ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

THIERRY DE LA RUE

L'ergodicité induit un type spectral maximal équivalent à la mesure de Lebesgue

Annales de l'I. H. P., section B, tome 34, nº 2 (1998), p. 249-263
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1998__34_2_249_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 34, n° 2, 1998, p. 249-263. *Probabilités et Statistiques*

L'ergodicité induit un type spectral maximal équivalent à la mesure de Lebesgue

par

Thierry DE LA RUE

Analyse et Modèles Stochastiques - UPRES-A CNRS 6085, Université de Rouen,
Mathématiques Site Colbert F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex
e-mail : delarue@univ-rouen.fr

ABSTRACT. – It is shown that every ergodic automorphism of a Lebesgue space induces, on a dense class of sets, some transformations whose maximal spectral type is equivalent to the Lebesgue measure. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – On montre ici que tout automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue induit, sur une famille dense de parties de l'espace, des transformations dont le type spectral maximal est équivalent à la mesure de Lebesgue. © Elsevier, Paris

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

On désigne par T un automorphisme ergodique de l'espace de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, m)$. Si $f \in L^2(m)$, on note σ_f la mesure spectrale de f sous l'action de T, c'est-à-dire la mesure positive finie sur le cercle $\mathbb{T}$, identifié à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\sigma_f}(p) \overset{\text{déf}}{=} \langle f \, , \, f \circ T^p \rangle_{L^2(m)}.$$

On munit l'ensemble des mesures positives finies sur $\mathbb{T}$ de la topologie de la convergence faible ; cette topologie étant métrisable, on fixe une distance d_{w^*} qui la définit. On note enfin λ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

1.1. Induction et propriétés spectrales

Kakutani ([7]) a introduit en 1943 la notion de transformation induite par T sur une partie mesurable non négligeable de X. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive, on définit la tribu $\mathcal{A}_A \overset{\text{déf}}{=} \{B \cap A,\ B \in \mathcal{A}\}$, et la probabilité $m_A \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{m(A)} m_{|\mathcal{A}_A}$. La *transformation induite par T sur A* est l'automorphisme T_A de l'espace de Lebesgue $(A, \mathcal{A}_A, m_A)$ défini par

$$T_A\, x \overset{\text{déf}}{=} T^{r_A(x)} x,$$

où $r_A(x) \overset{\text{déf}}{=} \inf\{k \geq 1,\ T^k x \in A\}$ est le *temps de retour de x en A*, qui est fini pour presque tout x dans A par le théorème de récurrence de Poincaré. Pour $p \geq 1$, on définit également de façon évidente le p-ième temps de retour en A, noté r_A^p, de sorte que pour presque tout x dans A,

$$T_A^p\, x = T^{r_A^p(x)} x.$$

L'induction conserve l'ergodicité, mais de multiples travaux prouvent que d'autres propriétés spectrales peuvent être gagnées ou perdues en induisant. Ainsi, Conze [2] et Hansel [6] ont établi que T pouvait toujours induire une transformation ayant une valeur propre fixée à l'avance (ce qui peut aussi être vu comme une conséquence de la théorie de l'équivalence au sens de Kakutani, développée un peu plus tard dans [9]). Inversement, Chacon a montré dans [1] que l'on pouvait aussi obtenir par induction par T une transformation faiblement mélangeante ; ce résultat fut amélioré par Friedman et Ornstein, qui prouvent dans [5] que l'on peut même induire une transformation mélangeante. De plus, l'ensemble des A pour lesquels T_A possède l'une de ces propriétés spectrales est toujours dense dans $\mathcal{A}$, la tribu $\mathcal{A}$ étant munie de la distance

$$d(A, B) \overset{\text{déf}}{=} m(A \Delta B)$$

(on identifie deux ensembles de différence symétrique négligeable).

On se propose ici de renforcer encore le résultat de Friedman et Ornstein, en montrant comment construire A tel que le type spectral maximal de T_A soit équivalent à la mesure de Lebesgue. Cette propriété, qui implique le mélange en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, peut se caractériser de la façon suivante : il existe une famille dénombrable (f_n), dense dans le sous-espace de L^2 formé des fonctions de moyenne nulle, telle que pour tout n, la mesure spectrale de f_n soit équivalente à la mesure de Lebesgue. On ne sait pas si cela entraîne le spectre de Lebesgue.

Il est déjà connu que T induit le spectre de Lebesgue dans les deux cas suivants : si T est d'entropie strictement positive, car alors T induit un K-système (voir [10]), ou si T est d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (par exemple si T est une rotation irrationnelle), car le flot horocyclique est lui-même d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (voir [11]), et a spectre de Lebesgue.

