ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

MÉLANIE GUENAIS

Spectres de M-extensions aléatoires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 35, n° 2 (1999), p. 239-259

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1999__35_2_239_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 35, n° 2, 1999, p. 239-259 *Probabilités et Statistiques*

Spectres de M-extensions aléatoires

par

Mélanie GUENAIS

Laboratoire de Topologie et Dynamique, UMR D1169 du CNRS,
Université PARIS-SUD, 91405 Orsay Cedex. e-mail:guenais@topo.math.u-psud.fr

ABSTRACT. – In this paper we study some spectral properties of a class of transformations called M-extensions, for a random construction. Such transformations are skew products over rank one transformations and their class contains transformations arising from generalized Morse sequences as defined by M. Keane. The same methods as for rank one transformations allow the determination of the spectral type of M-extensions, in terms of generalized Riesz products. For a random construction of M-extensions, we then prove their almost sure spectral singularity and mutual singularity on the orthocomplement in L^2 of the basis. We also show the almost sure spectral simplicity of these random M-extensions. Nevertheless we shall investigate conditions for almost sure spectral continuity on the orthocomplement of the basis of these transformations. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Le but de cet article est d'étudier certaines propriétés spectrales d'une classe de transformations appelées M-extensions, pour une construction aléatoire. Celle-ci est constituée de produits gauches au dessus de transformations de rang un, et contient en particulier les transformations issues des suites de Morse généralisées définies par M. Keane. À partir d'une description du type spectral à l'aide des produits de Riesz généralisés, on montre pour une construction aléatoire de ces transformations leur singularité spectrale et leur singularité mutuelle presque sûre sur l'orthogonal aux fonctions d'une variable. On établira également la simplicité spectrale presque sûre des M-extensions. Dans un dernier temps on discutera de conditions de continuité spectrale des M-extensions sur l'orthogonal aux fonctions d'une variable. © Elsevier, Paris

1. INTRODUCTION

Les transformations associées aux suites de Morse généralisées (cf [13] ou [16]) peuvent être considérées comme des produits gauches au dessus d'un odomètre qu'on appellera extensions de Morse généralisées (voir [7]). Elles sont plus précisément construites de la façon suivante : soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un odomètre, il est déterminé par la donnée d'une suite d'entiers (p_n) supérieurs à 2 telle que, si $h_n = \prod_0^{n-1} p_k$, X est le groupe compact $\{\sum_{0<n} x_n h_n,\ x_n \in \{0, .., p_n - 1\}\}$ muni de la tribu borélienne issue de sa topologie naturelle et de sa mesure de Haar. La transformation T est la translation ergodique $Tx = x + 1$. Soit $B_n = \{x \in X,\ x_0 = .. = x_{n-1} = 0\}$, les tours $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$ forment des partitions de plus en plus fines de X qui engendrent la tribu $\mathcal{B}$.

On définit un cocycle de Morse généralisé associé à T par une fonction mesurable ϕ de X à valeurs dans un groupe mesurable abélien compact $(G, \mathcal{G}, m)$, qui prend des valeurs constantes sur les étages $T^j B_n$, pour $0 \leq j < h_n - 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Une extension de Morse généralisée est un produit gauche au dessus d'un odomètre $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, associé à un cocycle de Morse généralisé ϕ : cette transformation notée T_ϕ est définie sur $(X \times G, \mathcal{B} \otimes \mathcal{G}, \mu \times m)$ par $T_\phi(x, g) = (Tx, g + \phi(x))$.

On étudie dans ce travail les propriétés spectrales de ces transformations pour une construction aléatoire. Ces propriétés s'étendent en fait à une classe plus générale de transformations, qui s'obtient en construisant de manière analogue des produits gauches au dessus des systèmes de rang un.

Une transformation T est de rang un sur l'espace probabilisé standard $(X, \mathcal{B}, \mu)$, si d'après la définition de R. Chacon dans [3] (voir aussi [6]) il existe une suite de tours de Rokhlin $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$ dont les partitions associées engendrent $\mathcal{B}$ et telles que B_n soit une réunion finie de $T^j B_{n+1}$ avec $j \geq 0$, contenant B_{n+1}. Un tel système est obtenu par la méthode dite de *cutting and stacking*, et il est déterminé par la donnée d'une suite d'entiers (p_n) et d'une suite croissante $(s_n(j))_{0 \leq j \leq p_n}$ avec $s_n(0) = 0$, à l'aide des relations de récurrence $h_{n+1} = h_n p_n + s_n(p_n)$ et $B_n = \cup_0^{p_n - 1} T^{j h_n + s_n(j)} B_{n+1}$. On peut remarquer qu'un odomètre est alors un système de rang un tel que $s_n(j) = 0$.

Comme pour les extensions de Morse généralisées on définit une M-extension par une extension T_ϕ au dessus d'une transformation T de rang un, lorsque ϕ est un M-cocycle associé à T, c'est à dire qu'il prend des valeurs constantes sur chacun des étages $T^j B_n$ pour $0 \leq j < h_n - 1$.

Un M-cocycle ϕ peut être construit par récurrence sur les tours de T : supposons en effet avoir défini ϕ sur la $n^{\text{ième}}$ tour. ϕ a donc une valeur constante sur chacun des étages $T^j B_n$ sauf le dernier où il n'est pas défini. À l'étape suivante, comme chaque $T^j B_n$, pour $0 \leq j < h_n - 1$ est une réunion de p_n étages de la $(n+1)^{\text{ième}}$ tour, ϕ est encore constant sur ces nouveaux étages. Pour déterminer ϕ à l'étape $n+1$, il suffit maintenant de choisir arbitrairement ses valeurs sur chaque étage manquant, sauf le dernier. Ceux-ci correspondent à ceux qui constituent $T^{h_n - 1} B_n$, ainsi qu'aux "spacers" ajoutés entre la $n^{\text{ième}}$ tour et la $(n+1)^{\text{ième}}$. Comme la mesure des tours de Rokhlin converge vers 1, cette construction permet bien de définir le cocycle presque partout.

On s'intéresse ici particulièrement aux propriétés spectrales des M-extensions. Soit T_ϕ une M-extension, son étude spectrale est celle de son opérateur associé, U_{T_ϕ}, défini sur $L^2(X \times G)$ par $U_\phi f = f \circ T_\phi$. Comme G est compact, l'ensemble de ses caractères, $\widehat{G}$, est discret. Notons pour tout $\chi \in \widehat{G}$, L_χ le sous-espace isomorphe à $L^2(X)$ donné par $L_\chi = \{f \otimes \chi,\ f \in L^2(X)\}$, on peut décomposer $L^2(X \times G)$ sous la forme

$$L^2(X \times G) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L_\chi .$$

Les sous-espaces L_χ sont fermés, invariants sous U_{T_ϕ}, et les restrictions de celui-ci aux L_χ sont unitairement équivalentes aux opérateurs V_χ de $L^2(X)$ définis par

$$V_\chi f = \chi \circ \phi . f \circ T .$$

L'étude spectrale de T_ϕ se ramène donc à celle de la famille $(V_\chi)_{\chi \in \widehat{G}}$.

Les extensions de Morse généralisées ont été étudiées et utilisées dans plusieurs travaux concernant l'étude spectrale de systèmes dynamiques mesurables. La simplicité des opérateurs V_χ est bien connue dans ce cas (cf [18]), et elle reste vraie pour nos opérateurs en général. D'autre part, un résultat remarquable de J. Kwiátkowski et M. Lemańczyk dans [12] prouve, pour tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$, l'existence d'une telle transformation telle que les valeurs de sa fonction de multiplicité soient exactement les éléments de l'ensemble donné. Il est également donné dans [8] une condition nécessaire et suffisante d'existence de suites de Morses généralisées dont les transformations admettent une composante de Lebesgue simple.

La première description du type spectral est donnée par M. Keane dans [14] en termes de g-mesures. D'autre part, dans le cas de la suite de Morse originale, M. Queffélec exprime le type spectral sous la forme d'un produit de Riesz ([18]). En suivant une méthode utilisée dans [11] par B. Host, J.F. Méla et F. Parreau, donnant la description du type spectral des transformations de rang un, on exprime de façon analogue le type spectral des M-extensions à partir de produits de Riesz généralisés.

