

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

AIMÉ LACHAL

Les temps de passage successifs de l'intégrale du mouvement brownien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 33, n° 1 (1997), p. 1-36

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1997__33_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les temps de passage successifs de l'intégrale du mouvement brownien

par

Aimé LACHAL

Laboratoire de Probabilités, Institut de Mathématiques et Informatique,
Université Claude Bernard, Lyon I,
43, boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne Cedex, France.
e-mail : lachal@jonas.univ-lyon 1.fr

RÉSUMÉ. – Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien linéaire et $X_t = \int_0^t B_s ds$. Dans ce travail nous explicitons la distribution de plusieurs fonctionnelles du processus bidimensionnel $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ intimement liées au premier instant de passage de celui-ci.

Mots clés : Temps de passage successifs, transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev, transformée de Mellin, fonctions de Bessel, Whittaker, Legendre, nombres de Bernoulli.

ABSTRACT. – Let $(B_t)_{t \geq 0}$ be the linear Brownian Motion and set $X_t = \int_0^t B_s ds$. In this paper we give an explicit form for the probability laws of several functionals of the two-dimensional process $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ which are intimately related to its first hitting time.

Key words: Successive hitting-times, Laplace-Kontorovich-Lebedev transform, Mellin transform, Bessel, Whittaker, Legendre functions, Bernoulli numbers.

INTRODUCTION

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien linéaire démarrant de l'origine $X_t = \int_0^t B_s ds$ sa primitive, et $U_t = (X_t, B_t)$, $t \geq 0$. Le processus bidimensionnel $(U_t)_{t \geq 0}$ présente de nombreuses propriétés remarquables et une littérature conséquente lui est consacrée (voir par exemple [1], [3], [4], [6], [8] à [14], [16], [17]). En particulier ce processus est markovien et temporellement homogène. Notons $\{\mathbb{P}_{(x,y)}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ la famille des probabilités conditionnelles associées. Les densités de transition sont alors définies par [16] :

$$\begin{aligned} p_t(x, y; u, v) &= \mathbb{P}_{(x,y)} \{U_t \in du dv\} / du dv \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp \left[-\frac{6}{t^3} (u - x - ty)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{t^2} (u - x - ty)(v - y) - \frac{2}{t} (v - y)^2 \right]. \end{aligned}$$

Considérons les fonctionnelles du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ suivantes (introduites par H. P. McKean en 1963, [16]) :

1. $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = \min \{t > \tau_n : X_t = 0\}$, $\beta_n = |B_{\tau_n}|$, relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,b)}$, $b > 0$ étant fixé (sous $\mathbb{P}_{(0,b)}$ le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ démarre donc du point b et alors les variables aléatoires X_t et B_t sont à penser comme étant respectivement $\int_0^t \beta_s ds + bt$ et $\beta_t + b$, $(\beta_t)_{t \geq 0}$ désignant un mouvement brownien démarrant de zéro), puis plus généralement sous $\mathbb{P}_{(x,y)}$ où (x,y) est un point différent de l'origine (*i.e.* le processus $(U_t)_{t \geq 0}$ démarre de $(x,y) \neq (0,0)$);

2. $\tau_0^+ = 1$, $\tau_{n+1}^+ = \min \{t > \tau_n^+ : X_t = 0\}$, $\beta_n^+ = B_{\tau_n^+}$, relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,0)}$;

3. $\tau_0^- = 1$, $\tau_{n+1}^- = \max \{t \in [0, \tau_n^-[: X_t = 0\}$, $\beta_n^- = B_{\tau_n^-}$, relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,0)}$.