1.2. Mesure spectrale induite

Si $A \in \mathcal{A}$ est de mesure non nulle, pour tout $f \in L^2(m)$, $f_{|A}$ est dans $L^2(m_A)$. On note alors $\sigma_{f,A}$ la mesure spectrale de $f_{|A}$ sous l'action de T_A.

LEMME 1. – *Soit $(A_n)_{n\in}$ une suite d'éléments de A, et $A \in \mathcal{A}$. On suppose que A et tous les A_n sont de mesure non nulle, et que*

$$m(A\Delta A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors pour toute fonction f dans $L^\infty(m)$, on a

$$\sigma_{f,A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

Preuve. – Il suffit de montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$\widehat{\sigma_{f,A_n}}(p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\sigma_{f,A}}(p).$$

C'est évident pour $p = 0$, on suppose donc $p \geq 1$. Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons un entier N assez grand pour que

$$m(\{x \in A \,/\, r_A^p(x) > N\}) \;\leq\; \varepsilon,$$

puis prenons n assez grand pour que

$$N\, m(A\Delta A_n) \;<\; \varepsilon, \quad \text{et} \quad \left|1 - \frac{m(A)}{m(A_n)}\right| \;<\; \varepsilon.$$

Posons $B \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=1}^N T^{-j}(A\Delta A_n)$; alors $m(B) < \varepsilon$, et si x dans $A\cap A_n\cap B^c$ est tel que $r_A^p(x) \leq N$, alors $r_A^p(x) = r_{A_n}^p(x)$. On a donc

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\sigma_{f,A_n}}(p) - \widehat{\sigma_{f,A}}(p)| \\
&\quad = \left|\frac{1}{m(A)}\int_A f\bar{f}\circ T^{r_A^p}\, dm - \frac{1}{m(A_n)}\int_{A_n} f\bar{f}\circ T^{r_{A_n}^p}\, dm\right| \\
&\quad \leq \frac{\|f\|_\infty^2}{m(A)}\left(\left|1 - \frac{m(A)}{m(A_n)}\right| + m(A\Delta A_n) + m(r_A^p > N) + m(B)\right) \\
&\quad \leq 4\,\varepsilon\,\frac{\|f\|_\infty^2}{m(A)}.
\end{aligned}$$

□

2. ÉTALEMENT D'UNE MESURE SPECTRALE PAR PRODUIT GAUCHE AVEC UN BERNOULLI

Étant donné un nombre réel $\delta \in]0,1[$, on définit sur l'espace

$$\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$$

la probabilité P_δ, sous laquelle les coordonnées $(\omega_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ d'un point $\omega \in \Omega$ sont des variables aléatoires indépendantes vérifiant, pour tout entier p,

$$P_\delta(\omega_p = 1) \;=\; 1 - \delta.$$

Le décalage des coordonnées, noté S, définit sur Ω muni de la probabilité P_δ un système dynamique de Bernoulli.

$(X, \mathcal{A}, m, T)$ étant un système dynamique ergodique, on définit sur l'espace $\Omega\times X$ la transformation $\tilde{T}$ par

$$\tilde{T}(\omega, x) \stackrel{\text{déf}}{=} (S\omega, T^{\omega_0}x).$$

Cette transformation est appelée un *produit gauche* de S et T ; elle préserve bien sûr la mesure produit, et certaines de ses propriétés ont été étudiées par I. Meilijson [8], dans un cadre un peu plus général. Meilijson démontre le résultat suivant, utilisé notamment par Ornstein et Smorodinsky dans [10].

THÉORÈME 2 (Meilijson). – *Le produit gauche $\tilde{T}$ défini ci-dessus est un K-système.*

On n'aura pas besoin ici de ce théorème, mais il a néanmoins inspiré le travail qui va suivre.

2.1. Étude d'une mesure spectrale dans le produit gauche

Soit $f \in L^2(m)$, de moyenne nulle (ce qui assure que $\sigma_f(\{0\}) = 0$, car T est ergodique). On définit sur $\Omega\times X$ la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(\omega,x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)$, et on note $\sigma_{\tilde{f}}$ la mesure spectrale de $\tilde{f}$ sous l'action de $\tilde{T}$. Un K-système ayant toujours spectre de Lebesgue, le théorème de Meilijson énoncé ci-dessus laisse prévoir que $\sigma_{\tilde{f}}$ est absolument continue par rapport à λ. L'étude qui va suivre confirme ce résultat, et montre même que $\sigma_{\tilde{f}}$ est *équivalente* à λ.

