ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANIEL ROUX

Analyse multi-échelle d'un processus gaussien markovien au voisinage d'une singularité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 33, n° 3 (1997), p. 295-322

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_3_295_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 33, n° 3, 1997, p. 295-322. *Probabilités et Statistiques*

Analyse multi-échelle d'un processus gaussien markovien au voisinage d'une singularité

par

Daniel ROUX

Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand 2, 63177 Aubière, France.

RÉSUMÉ. – Soit X un processus gaussien. Nous supposons qu'il est markovien d'ordre un, c'est-à-dire que la topologie de son espace auto-reproduisant H_X est donnée par une forme de Dirichlet $\mathcal{A}$ symétrique d'ordre deux. Un point y où le coefficient de plus haut degré a de la forme $\mathcal{A}$ s'annule ou bien devient infini est dit singulier. Nous nous proposons d'analyser la régularité du processus X au voisinage d'un point singulier isolé y. Pour cela nous décomposons X dans une base orthonormée d'ondelettes de H_X préalablement construite. La clef de l'analyse réside dans l'étude détaillée du comportement des ondelettes au voisinage de y, comportement qui dépend de l'ordre de la singularité. Dans le même esprit, nous proposons aussi l'identification de $\mathcal{A}$ au voisinage d'un point singulier.

Mots clés : Forme de Dirichlet , point singulier , processus gaussien markovien, ondelettes .

ABSTRACT. – Let X be some gaussian process. We suppose X to be markovian of order one, which means the topology of its Reproducing Kernel Hilbert Space H_X is given by a symmetric Dirichlet form $\mathcal{A}$ of order two. A point y is said to be singular when the leading coefficient of the form $\mathcal{A}$ vanishes or becomes infinite. In this paper, we analyze the regularity of the trajectories of such a process X near any isolated singular point y. In order to do this, X is decomposed on a wavelet basis of H_X. The behavior of X is given after a precise study of the wavelets near y. Using the same ideas the form $\mathcal{A}$ can also be identified in the vicinity of a singular point.

Classification A.M.S. : Gaussian process; Wavelets.

1. INTRODUCTION

Soit $X = (X_x, x \in \mathbb{R})$ un processus gaussien centré réel vérifiant la propriété de Markov germe d'ordre un, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On sait d'après [11] qu'il existe une forme de Dirichlet $\mathcal{A}$ d'ordre deux, positive et symétrique dont l'espace de l'énergie coïncide avec l'espace auto-reproduisant H_X de X. Cette forme $\mathcal{A}$ est associée à l'opérateur différentiel

$$A = -D(aD) + b$$

le symbole D désignant la dérivation ordinaire, $D = \frac{d}{dx}$. La fonction a, coefficient du terme de plus haut degré, est mesurable et à valeurs ≥ 0. Sous l'hypothèse de coercivité $0 < c \leq a(x) \leq C < \infty$, on connait le module de continuité local de X. Plus précisément il est montré dans la référence [1] qu'en tout point de Lebesgue x de la fonction $\frac{1}{a}$, le processus X vérifie

$$\limsup_{h \to 0} \frac{|X_{x+h} - X_x|}{\sqrt{2h \log\log h}} = \sqrt{\frac{1}{a(x)}}, \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{1}$$

Ce résultat suggère qu'en un point y où la fonction a s'annulerait (resp. deviendrait infinie) le processus X serait moins (resp. plus) régulier. Le présent article a pour objet de donner un sens précis à cette dernière phrase, dans le cas d'un point singulier isolé. Nous calculons alors l'ordre de divergence ou bien les modules locaux et uniforme de continuité de X dans cette nouvelle situation.

Dans la dernière partie, nous proposerons des estimateurs statistiques de l'ordre d'annulation ou de divergence de la fonction a au point singulier y, puis l'identification complète de cette fonction.

Nous conduisons notre étude dans le même esprit que dans la référence [1]. Nous sommes dans un cadre différentiel qui se prête à la localisation. Pour I_λ sous-intervalle dyadique, de centre λ, nous définissons la fonction Ψ_λ comme la solution normalisée (dans H_X) de l'équation

$$Af = c\delta_\lambda, \quad f = 0 \ \text{ sur } \ \partial I_\lambda, \tag{2}$$

∂I_λ désignant la frontière de I_λ et δ_x la mesure de Dirac en x. Les fonctions Ψ_λ seront appelées ondelettes car elles vérifient des estimations analogues aux ondelettes classiques. Rappelons que ces dernières forment des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$ et permettent, entre autres applications, d'analyser la régularité globale d'une fonction (Holder, Besov) à partir de la taille de ses coefficients ([9]). La base de Haar de $L^2(\mathbb{R})$ en est l'exemple le plus simple.

La famille d'ondelettes que nous construirons est orthonormée, elle, pour le produit scalaire $\mathcal{A}$ de l'espace H_X. Nous montrerons alors que le processus X se décompose sous la forme

$$X_x = \sum_\lambda \xi_\lambda \Psi_\lambda(x) \tag{3}$$

avec pour coefficients ξ_λ une suite indépendante gaussienne standard. L'idée remonte aux travaux de Paul Lévy [8] qui donne une construction du processus de Wiener à l'aide de la base de Schauder. On en trouve des applications récentes dans [7].

Ici, le développement (3) du processus X sera l'outil de base pour démontrer nos résultats de régularité locale et aussi d'identification.

Ce travail a été annoncé dans [12].

2. CADRE DE L'ÉTUDE ET ÉNONCÉS DES RÉSULTATS

2.1 Rappels et hypothèses

Nous désignons par $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact inclus dans l'intervalle réel I, et par $\mathcal{D}'(I)$ son dual pour la topologie habituelle.

Soit ζ un processus gaussien centré généralisé $\zeta = (\zeta_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(I))$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappelons que si K désigne la fonctionnelle de covariance de ζ, $K(\varphi, \psi) = \mathbb{E}(\zeta_\varphi \zeta_\psi)$, l'espace auto-reproduisant d'un tel processus est un espace de Hilbert $H_\zeta \subset \mathcal{D}'(I)$, engendré par les $K(\varphi, .)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et muni du produit scalaire $(.|.)$ pour lequel

$$(K(\varphi_1, .)|K(\varphi_2, .)) = K(\varphi_1, \varphi_2).$$

Nous supposerons de plus que l'injection canonique de $\mathcal{D}(I)$ dans H_ζ est continue et d'image dense. Dans un tel cadre, l'article [6] montre que le processus ζ est markovien relativement à la famille des ouverts de I si et seulement si la topologie de H_ζ est donnée par une forme de Dirichlet, positive, symétrique et de degré fini sur tout compact.

Nous nous intéressons ici au cas où cette forme $\mathcal{A}$ est de degré deux et n'admet que des singularités isolées. Nous pouvons alors nous ramener au cas de l'intervalle $I = (-1, 1)$ avec le point 0 comme seul point singulier éventuel. Plus précisemment nous considérons l'hypothèse (H) suivante.

HYPOTHÈSE (H). – Le produit scalaire de l'espace auto-reproduisant du processus gaussien généralisé $\zeta = (\zeta_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}(I))$, avec $I = (-1,1)$, est donné par

$$\mathcal{A}(\phi, \psi) = \int_{-1}^{1} a(x) D\phi(x) D\psi(x) + b(x)\phi(x)\psi(x)\, dx \tag{4}$$

où a une fonction continue à valeurs > 0 sur $(-1,1)\backslash\{0\}$ vérifiant de plus

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{a(\pm h)}{h^{\alpha_\pm}} = c_\pm \quad \text{pour des réels } c_+,\ c_- > 0,\ \alpha_+,\ \alpha_- \text{ quelconques} \tag{5}$$

et b une fonction localement intégrable et ≥ 0 sur $(-1,1)$ telle que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{b(\pm h)}{h^\beta} = 0 \quad \text{pour un réel } \beta > \sup(\alpha_+, \alpha_-, 1) - 2. \tag{6}$$

REMARQUE. – Cette dernière condition permet d'éviter que la fonction a ne devienne trop négligeable par rapport à la fonction b en 0.

NOTATIONS. – L'espace auto-reproduisant de ζ est désigné indifféremment par H_A ou H_ζ et la norme associée à $\mathcal{A}$ est notée $|\ \ |_A$.

L'espace gaussien (centré) engendré par ζ est noté $\mathcal{H}_\zeta$.

Afin d'alléger l'écriture, le symbole d'intégration par rapport à m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ sera souvent omis.

2.2 Résultats stochastiques

Nous énoncons d'abord les résultats concernant le processus. On remarquera qu'ils reposent tous sur la construction d'une base orthonormée d'ondelettes (Ψ_λ) de l'espace H_A. Cette construction sera présentée au 2.4 après l'introduction de quelques notations supplémentaires au 2.3 . En ce qui concerne les démonstrations, celles des Propositions 2.1, 2.2 sont immédiates (une fois 2.4 acquis) et donc réduites ci dessous à quelques indications, celles des Théorèmes 2.1, 2.2 sont données en détail aux paragraphes 4 et 5.