En adoptant la convention usuelle $\min \emptyset = +\infty$ et $\max \emptyset = 0$, nous avons pour tout $n \geq 1$ ([16]) :

$$\begin{aligned} \tau_n &< +\infty && \mathbb{P}_{(0,b)\text{-presque sûrement,}} \\ \tau_n^+ &< +\infty && \text{et} \quad \tau_n^- > 0 && \mathbb{P}_{(0,0)\text{-presque sûrement.}} \end{aligned}$$

Dans [16] H. P. McKean montre que les suites $(\tau_n, \beta_n)_{n \geq 1}$, $(\tau_n^+, |\beta_n^+|)_{n \geq 1}$ et $(\tau_n^-, |\beta_n^-|)_{n \geq 1}$ sont des suites de Markov homogènes de probabilités de transition respectives :

$$\begin{aligned}
 p(s, y; t, z) &= \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_{n+1} \in dt, \beta_{n+1} \in dz | \tau_n = s, \beta_n = y \} / dt dz \\
 &= q_{t-s}(y, z) \mathbb{1}_{]s, +\infty[}(t) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z) \quad \text{pour } s > 0, y > 0; \\
 p^+(s, y; t, z) &= \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_{n+1}^+ \in dt, |\beta_{n+1}^+| \in dz | \tau_n^+ = s, |\beta_n^+| = y \} / dt dz \\
 &= q_{t-s}(y, z) \mathbb{1}_{]s, +\infty[}(t) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z) \quad \text{pour } s > 1, y > 0; \\
 p^-(s, y; t, z) &= \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_{n+1}^- \in dt, |\beta_{n+1}^-| \in dz | \tau_n^- = s, |\beta_n^-| = y \} / dt dz \\
 &= \frac{(z/t^2) e^{-2z^2/t}}{(y/s^2) e^{-2y^2/s}} q_{s-t}(z, y) \mathbb{1}_{]0, s[}(t) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(z) \\
 &\quad \text{pour } 0 < s < 1, y > 0,
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad q_t(y, z) &= \mathbb{P}_{(0,y)} \{ \tau_1 \in dt, |B_{\tau_1}| \in dz \} / dt dz \\
 &= \frac{3z}{\pi \sqrt{2} t^2} e^{-2(z^2 - |y|z + y^2)/t} \int_0^{4|y|z/t} e^{-3\theta/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\pi\theta}}, \\
 &= \frac{\sqrt{3}z}{\pi t^2} e^{-2(z^2 - |y|z + y^2)/t} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{6|y|z}{t}} \right], \quad t > 0, z > 0.
 \end{aligned}$$

Dans ce travail nous complétons substantiellement l'étude des suites $(\tau_n, \beta_n)_{n \geq 1}$, $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$ et $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$ selon les points suivants :

a) pour la suite $(\tau_n, \beta_n)_{n \geq 1}$ (relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,b)}$, $b > 0$) : la loi absolue, c'est-à-dire la loi du premier couple (τ_1, β_1) , et les probabilités de transition $\{p(s, y; t, z), 0 < s < t, y > 0, z > 0\}$ permettent classiquement, de par le caractère markovien de la suite en question, d'obtenir la distribution du couple (τ_n, β_n) sous la forme, d'un emploi peu commode :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_n \in dt, \beta_n \in dz \} / dt dz \\
 &= \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} q_{s_1}(b, y_1) p(s_1, y_1; s_2, y_2) \\
 &\quad \times \dots \times p(s_{n-1}, y_{n-1}; t, z) ds_1 dy_1 \dots ds_{n-1} dy_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Dans cet article nous donnons une expression très simplifiée des densités $\mathbb{P}_{(0,b)}\{\tau_n \in dt, \beta_n \in dz\}$ et $\mathbb{P}_{(0,b)}\{\tau_n \in dt\}$, ainsi qu'une formule explicite pour $\mathbb{P}_{(0,b)}\{\beta_n \in dz\}$. Notre technique consiste à calculer, à partir d'une relation de récurrence liant les couples $(\tau_{n-1}, \beta_{n-1})$ et (τ_n, β_n) , fondée sur le caractère markovien du processus $(U_t)_{t \geq 0}$, la transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_n, β_n) , laquelle conduit à un résultat remarquablement simple.