On a

$$\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(0) \;=\; \left\|\tilde{f}\right\|^2_{L^2(P_\delta\otimes m)} \;=\; \|f\|^2_{L^2(m)} \;=\; \widehat{\sigma_f}(0),$$

puis, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(p) &= \int_{\Omega\times X} \tilde{f}\,\overline{\tilde{f}\circ\tilde{T}^p}\, d(P_\delta\otimes m)\\
&= \int_\Omega dP_\delta(\omega)\Big(\int_X f(x)\bar{f}(T^{\omega_0+\cdots+\omega_{p-1}}x)\,dm(x)\Big)\\
&= \int_\Omega dP_\delta(\omega)\Big(\int_{\mathbb{T}} e^{-i(\omega_0+\cdots+\omega_{p-1})\tau} d\sigma_f(\tau)\Big)\\
&= \int_{\mathbb{T}} d\sigma_f(\tau)\Big(\int_\Omega e^{-i(\omega_0+\cdots+\omega_{p-1})\tau} dP_\delta(\omega)\Big)\\
&= \int_{\mathbb{T}} (z_\delta(\tau))^p d\sigma_f(\tau),
\end{aligned}$$

où le complexe $z_\delta(\tau)$ est défini par

$$z_\delta(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\Omega e^{-i\omega_0\tau} dP_\delta(\omega) \;=\; (1-\delta)e^{-i\tau}+\delta e^{-2i\tau}. \tag{1}$$

Si $p < 0$, on a enfin

$$\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(p) \;=\; \overline{\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(-p)}.$$

Ce calcul montre déjà que, δ étant fixé, la mesure spectrale $\sigma_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ dans le produit gauche ne dépend que de la mesure spectrale de f sous l'action de T. Ceci nous amène à poser la définition suivante.

DÉFINITION 3. – *Si σ est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$ qui vérifie $\sigma(\{0\}) = 0$, et si $\delta \in]0,1[$, on appelle* δ-étalée de σ *la mesure sur $\mathbb{T}$, notée $(\sigma)_\delta$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par*

$$\widehat{(\sigma)_\delta}(0) \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\sigma}(0) \;=\; \sigma(\mathbb{T}),$$

pour $p > 0$, $\quad \widehat{(\sigma)_\delta}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_{\mathbb{T}} (z_\delta(\tau))^p d\sigma(\tau),$

où $z_\delta(\tau)$ est défini par (1),,

et pour $p < 0$, $\quad \widehat{(\sigma)_\delta}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\widehat{(\sigma)_\delta}(-p)}.$

2.2. Propriétés de la δ-étalée d'une mesure σ

PROPOSITION 4. – *Soit σ une mesure finie non nulle sur $\mathbb{T}$, telle que $\sigma(\{0\}) = 0$, et soit $\delta \in]0,1[$. La δ-étalée de σ est toujours équivalente à λ, sa densité étant donnée par*

$$\frac{d(\sigma)_\delta}{d\lambda}(t) \;=\; f_\delta(\sigma,t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau,t)\,d\sigma(\tau),$$

où

$$K_\delta(\tau, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \Re e \frac{1 + e^{it} z_\delta(\tau)}{1 - e^{it} z_\delta(\tau)}.$$

Cette densité est continue et strictement positive sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$. Enfin, la δ-étalée de λ reste égale à λ.

Preuve. – On vérifie facilement que la fonction K_δ est définie et continue en dehors de $(0, 0)$, et qu'elle est strictement positive dès que $\tau \neq 0$. On en déduit que la fonction $f_\delta(\sigma, .)$ est strictement positive (éventuellement infinie pour $t = 0$), et qu'elle est continue en dehors de zéro par le théorème de convergence dominée.

Par ailleurs, si $\tau \neq 0$ est fixé, comme $|z_\delta(\tau)| < 1$, la fonction $t \longmapsto K_\delta(\tau, t)$ n'est autre qu'un noyau de Poisson, que l'on peut écrire sous la forme

$$K_\delta(\tau, t) \;=\; 1 + \sum_{n \geq 1} \left(e^{int} z_\delta(\tau)^n + e^{-int} \overline{z_\delta(\tau)}^n \right).$$

En particulier, cette fonction est d'intégrale 1. Le théorème de Fubini permet alors de calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f_\delta(\sigma, .)$: pour tout entier $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f_\delta(\sigma, t) e^{-ipt}\, dt &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau, t) e^{-ipt}\, dt \right) d\sigma(\tau) \\ &= \int_{\mathbb{T}} z_\delta(\tau)^p\, d\sigma(\tau) \\ &= \widehat{(\sigma)_\delta}(p), \end{aligned}$$

et ceci suffit pour prouver que $(\sigma)_\delta$ admet $f_\delta(\sigma, .)$ comme densité.

Enfin, remarquons que pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{(\lambda)_\delta}\,(p) &= \int_{\mathbb{T}} \left((1 - \delta) e^{-i\tau} + \delta e^{-2i\tau} \right)^p d\lambda(\tau) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (1 - \delta)^{p-k} \delta^k \int_{\mathbb{T}} e^{-i(p+k)\tau} d\lambda(\tau) \;=\; 0. \end{aligned}$$

On a donc bien $(\lambda)_\delta = \lambda$, ce qui achève la preuve de la proposition 4. □

Des résultats qui viennent d'être établis, on déduit facilement un corollaire utile dans la suite.