2.2.1 Processus ordinaire associé à ζ

PROPOSITION 2.1. – *Sous l'hypothèse (H), il existe un processus gaussien X indexé par $I^* = (-1,1)\backslash\{0\}$ à trajectoires continues qui vérifie*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I^*) \quad \int_I X(x) A\varphi(x) dx = \zeta(\varphi) \qquad \mathbb{P}\ p.s. \tag{7}$$

Si l'on suppose de plus α_+ (resp. α_-) < 1 *le processus* X *admet un prolongement continu en* 0^+ (resp.0^-).

Preuve. – Soit (Ψ_λ) la base orthonormée de l'espace H_A donnée dans le Théorème 2.3. Soit ξ_λ l'image de Ψ_λ par l'isomorphisme canonique de H_ζ sur $\mathcal{H}_\zeta$. Les variables aléatoires ξ_λ sont toutes de même loi gaussienne centrée réduite et forment une famille indépendante. Posons

$$X_x = \sum_\lambda \xi_\lambda \Psi_\lambda(x). \tag{8}$$

En utilisant les estimations données dans le Théorème 2.4 (sans oublier les propriétés de support) on montre facilement que la somme converge uniformément sur les compacts de I^*. Les trajectoires du processus X sont donc continues sur I^*. Les mêmes arguments donnent le prolongement continu en 0^+, 0^-, sous les hypothèses adéquates. Il est immédiat ensuite de vérifier (7).

REMARQUES

1. ζ est le processus dual du processus généralisé $\eta(\varphi) = \int \varphi(x) X_x \, dx$ et on sait que

a) ζ, η et X engendrent le même espace gaussien,

b) ζ et X possédent le même espace auto-reproduisant H_A, cf. [6].

2. Formellement X est solution de l'équation $AX = \zeta$, cf. [4].

3. Une seconde preuve de l'existence de X, processus gaussien (ordinaire) d'espace auto-reproduisant H_A consiste à appliquer la Proposition 5.1 de [11]. On doit alors montrer la continuité des fonctionnelles $\delta_x : u \longrightarrow u(x)$ relativement à la norme $| \ |_A$. Pour l'étude en $x = 0_+$ (on travaille alors sur $[0, 1]$ avec des fonctions nulles en 1) on remarque que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{a}\right) |\varphi|_A \geq \left| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{a} D\varphi \right|^2 = |\varphi(0)|^2.$$

Sous la condition $\alpha_+ < 1$ on a $\int_0^1 \frac{1}{a} < \infty$ ce qui donne la continuité voulue pour δ_0. En dehors de 0 le résultat est clair. La continuité des trajectoires peut se déduire du critère de Kolmogorov.

4. Rappelons pour terminer que si l'on part d'un processus gaussien centré $X = (X_x)_{x \in I}$ de covariance R ($R(x, y) = \mathbb{E}(X_x X_y)$) et si ce processus est Markovien d'ordre un on sait expliciter, dans le cas régulier et sous quelques hypothèses supplémentaires, l'opérateur différentiel A (*i.e.*

les applications a et b) en fonction de R [3]. Dans ce cadre la fonction R se trouve être fonction de Green de l'opérateur A.

2.2.2 Régularité d'un processus gaussien markovien au voisinage d'un point singulier

Le Théorème suivant précise le comportement de X en 0 dans le cas général.

THÉORÈME 2.1. – *Sous l'hypothèse (H) on a*

$$si\ \alpha_\pm < 1,\ \limsup_{h\to 0^+} \frac{|X_{\pm h} - X_{0^\pm}|}{\sqrt{h^{1-\alpha_\pm}\log\log(h^{-1})}} = \sqrt{\frac{2}{c_\pm(1-\alpha_\pm)}},\ \mathbb{P}\ p.s. \quad (9)$$

$$si\ \alpha_\pm = 1,\ \limsup_{h\to 0^+} \frac{|X_{\pm h}|}{\sqrt{\log(h^{-1})\log\log\log(h^{-1})}} = \sqrt{\frac{2}{c_\pm}},\ \mathbb{P}\ p.s. \quad (10)$$

$$si\ \alpha_\pm > 1,\ \limsup_{h\to 0^+} \frac{|X_{\pm h}|}{\sqrt{h^{1-\alpha_\pm}\log\log(h^{-1})}} = \sqrt{\frac{2}{c_\pm(\alpha_\pm - 1)}},\ \mathbb{P}\ p.s. \quad (11)$$

COMMENTAIRES

a) Si $\alpha_\pm < -1$, le premier résultat implique la différentiabilité du processus X en $0^\pm$. Si $-1 < \alpha_\pm < 1$ le processus vérifie seulement la propriété de Holder d'ordre ρ, pour tout $\rho < (1-\alpha_\pm)/2$.

b) La valeur $\alpha_\pm = 1$ apparait comme une valeur critique. Le module de continuité dans ce cas est analogue à celui du cas critique de la référence ([2]). Le résultat peut aussi être rapproché du suivant

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(x)}{\sqrt{\log(n)\log\log\log(n)}} = (\log(q))^{-1/2}\quad p.p.x.$$

où $q > 1$ est un réel fixé et $S_n(x)$ est la série de Fourier lacunaire (cf. [13])

$$S_n(x) = \sum_{q^k \le n} \cos(q^k x).$$

En fait l'heuristique est la même dans ces trois situations. Elles sont toutes les trois liées au Théorème de Lévy-Kintchine.

c) Quand $\alpha_\pm > 1$ le processus diverge plus rapidement que $h^{1-\alpha_\pm}$ en 0 et nous avons le résultat d' « hyper-markoviannité » suivant.

PROPOSITION 2.2. – *Sous l'hypothèse (H) et pour* $\alpha_+ > 1$ (resp. $\alpha_- > 1$), *les processus* $(X_x)_{x<0}$ *et* $(X_x)_{x\geq 0}$ (resp. $(X_x)_{x\leq 0}$ *et* $(X_x)_{x>0}$) *sont indépendants.*

Preuve. – Le résultat est immédiat en utilisant (8) et la localisation des Ψ_λ.

2.2.3 Identification des ordres α_+, α_- de singularité de X et plus généralement du coefficient principal a

Pour g fonction régulière à support compact et inclus dans $(-1,1)\backslash\{0\}$, on pose

$$\mathcal{A}_0(g, X) = \int_{-1}^{1} Dg(x) \ dX_x. \tag{12}$$

L'intégrale stochastique figurant au second membre est bien définie au sens de Wiener, voir [1].

Dans ce qui suit nous supposons la fonction g fixée, de norme 1 dans $L^2(\mathbb{R}, m)$ et de support compact inclus dans $(0,1)$. Nous donnons des résultats d'identification du coté droit de 0. On peut évidemment employer les mêmes méthodes du coté gauche de 0 .

Pour tout $\lambda = (j,k) \in \mathbb{Z}^2$ nous notons Θ_λ l'opérateur défini par

$$\Theta_\lambda f(x) = f(2^j x - k). \tag{13}$$

Nous pouvons alors définir un estimateur statistique $\hat{\alpha}_{+,j}$ du paramètre α_+ en posant

$$\hat{\alpha}_{+,j} = j^{-1} L(2^{-j} \sum_{k=0}^{j} A_0^2(\Theta_\lambda g, X)). \tag{14}$$

De plus, afin d'estimer la fonction a elle-même, introduisons l'estimateur statistique

$$\hat{a}_{j,r,s} = 2^{-j} \sum_{r2^j \leq k \leq s2^j} \mathcal{A}_0^2(\Theta_\lambda g, X), \ 0 < r < s. \tag{15}$$

THÉORÈME 2.2. – *Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Nous avons d'une part*

$$\lim_{j\to\infty} \hat{\alpha}_{+,j} = \alpha_+, \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{16}$$

et d'autre part

$$\lim_{j\to\infty} \hat{a}_{j,r,s} = \int_r^s \frac{1}{a(x)} dx, \ \mathbb{P}\ p.s. \tag{17}$$

REMARQUE. – Ces résultats d'identification apparaissent pour la dimension 1 comme une généralisation au cas singulier et non stationnaire de résultats donnés dans les références [4], [5].

2.3 Notations

Pour effectuer l'analyse multi-échelle du processus X, nous emploierons les notations suivantes.