Nous entreprenons ensuite le calcul de ces diverses densités sous la probabilité $\mathbb{P}_{(x,y)}$ dans le cas général où $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Les formules alors obtenues, bien que moins simples comparativement aux précédentes, nous paraissent encore très satisfaisantes.

b) pour la suite $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$ (relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,0)}$) : H. P. McKean en a déterminé les probabilités de transition, mais pas la loi absolue (loi du couple (τ_1^+, β_1^+)). Nous l'explicitons ici en faisant appel à la distribution conjointe du couple (T_a, B_{T_a}) sous la probabilité $\mathbb{P}_{(x,y)}$ dans le cas général $x \neq a$ où $T_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}$, donnée par la formule suivante ([8], [9], [13]) :

$$(2) \quad \mathbb{P}_{(x,y)}\{T_a \in dt, B_{T_a} \in dz\} \\ = |z| [p_t(x, y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) \\ \times p_{t-s}(x, y; a, \varepsilon_{x-a} \zeta) ds d\zeta] \mathbb{1}_{A_{x-a}}(z) dt dz$$

avec $\varepsilon_{x-a} = \text{signe de } (x - a)$, $A_{x-a} =]0, +\infty[$ si $x < a$, $A_{x-a} =]-\infty, 0[$ si $x > a$.

En adoptant une technique analogue à celle décrite en (a) nous fournissons également une expression condensée des densités $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^+ \in dt, \beta_n^+ \in dz\}$, $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^+ \in dt\}$ et $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\beta_n^+ \in dz\}$, ainsi qu'une écriture explicite de $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\beta_1^+ \in dz\}$.

c) pour la suite $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$ (relativement à la probabilité $\mathbb{P}_{(0,0)}$) : par une inversion du temps nous rattachons l'étude de la suite $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$ à celle de $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$. Nous en déduisons de fait une écriture simple des distributions $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^- \in dt, \beta_n^- \in dz\}$ et $\mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^- \in dt\}$.

Toutes nos formules s'expriment en termes de diverses fonctions spéciales. Aussi avons-nous répertorié en annexe les notations usuelles, ainsi que les formules classiques dont nous ferons usage tout au long de ce travail.

I. LA SUITE MARKOVIENNE $(\tau_n, \beta_n)_{n \geq 1}$

A. Étude sous la probabilité $\mathbb{P}_{(0,b)}$, $b > 0$

THÉORÈME 1. – *La densité du couple (τ_n, β_n) , $n \geq 1$, s'explique pour $t > 0$, $z > 0$ selon :*

$$(3) \quad \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_n \in dt, \beta_n \in dz \} / dt dz \\ = \frac{1}{\pi^2 bt} e^{-2(b^2+z^2)/t} \int_0^{+\infty} K_{i\gamma} \left(\frac{4bz}{t} \right) \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{3}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma.$$

Pour démontrer le théorème 1 nous ferons appel à deux lemmes.

Le lemme suivant est une conséquence facile du caractère fortement markovien et de la propriété d'invariance d'échelle du processus $(U_t)_{t \geq 0}$.

LEMME 1.1. – *L'identité en loi suivante est satisfaite pour $n \geq 2$:*

$$(4) \quad (\tau_n, \beta_n) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\tau_{n-1} + \beta_{n-1}^2 t_1, \beta_{n-1} b_1)$$

dans laquelle le vecteur aléatoire (t_1, b_1) a pour distribution la probabilité $(\tau_1, \beta_1) (\mathbb{P}_{(0,1)})$ et est indépendant du couple $(\tau_{n-1}, \beta_{n-1})$.