On adaptera alors, suivant J. Bourgain dans [2] pour le cas des transformations de rang un, un critère connu de singularité mutuelle de 2 produits de Riesz généralisés qui permet d'obtenir des conditions de singularité et de simplicité spectrale des M-extensions. En fait, le critère précédent a été principalement utilisé pour des mesures aléatoires ([20], [15] ou [2]), et on obtiendra ici encore des résultats presque sûrs.

Les constructions de cocycles aléatoires ont été utilisées pour montrer en particulier l'existence de produits gauches à spectre à composante de Lebesgue : c'est en effet l'une des constructions données dans [10] par H. Helson et W. Parry pour obtenir des extensions à deux points au dessus de transformations non singulières avec une composante de Lebesgue (souvent de multiplicité spectrale infinie). On utilisera ici les constructions aléatoires suivantes.

On appelle **M-cocycle aléatoire** associé à T, un M-cocycle ϕ à valeurs dans un groupe G abélien compact métrisable, construit de la manière suivante selon la récurrence précédente : on choisit à l'étape n, indépendamment des étapes précédentes, les nouvelles valeurs de ϕ par des tirages indépendants et uniformes sur G. On établit alors les résultats suivants.

THÉORÈME 1.1. – *Soient T et T' deux transformations de rang un et ϕ' un M-cocycle associé à T'. Si la suite de tours associée à T est telle que $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n \geq 3$, alors pour presque tout M-cocycle aléatoire ϕ associé à T, le type spectral sur $L^2(X)^\perp$ de la M-extension associée est purement singulier et étranger au type spectral de $T'_{\phi'}$.*
Si $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n = 2$, le résultat est encore vrai lorsque $T = T'$.

THÉORÈME 1.2. – *Toute M-extension associée à un M-cocycle aléatoire admet presque sûrement un spectre simple.*

La dernière partie de cet article est consacrée à l'étude de l'existence ou non de valeurs propres pour les M-extensions, et répond partiellement à une question posée lors d'un Congrès par A. Iwanik. On y démontrera, à l'aide d'une caractérisation des valeurs propres connue pour des transformations de rang un (cf [17] ou [1]), les propriétés suivantes.

THÉORÈME 1.3. – *Soit T une transformation de rang un telle qu'on puisse trouver $\lambda < 3/16$ vérifiant $\underline{\lim}_{n\to\infty}(1 + s_n(p_n - 1))e^{-\lambda p_n} = 0$, alors pour presque tout M-cocycle aléatoire ϕ associé, le type spectral de T_ϕ sur $L^2(X)^\perp$ est continu.*

THÉORÈME 1.4. – *Si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un odomètre, alors les extensions de Morse généralisées aléatoires associées admettent un type spectral sur $L^2(X)^\perp$ presque sûrement continu.*

Enfin je remercie F. Parreau dont les encouragements et les conseils ont permis la mise en place de cet article.

2. CONDITIONS DE SINGULARITÉ SPECTRALE

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système de rang un, et $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$ une suite de tours de Rokhlin génératrice de la tribu vérifiant $B_n = \cup_0^{p_n - 1} T^{jh_n + s_n(j)} B_{n+1}$. Si ϕ est un M-cocycle pour T, à valeurs dans un groupe abélien compact (G, m), et $\chi \in \widehat{G}$, on pose $\varphi = \chi \circ \phi$. On s'intéresse au type spectral de l'opérateur $V = V_\chi$ défini sur $L^2(X)$ par $Vf = \varphi\, f \circ T$. On a $V^j f = \varphi^{(j)} f \circ T^j$ où

$$\varphi^{(j)}(x) = \varphi(x) \varphi \circ T(x) .. \varphi \circ T^{j-1}(x) \qquad \text{pour } j > 0,$$

$\varphi^{(-j)}(x) = \overline{\varphi}^{(j)}(T^{-j} x)$, et $\varphi^{(0)} = 1$. On peut remarquer qu'un M-cocycle est aussi un cocycle tel que $\phi^{(j)}$ soit constant sur B_n pour tout $0 \leq j < h_n$.

Soit $f_n = \mathbf{1}_{B_n} / \sqrt{\mu(B_n)}$, comme $\varphi^{(-j)}(T^j B_n) = \overline{\varphi}^{(j)}(B_n)$, on peut écrire pour tout $0 \leq j < h_n$

$$V^{-j} f_n = \frac{1}{\sqrt{\mu(B_n)}} \varphi^{(-j)} \mathbf{1}_{T^j B_n} = \frac{1}{\sqrt{\mu(B_n)}} \overline{\varphi}^{(j)}(B_n) \mathbf{1}_{T^j B_n}.$$

Alors l'espace cyclique engendré par f_n sous V, $[V, f_n]$ contient les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{T^j B_n}$ pour $0 \leq j < h_n$. Comme les tours de Rohklin $(T^j B_n)_{0 \leq j < h_n}$ engendrent la σ-algèbre $\mathcal{B}$, $L^2(X)$ est égale à la fermeture de la réunion des $[V, f_n]$. D'autre part $B_n = \cup_{0 \leq j < p_n} T^{jh_n + s_n(j)} B_{n+1}$ et en notant $\varepsilon_n(j) = \overline{\varphi}^{(jh_n + s_n(j))}(B_{n+1})$, on obtient la relation de récurrence :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_{j=0}^{p_n - 1} \overline{\varepsilon}_n(j) V^{-jh_n - s_n(j)}(f_{n+1}).$$

Les sous-espaces $[V, f_n]$ sont donc croissants et denses dans $L^2(X)$, ce qui assure la simplicité de V. De plus si ρ_n est la mesure spectrale associée à f_n, le type spectral de V est alors donné par $\bigvee_0^\infty \rho_n$.

Les relations entre les f_n donnent pour les mesures spectrales l'égalité $\rho_n = |P_n|^2\rho_{n+1}$, où P_n est le polynôme trigonométrique sur $\mathbb{T}$ correspondant :

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{p_n}} \sum_{j=0}^{p_n-1} \varepsilon_n(j)\, \mathrm{e}^{2i\pi x(jh_n+s_n(j))}.$$

La suite (P_n) est appelée la suite des polynômes associés à V, et on note $a_{n,j}(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x(jh_n+s_n(j))}$.

Comme $|P_n|^2$ n'a qu'un nombre fini de racines, les parties continues des mesures ρ_n sont toutes équivalentes. Par conséquent la partie discrète du type spectral est égale à celle de ρ_0. On obtient plus précisément le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1. – *Les mesures spectrales ρ_n sont égales aux limites vagues des produits $(\prod_n^p |P_j|^2\lambda)_{p\in\mathbb{N}}$, appelées produits de Riesz généralisés et notées $\prod_n^\infty |P_j|^2\lambda$. De plus, V admet un spectre simple, son type spectral ρ est égal à $\vee_0^\infty \rho_n$, et la partie continue de ρ est égale à la partie continue du produit de Riesz généralisé $\prod_0^\infty |P_n|^2\lambda$.*

Remarque. – Soit J_n l'ensemble des fréquences de P_n, alors tout entier admet au plus une décomposition sous la forme d'une somme finie $\sum j_n$ avec $j_n \in J_n$: comme en plus $\|P_n\|_2 = 1$, la suite (P_n) est dite normée 1-dissociée, et on a pour tout ensemble d'entiers J, $\|\prod_J P_j\|_2 = 1$. L'existence de la limite vague des produits $(\prod_n^p |P_j|^2\lambda)_{p\in\mathbb{N}}$ est une conséquence de cette propriété.
Le résultat est classique pour les transformations de rang un ([11],[4]), ainsi que pour les transformations issues des suites de Morse généralisées ([14]), et la démonstration s'adapte sans difficulté de celle de [4].

On utilise dans la suite en particulier un critère de singularité mutuelle du à G. Ritter, valable pour les produits de Riesz généralisés 1-dissociés. On peut l'énoncer de la façon suivante.