COROLLAIRE 5. – *Pour tout $t \neq 0$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau, t)\, d\lambda(\tau) \;=\; 1.$$

2.3. Approximations de la δ-étalée de σ_f par induction

On fixe ici un réel $\delta \in]0, 1/2[$, et une fonction simple de moyenne nulle

$$f = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \mathbb{1}_{P_l},$$

où les α_l sont des nombres complexes, et $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \{P_1, \ldots, P_L\}$ est une partition finie de X.

Prenons un entier $h \geq 3$. Le lemme de Rokhlin-Halmos assure qu'il existe un F dans A tel que

- $F, TF, \ldots, T^{h-1}F$ sont deux à deux disjoints,
- $m\Big(X \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} T^j F\Big) < 1/h$,
- F est indépendant de la partition $\mathcal{Q} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigvee_{j=0}^{h-1} T^{-j}\mathcal{P}$.

Pour $k \geq 1$, soit $S_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, 2\}^k$. Si $s = (s_0, \ldots, s_{k-1}) \in S_k$, on note

$$P_\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} P_\delta(\omega_0 = s_0, \ldots, \omega_{k-1} = s_{k-1}).$$

On peut partitionner F en 2^h parties notées F_s, $s \in S_h$, de telle sorte que, pour tout atome Q de $\mathcal{Q}$, et tout $s \in S_h$, on ait

$$m(F_s \cap Q) = m(F)\, m(Q)\, P_\delta(s).$$

Posons aussi, pour $s = (s_0, \ldots, s_{h-1}) \in S_h$,

$$r(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{j \geq 0 \,/\, s_0 + \cdots + s_j \leq h - 1\}.$$

On définit enfin $B \in \mathcal{A}$ par

$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{s \in S_h} T^{s_0} F_s \cup T^{s_0 + s_1} F_s \cup \cdots \cup T^{s_0 + \cdots + s_{r(s)}} F_s.$$

LEMME 6. – *Étant donné $\varepsilon > 0$, si on choisit h assez grand, l'ensemble B construit ci-dessus vérifie*

$$m(B) > 1 - 2\delta, \tag{2}$$

$$\text{et} \quad d_{w^*}\Big((\sigma_f)_\delta, \sigma_{f,B}\Big) < \varepsilon. \tag{3}$$

Preuve – On vérifie facilement que

$$X \setminus B \subset F \cup \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} T^j F\right) \cup TD,$$

où

$$D \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{h-2} \bigcup_{\substack{s\in S_h \\ s_j=2}} T^j F_s.$$

Or, j étant fixé, on a

$$m\left(\bigcup_{\substack{s\in S_h \\ s_j=2}} T^j F_s\right) = \delta\, m(F),$$

et donc, dès que h est assez grand,

$$m(X \setminus B) < 2/h + \delta < 2\delta,$$

ce qui prouve (2).

Pour établir (3), il suffit de voir que, étant donné $p \in \mathbb{N}$, $\widehat{\sigma_{f,B}}(p)$ est arbitrairement proche de $\widehat{(\sigma_f)_\delta}(p)$ pour h assez grand. Pour cela, écrivons $\widehat{\sigma_{f,B}}(p)$ sous la forme

$$\widehat{\sigma_{f,B}}(p) = \frac{1}{m(B)}\left(\int_{B_1} f\, \bar{f}\circ T_B^p\, dm + \int_{B_2} f\, \bar{f}\circ T_B^p\, dm\right),$$

avec

$$B_1 \stackrel{\text{déf}}{=} B \cap (TF \cup T^2F \cup \cdots \cup T^{h-1-2p}F), \quad \text{et } B_2 \stackrel{\text{déf}}{=} B \setminus B_1.$$

Comme $m(B_2) \leq 2p/h$, pour h assez grand, en utilisant (2) on obtient

$$\left|\frac{1}{m(B)} \int_{B_2} f\, \bar{f}\circ T_B^p\, dm\right| \leq \frac{1}{1-2\delta}\, \frac{2p}{h}\, \|f\|_\infty^2. \tag{4}$$

Puis, pour $j \in \{1, \ldots, h-1-2p\}$, on a

$$\int_{B\cap T^j F} f\, \bar{f}\circ T_B^p\, dm = \sum_{\substack{s\in S_h \\ \exists k,\ s_0+\cdots+s_k=j}} \int_{T^j F_s} f\, \bar{f}\circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}}\, dm.$$