LEMME 1.2. – *La transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_n, β_n) , $n \geq 1$, est donnée par :*

$$(5) \quad \mathbb{E}_{(0,b)} \left[e^{-\lambda\tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] = \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}b)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n b}, \quad \lambda > 0, \gamma > 0.$$

Preuve. – Nous utilisons le résultat de H. P. McKean ([16], formule 3.3 b) suivant : la transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_1, β_1) est déterminée par la formule :

$$(6) \quad \mathbb{E}_{(0,b)} \left[e^{-\lambda\tau_1} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_1)}{\beta_1} \right] = \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}b)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}) b}.$$

Les relations (4) et (6) permettent alors de démontrer la formule (5) comme suit. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{(0,b)} \left[e^{-\lambda \tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+z^2)s} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}yz)}{yz} \\
&\quad \times \mathbb{P}_{(0,1)} \{ \tau_1 \in ds, \beta_1 \in dy \} P_{(0,b)} \{ \tau_{n-1} \in dt, \beta_{n-1} \in dz \} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_{(0,1)} \left[e^{-(\lambda z^2)\tau_1} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z^2\beta_1)}{\beta_1} \right] \\
&\quad \times \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_{n-1} \in dt, \beta_{n-1} \in dz \} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})z} \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_{n-1} \in dt, \beta_{n-1} \in dz \}
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la formule (6). Nous obtenons ainsi la relation de récurrence

$$\mathbb{E}_{(0,b)} \left[e^{-\lambda \tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \mathbb{E}_{(0,b)} \left[e^{-\lambda \tau_{n-1}} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_{n-1})}{\beta_{n-1}} \right]$$

de laquelle nous déduisons (suite géométrique de raison $1/(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})$) et de premier terme (6) immédiatement (5). \square

Preuve du théorème 1. – Il reste à inverser la transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev (5). Pour cela nous procédons en deux étapes. Nous inversons d'abord la transformée de Kontorovich-Lebedev selon les formules de réciprocity (A.2.2), ce qui conduit à l'égalité intermédiaire :

$$\begin{aligned}
(7) \quad & \mathbb{E}_{(0,b)} [e^{-\lambda \tau_n}, \beta_n \in dz]/dz \\
&= \frac{2}{\pi^2 b} \int_0^{+\infty} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}b) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma.
\end{aligned}$$

Enfin l'identité (A.3.i) permet d'inverser la transformée de Laplace (7) et d'obtenir (3). \square

COROLLAIRE 1. – La densité, la fonction de répartition et la transformée de Laplace de la variable aléatoire τ_n , $n \geq 1$, sont respectivement données par :

$$(8) \quad \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_n \in dt \} / dt = \frac{e^{-b^2/t}}{(2\pi)^{3/2} b \sqrt{t}} \times \int_0^{+\infty} K_{i\gamma/2} \left(\frac{b^2}{t} \right) \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma$$

$$(9) \quad \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \tau_n < t \} = \frac{te^{-b^2/t}}{4\pi b^2} \int_0^{+\infty} W_{-1, i\gamma/2} \left(2 \frac{b^2}{t} \right) \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma.$$

$$(10) \quad \mathbb{E}_{(0,b)} [e^{-\lambda\tau_n}] = \frac{1}{\pi b \sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} K_{i\gamma} (\sqrt{8\lambda} b) \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma.$$

Preuve. – Pour avoir (8) il suffit d'intégrer (3) par rapport à z sur $]0, +\infty[$ en faisant appel à l'égalité (A.3.ii.a). Alors (9) se déduit de (8) en intégrant par rapport à t et en utilisant (A.3.ii.b). Quant à (10) on l'obtient à partir de (8) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,b)} [e^{-\lambda\tau_n}] &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} b} \int_0^{+\infty} \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^n} d\gamma \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - b^2/t} K_{i\gamma/2} \left(\frac{b^2}{t} \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

et la valeur de la seconde intégrale est explicitée en A.3.ii.c. \square

THÉORÈME 2. – Pour $n \geq 1$ et $z > 0$ on a explicitement :

$$(11) \quad \mathbb{P}_{(0,b)} \{ \beta_n \in dz \} / dz = \frac{(3/2\pi)^n}{(n-1)!} \times \frac{b^{1/2} z^{3/2}}{z^3 + (-1)^{n+1} b^3} \times \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} N(p, n) \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2p} \left(\ell n \frac{z}{b} \right)^{n-1-2p}$$

avec $N(p, n) = (-1)^p C_{n-1}^{2p} D_{2p}^{(n)}$, les coefficients $D_{2p}^{(n)}$ désignant les nombres de Bernoulli [2, p. 40, n° 38] et $[(n-1)/2]$ la partie entière

de $(n-1)/2$. Les nombres $N(p, n)$, $n \geq 1$, $0 \leq p \leq [(n-1)/2]$ sont des entiers positifs.