THÉORÈME 2.1. ([20]) – *Soient (P_n) et (P'_n) deux suites de polynômes trigonométriques normées et 1-dissociées. Si, pour tous sous-ensembles finis disjoints d'entiers Λ_1 et Λ_2, on a $\|\prod_{\Lambda_1} P_n \prod_{\Lambda_2} P'_n\|_2 = 1$, alors les deux produits de Riesz généralisés $\rho = \prod_0^\infty |P_n|^2\lambda$ et $\rho' = \prod_0^\infty |P'_n|^2\lambda$ sont étrangers s'il existe une sous-suite (n_j) telle que*

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} \prod_{k<j} \frac{|P_{n_k}|}{|P'_{n_k}|} d\rho' = 0\ .$$

En particulier, la mesure de Lebesgue λ peut être considérée comme un produit de Riesz généralisé avec $P'_n = 1$ pour tout n, ce qui permet de retrouver le critère de singularité utilisé par J. Bourgain dans [2]. Pour la suite, on aura besoin d'une formulation un peu différente du critère de G. Ritter, qui permet d'obtenir des résultats plus précis dans notre cas. On établit d'abord la condition suivante :

PROPOSITION 2.2. – *Soient* (P_n) *et* (P'_n) *deux suites de polynômes trigonométriques de* $\mathbb{T}$, *normées et 1-dissociées. Pour* $k \geq 0$, *on note* ρ_k *et* ρ'_k *les produits de Riesz généralisés* $\prod_k^\infty |P_n|^2\lambda$ *et* $\prod_k^\infty |P'_n|^2\lambda$. *Alors* ρ_0 *et* ρ'_0 *sont étrangers s'il existe une suite* (m_n) *vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout* $n \geq 0$, *la plus grande fréquence de* $\prod_0^n |P'_j|^2$ *est strictement inférieure à la plus petite fréquence positive non nulle de* ρ_{m_n+1}.

(ii) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho'_0 = 0.$

Remarque. – Comme (P_n) est 1-dissociée, ρ_n converge vaguement vers λ. Par conséquent, on peut toujours trouver une suite (m_n) satisfaisant la condition (i).

Preuve. – Notons $\rho = \rho_0$ et $\rho' = \rho'_0$, et supposons que ρ et ρ' ne soient pas étrangers.

Dans ce cas on peut trouver une fonction f positive telle que $f^2\rho' \leq \rho$ et $\int f d\rho' > 0$. Alors on a les inégalités :

$$\begin{aligned}
\left(\int f d\rho'\right)^2 &= \left(\int f \left(\frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|}\right)\left(\frac{\prod_0^n |P'_j|}{\prod_0^{m_n} |P_j|}\right) d\rho'\right)^2 \\
&\leq \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho' \int f^2 \left(\frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|}\right)\left(\frac{\prod_0^n |P'_j|}{\prod_0^{m_n} |P_j|}\right)^2 d\rho' \\
&\leq \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho' \int \frac{\prod_0^n |P'_j|}{\prod_0^{m_n} |P_j|} d\rho.
\end{aligned}$$

Or on a $\rho = \prod_0^{m_n} |P_j|^2 \rho_{m_n+1}$. Comme par construction ρ n'a pas d'atomes sur les racines des P_j pour $0 \leq j \leq m_n$, on a donc $\rho_{m_n+1} = (\prod_0^{m_n} |P_j|^2)^{-1}\rho + \rho''_{m_n}$, où ρ''_{m_n} est une mesure positive discrète concentrée sur les racines des P_j pour $0 \leq j \leq m_n$. En reportant dans les inégalités précédentes on obtient donc

$$\begin{aligned}
\left(\int f d\rho'\right)^2 &\leq \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho' \int \prod_0^n |P'_j| \prod_0^{m_n} |P_j| d\rho_{m_n+1} \\
&\leq \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho' \left(\int \prod_0^n |P'_j|^2 d\rho_{m_n+1}\right)^{1/2} \left(\int d\rho\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'après (i) on a $\int \prod_0^n |P_j'|^2 d\rho_{m_n+1} = 1$, de plus ρ est une mesure de probabilité, d'où pour tout n,

$$\left(\int f d\rho'\right)^2 \leq \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P_j'|} d\rho'.$$

Finalement, si $\underline{\lim}_{\ n\to\infty} \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P_j'|} d\rho' = 0$, alors ρ et ρ' sont nécessairement étrangers. □

3. PROPRIÉTÉS SPECTRALES PRESQUE SÛRE DES M-EXTENSIONS

3.1. Critère de singularité mutuelle presque sûr

Remarque. – Soit T une transformation de rang un, χ un caractère non trivial de G, et ϕ un M-cocycle aléatoire associé à T. Si $\varepsilon_n(j) = \overline{\chi} \circ \phi^{(jh_n+s_n(j))}(B_{n+1})$, alors la suite $(\varepsilon_n(j))_{(0<j<p_n,\, n\in\mathbb{N})}$ est une suite de variables indépendantes uniformément réparties dans $\mathcal{I}\mathrm{m}\chi$.

En effet, il suffit de démontrer que $(\phi^{(jh_n+s_n(j))}(B_{n+1}))$ est une suite de variables indépendantes et uniformément réparties sur G. Or pour tout n et pour tout $j \in \{1, .., p_n - 1\}$

$$\phi^{(jh_n+s_n(j))}(B_{n+1}) = \phi^{(jh_n+s_n(j)-1)}(B_{n+1}) + \phi \circ T^{jh_n+s_n(j)-1}(B_{n+1}),$$

qui est donc par construction la somme de deux variables indépendantes à valeurs dans G. Comme la loi de $\phi \circ T^{jh_n+s_n(j)-1}(B_{n+1})$ est uniforme sur G, elle est invariante par translation et la loi de $\phi^{(jh_n+s_n(j))}(B_{n+1})$ est encore uniforme sur G. On en déduit alors l'indépendance de la suite.

Dès que $\chi \neq 1$, il résulte que $\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)] = 0$ si $j \neq 0$. De plus, la suite des polynômes trigonométriques (P_n) associée à V_χ est une suite de variables aléatoires indépendantes, et on a aussi

$$\mathbb{E}[|P_n|^2] = \frac{1}{p_n} \sum_{j=0}^{p_n-1} \sum_{j'=0}^{p_n-1} a_{n,j}(x)\overline{a}_{n,j'}(x)\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j')] = 1.$$

Le résultat qui suit s'appliquera pour des opérateurs associés à une même transformation de rang un. Il sera utilisé dans deux situations différentes : d'une part pour montrer lorsque $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n = 2$ que pour tout M-cocycle ϕ' et pour presque tout M-cocycle aléatoire ϕ le type spectral de T_ϕ sur

$L^2(X)^{\perp}$ est étranger au type spectral de $T_{\phi'}$. D'autre part il servira surtout à démontrer le théorème 1.2. Par conséquent, la suite aléatoire (P'_n) introduite dans l'énoncé correspond soit à un M-cocycle fixe, non aléatoire, soit à un opérateur $V_{\chi'}$ associé au même M-cocycle aléatoire, pour $\chi \neq \chi'$.