Or, par construction de F_s, $T^j F_s$ est à chaque fois indépendant de la partition $\mathcal{P} \vee T^{-(s_{k+1}+\cdots+s_{k+p})}\mathcal{P}$. Dans le second membre de l'égalité ci-dessus, on a donc

$$\int_{T^j F_s} f\, \bar{f}\circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}}\, dm = m(F_s) \int_X f\, \bar{f}\circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}}\, dm.$$

En écrivant $m(F_s) = m(F)P_\delta(s) = m(F)P_\delta(s_0,\dots,s_k)P_\delta(s_{k+1},\dots,s_{k+p})$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{B\cap T^jF} f\,\bar f\circ T_B^p\,dm\\
&= \left(m(F)\sum_{s_0+\cdots+s_k=j} P_\delta(s_0,\dots,s_k)\right)\times\\
&\qquad\sum_{(s_{k+1},\dots,s_{k+p})\in S_p} P_\delta(s_{k+1},\dots,s_{k+p})\int_X f\,\bar f\circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}}\,dm\\
&= m(B\cap T^jF)\,\widehat{(\sigma_f)_\delta}\,(p),
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{m(B)}\int_{B_1} f\,\bar f\circ T_B^p\,dm \;=\; \frac{m(B_1)}{m(B)}\,\widehat{(\sigma_f)_\delta}\,(p). \tag{5}$$

Or, si h est assez grand pour avoir (2), on a

$$1-\frac{2p}{h(1-2\delta)} \;\le\; \frac{m(B_1)}{m(B)} \;\le\; 1.$$

On déduit alors facilement (3) de (4) et (5). □

Observons maintenant que l'ensemble B construit précédemment est indépendant de $\mathcal{P}$, ce qui entraîne

$$\int_B f\,dm \;=\; 0.$$

Enfin, il n'est pas difficile de voir que cette construction peut s'effectuer en traitant simultanément un nombre fini de fonctions simples de moyenne nulle. En conclusion de cette partie, on peut donc formuler la proposition suivante.

PROPOSITION 7. – *Si δ est un nombre réel dans $]0,1/2[$, et si $f_1,\dots,f_n$ sont n fonctions simples de moyenne nulle sur X, pour tout $\varepsilon>0$ on peut construire $B\in\mathcal{A}$, indépendant de chaque f_i, vérifiant*

$$m(B) \;>\; 1-2\delta,$$

et pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$,

$$d_{w^*}\Big((\sigma_{f_i})_\delta,\sigma_{f_i,B}\Big) \;<\; \varepsilon.$$

3. INDUCTION DU TYPE SPECTRAL MAXIMAL ÉQUIVALENT À LA MESURE DE LEBESGUE

3.1. Contrôle de la densité

LEMME 8. – *Soit σ une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, ayant une densité φ strictement positive et continue sur $\mathbb{T}\setminus\{0\}$, soit J un fermé de $\mathbb{T}$ ne contenant pas* 0, *et soit* $c\in]0,1[$. *Alors, pour δ assez petit, on peut trouver $\rho>0$ tel que, pour toute mesure ν positive finie vérifiant $d_{w^*}\Big(\sigma,\nu\Big)<\rho$, on ait*

$$\forall t\in J,\quad c\,\varphi(t)\ <\ f_\delta(\nu,t)\ <\ \frac{1}{c}\,\varphi(t).$$

Preuve. – Choisissons $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $t\in J$, $c\,\varphi(t)<\varphi(t)-\varepsilon$, et $\frac{1}{c}\,\varphi(t)>\varphi(t)+\varepsilon$. D'après la définition de $z_\delta(\tau)$, on a clairement

$$z_\delta(\tau)\ \xrightarrow[\delta\to 0]{}\ e^{-i\tau},$$

cette convergence étant uniforme par rapport à $\tau\in\mathbb{T}$. Puis, en écrivant

$$K_\delta(\tau,t)\ =\ \frac{1-|z_\delta(\tau)|^2}{|1-e^{it}z_\delta(\tau)|^2},$$

on voit facilement que pour $t\neq\tau$,

$$K_\delta(\tau,t)\ \xrightarrow[\delta\to 0]{}\ 0,$$

et que pour tout $\theta>0$, cette convergence est uniforme sur l'ensemble des (τ,t) tels que $|\tau-t|>\theta$. Comme, de plus, $K_\delta(\tau,t)$ est partout positif et vérifie d'après le corollaire 5, pour tout $t\neq 0$,

$$\int_{\mathbb{T}}K_\delta(\tau,t)\,d\lambda(\tau)\ =\ 1,$$

on en déduit que

$$f_\delta(\sigma,t)\ =\ \int_{\mathbb{T}}K_\delta(\tau,t)\,\varphi(\tau)d\lambda(\tau)\ \xrightarrow[\delta\to 0]{}\ \varphi(t),$$

uniformément par rapport à t sur J.