L'ensemble Λ des nombres dyadiques de $\mathbb{R}$, $\Lambda = \{\lambda = (k+1/2)2^{-j}, (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$, permet d'indexer la famille des cellules dyadiques si l'on pose

$$I_\lambda = (k2^{-j}, (k+1)2^{-j}) \quad \text{pour } \lambda = (k+1/2)2^{-j}$$

Par abus de notation on écrit encore $\lambda = (j,k)$. L'entier j est appelé échelle de la cellule I_λ ou encore du nombre dyadique λ . Nous posons $I = (-1,1)$ et introduisons un ensemble d'indices qui tient compte de $\alpha = (\alpha_+, \alpha_-)$

$$\Lambda(\alpha) = \begin{cases} \Lambda \cap I & \text{si } \alpha_+ \text{ et } \alpha_- \geq 1 \\ (\Lambda \cap I) \cup \{0\} & \text{si } \alpha_+ \text{ ou } \alpha_- < 1 \ . \end{cases}$$

Dans le second cas nous posons $I_0 = I$, et nous attribuons l'échelle -1 à cette cellule supplémentaire .

Pour $x \in I$ on note $\Lambda_x = \{\lambda : \ x \in I_\lambda\}$ l'ensemble des cellules dyadiques contenant le point x, Λ^0 l'ensemble des cellules adjacentes au point 0, $\Lambda^0 = \Lambda^{0^+} \cup \Lambda^{0^-}$, $\Lambda^{0^+} = \{\lambda : \ k = 0\}$, $\Lambda^{0^-} = \{\lambda : \ k = -1\}$.

Chaque cellule dyadique I_λ se subdivise en deux cellules d'échelle $j_\lambda + 1$ notées I_λ^+ et I_λ^-.

Nous aurons aussi besoin des notations suivantes.

Le logarithme népérien est noté log, celui de base deux est noté L. On écrit $\log_n$ pour la fonction log itérée n fois.

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites réelles, nous écrivons

$$u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o_{n\to\infty}(u_n) = o_{n\to\infty}(v_n), \tag{18}$$

$$u_n \asymp_{n\to\infty} v_n \Longleftrightarrow v_n = O_{n\to\infty}(u_n) \ \text{ et } \ u_n = O_{n\to\infty}(v_n), \tag{19}$$

o et O désignant les symboles introduits par Landau. Ces notations sont étendues aux fonctions réelles.

2.4 Construction d'une base d'ondelettes de H_A

Pour $\lambda \in \Lambda(\alpha)$ la fonction f_λ est définie sur I_λ comme suit

a) si ($\lambda \in \Lambda(\alpha) \setminus \{0\} \cup \Lambda^0$), ou bien si ($\alpha_\pm < 1$ *et* $\lambda \in \Lambda^{0^\pm}$) ou bien encore si ($\alpha_+$, $\alpha_- < 1$ *et* $\lambda = 0$), f_λ est la fonction continue sur I_λ solution du problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} &(D.i) \quad Af = \delta_\lambda \text{ au sens des distributions sur } I_\lambda \\ &(D.ii) \quad f(x) = 0 \text{ pour } x \in \partial(I_\lambda), \text{ le bord de } I_\lambda. \end{aligned}$$

b) si ($\alpha_\pm \geq 1$ *et* $\lambda \in \Lambda^{0^\pm}$), f_λ est la fonction continue sur I_λ solution du problème de Dirichlet singulier en 0

$$\begin{aligned} &(D.i) \quad Af = \delta_\lambda \text{ au sens des distributions sur } I_\lambda \\ &(D.ii) \quad f(r) = 0, |\lim_{x\to 0} f(x)| < \infty, \end{aligned}$$

r désignant l'extrémité $\neq 0$ de I_λ.

c) quand $\lambda = 0$ et $\alpha_+ < 1 \leq \alpha_-$ (resp.$\alpha_- < 1 \leq \alpha_+$),

$$f_0 = 2\ F\ 1_{I^+} \quad (\text{resp.} 2\ F\ 1_{I^-}\ ),$$

la fonction F étant la solution de (D) sur I_0 quand on remplace (α_-, α_+) par (α_+, α_+) (resp. par (α_-, α_-)) (ce qui nous ramène au cas (a)).

Les fonctions f_λ seront toujours prolongée par 0 en dehors de I_λ.

Nous définissons une famille d'ondelettes de H_A par la formule

$$\Psi_\lambda = \frac{f_\lambda}{|f_\lambda|_A}.$$

THÉORÈME 2.3. – *Sous l'hypothèse (H), la famille* $(\Psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda(\alpha)}$ *est bien définie et constitue une base orthonormale de* H_A.

THÉORÈME 2.4. – *Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Alors nous avons*

1. *Ordre de grandeur des normes uniformes sur* $|\Psi_\lambda|_\infty$
Pour $x \neq 0$ *fixé,*

$$|\Psi_\lambda|_\infty^2 \asymp 2^{-j_\lambda}, \quad \textit{quand } j_\lambda \to \infty, \ \lambda \in \Lambda_x. \tag{20}$$

Au voisinage de 0,

$$|\Psi_{\pm\lambda}|_\infty^2 \asymp 2^{-j_\lambda(1-\alpha_\pm)}, \quad \textit{quand } j_\lambda \to \infty, \ \lambda \in \Lambda^{0^\pm} \tag{21}$$

2. *Equivalents pour les sommes quadratiques*

Pour $\alpha_\pm \neq 1$ (resp. $\alpha_\pm = 1$),

$$\sum_{\lambda\neq 0} |\Psi_\lambda(x)|^2 \sim \frac{|x|^{1-\alpha_\pm}}{c_\pm|1-\alpha_\pm|} \quad (resp. \sim \frac{\log|x|^{-1}}{c_\pm}), \text{ au voisinage de } 0_\pm. \tag{22}$$

Si r *est une fonction vérifiant* $r(x) \leq L|x|^{-1}$ *et* $\lim_{x\to 0_\pm} r(x) \to \infty$, *nous avons pour* x *au voisinage de* $0_\pm$

si $\alpha_\pm \neq 1$

$$\sum_{|j_\lambda - L|x|^{-1}|\geq r(x)} |\Psi_\lambda(x)|^2 = o(|x|^{1-\alpha_\pm}) \tag{23}$$

et si $\alpha_\pm = 1$

$$\sum_{L|x|^{-1}+r(x)\leq j_\lambda} |\Psi_\lambda(x)|^2 = o(\log|x|^{-1}). \tag{24}$$

3. CONSTRUCTION ET PROPRIÉTÉS DES ONDELETTES

3.1 Existence et propriétés des fonctions f_λ

Dans une première étape nous supposons A réduit à sa partie principale.

3.1.1 Première étape, $b \equiv 0$

Supposons d'abord $\lambda \geq 0, \lambda \notin \Lambda^0$.

En notant r_λ, s_λ les extrémités de I_λ on peut écrire

$$f_\lambda(x) = \frac{(\int_{r_\lambda}^{inf(x,\lambda)} \frac{1}{a(z)}dz)(\int_{sup(x,\lambda)}^{s_\lambda} \frac{1}{a(z)}dz)}{\int_{r_\lambda}^{s_\lambda} \frac{1}{a(z)}dz}, \; x \in I_\lambda \tag{25}$$

et on obtient facilement

$$|f_\lambda|_\infty = f_\lambda(\lambda), \quad |f_\lambda|_A = \sqrt{f_\lambda(\lambda)}. \tag{26}$$

Supposons maintenant $\lambda \in \Lambda^0, \lambda > 0$.Dans le cas $\alpha_+ \geq 1$

$$f_\lambda(x) = \int_{sup(x,\lambda)}^{2\lambda} \frac{1}{a(z)}dz, \tag{27}$$

alors que si $\alpha_+ < 1$

$$f_\lambda(x) = \frac{(\int_0^{\inf(x,\lambda)} \frac{1}{a(z)}dz)(\int_{\sup(x,\lambda)}^{2\lambda} \frac{1}{a(z)}dz)}{\int_0^{2\lambda} \frac{1}{a(z)}dz}, \text{ pour } x \in I_\lambda = (0, 2\lambda). \quad (28)$$

Dans les deux cas

$$|f_\lambda|_\infty = f_\lambda(\lambda), \quad |f_\lambda|_A = \sqrt{f_\lambda(\lambda)}. \quad (29)$$

REMARQUE. – Sous l'hypothèse (H) et en utilisant les résultats asymptotiques classiques pour les intégrales , on déduit des relations précédentes que

$$f_\lambda(x) \sim_{x\to 0} C \min(\lambda^{1-\alpha_+}, x^{1-\alpha_+}), \quad (30)$$

$$|f_\lambda|_\infty \sim C\lambda^{(1-\alpha_+)} \quad (31)$$

avec $C = \frac{1-2^{(\alpha_+-1)}}{c_+(\alpha_+-1)}$ quand $\alpha_+ \neq 1$ et $C = \frac{\log 2}{c_+}$ quand $\alpha_+ = 1$.