PROPOSITION 3.1. – *Soit T une transformation de rang un et ϕ un M-cocycle aléatoire associé à T à valeurs dans G. Si χ est un caractère de G différent de 1, on note (P_n) la suite des polynômes trigonométriques associée à V_χ. Soit (P'_n) une suite quelconque de polynômes trigonométriques aléatoires indépendants, normée dans $L^2(\mathbb{T})$ et basée sur la suite des fréquences de (P_n), telle que pour tout couple (j,l) d'entiers distincts, P_j et P'_l sont indépendants. Alors les produits de Riesz généralisés $\rho_k = \prod_k^\infty |P_n|^2\lambda$ et $\rho'_k = \prod_k^\infty |P'_j|^2\lambda$ sont presque sûrement étrangers si*

$$\lim_{n\to\infty} \int \prod_k^n \mathbb{E}\big[|P_j P'_j|\big]\,d\lambda = 0.$$

Preuve. – D'après les hypothèses, et la remarque précédente, (P_n) et (P'_n) sont des suites de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout couple (j,l) d'entiers distincts, P_j et P'_l sont indépendantes. Comme $\chi \neq 1$ on a de plus $\mathbb{E}[|P_n|^2] = 1$.
Comme (P_n) et (P'_n) sont basés sur les mêmes fréquences, ρ_k et ρ'_k sont donc presque sûrement étrangers, d'après le théorème 2.1, si on a presque sûrement

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} \left|\prod_{j=k}^n \frac{P'_j}{P_j}\right| d\rho_k = 0\ .$$

Il suffit alors de vérifier, d'après le lemme de Fatou, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=k}^n \frac{|P'_j|}{|P_j|} d\rho_k] = 0.$

Prenons $k = 0$, on a $\rho_0 = \prod_0^n |P_j|^2 \rho_{n+1}$. Alors, comme ρ_0 n'a pas d'atomes aux racines des $(P_j)_{0\leq j\leq n}$, on peut écrire $\rho_{n+1} = \rho_0(\prod_0^n |P_j|^2)^{-1} + \rho''_n$, où ρ''_n est une mesure positive concentrée sur les racines des P_j pour $0 \leq j \leq n$. On a donc les égalités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} \left|\prod_{j=0}^n \frac{P'_j}{P_j}\right| d\rho_0\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^n |P'_j||P_j| \frac{d\rho_0}{\prod_{j=0}^n |P_j|^2}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^n |P'_j||P_j| \prod_{j=n+1}^k |P_j|^2 d\lambda\right].\end{aligned}$$

Or, on a pour tout $k > n$ l'inégalité

$$\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{n} |P_j'||P_j| \prod_{j=n+1}^{k} |P_j|^2 d\lambda$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{n} |P_j'|^2 \prod_{j=n+1}^{k} |P_j|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{k} |P_j|^2 d\lambda \right)^{1/2}.$$

Comme les suites (P_n) et (P_n') sont basées sur les mêmes fréquences, le second membre de l'inégalité vaut 1, et on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour la suite de variables aléatoires $(\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{n} |P_j'||P_j| \prod_{j=n+1}^{k} |P_j|^2 d\lambda)_{k>n}$. Par suite on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} \left| \prod_{0}^{n} \frac{P_j'}{P_j} \right| d\rho_0 \right] &= \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{n} |P_j'||P_j| \prod_{j=n+1}^{k} |P_j|^2 d\lambda \right] \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[\prod_{j=0}^{n} |P_j||P_j'|] \prod_{j=n+1}^{k} \mathbb{E}[|P_j|^2] d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{T}} \prod_{j=0}^{n} \mathbb{E}[|P_j P_j'|] d\lambda , \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}[|P_j|^2] = 1$. On obtient de la même façon, l'égalité analogue pour tout $k \geq 0$, ce qui termine la démonstration. □

3.2. Singularité mutuelle presque sûre sur $(L^2(X))^\perp$

LEMME 3.1. – *Soit T une transformation de rang un et $(T^j B_n)_{0\leq j<h_n}$ une suite de tours associée. Si χ est un caractère non trivial de G, ϕ un M-cocycle aléatoire associé à T, et (P_n) la suite des polynômes trigonométriques associés à V_χ, alors on a λ-presque partout, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|P_n|] < 1$.*
Si en plus $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n \geq 3$, alors on a aussi $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sup_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[|P_n|] < 1$.

Preuve. – Supposons d'abord que $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$ et $\chi^2 = 1$: Dans ce cas on obtient $\mathbb{E}[|P_n|] = |\cos(2\pi h_n x + \pi/4)|$ où h_n tend vers l'infini. Alors pour presque tout x on a bien $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{E}[|P_n|] < 1$.

Sinon, on va montrer que $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sup_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[|P_n|] < 1$. Comme $\mathbb{E}[|P_n|^2] = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[||P_n|^2 - 1|]^2 &\leq \mathbb{E}[(|P_n| - 1)^2]\mathbb{E}[(|P_n| + 1)^2] \\ &\leq 8(1 - \mathbb{E}[|P_n|]). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\inf_{\mathrm{T}} \mathbb{E}[||P_n|^2-1|]$ ne tend pas vers 0. Soit f une variable aléatoire bornée non identiquement nulle quelconque, l'inégalité de Hölder avec $p = 3/2$ et $q = 3$ donne

$$\mathbb{E}[|f|] \geq \mathbb{E}[|f|^2]^{3/2}\mathbb{E}[|f|^4]^{-1/2}.$$

Si $f = |P_n|^2 - 1$, on va alors minorer la variance de f et majorer $\mathbb{E}[|f|^4]$ pour obtenir le résultat voulu.

Avec les notations précédentes on a

$$|P_n|^2 - 1 = \frac{1}{p_n} \sum_{j \neq j'} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'}\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j'),$$

et comme $\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)] = 0$ si $j \neq 0$, on obtient les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(|P_n|^2 - 1)^2\right] &= \frac{1}{p_n^2} \sum_{j \neq j'} \sum_{l \neq l'} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'}a_{n,l}\overline{a}_{n,l'}\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j')\varepsilon_n(l)\overline{\varepsilon}_n(l')] \\
&= \frac{1}{p_n^2} \sum_{\substack{\{j,j'\}=\{l,l'\} \\ j \neq j'}} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'}a_{n,l}\overline{a}_{n,l'}\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j')\varepsilon_n(l)\overline{\varepsilon}_n(l')] \\
&= \frac{1}{p_n^2}\left(p_n^2 - p_n + \sum_{j \neq j'} a_{n,j}^2\overline{a}_{n,j'}^2\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)^2]\mathbb{E}[\overline{\varepsilon}_n(j')^2]\right).
\end{aligned}$$

Si $\chi^2 \neq 1$, alors $\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)^2 = 0]$ pour $j \neq 0$, et dans ce cas $\mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] = 1 - 1/p_n$.

Sinon on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] &= 1 - \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2\varepsilon_n(j)^2\right|^2\right] - \frac{1}{p_n} \\
&\geq 1 - \frac{2}{p_n}.
\end{aligned}$$

Reste à majorer l'espérance de la puissance $4^{\text{ième}}$. On a :

$$\mathbb{E}\left[\left(|Pn|^2 - 1\right)^4\right] = \frac{1}{p_n^4} \sum_{\substack{l_j \neq l'_j \\ j=1..4}} \prod_{j=1}^{4} a_{l_j}\overline{a}_{n,l'_j}\mathbb{E}[\prod_{j=1}^{4} \varepsilon_n(l_j)\overline{\varepsilon}_n(l'_j)].$$

Par hypothèse, les variables aléatoires $(\varepsilon_n(j))_{0 \leq j < p_n}$ sont indépendantes et $\mathbb{E}[\varepsilon_n(j)] = 0$ si $j \neq 0$. Ainsi, si dans l'expression précédente,

$\prod_1^4 \varepsilon_n(l_j)\varepsilon_n(l'_j)$ contient au moins 5 variables d'indices différents, alors il en existe une d'indice non nul indépendante de toutes les autres, et l'espérance totale est donc nulle. Par conséquent, $\mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^4]$ est une somme de quantités inférieures à $1/p_n^4$, prise sur tous les 8-uplets de $\{0, ..p_n - 1\}^8$ de cardinal inférieur à 4, elle est donc majorée par une constante M indépendante de tout.

On obtient finalement $\mathbb{E}[||P_n|^2 - 1|] \geq \frac{1}{\sqrt{M}}\left(1 - \frac{2}{p_n}\right)^{3/2}$ d'où si $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n \geq 3$, alors $\overline{\lim}_{n\to\infty} \inf_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[||P_n|^2 - 1|] > 0$. Si $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n = 2$, alors par hypothèse $\chi^2 \neq 1$, et on a dans ce cas $\mathbb{E}[||P_n|^2 - 1| \geq \frac{1}{\sqrt{M}}\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{3/2}$, ce qui complète la démonstration. □

Remarque. – Dans la démonstration précédente, si $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$ et $\chi^2 = 1$, alors $\mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] = \cos^2(2\pi h_n x)$ avec $h_n \to \infty$, et on a encore $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] > 0$ λ-presque partout.

Preuve du théorème 1.1. – Soit T et T' deux transformations de rang un et ϕ' un M-cocycle sur T' à valeurs dans G' compact. On considère ϕ un M-cocycle aléatoire associé à T, à valeurs dans un groupe compact G.

