{h,(j)}|\big)}\right]\cdot\sqrt{N-h} \tag{24}$$

en posant $S_0^{h,(j)} = 0$, ce qui ne restreint pas la généralité. En effet, il suffit d'écrire l'intégrale apparaissant dans (23b) selon la subdivision

$$\left\{ 0,\ \sqrt{\log^+\big(\sup_{i\in I_m^h(k)} |S_i^{h,(j)}|\big)},\ k \geqslant 1 \right\}.$$

Par conséquent, le membre de droite de l'inégalité (24) est majoré par

$$\sup_{h\geqslant 1}\ \sup_{m=1,\dots,h}\ \mathbb{E}_X \sup_{N>h} \sqrt{\frac{\log^+ (\sup_{k\leqslant N-h} |S_k^{h,(j)}|)}{\log(h+2)\cdot \log(N-h+2)}}. \tag{25}$$

Par la majoration directe

$$|S_k^{h,(j)}| \leqslant h \cdot \sup_{l=k+1}^{k+h} |X_l^{(j)}|,$$

pour établir que (25) est finie, il suffit de montrer :

$$\mathbb{E}_X \sup_{h\geqslant 1} \sup_{l\geqslant h} \sqrt{\frac{\log^+ |X_l^{(j)}|)}{\log(h+2)\cdot \log(l-h+2)}} < \infty.$$

Puis, en remarquant que pour tout $x \geqslant 5$ et tout $y \geqslant 5$, nous avons $\log(x)\cdot\log(y) \geqslant \log(x+y)$, la condition précédente proviendra de

$$\mathbb{E} \sup_{l\geqslant 1} \sqrt{\frac{\log^+ |X_l^{(j)}|}{\log(l+4)}} < \infty. \tag{26}$$

Or la condition de moment imposée à la suite de vecteurs aléatoires $\{X_k,\ k \geqslant 0\}$, entraîne que (26) est réalisée (voir [14, Section II, Lemme 2.3] indépendamment de l'entier h.

Par conséquent la condition (23b) est vérifiée. □

REMERCIEMENT

L'auteur remercie chaleureusement le référé.

RÉFÉRENCES

[1] Blum J.R., Cogburn R., On ergodic sequences of measures, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975) 359–365.

[2] Fernique X., Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Probab. Theory Related. Fields 88 (1991) 521–536.

[3] Fernique X., Un exemple illustrant l'emploi des méthodes gaussiennes, Juillet 1993, à paraître dans les actes de la "Conférence en l'honneur de J.P. Kahane", Paris.

[4] Fernique X., Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles, C. R. Acad. Sci. Paris 300 (1985) 315–318.

[5] Fernique X., Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces Lusiniens, Expositiones Mathematicae (1990).

[6] Fernique X., Régularité des trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes, in: Lect. Note, Vol. 480, 1974, pp. 1–97.

[7] Fernique X., Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens (livre), Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montreal, Montreal, 1997, ISBN 2-921120-28-3.

[8] Gamet C., Schneider D., Suites aléatoires universellement représentatives en moyenne, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabiliés et Statistiques 33 (1997) 269–282.

[9] Krengel U., Ergodic Theorems, W. de Gruyter, 1985.

[10] Kuipers L., Niederreitter H., Uniform Distribution of Sequences, Wiley, New York, 1974.

[11] Lemanczyk M., Lesigne E., Parreau F., Volny D., Wierdl M., Random ergodic theorems and real cocycles, Prépublication, 1998 (communication personnelle).

[12] Lacey M., Petersen K., Rudolph D., Wierdl M., Random ergodic theorems with universally representative sequences, Annales Institut H. Poincaré, Probabilité et Statistiques 30 (1994) 353–395.

[13] Schneider D., Convergence presque sûre de moyennes ergodiques perturbées, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I 319 (1994) 1201–1206.

[14] Schneider D., Théorèmes ergodiques perturbés, Israel J. Math. 101 (1997) 157–178.

[15] Schneider D., Weber M., Weighted averages of contractions along subsequences, W. de Gruyter, Berlin, New York, 1996, pp. 399–404.