La formule (3) ne permet pas *a priori* d'accéder à la loi (11) de β_n , l'intégration de (3) par rapport à t sur $]0, +\infty[$ semble conduire à une intégrale double semi-convergente. Aussi adopterons-nous une technique probabiliste directement liée à la variable aléatoire β_n .

Nous avons le lemme suivant :

LEMME 2. — La transformée de Mellin de la variable aléatoire β_n s'explique selon :

$$(12) \quad \mathbb{E}_{(0,b)} [\beta_n^{s-1}] = \frac{b^{s-1}}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^n}, \quad |s| < \frac{3}{2}.$$

Preuve. — La décomposition (4) de β_n en produit de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées permet d'écrire la loi $\beta_n (P_{(0,b)})$ comme un produit de convolution multiplicative (cf. A.2.i) itéré n fois :

$$\beta_n (P_{(0,b)}) = b \cdot \beta_1 (P_{(0,1)})^{(*n)}.$$

La transformation de Mellin transposant le produit de convolution multiplicative en produit algébrique, (cf. A.3) nous en déduisons :

$$\mathbb{E}_{(0,b)} [\beta_n^{s-1}] = b^{s-1} [\mathbb{E}_{(0,1)} (\beta_1^{s-1})]^n.$$

Enfin l'espérance $\mathbb{E}_{(0,1)} (\beta_1^{s-1})$ se calcule élémentairement à partir de la formule de H. P. McKean ([16], 3.7) :

$$\mathbb{P}_{(0,1)} \{\beta_1 \in ds\} / dz = \frac{3}{2\pi} \frac{z^{3/2}}{z^3 + 1},$$

selon $\mathbb{E}_{(0,1)} [\beta_1^{s-1}] = \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z^{s+1/2}}{z^3+1} dz = 1/(2 \cos \frac{\pi s}{3})$, pour $|s| < \frac{3}{2}$ ce qui démontre le lemme 2. \square

Preuve du théorème 2. — La distribution de β_n s'obtient par inversion de la transformée de Mellin (12) ce qui fournit d'après (A.2.1) la représentation intégrale :

$$\mathbb{P}_{(0,b)} \{\beta_n \in dz\} / dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{b^{s-1} z^{-s}}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^n} ds$$

c désignant un réel quelconque compris entre $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Nous avons reporté dans l'annexe A.4 le calcul de l'intégrale $I(y) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-s} (2 \cos \frac{\pi s}{3})^{-n} ds$, $y > 0$, laquelle fournit la densité $P_{(0,b)} \{ \beta_n \in dz \} / dz = (2i\pi b)^{-1} I(z/b)$. \square

Exemples numériques. - A titre indicatif nous donnons les valeurs explicites des entiers $N(p, n)$ pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} N(0, n) &= 1, & n &\geq 1 \\ N(1, n) &= C_n^3, & n &\geq 3 \\ N(2, n) &= \frac{1}{3} (5n + 2) C_n^5, & n &\geq 5 \\ N(3, n) &= \frac{1}{9} (35n^2 + 42n + 16) C_n^7, & n &\geq 7 \\ N(4, n) &= \frac{1}{15} (175n^3 + 420n^2 + 404n + 144) C_n^9, & n &\geq 9. \end{aligned}$$