On va d'abord montrer que le type spectral associé à T_ϕ sur $L^2(X)^\perp$ est presque sûrement purement singulier. Comme $\widehat{G}$ est dénombrable, il suffit de montrer que pour tout caractère $\chi \neq 1$ de G le type spectral ρ de l'opérateur $V_\chi f = \chi \circ \phi . f \circ T$ est presque sûrement étranger à λ. Soit (P_n) la suite des polynômes trigonométriques associée à V_χ. D'après la proposition 2.1, ρ est purement singulier si et seulement si $\rho_0 = \prod_0^\infty |P_n|^2 \lambda$ est purement singulier, c'est à dire si presque sûrement on a $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int \prod_0^n |P_j| d\lambda = 0$ (cf théorème 2.1). Il suffit donc de montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{E}[\int \prod_0^n |P_j| d\lambda] = 0$.
Comme (P_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes on a $\mathbb{E}[\int \prod_0^n |P_j| d\lambda] = \int \prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] d\lambda$. De plus $\chi \neq 1$ entraine $\mathbb{E}[|P_j|]^2 \leq \mathbb{E}[|P_j|^2] = 1$, et donc $\prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|]$ converge vers 0 dès que $\mathbb{E}[|P_j|]$ ne tend pas vers 1 : (P_n) vérifiant les conditions du lemme 3.1, c'est vrai λ-presque partout. En plus $\prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] \leq 1$, d'où, par convergence dominée, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int \prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] d\lambda = 0$, ce qui donne presque sûrement la singularité spectrale de V_χ pour tout $\chi \neq 1$.

On suppose maintenant que $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n \geq 3$. On va montrer que le type spectral sur $L^2(X)^\perp$ de T_ϕ est presque sûrement étranger au type spectral de $T'_{\phi'}$.
Comme précédemment il suffit de montrer que pour tout $\chi \neq 1$ et pour tout $\chi' \in \widehat{G}'$, le type spectral de V_χ est presque sûrement étranger au

type spectral de $V'_{\chi'}$ défini par $V'_{\chi'}f = \chi' \circ \phi' f \circ T'$. Soit (P'_n) la suite des polynômes associée à $V'_{\chi'}$, on note ρ_k et ρ'_k les produits de Riesz généralisés $\prod_k^\infty |P_n|^2\lambda$ et $\prod_k^\infty |P'_n|^2\lambda$. Avec la proposition 2.1, ρ et ρ' sont presque sûrement étrangers si pour tout k, ρ_k est presque sûrement étranger à ρ'_k. Pour $k = 0$, on va montrer que ρ_0 et ρ'_0 sont presque sûrement étrangers. D'après la proposition 2.2, il suffit de montrer que pour une suite (m_n) telle que $\sum_0^n h'_k < h_{m_n}$, on a

$$\underline{\lim}_{\,n\to\infty} \int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho'_0 = 0 \qquad \text{presque sûrement,}$$

ce qui est vérifié dès que

$$\underline{\lim}_{\,n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho'_0\Big] = 0.$$

Comme $\rho'_0 = \prod_0^n |P'_j|^2 \rho'_n$, on a $(\prod_0^n |P'_j|^2)^{-1}\rho'_0 \le \rho'_n$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int \frac{\prod_0^{m_n} |P_j|}{\prod_0^n |P'_j|} d\rho'_0\right] &\le \mathbb{E}\left[\int \prod_0^{m_n} |P_j| \prod_0^n |P'_j| d\rho'_n\right] \\
&\le \int \prod_0^{m_n} \mathbb{E}[|P_j|] \prod_0^n |P'_j| d\rho'_n \\
&\le \prod_0^{m_n} \sup_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[|P_j|] \int \prod_0^n |P'_j| d\rho'_n \\
&\le \prod_0^{m_n} \sup_{\mathbb{T}} \mathbb{E}[|P_j|].
\end{aligned}$$

Comme $\chi \neq 1$, (P_n) vérifie les hypothèses du lemme 3.1 avec $\overline{\lim}_{\,n\to\infty} p_n \ge 3$, et on a donc $\underline{\lim}_{\,n\to\infty} \sup \mathbb{E}[|P_j|] < 1$. De plus $\mathbb{E}[|P_j|] \le 1$, et la dernière expression converge donc vers 0 lorsque $n \to \infty$. On en conclut finalement la singularité mutuelle presque sûre de ρ_0 et ρ'_0. Le raisonnement est inchangé pour $k \neq 0$, et on obtient bien le résultat annoncé pour $\overline{\lim}_{\,n\to\infty} p_n \ge 3$.

Il reste enfin à montrer que lorsque $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$, alors pour tout M-cocycle ϕ' sur T, le type spectral de T_ϕ sur $L^2(X)^\perp$ est presque sûrement étranger au type spectral de $T_{\phi'}$: comme précédemment il suffira de montrer quels que soient $\chi \neq 1$, $\chi' \in \widehat{G}'$ et $k \ge 0$, la singularité mutuelle presque sûre de ρ_k et ρ'_k. On se ramène de la même façon au cas où $k = 0$. On utilise dans ce cas la proposition 3.1 en prenant pour (P'_n) la suite de polynômes associée à $V'_{\chi'}$. On obtient alors

$$\int \prod_0^n \mathbb{E}\left[|P_j P'_j|\right] d\lambda = \int \prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] \prod_0^n |P'_j| d\lambda$$
$$\leq \left(\int \prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] d\lambda\right)^{1/2} \left(\int \prod_0^n \mathbb{E}[|P_j|] \prod_0^n |P'_j|^2 d\lambda\right)^{1/2}.$$

Comme $\chi \neq 1$, on a $\mathbb{E}[|P_j|] \leq \mathbb{E}[|P_j|^2]^{1/2} = 1$, et le second facteur de la dernière expression est inférieur à 1. De plus, d'après ce qui précède, ρ_0 est purement singulier, ce qui implique la convergence vers 0 du premier facteur, et on obtient donc pour tout k,

$$\lim_{n \to \infty} \int \prod_k^n \mathbb{E}[|P_j|] d\lambda = 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

3.3. Simplicité presque sûre des produits gauches associés à un M-cocycle

Preuve du théorème 1.2. – Soit T une transformation de rang un, et ϕ un M-cocycle aléatoire, à valeurs dans G. On rappelle que le type spectral de T_ϕ est égal à la somme des types spectraux des V_χ, et que sa fonction de multiplicité est la somme des fonctions de multiplicité des V_χ pour $\chi \in \widehat{G}$. Comme en plus les opérateurs V_χ admettent toujours un spectre simple, pour montrer la simplicité spectrale presque sûre de T_ϕ, il suffira de montrer que les opérateurs $(V_\chi)_{\chi \in \widehat{G}}$ admettent des types spectraux presque sûrement étrangers deux à deux. Soit alors χ et χ' deux éléments disctincts dans $\widehat{G}$, (P_n) et (P'_n) les suites de polynômes trigonométriques associés à V_χ et $V_{\chi'}$, il suffit comme précédemment de montrer que pour tout $k \geq 0$, les produits de Riesz généralisés $\rho_k = \prod_k^\infty |P_n|^2 \lambda$ et $\rho'_k = \prod_k^\infty |P'_n|^2 \lambda$ sont presque sûrement étrangers. Si $\chi' = 1$, le résultat est déja démontré dans le théorème 1.1, et on peut donc supposer que χ et χ' sont tous les deux différents de 1.