Soit donc δ assez petit pour que $|\varphi(t)-f_\delta(\sigma,t)|<\varepsilon/2$ pour tout $t\in J$. Il reste à prouver l'existence d'un voisinage U de σ tel que, si $\nu\in U$, on ait pour tout $t\in J$, $|f_\delta(\nu,t)-f_\delta(\sigma,t)|<\varepsilon/2$. Pour cela, observons que la famille de fonctions $\left\{K_\delta(.,t),\ t \in J\right\}$ forme un compact de $C(\mathbb{T})$. On peut donc trouver une partie finie $\{t_1,\ldots,t_r\}$ de J telle que

$$\forall t \in J, \quad \exists j \in \{1,\ldots,r\}, \quad \|K_\delta(.,t) - K_\delta(.,t_j)\|_\infty \ < \ \frac{\varepsilon}{12\,\sigma(\mathbb{T})}. \tag{6}$$

On peut ensuite trouver un voisinage U de σ tel que, pour toute mesure ν dans U, on ait $\nu(\mathbb{T}) < 2\,\sigma(\mathbb{T})$ et pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$,

$$\left|\int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau,t_j)\,d\nu(\tau) - \int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau,t_j)\,d\sigma(\tau)\right| \ < \ \varepsilon/4.$$

Ainsi, pour tout $t \in J$, en choisissant j donné par (6), on a dès que $\nu \in U$

$$\begin{aligned} |f_\delta(\nu,t) - f_\delta(\sigma,t)| &\le 3\,\sigma(\mathbb{T})\,\|K_\delta(.,t) - K_\delta(.,t_j)\|_\infty \\ + &\left|\int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau,t_j)\,d\nu(\tau) - \int_{\mathbb{T}} K_\delta(\tau,t_j)\,d\sigma(\tau)\right| \ < \ \varepsilon/2. \quad \square \end{aligned}$$

3.2. Induction d'une mesure spectrale équivalente à la mesure de Lebesgue

On fixe à nouveau une fonction simple dans $L^2(m)$

$$f \ = \ \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \mathbb{1}_{P_l},$$

avec $\|f\|_{L^2} > 0$ et $\int_X f\,dm = 0$. On note $\mathcal{P}$ la partition $\{P_1,\ldots,P_L\}$.

PROPOSITION 9. – *Étant donné $\varepsilon \in]0,1[$, on peut toujours trouver $A \in \mathcal{A}$, avec $m(A) > 1-\varepsilon$, tel que la mesure spectrale $\sigma_{f,A}$ de $f_{|A}$ pour T_A soit équivalente à la mesure de Lebesgue.*

preuve. – On fixe tout d'abord une suite $(c_n)_{n\ge 1}$ de réels dans $]0,1[$, telle que

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(c_n) \ > \ \max\{1/2\,,\,1-\varepsilon\}.$$

On pose aussi $c_0 \overset{\text{déf}}{=} 1$, et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n \overset{\text{déf}}{=}]-2^{-n}, 2^{-n}[$.

On va construire par récurrence une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante dans $\mathcal{A}$, avec $A_0 \overset{\text{déf}}{=} X$, et une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que pour tout n, $\delta_n \in]0,(1-c_{n+1})/2[$. On notera φ_n la densité de $(\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}$. Ces suites devront vérifier les propriétés suivantes, pour tout $n \ge 0$.

$(1)_n$ $m(A_n) \geq \prod_{j=0}^{n} c_j$,
$(2)_n$ A_n est indépendant de P,
$(3)_n$ si $n \geq 1$, $d_{w^*}\Big(\sigma_{f,A_n}, (\sigma_{f,A_{n-1}})_{\delta_{n-1}}\Big) < 2^{-n}$,
$(4)_n$ si $n \geq 1$, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\forall t \in J_{j+1}, \quad c_{j+1} \cdots c_n \, \varphi_j(t) \leq \varphi_n(t) \leq \frac{1}{c_{j+1} \cdots c_n} \varphi_j(t).$$

Supposons ces suites déjà construites, et montrons alors que l'ensemble $A \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ convient. Puisque $(1)_n$ est vérifiée pour chaque n, il est clair que $m(A) > 1 - \varepsilon$. Remarquons ensuite que, chaque A_n étant indépendant de P, A est lui-même indépendant de P, et donc $\int_A f \, dm = 0$; on en déduit que

$$\sigma_{f,A}(\{0\}) = 0. \tag{7}$$

Puis, comme f est bornée, on peut appliquer le lemme 8 qui donne

$$\sigma_{f,A_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

Par $(3)_n$, on a donc aussi

$$(\sigma_{f,A_n})_{\delta_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

On en déduit que, pour tout $j \geq 0$, $\sigma_{f,A}$ est la limite d'une suite de mesures équivalentes à λ, dont les densités sur $\mathbb{T} \setminus]-2^{-j}, 2^{-j}[$ sont toujours comprises entre $\frac{1}{2} \min_{t \in J_j} \varphi_j(t)$ et $2 \max_{t \in J_j} \varphi_j(t)$. Ce résultat ajouté à (7) prouve que $\sigma_{f,A}$ est équivalente à λ.