On peut démontrer que les deux derniers termes de la suite $(N(p, n))_{0 \leq p \leq [(n-1)/2]}$ s'explicitent selon :

$$\begin{aligned} N([n-1]/2, n) &= \prod_{q=1}^{[(n-1)/2]} (2q - \varepsilon)^2 = c 2^{n-2} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2 \\ N([n-1]/2 - 1, n) &= \prod_{q=1}^{[(n-1)/2]} (2q - \varepsilon)^2 \times \sum_{q=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{(2q - \varepsilon)^2} \\ &= c 2^{n-2} \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^2 S \end{aligned}$$

avec les conventions d'écriture :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est pair : } \quad \varepsilon = 0, \quad c = 1, \quad S &= \frac{1}{4} \sum_{q=1}^{(n-2)/2} \frac{1}{q^2}; \\ \text{si } n \text{ est impair : } \quad \varepsilon = 1, \quad c = \frac{2}{\pi}, \quad S &= \frac{3}{4} \sum_{q=1}^{(n-2)/2} \frac{1}{q^2} + \sum_{q=(n+1)/2}^{(n-1)} \frac{1}{q^2}. \end{aligned}$$

B. Étude sous la probabilité $\mathbb{P}_{(x,y)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

Nous débutons ce paragraphe par quelques résultats intermédiaires concernant la loi du couple (T_a, B_{T_a}) sous la probabilité $\mathbb{P}_{(x,y)}$, (x, y) étant un point quelconque de $(\mathbb{R} \setminus \{a\}) \times \mathbb{R}$. Nous aurons besoin d'une expression « symétrisée » de cette loi ainsi que de sa transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev que nous divulguons ci-dessous. Posons à cet effet :

$$\pi_t(x, y; u, v) = p_t(x, y; u, v) + p_t(x, y; 2a - u, -v),$$

$$\Psi_\lambda(x, y; u, v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \pi_t(x, y; u, v) dt.$$

LEMME 3. - 1. On a pour $t > 0$, $x \neq a$, et $z \in A_{x-a}$:

$$(13) \quad \mathbb{P}_{(x,y)} \{T_a \in dt, B_{T_a} \in dz\} / dt dz = |z| \left[\pi_t(x, y; a, z) - \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) \pi_{t-s}(x, y; a, \zeta) ds d\zeta \right].$$

2. Pour $x \neq a$ et $z \in A_{x-a}$:

$$(14) \quad \mathbb{P}_{(x,y)} \{B_{T_a} \in dz\} / dz = |z| \Psi_0(x, y; a, z) - \frac{3}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|z|^{3/3} \zeta^{3/2}}{|z|^3 + \zeta^3} \Psi_0(x, y; a, \zeta) d\zeta.$$

Preuve. - 1. D'après la définition de $\pi_t(x, y; u, v)$ et l'expression (2) de $\mathbb{P}_{(x,y)} \{T_a \in dt, B_{T_a} \in dz\}$ il suffit de démontrer que l'on a pour $z \in A_{x-a}$:

$$(15) \quad p_t(x, y; a, -z) = \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) p_{t-s}(x, y; a, -\varepsilon_{x-a} \zeta) ds d\zeta.$$

A cet effet nous exploiterons la continuité des trajectoires et la propriété de Markov du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ pour écrire la relation suivante, valable dans les cas $x < a < u$ et $x > a > u$:

$$p_t(x, y; u, v) = \int_0^t \int_{A_{x-a}} \mathbb{P}_{(x,y)} \{T_a \in ds, B_{T_a} \in d\zeta\} p_{t-s}(a, \zeta; u, v).$$

Après avoir noté l'identité élémentaire $p_t(x, y; u, v) = p_t(u, -v; x, -y)$ nous obtenons, en nous limitant par exemple au cas

(non restrictif) $x < a < u$:

$$p_t(u, -v; x, -y) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)} \{T_a \in ds, B_{T_a} \in d\zeta\} p_{t-s}(u, -v; a, -\zeta).$$

Faisons tendre x vers a par valeurs inférieures. Ceci donne pour $y < 0$ et $u > a$:

$$p_t(u, -v; a, -y) = \int_0^t \int_0^{+\infty} q_s(y, \zeta) p_{t-s}(u, -v; a, -\zeta) ds d\zeta$$

ce qui démontre (15), après un changement évident de notations. \square

2. (14) se déduit de (13) à l'aide d'une intégration par rapport à t .