Le cas $\lambda \leq 0$ se traite de manière semblable.

3.1.2 Seconde étape, $b \not\equiv 0$

Soit A_H la partie principale de l'opérateur A. Nous avons donc

$$A\varphi = A_H\varphi + b\varphi. \quad (32)$$

Notons $f_{\lambda,H}$ la solution de (D) sur I_λ pour l'opérateur A_H, posons

$$\gamma_\pm = \beta_\pm + 2 - \alpha_\pm, \; \gamma = \max(\gamma_+, \gamma_-) \quad (33)$$

et remarquons que $\gamma > 0$ d'après l'hypothèse (H).

LEMME 3.1. – *Sous l'hypothèse (H), quel que soit λ, le problème (D) sur I_λ admet une solution unique f_λ. De plus, il existe une constante C qui ne dépend pas de λ telle que*

$$|f_\lambda(t) - f_{\lambda,H}(t)| \leq C \min(|t - r_\lambda|^\gamma, |t - s_\lambda|^\gamma) f_{\lambda,H}(t), \forall t \in I_\lambda \quad (34)$$

$$a(t)|Df_\lambda(t) - Df_{\lambda,H}(t)|^2 \leq C \min(|t - r_\lambda|^\gamma, |t - s_\lambda|^\gamma). \quad (35)$$

Preuve. – Nous allons prouver ce lemme dans le cas le plus délicat, celui où $\lambda \in \Lambda^0$. Pour $\lambda > 0$ l'inégalité à montrer devient alors

$$\forall t \in (0, 2\lambda) \quad |f_\lambda(t) - f_{\lambda,H}(t)| \leq C|t|^\gamma f_{\lambda,H}(t), \quad (36)$$

$$a(t)|Df_\lambda(t) - Df_{\lambda,H}(t)|^2 \leq C|t|^\gamma. \tag{37}$$

Écrivons dans cette partie α à la place de α_+, et introduisons la suite de fonctions (g_n) en posant $g_0 \equiv 0$ et

$$g_{n+1}(t) = f_{\lambda,H}(t) + \int_0^t b(s) \; (\int_s^t 1/a) \; g_n(s) \; ds \;\; pour\; n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

La première étape montre qu'il existe $C_{\alpha_+} > 0$ ne dépendant que de a tel que sur I^+

$$0 \leq f_{\lambda,H}(x) \leq C_\alpha \min(\lambda^{1-\alpha}, x^{1-\alpha}). \tag{39}$$

Posons $\delta := \sup(0,(1-\alpha))$, $\rho := \rho(\alpha,\lambda) = C_\alpha \lambda^{-\sup(0,(\alpha-1))}$ et considérons $k > 0$ (voir (H)) tel que

$$|b(z)| \leq kz^\beta \; et \; |\int_x^1 1/a| \leq kx^{-\sup(0,(\alpha-1))} \; (\text{resp. } k \log x^{-1})$$
$$\text{si } \alpha \neq 1 \; (\text{resp.} = 1). \tag{40}$$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{x^\delta \rho}{n!} \left(\frac{k^2 x^\gamma}{\gamma}\right)^n =: \mu_n. \tag{41}$$

D'après (39) et puisque $g_1(x) - g_0(x) = g_1(x) = f_{\lambda,H}(x)$ le résultat est vrai pour $n = 0$. Supposons le vérifié au rang n. Alors, en utilisant (40), nous pouvons borner la différence

$$g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x) = \int_0^x b(s) \left(\int_s^x 1/a\right) (g_{n+1}(s) - g_n(s)) \; ds$$

puis obtenir

$$|g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x)| \leq \frac{\rho}{n!} \int_0^x ks^\beta \; ks^{-\sup(0,(\alpha-1))} \; (k^2\gamma^{-1})^n \; s^{\delta+n\gamma} \; ds,$$

$$|g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x)| \leq \frac{\rho}{n!} k^{2n+2} \gamma^{-n} \int_0^x s^{\delta+(n+1)\gamma-1} \; ds.$$

L'hypothèse (H) implique $\delta + (n+1)\gamma > 0$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale du membre de droite de la dernière inégalité. Après intégration, nous obtenons

$$|g_{n+2}(x) - g_{n+1}(x)| \leq \frac{\rho}{(n+1)!} \left(\frac{k^2}{\gamma}\right)^{n+1} x^{\delta+(n+1)\gamma} = \mu_{n+1},$$

ce qui est le résultat au rang $n + 1$.

La suite (g_n) converge donc uniformément sur I_+. La fonction limite g vérifie d'une part

$$g(t) = f_{\lambda,H}(t) + \int_0^t b(s) \left(\int_s^t 1/a \right) g(s)\, ds \tag{42}$$

d'autre part

$$|g(x) - g_1(x)| \leq \rho x^\delta \left(\exp \frac{k^2 x^\gamma}{\gamma} - 1 \right)$$

et donc

$$|g(x) - g_1(x)| \leq \exp(k^2\gamma^{-1}) k^2 \gamma^{-1}\ \rho x^{\delta+\gamma}. \tag{43}$$

En se rappelant que $g_1 = f_{\lambda,H}$, $f_{\lambda,H}(x) \sim_{x\to 0^+} \rho x^\delta$, $|f_{\lambda,H}|_\infty \sim C_\alpha \lambda^{(1-\alpha)}$, cf. (30),(31), nous obtenons

$$\forall x \in (0,\lambda) \quad |g(x) - f_{\lambda,H}(x)| \leq C x^\gamma f_{\lambda,H}(x), \tag{44}$$

et

$$\forall x \in (0,2\lambda) \quad |g(x) - f_{\lambda,H}(x)| \leq 2C x^\gamma |f_{\lambda,H}|_\infty \tag{45}$$

avec $C = \frac{\exp(k^2\gamma^{-1})k^2}{\gamma C_{\alpha_+}}$, constante ne dépendant pas de λ.

À partir de l'équation (42) on montre facilement que g est solution de $(D.i)$ sur $(0,2\lambda)$ et à partir de l'équation (44) on montre qu'elle vérifie la condition au bord en 0 de $(D.ii)$. La fonction g ne diffère donc que d'une fonction A-harmonique φ (nulle en 0 et égale à $g(2\lambda)$ en 2λ) de la fonction f_λ solution de (D) sur $(0,2\lambda)$. L'hypothèse (H) assure l'ellipticité de l'opérateur A. La fonction φ est donc monotone, d'après le principe du maximum. Les conditions au bord nous conduisent alors aux inégalités

$$|\varphi(x)| \leq \sup_{0<t<x} |g(t)| \quad , \quad |\varphi|_\infty \leq |g(2\lambda)|. \tag{46}$$

Avec ce dernier résultat nous obtenons immédiatement (34).

3.2 Preuve du Théorème 2.3

Pour prouver le Théorème 2.3 il reste maintenant à montrer que la famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda(\alpha)}$ est orthogonale et totale dans H_A. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à l'article [BJR1] car le raisonnement utilisé dans cette référence peut être aisément adapté à la situation présente.

3.3 Preuve du Théorème 2.4

Dans une première étape nous supposons A réduit à sa partie principale, $A = A_H$, et nous montrons (20), (21).

3.3.1 Première étape, $b \equiv 0$

Nous notons ici r_λ, s_λ les extrémités de I_λ.

Dans le cas $b \equiv 0$, à partir des formules (26), (29) nous obtenons les relations qui suivent pour les fonctions normalisées $\Psi_\lambda = \frac{f_\lambda}{|f_\lambda|_A}$

1. Quand $\lambda \notin \Lambda^0$ ou bien $\lambda \in \Lambda^{0^\pm}$ et $\alpha_\pm < 1$

$$|\Psi_\lambda|_\infty^2 = \frac{(\int_{r_\lambda}^{\lambda} \frac{1}{a(z)}dz)(\int_{\lambda}^{s_\lambda} \frac{1}{a(z)}dz)}{(\int_{r_\lambda}^{\lambda} \frac{1}{a(z)}dz) + (\int_{\lambda}^{s_\lambda} \frac{1}{a(z)}dz)} = \frac{1}{\frac{1}{\int_{r_\lambda}^{\lambda} \frac{1}{a(z)}dz} + \frac{1}{\int_{\lambda}^{s_\lambda} \frac{1}{a(z)}dz}}, \tag{47}$$

2. Quand $\lambda \in \Lambda^{0^\pm}$ et $\alpha_\pm \geq 1$

$$|\Psi_\lambda|_\infty^2 = f_\lambda(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} \frac{1}{a(z)}dz. \tag{48}$$

Nous en déduisons, sous l'hypothèse (H),

1. Quand $\lambda \in \Lambda_x$ pour un point fixé $x \neq 0$

$$|\Psi_\lambda|_\infty \sim_{j\to\infty} 2^{-j/2}/\sqrt{a(x)}, \tag{49}$$

2. Quand $\lambda \in \Lambda^{0^\pm}$

$$|\Psi_\lambda|_\infty \sim_{j\to\infty} C\lambda^{(1-\alpha_\pm)/2} \tag{50}$$

avec $C = \sqrt{\frac{1-2^{|\alpha_\pm - 1|}}{c_\pm|\alpha_\pm - 1|}}$ quand $\alpha_\pm \neq 1$, $C = \sqrt{\frac{\log 2}{c_\pm}}$ quand $\alpha_\pm = 1$.