Il reste à voir comment construire les suites annoncées. Commençons par choisir arbitrairement un réel $\delta_0 \in]0, (1 - c_1)/2[$. Grâce à la proposition 4, on sait que $(\sigma_{f,A_0})_{\delta_0} = (\sigma_f)_{\delta_0}$ est équivalente à λ, de densité φ_0 continue et strictement positive sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$. En utilisant le lemme 8, on peut choisir $\delta_1 \in]0, (1 - c_2)/2[$ assez petit pour qu'il existe $\rho_1 > 0$ vérifiant : pour toute mesure finie ν telle que $d_{w^*}\Big(\nu, (\sigma_f)_{\delta_0}\Big) < \rho_1$, pour tout $t \in J_1$,

$$c_1 \, \varphi_0(t) \leq \frac{d(\nu)_{\delta_1}}{d\lambda}(t) \leq \frac{1}{c_1} \varphi_0(t).$$

Puis, la proposition 7 assure qu'il existe $A_1 \in \mathcal{A}$ tel que

- $m(A_1) > 1 - 2\delta_0 > c_1$,

- A_1 est indépendant de $\mathcal{P}$,
- $d_{w^*}\Big((\sigma_f)_{\delta_0}, \sigma_{f,A_1}\Big) \;<\; \min\{\rho_1, 1/2\}$.

À ce stade, les propriétés $(1)_n, \dots, (4)_n$ sont vérifiées pour $n = 0, 1$.

Supposons maintenant connus $A_0, \dots, A_n$ et $\delta_0, \dots, \delta_n$ qui vérifient toutes les propriétés voulues jusqu'au rang n. On se place dans le cadre du système dynamique induit par T sur A_n. En appliquant le lemme 8, on peut choisir $\delta_{n+1} \in]0, (1 - c_{n+2})/2[$ assez petit pour qu'il existe $\rho_{n+1} > 0$ vérifiant : pour toute mesure finie ν telle que $d_{w^*}\Big(\nu, (\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}\Big) < \rho_{n+1}$, on a

$$\forall t \in J_{n+1} \quad c_{n+1}\,\varphi_n(t) \;\leq\; \frac{d(\nu)_{\delta_{n+1}}}{d\lambda}(t) \;\leq\; \frac{1}{c_{n+1}}\,\varphi_n(t).$$

On utilise alors la proposition 7 pour trouver $A_{n+1} \subset A_n$, tel que

- $m(A_{n+1}) \;>\; (1 - 2\delta_n)\, m(A_n) \;>\; \prod_{j=1}^{n} c_j$,
- A_{n+1} est indépendant de $\mathcal{P}$,
- $d_{w^*}\Big(\sigma_{f,A_{n+1}}, (\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}\Big) \;<\; \min\{\rho_{n+1}, 2^{-(n+1)}\}$.

Alors les propriétés $(1)_{n+1}, \dots, (4)_{n+1}$ sont vérifiées, ce qui prouve qu'il est possible de construire les suites annoncées par récurrence. □

3.3. Obtention du résultat annoncé

THÉORÈME 10. – *Si $(X, \mathcal{A}, m, T)$ est un système dynamique ergodique, l'ensemble des $A \in \mathcal{A}$ pour lesquels le type spectral maximal de T_A est équivalent à λ est dense dans $\mathcal{A}$.*

Preuve. – Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ avec $m(A) > 1 - \varepsilon$, tel que T_A ait la propriété annoncée. Pour cela, on se fixe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples et de moyenne nulle sur X, dense dans

$$L_0^2(m) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in L^2(m) \Big/ \int_X f\,dm = 0 \right\}.$$

Pour tout $C \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive, et tout $n \geq 0$, on pose

$$f_n^{(C)} \stackrel{\text{déf}}{=} f_n|_C - \int_C f_n\,dm \;\in\; L_0^2(m_C).$$

La proposition 9 peut facilement se généraliser de sorte à traiter simultanément un nombre fini de fonctions simples dans $L_0^2(m)$. Par la même méthode que dans la preuve de cette proposition, on construit l'ensemble A cherché comme l'intersection d'une suite décroissante

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble A_{n+1} étant construit à partir de A_n pour traiter simultanément les $n+1$ fonctions simples $f_0^{(A_0)}|_{A_n}, f_1^{(A_1)}|_{A_n}, \ldots, f_n^{(A_n)}|_{A_n}$ dans $L_0^2(m_{A_n})$. Bien sûr, il n'est pas possible de construire l'ensemble A de façon à ce que pour tout n, il soit indépendant de la partition $\mathcal{P}_n$ définie par f_n. On remplace donc la propriété $(2)_n$ de la preuve de la proposition 9 par