En utilisant la proposition 3.1 pour (P_n) et (P'_n), il suffit donc de montrer que $\underline{\lim}_{\, n \to +\infty} \int \prod_k^n \mathbb{E}[|P_j P'_j|] d\lambda = 0$. Comme χ et χ' sont différents de 1, on a alors $\mathbb{E}[|P_j P'_j|]^2 \leq \mathbb{E}[|P_j|^2]\mathbb{E}[|P'_j|^2] \leq 1$. On obtient finalement le résultat par convergence dominée, grâce au lemme suivant. □

LEMME 3.2. – *Avec les hypothèses précédentes, on a*

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \mathbb{E}[|P_n P'_n|] < 1 \qquad \lambda - \textit{presque partout.}$$

Preuve. – Comme $\mathbb{E}[|P_n|^2] = \mathbb{E}[|P'_n|^2] = 1$, on a les inégalités

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||P_n|^2 - |P'_n|^2|]^2 &\leq \mathbb{E}[||P_n| - |P'_n||^2]\mathbb{E}[||P_n| + |P'_n||^2] \\ &\leq 4\mathbb{E}[|P_n|^2 + |P'_n|^2 - 2|P_n P'_n|] \\ &\leq 8(1 - \mathbb{E}[|P_n P'_n|]) .\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\mathbb{E}[||P_n|^2 - |P'_n|^2|]$ ne tend pas vers 0 λ-presque partout. De même que dans le lemme 3.1, si $f = |P_n|^2 - |P'_n|^2$, on minore la variance de f et on majore $\mathbb{E}[|f|^4]$.

Comme $\chi \neq 1$ et $\chi' \neq 1$, $\mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^4]$ et $\mathbb{E}[(|P'_n|^2 - 1)^4]$ sont majorées par la constante M du lemme 3.1, et $\mathbb{E}[(||P_n|^2 - |P'_n|^2)^4]$ est donc bornée. Soit $\epsilon_n(j) = -\phi^{(jh_n + s_n(j))}(B_{n+1})$, on pose $\varepsilon_n(j) = \chi(\epsilon_n(j))$ et $\varepsilon'_n(j) = \chi'(\epsilon_n(j))$, en reprenant les notations précédentes on a

$$|P_n|^2 - |P'_n|^2 = \frac{1}{p_n} \sum_{j \neq j'} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'}(\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j') - \varepsilon'_n(j)\overline{\varepsilon}'_n(j')).$$

Comme la suite $(\epsilon_n(j))$ est une suite de variables aléatoires idépendantes telles que $\mathbb{E}[\chi(\epsilon_n(j))] = 0$ si $j \neq 0$ et $\chi \neq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[(|P_n|^2 - |P'_n|^2)^2\right] \\ &= \frac{1}{p_n^2} \sum_{j \neq j'} \sum_{l \neq l'} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'} a_{n,l}\overline{a}_{n,l'} \\ &\quad \times \mathbb{E}[(\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j') - \varepsilon'_n(j)\overline{\varepsilon}'_n(j'))(\varepsilon_n(l)\overline{\varepsilon}_n(l') - \varepsilon'_n(l)\overline{\varepsilon}'_n(l'))] \\ &= \mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] + \mathbb{E}[(|P'_n|^2 - 1)^2] \\ &\quad - \frac{2}{p_n^2} \sum_{\substack{\{j,j'\} = \{l,l'\} \\ j \neq j'}} a_{n,j}\overline{a}_{n,j'} a_{n,l}\overline{a}_{n,l'} \mathbb{E}[\varepsilon_n(j)\overline{\varepsilon}_n(j')\varepsilon'_n(l)\overline{\varepsilon}'_n(l')] \\ &= \mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] + \mathbb{E}[(|P'_n|^2 - 1)^2] \\ &\quad - \frac{2}{p_n^2} \sum_{j \neq j'} a_{n,j}^2 \overline{a}_{n,j'}^2 \mathbb{E}\left[\chi\chi'(\epsilon_n(j))\overline{\chi\chi'}(\epsilon_n(j'))\right]\end{aligned}$$

car étant donné que $\chi \neq \chi'$, on a $\mathbb{E}[\chi\overline{\chi'}(\epsilon_n(j))] = 0$ si $j \neq 0$.

Si $\chi\chi' \neq 1$, alors $\mathbb{E}[\chi\chi'(\epsilon_n(j))] = 0$ si $j \neq 0$ d'où

$$\mathbb{E}[(|P_n|^2 - |P'_n|^2)^2] = \mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] + \mathbb{E}[(|P'_n|^2 - 1)^2].$$

Comme d'après la démonstration du lemme 3.1 on a $\overline{\lim}_{n \to \infty} \mathbb{E}[(|P_n|^2 - 1)^2] > 0$ λ-presque partout, on obtient dans ce cas le résultat voulu. Si $\chi\chi' = 1$, comme $\chi^2 = 1$ entrainerait $\chi = \chi'$, on a donc dans ce cas $\chi^2 \neq 1$ et $\chi'^2 \neq 1$. D'après la démonstration du lemme 3.1, $\mathbb{E}[||P'_n|^2 - 1|^2] = \mathbb{E}[||P_n|^2 - 1|^2] = 1 - 1/p_n$ et il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[||P_n|^2 - |P'_n|^2|^2] &\geq 2\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) - \frac{2}{p_n^2}\sum_{j\neq j'} a_{n,j}^2 \overline{a}_{n,j'}^2 \\ &\geq 2\left(1 - \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2\right|^2\right).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que cette dernière expression ne tend pas vers 0 pour presque tout x. Comme on a

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2(x)\right|^2 dx = \frac{1}{p_n},$$

dès que (p_n) n'est pas bornée on en déduit que

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2(x)\right|^2 = 0 \qquad \lambda - \text{presque partout},$$

d'où le résultat dans ce cas.

Si (p_n) est bornée, il suffit de montrer que $\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2\right|^2 < 1$ λ-presque partout. Soit $c \geq 0$ et $A = \{x,\ \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2\right|^2 \geq c\}$. Alors pour tout n assez grand on a

$$\int_A \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2\right|^2 d\lambda \geq c\lambda(A).$$

D'autre part $R_n(x) = \frac{1}{p_n}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2(x)\right|^2$ est un polynôme trigonométrique vérifiant $\widehat{R}_n(0) = 1$ et $\widehat{R}_n(k) = 0$ pour $0 < |k| < h_n$. Alors pour toute fonction g continue positive, $\int gR_n d\lambda \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int g d\lambda$. De plus comme la suite (p_n) est bornée, (R_n) est bornée dans $L^2(\lambda)$, et on a donc pour tout borélien E, $\lim_{n\to\infty} \int_E R_n d\lambda = \lambda(E)$. Comme $p_n \geq 2$, il vient alors pour $E = A$:

$$c\lambda(A) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_A \frac{R_n}{p_n} d\lambda \leq \frac{\lambda(A)}{2}.$$

On en déduit donc que pour λ-presque tout x, on a $\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{p_n^2}\left|\sum_{j=0}^{p_n-1} a_{n,j}^2(x)\right|^2 \leq 1/2$, d'où le résultat. □

4. QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LE MÉLANGE FAIBLE PRESQUE SÛR

Cette partie est consacrée à la démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4. À cet effet, on utilise une caractérisation connue des valeurs propres pour des transformations de rang un ([17], [1] ou [5]). Celle-ci peut facilement être adaptée au cas des opérateurs V_χ : on rappelle dans la proposition suivante cette caractérisation ainsi qu'une preuve succinte.