COROLLAIRE 2. - 1. *La transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (T_a, B_{T_a}) sous $\mathbb{P}_{(x,y)}$, $x \neq a$, s'explique comme suit :*

$$(16) \quad \mathbb{E}_{(x,y)} \left[e^{-\lambda T_a} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}|B_{T_a}|)}{|B_{T_a}|} \right] = \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] G_{a;\lambda,\gamma}(x, y)$$

avec $G_{a;\lambda,\gamma}(x, y) = \int_0^{+\infty} \Psi_\lambda(x, y; a, v) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}v) dv$.

2. *La transformée de Mellin de la variable aléatoire B_{T_a} sous $\mathbb{P}_{(x,y)}$ est déterminée par*

$$(17) \quad \mathbb{E}_{(x,y)} [|B_{T_a}|^{s-1}] = \left[1 - \frac{1}{2 \cos \frac{\pi s}{3}} \right] H_{a;s}(x, y) \quad \text{pour } |s| < \frac{3}{2},$$

où $H_{a;s}(x, y) = \int_0^{+\infty} \Psi_0(x, y; a, v) v^s dv$.

Preuve. - 1. Nous partons de l'expression (13) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[e^{-\lambda T_a} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}|B_{T_a}|)}{|B_{T_a}|} \right] &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) \pi_t(x, y; a, z) dt dz \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z)}{z} dz d\zeta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &\quad \times \int_0^t z q_s(z, \zeta) \pi_{t-s}(x, y; a, \zeta) ds. \end{aligned}$$

Notons la symétrie particulière

$$z q_s(z, \zeta) = \zeta q_s(\zeta, z), \quad \text{si } z, \zeta > 0,$$

le deuxième terme du second membre de l'égalité précédente s'écrit encore

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z)}{z} dz d\zeta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\ \times \int_0^t \zeta q_s(\zeta, z) \pi_{t-s}(x, y; a, \zeta) ds,$$

soit sous forme probabiliste :

$$\int_0^{+\infty} \zeta \Psi_\lambda(x, y; a, \zeta) d\zeta \int_0^{+\infty} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z)}{z} \mathbb{E}_{(0, \zeta)}[e^{-\lambda\tau_1}, \beta_1 \in dz] \\ = \int_0^{+\infty} \zeta \Psi_\lambda(x, y; a, \zeta) \mathbb{E}_{(0, \zeta)} \left[e^{-\lambda\tau_1} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_1)}{\beta_1} \right] d\zeta \\ = \int_0^{+\infty} \Psi_\lambda(x, y; a, \zeta) \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\zeta)}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} d\zeta.$$

Dans cette dernière égalité on a fait appel à (6). Le résultat (16) est ainsi acquis.

2. L'identité (17) provient de (14) et (12) (écrite pour $n = 1$). \square

Remarque 1. – On peut expliciter (16) en faisant appel uniquement à la densité de transition $p_t(x, y; u, v)$ au lieu de la symétrisée $\pi_t(x, y; u, v)$. Plus précisément la fonction $G_{a; \lambda, \gamma}(x, y)$ est directement reliée aux suivantes :

$$F_{a; \lambda, \gamma}^\pm(x, y) = \int_0^{+\infty} \Phi_\lambda(x, y; a, \pm v) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}v) dv$$

où

$$\Phi_\lambda(x, y; u, v) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p_t(x, y; u, v) dt.$$

Il nous semble intéressant de signaler cette relation que nous utiliserons d'ailleurs par la suite :

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \times \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \text{signe de } (x - a)$. Les relations suivantes sont satisfaites :