Ce sont les résultats (20) et (21).

3.3.2 Seconde étape, $b \neq 0$

LEMME 3.2. – *Sous l'hypothèse (H) et avec les notations introduites plus haut*

$$|\ |f_\lambda|_A^2 - |f_{\lambda,H}|_{A_H}^2\ | \leq C\lambda^\gamma |f_{\lambda,H}|_{A_H}^2 \tag{51}$$

avec C une constante ne dépendant pas de λ.

Preuve. – Donnons l'idée de la preuve dans le cas le plus difficile, celui où $\lambda \in \Lambda^0$. En exploitant l'équation (42), nous avons

$$\begin{aligned}|f_\lambda|_A^2 &= \mathcal{A}_H(f_{\lambda,H}, g) + \int_{I_\lambda} b(x)\varphi(x) f_{\lambda,H}(x)dx \\ &= |f_{\lambda,H}|_{A_H}^2 - \int_{I_\lambda} b(x) f_\lambda(x) f_{\lambda,H}(x)dx.\end{aligned}$$

Les estimations données plus haut, voir (30), (31) d'une part et (44) (45) d'autre part, permettent alors facilement de conclure.

3.3.3 Étude du comportement des sommes quadratiques

Nous prouvons dans cette partie les résultats (22), (23), (24).

Nous nous ramenons encore au cas où l'opérateur A est réduit à sa partie principale, $A = A_H$ et nous nous limitons au cas $x > 0$.

Preuve de (22). – Supposons dans un premier temps $\alpha_+ \geq 1$.

Pour $x \in (0,1)$, introduisons la fonction h_x définie par

$$h_x(t) = 1_{(t>0)} \int_{\sup(t,x)}^1 1/a.$$

Cette fonction est construite comme l'ondelette $f_{1/2}$. Elle appartient à l'espace H_A et vérifie

$$\forall \lambda \in \Lambda(\alpha) \qquad \mathcal{A}(h_x, \Psi_\lambda) = \Psi_\lambda(x).$$

La relation de Parseval permet alors d'écrire

$$\int_x^1 1/a = \sum_\lambda (\mathcal{A}(h_x, \Psi_\lambda))^2 = \sum_\lambda (\Psi_\lambda(x))^2.$$

Comme $\int(1/a)$ diverge en 0, on obtient quand $x \to 0^+$, par intégration de fonctions équivalentes en 0^+

$$\int_x^1 1/a \sim \frac{|x|^{1-\alpha_+}}{c_+|1-\alpha_+|}$$

si $\alpha_+ > 1$, et

$$\int_x^1 1/a \sim \frac{\log|x|^{-1}}{c_+}$$

quand $\alpha_+ = 1$, ce qui démontre le résultat (22) dans le cas $\alpha_+ \geq 1$.

Considérons maintenant le cas $\alpha_+ < 1$. Il faut distinguer deux sous-cas $\alpha_- < 1$ ou $\alpha_- > 1$.

Dans ce dernier sous-cas on peut reprendre à l'identique le raisonnement qui précède. En effet il n'intervient qu'une ondelette supplémentaire, Ψ_{0-}. Comme cette ondelette a pour support $[-1, 0]$ et s'annule en 0, les calculs du cas $\alpha_+ \geq 1$ sont encore valables.

Il nous reste alors à étudier le premier sous-cas. Cette fois-ci, l'ondelette Ψ_0 de support $[-1,1]$ intervient. Nous remplaçons h_x par $\tilde{h}_x$, soit

$$\tilde{h}_x(t) = \left(\int_{-1}^{\inf(0,t)} 1/a\right) \cdot \left(\int_{\sup(t,x)}^{1} 1/a\right) \cdot \left(\int_{-1}^{0} 1/a\right)^{-1}.$$

Il est facile de vérifier que la fonction $\tilde{h}_x$ ainsi définie appartient à l'espace H_A. D'autre part

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \mathcal{A}(\tilde{h}_x, \Psi_\lambda) = \Psi_\lambda(x).$$

et en appliquant à nouveau la relation de Parseval, on obtient

$$\left(1 + \frac{\int_x^1 1/a}{\int_{-1}^0 1/a}\right)\left(\int_x^1 1/a\right) = \sum_{\lambda>0} (\Psi_\lambda(x))^2 \quad + \mathcal{A}(\tilde{h}_x, \Psi_0)^2.$$

Un calcul facile donne

$$\mathcal{A}(\tilde{h}_x, \Psi_0)^2 = \frac{(\int_x^1 1/a)^2 (\int_{-1}^1 1/a)}{(\int_{-1}^0 1/a)(\int_0^1 1/a)}.$$

Il vient alors

$$\sum_{\lambda>0} (\Psi_\lambda(x))^2 \; = \frac{(\int_x^1 1/a)(\int_0^x 1/a)}{\int_0^1 1/a}$$

ce qui conduit à (22) par intégration de fonctions équivalentes.

REMARQUE. – Par des calculs similaires, nous obtenons pour l'ondelette indexée par 0 le résultat

$$|\Psi_0(x) - \Psi_0(0)|^2 = o(|x|^{1-\alpha_\pm}), au \text{ voisinage de } 0_\pm. \tag{52}$$

Preuve de (23), (24). – Cette preuve repose sur un Lemme pour lequel nous avons besoin de notations supplémentaires. Posons

$$s_m(x) = \sum_{0 \le j_\lambda \le m} \Psi_\lambda^2(x), r_m(x) = \sum_{j_\lambda > m} \Psi_\lambda^2(x).$$

LEMME 3.3. – *Sous l'hypothèse* (H), *quand les entiers* m, n *vérifient* $0 \le m < n$ *et pour* $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$

$$s_m(x) = \int_{2^{-m-1}}^{1} 1/a \left(\text{resp.} \left(\int_0^x 1/a\right)^2 \left(\frac{1}{\int_0^{2^{-m-1}} 1/a} - \frac{1}{\int_0^1 1/a}\right)\right) \tag{53}$$

si $\alpha_+ \geq 1$ (resp. $\alpha_+ < 1$). *De même, quand les entiers* m, n *vérifient* $0 \leq n < m$ *et pour* $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$

$$r_m(x) \leq 2^{-m} \left(\max_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]} \frac{1}{a} \right). \tag{54}$$

Preuve du lemme. – Supposons $m < n$.

Soit $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$. Compte tenu des supports des ondelettes Ψ_λ les seuls dyadiques $\lambda \neq 0$ pour lesquels $\Psi_\lambda(x)$ peut être $\neq 0$ vérifient

$$\lambda \in \Lambda^0, \ 0 \leq j_\lambda \leq m.$$

Nous obtenons alors, d'après (27), (28),

$$\Psi_\lambda^2(x) = \int_\lambda^{2\lambda} 1/a \left(\text{resp.} \left(\int_0^x 1/a \right)^2 \left(\frac{1}{\int_0^\lambda 1/a} - \frac{1}{\int_0^{2\lambda} 1/a} \right) \right)$$

si $\alpha \geq 1$ (resp. $\alpha < 1$) puis, en sommant ces égalités, la formule (53). Pour $m > n$ on déduit de la relation (47)

$$\Psi_\lambda^2(x) \leq 2^{-j} \left(\max_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]} \frac{1}{a} \right)$$

et comme $\Psi_\lambda^2(x) = 0$ quand $x \notin I_\lambda$ nous obtenons (54), à nouveau par sommation.

Fin de la preuve de (23), (24). – En utilisant les résultats classiques sur le comportement asymptotique des intégrales, le Lemme 3.3 permet de montrer

$$\lim_{m \to \infty, n-m \to \infty} \max_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]} \frac{s_m(x)}{2^{n(\alpha-1)}} = 0$$

et

$$\lim_{m \to \infty, m-n \to \infty} \max_{[2^{-n-1}, 2^{-n}]} \frac{r_m(x)}{2^{n(\alpha-1)}} = 0.$$

On en déduit (23), (24).

Ceci termine la démonstration du Théorème 2.4.

3.4 Complément

Les résultats du Théorème 2.4 sont utilement complétés par les Propositions qui suivent. Les énoncés sont donnés pour $x \geq 0$, la traduction pour le cas $x \leq 0$ sera évidente.