PROPOSITION 4.1. – *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système de rang un, ϕ un M-cocycle associé à valeurs dans un groupe abélien compact G et χ un caractère de G. On note V l'opérateur unitaire défini sur $L^2(X)$ par $Vf = \chi \circ \phi \,.f \circ T$ et (P_n) la suite des polynômes associés à V. Alors λ est une valeur propre de V si et seulement si $\sum_0^{+\infty}(1 - |P_n(\lambda)|/\sqrt{p_n}) < +\infty$.*

Preuve. – On peut remarquer que la condition de la proposition est équivalente à $\prod_{n_0}^{\infty} |P_n(\lambda)|/\sqrt{p_n} > 0$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit λ une valeur propre de V associée à une fonction f de $L^2(X)$. Comme T est ergodique, $|f|$ est constante, égale à 1 par exemple. T étant une transformation de rang un, on peut lui associer une suite de tours emboitées $(T^j B_n)_{0 \le j < h_n}$ qui engendrent la tribu $\mathcal{B}$. Soit π_n la projection orthogonale de $L^2(X)$ sur le sous-espace engendré par $(\mathbf{1}_{T^j B_n})_{o \le j < h_n}$, on a alors $\|\pi_n f - f\|_2 \to 0$. Comme f est une fonction propre, on a $\lambda^j f = \varphi^{(j)} f \circ T^j$, d'où $\pi_n f = \sum_0^{h_n - 1} c_n(j) \mathbf{1}_{T^j B_n}$ avec

$$c_n(j) = \frac{1}{\mu(B_n)} \int_{T^j B_n} f d\mu = \frac{1}{\mu(B_n)} \lambda^j \int_{B_n} \overline{\varphi}^{(j)} f d\mu = \lambda^j \overline{\varphi}^{(j)}(B_n) c_n(0).$$

Alors $|c_n(j)| = |c_n(0)|$ et $\|\pi_n f\|_2^2 = h_n \mu(B_n) |c_n(0)|^2$. De plus $B_n = \cup_0^{p_n - 1} T^{j h_n + s_n(j)} B_{n+1}$, donc $c_n(0) = \frac{1}{\sqrt{p_n}} P_n(\lambda) c_{n+1}(0)$. Comme $\pi_n f$ converge vers f dans L^2, $(|c_n(0)|)_{n \ge 0}$ converge vers 1. Par conséquent il existe n_0 tel que $c_{n_0}(0) \neq 0$, d'où

$$\prod_{n_0}^{n} \frac{|P_j(\lambda)|}{\sqrt{p_j}} = \frac{|c_{n+1}(0)|}{|c_{n_0}(0)|} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{|c_{n_0}(0)|} > 0.$$

Réciproquement, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ vérifiant $\prod_{n_0}^{\infty} |P_n(\lambda)|/\sqrt{p_n} \ge M^{-1}$, on définit alors $f_n = \sum_0^{h_n - 1} c_n(j) \mathbf{1}_{T^j B_n}$, où pour tout $0 \le j < h_n$, $c_n(j) = \lambda^j \overline{\varphi}^{(j)}(B_n) / \prod_{n_0}^{n-1} (P_j(\lambda)/\sqrt{p_j})$. On a par hypothèse, $\|f_n\|_\infty = |c_n(0)| \le M$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \ge 0$, si $X_k = (\cup_{0 \le j < h_k} T^j B_k)^c$, les restrictions des f_n à $X \backslash X_k$ pour $n \ge k$ forment une martingale bornée, qui converge donc dans $L^2(X \backslash X_k)$. Par conséquent il existe $g_k \in L^2(X)$ telle que $\|f_n \mathbf{1}_{X \setminus X_k} - g_k\|_2 \to_{n\to\infty} 0$ et $g_k \mathbf{1}_{X_k} = 0$. Comme $g_{k+1}\mathbf{1}_{X\setminus X_k} = g_k$ et $\|g_k\|_2 \leq M$, la suite (g_k) converge dans $L^2(X)$ vers une fonction g non nulle (car $|c_n(0)| \geq 1$). De plus, $V(f_n \mathbf{1}_{X\setminus X_k}) = Vf_n \,.\mathbf{1}_{\cup_1^{h_k} T^j B_k}$, d'où

$$\begin{aligned}
&\|V(f_n \mathbf{1}_{X\setminus X_k}) - \lambda f_n \mathbf{1}_{X\setminus X_k}\|_2 \\
&\leq \|Vf_n - \lambda f_n\|_2 + \|f_n(\mathbf{1}_{\cup_0^{h_k-1} T^j B_k} - \mathbf{1}_{\cup_1^{h_k} T^j B_k})\|_2 \\
&\leq M(\sqrt{2\mu(B_n)} + \sqrt{\mu(B_k)}) \,.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|Vg_k - \lambda g_k\|_2 \leq M\sqrt{\mu(B_k)}$, et finalement que $Vg = \lambda g$. □

Preuve du théorème 1.3. – Comme dans les parties précédentes, il suffit de montrer que pour tout $\chi \neq 1$ dans $\widehat{G}$, V_χ a presque sûrement un type spectral continu. Si $(\varepsilon_n(j))_{0\leq j<p_n}$ est la suite associée à V_χ, on pose $R_n(x) = P_n(x)/\sqrt{p_n}$. D'après la proposition 4.1, il faut montrer que la série de terme général $(1 - |R_n(x)|)_{n\geq 0}$ diverge pour tout $x \in \mathbb{T}$, presque sûrement. On va montrer en fait que $\sup_{\mathbb{T}} |R_n| \not\to 1$ presque sûrement, ou plus précisément qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{\mathbb{T}} |R_n| > 1 - \varepsilon) = 0.$$

Comme $p_n R_n$ est une somme de variables aléatoires indépendantes de module 1, on établit grâce à des inégalités classiques (cf [19]) que pour tout n, $x \in \mathbb{T}$, et $0 < a < p_n - 1$

$$\mathbb{P}(|p_n R_n(x) - 1| > a) \leq 4\,\mathrm{e}^{-\dfrac{3}{16}\dfrac{a^2}{p_n - 1}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on note

$$K_n = \left[\frac{4\pi}{\varepsilon}\frac{h_{n+1}}{h_n}\right] + 1 \qquad \text{et } J_n = \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} s_n(p_n - 1)\right] + 1.$$

On définit alors pour tout (j,k) dans $\{0,..,J_n - 1\} \times \{0,..,K_n - 1\}$, $u_{j,k} = \frac{j}{J_n} + \frac{k}{h_n K_n}$. Quelque soit $x \in \mathbb{T}$, il existe $x_n \in \{0,..,[\frac{h_n}{J_n}] - 1\}$ et un couple (j,k) tel que $|x - \frac{x_n}{h_n} - u_{j,k}| \leq \frac{1}{K_n h_n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&|p_n R_n(x) - p_n R_n(x - \frac{x_n}{h_n})| \\
&\leq \sum_{l=0}^{p_n-1} | \mathrm{e}^{2i\pi(lh_n+s_n(l))x} - \mathrm{e}^{2i\pi(lh_n+s_n(l))(x-x_n/h_n)}| \\
&\leq \sum_{l=1}^{p_n-1} |1 - \mathrm{e}^{-2i\pi s_n(l)\frac{x_n}{h_n}}| \\
&\leq 2\pi(p_n-1)s_n(p_n-1)\frac{x_n}{h_n} \leq (p_n-1)\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}
&p_n|R_n(x - \frac{x_n}{h_n}) - R_n(u_{j,k})| \\
&\leq \sum_{l=1}^{p_n-1} | \mathrm{e}^{2i\pi(lh_n+s_n(l))(x-\frac{x_n}{h_n})} - \mathrm{e}^{2i\pi(lh_n+s_n(l))u_{j,k}}| \\
&\leq 2\pi(p_n-1)h_{n+1}|x - \frac{x_n}{h_n} - u_{j,k}| \leq (p_n-1)\frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

Finalement pour tout $x \in \mathbb{T}$ on peut trouver (j,k) tel que

$$\begin{aligned}
|R_n(x) - R_n(u_{j,k})| &\leq \left|R_n(x) - R_n\left(x - \frac{x_n}{h_n}\right)\right| \\
&+ \left|R_n\left(x - \frac{x_n}{h_n}\right) - R_n(u_{j,k})\right| < \frac{(p_n-1)}{p_n}\varepsilon.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sup_{\mathbb{T}} |R_n| > 1-\varepsilon) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0\leq j<J_n,\\ 0\leq k<K_n}} |R_n(u_{j,k})| > 1 - 3\varepsilon(1-\frac{1}{p_n})\right) \\
&\leq 4J_nK_n\,\mathrm{e}^{-\frac{3(p_n-1)}{16}(1-3\varepsilon)^2}.
\end{aligned}$$

Soit $\lambda < 3/16$ et (n_k) tels que $(s_{n_k}(p_{n_k}-1)+1) = o(\mathrm{e}^{\lambda p_{n_k}})$. Comme $h_{n+1}/h_n \sim_{n\to\infty} p_n$, on a $J_{n_k}K_{n_k} = o(p_{n_k}\mathrm{e}^{\lambda p_{n_k}})$. Par conséquent si on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda < 3/16(1-3\varepsilon)$, alors $\underline{\lim}_{\, n\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{\mathbb{T}}|R_n| > 1-\varepsilon) = 0$. □

D'après la récurrence sur les tours (T^jB_n), la condition pour que la mesure μ soit finie peut s'écrire $\sum_0^\infty s_n(p_n)/h_{n+1} < +\infty$, d'où $s_n(p_n-1) = o(h_{n+1})$. On déduit alors aisément du théorème 1.3 le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.1. – *Le type spectral sur $L^2(X)^\perp$ d'une M-extension aléatoire est presque sûrement continu, si on a* $\overline{\lim}_{n\to\infty} p_n/(n\,Log\,n) > 16/3$.