$(2)'_n$ A_n est indépendant de la restriction à A_{n-1} de la partition $\mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n$,

ce qui assure que pour tout n,

$$\int_A f_n^{(A_n)} dm = 0,$$

(et donc $f_n^{(A)} = f_n^{(A_n)}|_A$). Les autres détails de la construction sont laissés au lecteur. On obtient ainsi A tel que, pour tout $n \geq 0$, la mesure spectrale de $f_n^{(A)}$ sous l'action de T_A est équivalente à λ. Or, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dense dans $L_0^2(m)$, la suite $\left(f_n^{(A)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même dense dans $L_0^2(m_A)$. La transformation induite par T sur A a donc un type spectral maximal équivalent à le mesure de Lebesgue. □

3.4. Questions ouvertes

Une question bien naturelle après avoir effectué cette construction consiste à se demander si l'on peut contrôler la multiplicité spectrale de la transformation induite. Cette multiplicité est-elle automatiquement infinie ? Ou peut-on, en supposant au moins T d'entropie nulle, induire une transformation à spectre de Lebesgue en multiplicité finie ?

Un autre problème intéressant concernant l'induction est celui de la généricité des propriétés d'une transformation induite. On munit A de la distance

$$d(A, A') \overset{\text{déf}}{=} m(A \Delta A'),$$

et on dit qu'une propriété s'obtient *génériquement* par induction si l'ensemble des A pour lesquels T_A vérifie cette propriété est résiduel. Dans [4], Del Junco et Rudolph montrent que si T est d'entropie strictement positive, une transformation induite par T est génériquement un K-système, donc à spectre de Lebesgue. En revanche, si T est lâchement Bernoulli d'entropie nulle, T_A est génériquement un rang un rigide, et donc n'est même pas mélangeante. Del Junco et Rudolph demandent alors s'il existe des transformations d'entropie nulle qui induisent génériquement le mélange. Le même problème se pose naturellement pour le spectre de Lebesgue.

Enfin, une conséquence directe de ce travail peut s'énoncer ainsi : la mesure de Lebesgue est une mesure spectrale *universellement inductible*, au sens où, pour toute transformation ergodique T, il existe A mesurable et $f \in L^2(m)$ tels que $\sigma_{f,A} = \lambda$. Ce résultat peut également se déduire de [9] et [11]. Par contre, on construit dans [12] une mesure positive finie et diffuse sur $\mathbb{T}$ qui n'est pas inductible par une rotation irrationnelle. Que peut-on alors dire sur la classe des mesures spectrales universellement inductibles ?

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier le rapporteur pour les nombreuses améliorations qu'il a suggérées dans la rédaction de ce travail.

RÉFÉRENCES

[1] R. V. CHACON, Change of Velocity in Flows, *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. **16,** 5, 1966, p. 417-431.

[2] J. P. CONZE, Équations Fonctionnelles et Systèmes Induits en Théorie Ergodique", *Z. Wahrscheinlichkeitstheories verw. Geb.,* Vol. **23**, 1972, p. 75-82.

[3] I. P. CORNFELD, S. V. FOMIN et Ya. G. SINAI, Ergodic Theory, Springer-Verlag, 1982.

[4] A. DEL JUNCO et D. J. RUDOLPH, Residual behavior of induced maps. preprint.

[5] N. A. FRIEDMAN et D. S. ORNSTEIN, Ergodic transformations induce mixing transformations, *Advances in Mathematics,* Vol. **10**, 1973, p. 147-163.

[6] G. HANSEL, Automorphismes induits et valeurs propres, *Z. Wahrschein lichkeitstheorie verw. Geb.,* Vol. **25**, 1973, p. 75-82.

[7] S. KAKUTANI, Induced measure preserving transformations. *Proc. Acad. Tokyo,* 19, 1943, p. 635-641.

[8] I. MEILIJSON, Mixing properties of a class of skew-products, *Israel Journal of Mathematics,* Vol. 19, 1974, p. 266-270.

[9] D. S. ORNSTEIN, D. J. RUDOLPH et B. WEISS, *Equivalence of Measure Preserving Transformations.* Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 262, 1982.

[10] D. S. ORNSTEIN et M. SMORODINSKY, Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows, *Israel Journal of Mathematics,* Vol. **26**, 1977, pp. 75-83.

[11] M. RATNER, Horocycle flows are loosely Bernoulli, *Israel Journal of Mathematics,* Vol. **31**, 1978, p. 122-131.

[12] T. DE LA RUE, L'induction ne donne pas toutes les mesures spectrales, à paraître dans Ergod. Th. & Dynam. Sys.