Posons d'abord

$$S_u^n = \max_{[2^{-n-1},2^{-n}]} s_{[u]}(x),$$

$$t_p(x) = \sum_{j_\lambda \geq p} \sqrt{j_\lambda} |\Psi_\lambda(x)|,$$

$$u_{p,q}(x) = \sum_{q > j_\lambda \geq p} \sqrt{Lj_\lambda} |\Psi_\lambda(x)|,$$

$$T_p^n = \max_{[2^{-n-1},2^{-n}]} t_p(x),$$

$$U_{p,q}^n = \max_{[2^{-n-1},2^{-n}]} u_{p,q}(x).$$

La Proposition qui suit permettra de négliger les petites échelles.

PROPOSITION 3.1. – *On suppose* (H) *vérifiée. Soit* β *un réel* > 0 *fixé. Si* $\alpha_+ \neq 1$ *et dans les deux situations suivantes*

a) *quand* $l = 0, \ m = n - \frac{Ln}{|\alpha_+ - 1|}$

b) *quand* $l = n - \frac{Ln}{|\alpha_+ - 1|}, \ m = n - \beta \ LLn,$

le résultat suivant

$$(m - l)(S_m^n - S_l^n) = o_{n \to \infty}(2^{n(\alpha_+ - 1)} \ (Ln)^i) \tag{55}$$

est réalisé avec $i = 0$ *dans la situation (a) et* $i = 1$ *dans la situation* (b).

Par ailleurs, si $\alpha_+ = 1$ *alors* $\frac{1}{\sqrt{n}} S_{\sqrt{n}}^n$ *est borné devant* n *quand* $n \to \infty$.

Preuve. – Si k et k' désignent respectivement le minimum et le maximum sur I^+ de $\frac{|x|^{\alpha_+}}{a(x)}$ (finis et > 0 en vertu de (H)) nous pouvons déduire du Lemme 3.3 pour $m < n - 1$ et $\alpha_+ > 1$ (resp. < 1)

$$S_m^n \leq k' 2^{(m+1)(\alpha_+ - 1)} \left(\text{resp. } \frac{k'^2}{k} 2^{(2n - m - 1)(\alpha_+ - 1)} \right). \tag{56}$$

Une vérification immédiate pour $m \leq n - \frac{Ln}{|\alpha_+ - 1|}$ donne le résultat (55), dans la première situation.

Pour étudier la seconde situation, on part de l'inégalité

$$(m - l)(S_m^n - S_l^n) \leq \frac{Ln}{|\alpha_+ - 1|} S_m^n.$$

Le résultat se déduit alors des majorations du Lemme 3.3.

Le cas $\alpha_+ = 1$ est similaire, si l'on remarque au préalable que

$$S_m^n \leq k' \log(2^{m+1}) = (m+1)K.$$

La Proposition suivante permettra de négliger les grandes échelles.

PROPOSITION 3.2. – *On suppose que l'hypothèse* (H) *est vérifiée et que* β *est un réel fixé,* $\beta > 0$. *Alors nous avons quand* $n \to \infty$

1. *si* $\alpha_+ \neq 1$

$$T_{n+2Ln}^n = o(\sqrt{2^{n(\alpha_+ - 1)} Ln}), \quad U_{n+\beta LLn, n+2Ln}^n = o(\sqrt{2^{n(\alpha_+ - 1)} Ln}), \tag{57}$$

2. *si* $\alpha_+ = 1$

$$T_{n+\beta LLn}^n = o(\sqrt{n}), \quad U_{n,n+\beta LLn}^{n+2Ln} = o(\sqrt{n}). \tag{58}$$

Preuve. – Les majorations du Théorème 2.4 donnent ici, pour $j_\lambda > n$ et $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$

$$|\Psi_\lambda(x)| \leq C 2^{n\alpha_+/2} 2^{-j_\lambda/2}.$$

Comme il existe au plus un dyadique λ d'échelle donnée tel que $\Psi_\lambda(x) \neq 0$, nous obtenons pour $p > n$, $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$ l'inégalité

$$t_p(x) \leq C 2^{n\alpha_+/2} \sum_{j \geq p} \sqrt{j 2^{-j}} \leq C' \sqrt{p 2^{n(\alpha_+ - 1) + (n-p)}}. \tag{59}$$

Les résultats portant sur les T_p^n sont établis si l'on remplace p successivement par $n + 2Ln$ et $n + \beta LLn$.

De la même manière, nous avons pour $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n}]$

$$u_{p,q}(x) \leq C \sqrt{2^{-p+n\alpha_+} Lp}$$

ce qui nous permet de majorer $U_{p,q}^n$ et de terminer la preuve de la Proposition.

4. ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ DU PROCESSUS X

4.1 Analyse multi-échelle du processus X

Nous avons construit dans le paragraphe précédent une base orthonormale $(\Psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(\alpha)}$ de l'espace auto-reproduisant H_A du processus X. Nous savons d'après la Proposition 2.1 qu'il existe une suite indépendante de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites $(\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda(\alpha)}$ telle que

$$X_x = \sum_{\lambda\in\Lambda(\alpha)} \xi_\lambda \Psi_\lambda(x) \quad , \mathbb{P}\ p.s. \tag{60}$$

Cette décomposition permet l'étude de la régularité de X en partant

1. des propriétés « ondelettes » données par le Théorème 2.4 et précisées par les Propositions (3.1), (3.2)

2. des inégalités connues sur les suites indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites que nous rappelons ci-dessous

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1(\omega) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_1(\omega) \quad \frac{1}{n} \sum_{0\leq p\leq n} Y_p^2 \leq (1+\varepsilon) \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{61}$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2(\omega) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_2(\omega) \quad |Y_n| \leq \sqrt{(2+\varepsilon)\log(n)} \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{62}$$

Le module local de continuité en tout $x \neq 0$ (loi du logarithme itéré) et le module uniforme de continuité sur tout intervalle fermé ne contenant pas 0 ont été déterminés par analyse multi-échelle dans la référence [1]. Démontrons maintenant le Théorème 2.1 qui donne le comportement de X au voisinage de 0.

4.2 Preuve dans le cas où $\alpha_\pm \neq 1$

Compte tenu de (52), qui précise le comportement de l'ondelette Ψ_0 (quand α_+ *et* $\alpha_- < 1$) il nous suffit de montrer que

$$\limsup_{x\to 0^\pm} \frac{\sum_{\lambda\neq 0} \xi_\lambda \Psi_\lambda(x)}{\sqrt{|x|^{1-\alpha_\pm}\ LL|x|^{-1}}} = \sqrt{\frac{2\log 2}{c_\pm|1-\alpha_\pm|}} \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{63}$$

Pour $i = 1, 2, 3, 4$ ou $*$ et tout entier $q \geq 1$, nous posons

$$V_q^{i,\pm}(x) = \sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{i,\pm}} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)$$

où $\mathcal{V}_q^{i,\pm}$ désigne l'ensemble des points dyadiques $\lambda \in \Lambda(\alpha)$ tels que $|\lambda| \leq 2^{-q}$, $\pm\lambda > 0$ et

$$\begin{aligned}
0 \leq j_\lambda < q - \frac{Lq}{|\alpha_\pm - 1|} &\quad \text{si} \quad i = 1 \\
q - \frac{Lq}{|\alpha_\pm - 1|} \leq j_\lambda < q - \frac{LLq}{4} &\quad \text{si} \quad i = 2 \\
q + \frac{Lq}{|\alpha_\pm - 1|} \geq j_\lambda > q + \frac{LLq}{4} &\quad \text{si} \quad i = 3 \\
j_\lambda \geq q + \frac{Lq}{|\alpha_\pm - 1|} &\quad \text{si} \quad i = 4 \\
q - \frac{LLq}{4} \leq j_\lambda \leq q + \frac{LLq}{4} &\quad \text{si} \quad i = *.
\end{aligned}$$

Nous obtenons (63) comme conséquence des limites suivantes

$$\lim_{q\to\infty} \sup_{2^{-q-1}\leq \pm x \leq 2^{-q}} \frac{|V_q^{i,\pm}(x)|}{\sqrt{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}}} = 0, \ \mathbb{P}\ p.s., i = 1, \cdots, 4 \qquad (64)$$

et

$$\lim_{q\to\infty} \sup_{2^{-q-1}\leq \pm x \leq 2^{-q}} \frac{|V_q^{*,\pm}(x)|}{\sqrt{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}}} = \sqrt{\frac{2\log 2}{c_\pm |1 - \alpha_\pm|}}, \ \mathbb{P}\ p.s. \qquad (65)$$

Pour les deux premières sommes, après avoir remarqué

$$\mathcal{V}_q^{1,\pm} \cup \mathcal{V}_q^{2,\pm} \subset \Lambda^0, \text{ pour } q \text{ assez grand},$$

nous pouvons déduire de (61) que, si $q > Q(\omega)$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{V}_q^{i,\pm}} \xi_\lambda^2 \leq 2q, \mathbb{P}\ p.s., i = 1, 2.$$

On obtient alors (64) pour $i = 1, 2$ en utilisant la Proposition 3.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour la troisième somme, nous avons

$$\mathcal{V}_q^{3,\pm} \subset \{\lambda = (k + 1/2)2^{-j} 0 \leq k \leq j\}$$

et donc, en utilisant le résultat (62)

$$\exists N(\omega), \forall \lambda \in \mathcal{V}_q^{3,\pm}, j_\lambda \geq N(\omega), \quad |\xi_\lambda| \leq ((1 + \varepsilon)\sqrt{2\log 2})\sqrt{Lj_\lambda}, \mathbb{P}\ p.s.$$

La Proposition 3.1 permet alors d'en déduire le résultat (62) pour $i = 3$.