Preuve du théorème 1.4. – D'après le théorème 1.3, il suffit de considérer le cas où la suite (p_n) est bornée. Soit ϕ un M-cocycle à valeurs dans G, χ un caractère non trivial de G et V_χ l'opérateur de $L^2(X)$ associé. On note $(\varepsilon_n(j))_{0\leq j<p_n}$ la suite associée à V_χ, et $R_n(x) = \frac{1}{p_n}\sum_0^{p_n-1}\varepsilon_n(j)\,\mathrm{e}^{2i\pi j h_n x}$. Alors V_χ admet une valeur propre λ si et seulement si $\sum_0^\infty(1-|R_n(\lambda)|) < \infty$. Dans ce cas, $|R_n(\lambda)|$ tend vers 1, et comme p_n est bornée, $(R_n(\lambda))$ converge nécessairement vers 1 (car $\varepsilon_n(0) = 1$). On en déduit que

$$\sup_{1\leq j<p_n} |1-\varepsilon_n(j)\lambda^{jh_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{1}$$

En particulier pour $j = 1$, on a $\varepsilon_n(1)\lambda^{h_n} \to 1$, et comme $h_{n+1} = p_n h_n$, dès que V admet une valeur propre on doit avoir $\varepsilon_{n+1}(1)\overline{\varepsilon}_n(1)^{p_n} \to_{n\to\infty} 1$. Si ϕ est un M-cocycle aléatoire, les variables $(\varepsilon_n(j))$ sont indépendantes et uniformément réparties sur le sous-groupe du cercle unité $\mathcal{I}\mathrm{m}(\chi)$ qui est différent de $\{1\}$. Alors les variables aléatoires $\varepsilon_{n+1}(1)\overline{\varepsilon}_n(1)^{p_n}$ sont uniformes sur $\mathcal{I}\mathrm{m}(\chi)$ et indépendantes, par conséquent la probabilité que V_χ admette une valeur propre est égale à 0. Comme c'est vrai pour tout caractère non trivial χ de G, on en déduit le théorème 1.4. □

Dans le cas d'un cocycle de Morse à valeurs dans un groupe fini $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on peut énoncer un résultat non aléatoire, qui donne exactement la forme des cocycles dont l'extension de Morse associée admet des composantes spectrales discrètes.

COROLLAIRE 4.2. – *Si la suite (p_n) associée à l'odomètre $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est bornée, et si ϕ est un M-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors le type spectral de T_ϕ sur $(L^2(X))^\perp$ admet une composante discrète si et seulement s'il existe un diviseur de p, $d \neq 1$ tel qu'on ait à partir d'un certain rang les relations $\phi^{(h_{n+1})}(B_{n+2}) = p_n\phi^{(h_n)}(B_{n+1})$ mod d, et $\phi^{(jh_n)}(B_{n+1}) = j\phi^{(h_n)}(B_{n+1})$ mod d pour $1 \leq j < p_n$.*

Preuve. – Pour que le type spectral de T_ϕ sur $L^2(X)^\perp$ admette une composante discrète il faut et il suffit qu'il existe $\chi \neq 1$ tel que V_χ admet une valeur propre. Dans ce cas la suite $(\varepsilon_n(j))_{0\leq j<p_n}$ de $\mathcal{I}\mathrm{m}\chi$ associée à V_χ satisfait la condition (1) de la démonstration du théorème 1.4. Comme $\mathcal{I}\mathrm{m}\chi$ est un sous-groupe fini du cercle unité, la suite $(\varepsilon_n(j))$ vérifie à partir d'un certain rang les relations suivantes : $\varepsilon_{n+1}(1) = \varepsilon_n(1)^{p_n}$ et $\varepsilon_n(j) = \varepsilon_n(1)^j$ pour tout $1 < j < p_n$. Comme $\varepsilon_n(j) = \chi(\phi^{(jh_n)}(B_{n+1}))$ et

que χ correspond à un élément k de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$, on obtient bien les relations du corollaire avec $d = p/pgcd(p,k)$.
Réciproquement, ces relations montrent bien l'existence d'une valeurs propre pour V_χ. De plus, comme T est une translation ergodique, le type spectral de V_χ est soit purement discret soit continu (cf [9]). Par conséquent, ϕ vérifie la condition du corollaire 4.2 si et seulement si les opérateurs V_χ admettent un spectre discret, pour tous les éléments χ du sous-groupe de $\widehat{G}$ engendré par p/d. $\square$

RÉFÉRENCES

[1] J. Aaronson and M. Nadkarni, L^∞-eigenvalues and L^2-spectra of non singular tranformations, *Proc. London Math. Soc.*, Vol. **55**, 1987, pp. 538–570.
[2] J. Bourgain, On the spectral type of Ornstein's class one transformations, *Israel J. of Math.*, Vol. **84**, 1993, pp. 53-63.
[3] R.V. Chacon, A geometric construction of measure-preserving transformations, *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Proba.*, 1965 pp. 335-360.
[4] J. Choksi and M. Nadkarni, The maximal spectral type of a rank one transformation, *Canad. Math. Bull.*, Vol. **37**, 1994, pp. 29-36.
[5] J. Choksi and M. Nadkarni, The group of eigenvalues of a rank one transformation, *Canad. Math. Bull.*, Vol. 3**8**, 1995, pp. 42-54.
[6] S. Ferenczi, Systèmes de rang fini, *Thèse*, 1990.
[7] G.R. Goodson, J. Kwiatkowski, M. Lemańczyk and P. Liardet, On the multiplicity function of ergodic group extensions of rotations, *Studia Math.*, Vol. **102**, 1992, pp. 157-174.
[8] M. Guenais, Morse cocycles and simple Lebesgue spectrum, *à paraître dans Erg. Th. Dyn. Syst.*, 1998.
[9] H. Helson, Cocycles on the circle, *J. Operator Th.*, Vol. **16**, 1986, pp. 189-199.
[10] H. Helson and W. Parry, Cocycles and spectra, *Arkiv für Math.*, Vol. **16**, 1978, pp. 195-206.
[11] B. Host, J.F. Méla and F. Parreau, Non singular transformations and spectral analysis of measures, *Bull. Soc. math. France*, Vol. **119**, 1991, pp. 33-90.
[12] J. Kwiátkowski (Jr) and M. Lemańczyk, On the multiplicity function of ergodic group extensions 2, *Studia Math.*, Vol. **116**, 1995, pp. 207-215.
[13] M. Keane, Generalized Morse sequences, *Z. Wahr. Verw. Geb.*, Vol. **10**, 1968, pp. 335-353.
[14] M. Keane, Strongly mixing g-measures, *Inventiones Math.*, Vol. **16**, 1972, pp. 309-324.
[15] S.J. Kilmer and S. Saeki, On Riesz product measures; mutual absolute continuity and singularity, *Ann. Inst. Fourier*, Vol. **32**, 1988, pp. 63-93.
[16] J. Martin, Generalized Morse sequences on n symbols, *Proc. of the A.M.S.*, Vol. **54**, 1976, pp. 379-383.
[17] M. Osikawa, Point spectrum of non-singular flows, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, Vol. **13**, 1977, pp. 167-172.
[18] M. Queffélec, Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis, In A. Dold and B. Eckmann, editors, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1294. Springer-Verlag, 1987.
[19] A. Renyi, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris, 1966.
[20] G. Ritter, On Kakutani's theorem for infinite products of not necessarily independant functions, *Math. Ann.*, Vol. **239**, 1979, pp. 35-53.

(Manuscrit reçu le 3 février 1998;
version révisée reçue le 13 octobre 1998.)