Les mêmes arguments peuvent être utilisés pour obtenir

$$|\xi_\lambda| \leq ((1+\varepsilon)\sqrt{2\log 2})\sqrt{j_\lambda}, \mathbb{P}\ p.s.$$

quand $\lambda \in \mathcal{V}_q^{4,\pm}$, j_λ assez grand, puis (64) pour $i = 4$.

Il nous reste à montrer (65), pour $i = *$. Nous commençons par la majoration de la limite.

MAJORATION. – L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de déduire de (22) que, pour q assez grand

$$\sup_{2^{-q-1}\leq \pm x \leq 2^{-q}} \frac{|\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)|^2}{|x|^{1-\alpha_\pm}} \leq \gamma_{\alpha,\varepsilon}(\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda^2),$$

avec $\gamma_{\alpha,\varepsilon} = \varepsilon + c_\pm^{-1}|1-\alpha_\pm|^{-1}$.

Comme le cardinal de $\mathcal{V}_q^{*,\pm}$ est majoré par $\sqrt{Lq}$, on obtient en utilisant les estimations connues de la répartition d'une v.a.r. de loi χ^2

$$\mathbb{P}(\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda^2 \geq v^2) \leq v^{\sqrt{Lq}} e^{-v^2/2}$$

pour $v \geq 2$.

Il vient alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{2^{-q-1}\leq \pm x\leq 2^{-q}} \frac{|\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)|^2}{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}} \geq u^2\right) \leq (\gamma_{\alpha,\varepsilon}^{-1}u^2 Lq)^{\sqrt{Lq}/2}\ e^{-(\gamma_{\alpha,\varepsilon}^{-1}u^2Lq))/2}$$

ce qui s'écrit encore

$$p_q = \mathbb{P}\left(\sup_{2^{-q-1}\leq \pm x\leq 2^{-q}} \frac{|\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)|^2}{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}} \geq u^2\right) \leq q^{-(\gamma_{\alpha,\varepsilon}^{-1}u^2)/2\ +\varepsilon_q}$$

avec ε_q tendant vers 0 quand $q \to \infty$.

La condition $u^2 > 2\gamma_{\alpha,\varepsilon}\log 2$ implique $\sum_q p_q < \infty$, d'où, en utilisant le Lemme de Borel-Cantelli,

$$\exists Q(\omega), \forall q > Q(\omega) \quad \sup_{2^{-q-1}\leq \pm x\leq 2^{-q}} \frac{|\sum_{\lambda\in\mathcal{V}_q^{*,\pm}} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)|^2}{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}} \leq u^2\ \ \mathbb{P}\ p.s.$$

Ce qui s'exprime encore par

$$\lim_{q\to\infty} \sup_{2^{-q-1}\leq \pm x \leq 2^{-q}} \frac{|V_q^{*,\pm}(x)|}{\sqrt{|x|^{1-\alpha_\pm} LL|x|^{-1}}} \leq \frac{2\log 2}{c_\pm |1-\alpha_\pm|}, \ \mathbb{P}\ p.s.$$

Passons à la preuve de la minoration.

MINORATION. –

Considérons une suite croissante d'entiers (q_k) telle que

$$\frac{q_{k+1} - (1/4)LLq_{k+1}}{q_k + (1/4)LLq_k} \to_{k\to\infty} 1^+. \tag{66}$$

Sous cette condition, la suite de v.a.r. gaussiennes centrées $Z_k := V_{q_k}^{*,\pm}(\pm 2^{-q_k})$ est indépendante. Les estimations (22) et (23) permettent alors de prouver

$$\mathrm{Var}(Z_k) \sim_{k\to\infty} 2^{q_k(\alpha_\pm - 1)}\ c_\pm^{-1} |1-\alpha_\pm|^{-1},$$

puis, en utilisant les inégalités classiques sur les répartitions gaussiennes

$$\mathbb{P}\left(Z_k \geq u\sqrt{\frac{2^{q_k(\alpha_\pm-1)}}{c_\pm|1-\alpha_\pm|}}\right) \geq \ e^{-(1+\varepsilon)u^2/2}, u \geq u_0.$$

Posons $\tilde{p}_k = \mathbb{P}\left(\frac{Z_k}{\sqrt{2^{q_k(\alpha_\pm - 1)}Lq_k}} \geq \sqrt{t}\right)$. Nous obtenons

$$\tilde{p}_k \geq q_k^{-t(1+\varepsilon)/2\gamma_{\alpha,0}\log 2}.$$

Remarquons qu'il est possible de choisir la suite (q_k) telle que

$$\forall \gamma > 1 q_k = o_{k\to\infty} k^\gamma.$$

Nous obtenons alors pour $t < 2\gamma_{\alpha,0}\log 2$ la divergence de $\sum_k \tilde{p}_k$, et le Lemme de Borel-Cantelli assure que l'événement

$$\{|V_{q_k}^{*,\pm}(\pm 2^{-q_k})| \geq \sqrt{t 2^{q_k(1-\alpha_\pm)}Lq_k}\}$$

est réalisé une infinité de fois, $\mathbb{P}$ $p.s.$ Ceci donne la minoration et termine la preuve dans le cas $\alpha_\pm \neq 1$.

4.3 Preuve dans le cas $\alpha_\pm = 1$

On peut se ramener au cas $\alpha_+ = 1$, $x \to 0^+$. Posons ici, pour $i = 1, 2$ ou $*$ et q entier ≥ 1,

$$W_q^i = \sum_{\lambda \in \mathcal{W}_q^i} \xi_\lambda\ \Psi_\lambda(x)$$

où W_q^i désigne l'ensemble des dyadiques $\lambda \in \Lambda^0 \cap (0, 2^{-q})$ tels que

$$\begin{aligned} j_\lambda > q + LLq \quad &\text{si} \quad i = 1 \\ q \leq j_\lambda \leq q + LLq \quad &\text{si} \quad i = 2 \\ j_\lambda < q \quad &\text{si} \quad i = *. \end{aligned}$$

L'estimation (21) jointe aux encadrements donnés par la Proposition 3.1 permet d'obtenir

$$\lim_{q\to\infty} \sup_{2^{-q-1}\leq \pm x \leq 2^{-q}} \frac{|W_q^i|}{\sqrt{qLLq}} = 0, \ \mathbb{P}\ p.s., i = 1, 2. \tag{67}$$

Les lemmes 3.1 et 3.2 montrent que nous pouvons nous ramener au cas $A = A_H$, ce qui conduit à

$$W_q^* = \sum_{j=1,\cdots,q} \xi_{2^{-j}} \Psi_{2^{-j}}(2^{-j})$$

pour $x \in [2^{-q-1}, 2^{-q}]$.

Et comme la suite réelle $(\Psi_{2^{-j}}(2^{-j}))_j$ converge vers la constante $\sqrt{c_+^{-1} \log 2}$, nous déduisons de la loi du logarithme itéré de Lévy-Kinchine

$$\limsup_{q\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2c_+^{-1} \log 2 \ qLq}} \sum_{j=1,\cdots,q} \xi_{2^{-j}} \Psi_{2^{-j}}(2^{-j}) = 1 \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

Ce qui implique, en utilisant (67),

$$\limsup_{x\to 0^+} \frac{\sum_\lambda \xi_\lambda \ \Psi_\lambda(x)}{\log(x^{-1}) \log\log\log(x^{-1})} = \sqrt{2} c_+ \quad \mathbb{P}\ p.s.$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

5. ESTIMATION DES PARAMÈTRES α_+, α_- ET DE LA FONCTION a

Commençons par l'estimation de α_+.

Pour une fonction f supposée régulière et de support inclus dans l'intervalle $[u, v] \subset (0, 1)$, nous posons

$$\mathcal{A}_0(f, X) = \int_{(0,1)} Df(x) dX_x$$

l'intégrale étant définie au sens de Wiener. Cette intégrale peut s'écrire à l'aide de la forme de Dirichlet $\mathcal{A}$ du processus X sous la forme

$$\mathcal{A}_0(f, X) = \mathcal{A}(\tilde{f}, X)$$

où $\tilde{f}$ est la solution du problème de Dirichlet

$$A\tilde{f} = -D^2 f \quad ; \quad \tilde{f}(u) = \tilde{f}(v) = 0. \tag{68}$$

Il est facile de montrer que la décomposition (60) du processus gaussien X conduit à la décomposition suivante de $\mathcal{A}_0(f, X)$ dans H_A l'espace auto-reproduisant de X

$$\mathcal{A}_0(f, X) = \sum_\lambda \mathcal{A}(\tilde{f}, \Psi_\lambda)\xi_\lambda,$$

ce qui donne encore

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}_0(f, X)^2) = |\tilde{f}|_A^2.$$

Pour $\lambda \in \Lambda(\alpha)$, $\lambda > 0$, à l'aide de l'opérateur de dilatation Θ_λ introduit en (13), nous définissons $f_\lambda = \Theta_\lambda(f)$. Puis en procédant comme ci-dessus, nous obtenons

$$\mathcal{A}_0(f_\lambda, X) = \sum_{\mu \in \Lambda(\alpha)} \mathcal{A}(\tilde{f}_\lambda, \Psi_\mu)\xi_\mu.$$

La variable aléatoire $Y_\lambda := \mathcal{A}_0(f_\lambda, X)$ est gaussienne centrée de variance $\mathbb{E}(Y_\lambda^2) = |\tilde{f}_\lambda|_A^2$.

Posons maintenant $\tilde{h}_\lambda(x) = \int_0^x a^{-1} f_\lambda$, et utilisons les Lemmes 3.1, 3.2. Il vient

$$\left| \, |\tilde{f}_\lambda|_A^2 - \int_I a(D\tilde{h}_\lambda)^2 \, \right| \leq C\lambda^\gamma \int_I a(D\tilde{h}_\lambda)^2 \tag{69}$$

Or

$$\int_I a(D\tilde{h}_\lambda)^2 = \int_{I_\lambda} \frac{(Df_\lambda)^2(t)}{a(t)}\, dt$$

et le changement de variable $t = k + 2^{-j}s$ donne

$$\int_{I_\lambda} \frac{(Df_\lambda)^2(t)}{a(t)}\, dt = 2^j \int_u^v \frac{(Df)^2(s)}{a(2^{-j}(s+k))}\, ds.$$

Et finalement, en utilisant (69) pour $\lambda = (1 + [j/2])/2^{-j}, \cdots, j2^{-j}$ et l'hypothèse (H) nous obtenons quand $j \to \infty$

$$\sum_{j/2 < k \leq j} \mathbb{E}(Y_\lambda^2) \sim 2^j (c_+)^{-1} \int_u^v \frac{Df^2(s)}{2^{-j\alpha_+}(s+k)^{\alpha_+}} \, ds.$$

Nous en déduisons, quand $j \to \infty$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\nu_j} \sum_{j/2 < k \leq j} Y_\lambda^2\right) \to K_\alpha \tag{70}$$

avec $\nu_j = 2^{j(1+\alpha_+)} j^{1-\alpha_+}$ et $K_\alpha = c_+^{-1} \int_u^v (Df)^2$ (resp.$K_\alpha = \frac{1-2^{-1+\alpha_+}}{1-\alpha_+} c_+^{-1} \int_u^v (Df)^2$) si $\alpha_+ = 1$, (resp.$\alpha_+ \neq 1$).

Afin de montrer la convergence de la suite $(\frac{1}{\nu_j} \sum_{j/2 < k \leq j} Y_\lambda^2)_j$ nous étudions maintenant les variances. Remarquons d'abord que, puisque le support de $\tilde{f}_\lambda$ est inclus dans l'intervalle I_λ,

$$\mathcal{A}(\tilde{f}_\lambda, \Psi_\mu) = 0 \quad \text{quand } I_\lambda \subset I_\mu \text{ ou } I_\lambda \cap I_\mu = \emptyset.$$

Nous avons donc indépendance de $(Y_{(k,j)})_k$, pour j fixé, et par suite la formule $\mathrm{Var}(\sum_k Y_\lambda^2) = \sum_k \mathrm{Var}(Y_\lambda^2)$. Comme la v.a. Y_λ est de loi gaussienne, il vient $\mathrm{Var}(Y_\lambda^2) = 2\mathbb{E}(Y_\lambda^2)^2$, et en utilisant la formule (69)

$$\sum_{j/2 < k \leq j} \mathrm{Var}\ (Y_\lambda^2) \leq C_1\ 2^{2j(1+\alpha_+)} \sum_{j/2 < k \leq j} k^{-2\alpha_+} \leq C_2 \nu_j^2\ \frac{1}{j}.$$

Ceci nous donne

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{\nu_j} \sum_{j/2 < k \leq j} Y_\lambda^2\right) = O(1/j). \tag{71}$$

Nous pouvons maintenant, à l'aide du Lemme de Borel-Cantelli, déduire de (70) et (71) la limite

$$\frac{1}{\nu_j} \sum_{j/2 < k \leq j} Y_\lambda^2 \to K_\alpha, \mathbb{P}\ p.s.,$$

puis, en considérant le logarithme de base deux de l'expression précédente, obtenir (16).

L'estimation du paramètre α_- est identique, en partant d'une fonction f de support inclus dans $(-1, 0)$.

La même méthode permet d'obtenir la formule (17). Nous montrons en effet par des calculs similaires que l'espérance de $\tilde{a}_{j,r,s}$ converge vers la constante $\int_r^s 1/a \; dm$ alors que la variance est de l'ordre de $1/j$, quand $j \longrightarrow \infty$.

La démonstration du Théorème 2.2 est donc achevée.

REMARQUE. – D'autres résultats asymptotiques peuvent être utilisés pour déterminer α_+, α_-, par exemple la loi de probabilité zéro ou un. Posons

$$\mathcal{A}_\rho(f,g) := \int_0^1 |x|^\rho Df(x)Dg(x) \; dx,$$

et considérons les événements

$$E_\rho = \{\omega \quad : \quad \lim_{j\to\infty} 2^{-j} \sum_{r<\lambda<s} \mathcal{A}_\rho(\Theta_\lambda f, X) \quad < \infty\},$$

pour f fonction régulière de support inclus dans (0,1). Alors, l'événement E_ρ est de probabilité 0 ou 1 et il y a équivalence entre

$\mathbb{P}(E_\rho) \; = \; 1$

et

$\alpha_+ \; < \; 1 + 2\rho.$

RÉFÉRENCES

[1] A. BENASSI, S. JAFFARD et D. ROUX, Analyse multiéchelle des champs gaussiens markoviens d'ordre p indexés par [0,1], *Stochastic Processes and their Applications*, vol. **47**, 1993, p. 275-297.

[2] A. BENASSI, S. JAFFARD et D. ROUX, Module de continuité des champs aléatoires gaussiens étudiés au moyen d'ondelettes appropriées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. **315**, 1992, p. 441-446.

[3] L. CARRARO, Markov Gaussian Processes, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. **35**, 1990, p. 251-268.

[4] V. B. GORYAINOV, On Lévy-Baxter theorem for stochastic elliptic equation, *Theory Proba. Appl.*, vol. **33**, 1988, p. 164-166.

[5] X. GUYON, *Variations et identification de champs gaussiens markoviens sur* $\mathbb{R}^2$, Actes du Colloque de Probabilités Numériques, C.I.R.M. Luminy, 1992.

[6] G. KALLIANPUR et V. MANDREKAR, The Markov property for generalised gaussian random fields, *Ann. Inst. Fourier*, vol. **24**, 1974, p. 143-167.

[7] G. KERKACHARIAN et B. ROYNETTE, Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Itô-Nisio, *C. R. Acad. Sci. Paris*, I, vol. **312**, 1991, p. 877-882.

[8] P. LÉVY, *Processus stochastiques et Mouvement Brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[9] Y. MEYER, *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, 1990.

[10] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens.* Séminaire d'été 1968, Presses de l'université de Montréal, 1968.

[11] L. D. PITT, A Markov property for gaussian processes with a multi-dimensional parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **43**, 1971, p. 367-391.

[12] D. Roux, Analyse multiéchelle d'un processus gaussien markovien au voisinage d'une singularité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. **315**, 1992, p. 1095-1098.
[13] M. Weiss The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometrric series, *Trans. A.M.S.*, vol. **91**, 1959, p. 444-469.

(Manuscrit reçu le 5 mai 1994;
version révisée reçue juillet 1996.)