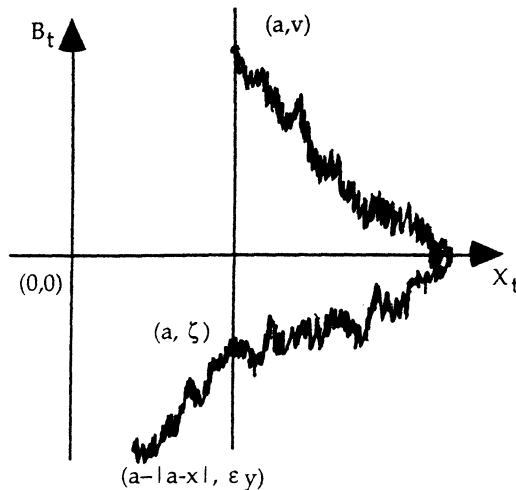
$$(18.1) \quad F_{a;\lambda,\gamma}^{-\varepsilon}(x, y) = \left(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}\right) F_{a;\lambda,\gamma}^{+\varepsilon}(x, y)$$

$$(18.2) \quad \begin{aligned} G_{a;\lambda,\gamma}(x, y) &= \left(1 + 2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}\right) F_{a;\lambda,\gamma}^{\varepsilon}(x, y) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}}\right) F_{a;\lambda,\gamma}^{-\varepsilon}(x, y). \end{aligned}$$

Preuve. - D'après les identités classiques $\Phi_{\lambda}(x, y; u, v) = \Phi_{\lambda}(-u, v; -x, y) = \Phi_{\lambda}(0, v; u - x, y)$ il vient :

$$\begin{aligned} F_{a;\lambda,\gamma}^{\varepsilon}(x, y) &= \int_0^{+\infty} \Phi_{\lambda}(-\varepsilon a, v; -\varepsilon x, \varepsilon y) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}v) dv \\ &= \int_0^{+\infty} \Phi_{\lambda}(a, v; a - \varepsilon(x - a), \varepsilon y) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}v) dv. \end{aligned}$$

Or $a - \varepsilon(x - a) = a - |x - a| < a$, donc la trajectoire générique du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ issue du point (a, v) , $v > 0$, recoupe nécessairement l'axe $\{a\} \times \mathbb{R}$ avant de visiter un voisinage de $(a - |x - a|, \varepsilon y)$ (cf. figure ci-dessous).



Ceci entraîne en vertu de la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} p_t(a, v; a - |x - a|, \varepsilon y) \\ = \int_0^t \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}_{(a, v)} \{T_a \in ds, B_{T_a} \in d\zeta\} p_{t-s}(a, \zeta; a - |x - a|, \varepsilon y), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(a, v; a - |x - a|, \varepsilon y) \\ = \int_{-\infty}^0 \mathbb{E}_{(a, v)} [e^{-\lambda T_a}, B_{T_a} \in d\zeta] \Phi_\lambda(a, \zeta; a - |x - a|, \varepsilon y) \\ = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta}{v} \mathbb{E}_{(a, -\zeta)} [e^{-\lambda T_a}, B_{T_a} \in dv] / dv \times \Phi_\lambda(a, -\zeta; a - |x - a|, \varepsilon y) d\zeta. \end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité on a exploité la propriété

$$|v| \mathbb{P}_{(a, v)} \{T_a \in ds, B_{T_a} \in d\zeta\} / d\zeta = |\zeta| \mathbb{P}_{(a, \zeta)} \{T_a \in ds, B_{T_a} \in dv\} / dv$$

pour $v\zeta < 0$ (cf. (1)). Il s'ensuit alors grâce à (6) :

$$\begin{aligned} F_{a; \lambda, \gamma}^\varepsilon(x, y) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(a, -\zeta)} \left[e^{-\lambda T_a} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} B_{T_a})}{B_{T_a}} \right] \\ &\quad \times \Phi_\lambda(a, -\zeta; a - \varepsilon(x - a), \varepsilon y) d\zeta \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \int_0^{+\infty} \Phi_\lambda(x, y; a, -\varepsilon v) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} v) dv \end{aligned}$$

ce qui prouve (18.1).

La relation (18.2) s'en déduit immédiatement après avoir noté que

$$G_{a; \lambda, \gamma}(x, y) = F_{a; \lambda, \gamma}^+(x, y) + F_{a; \lambda, \gamma}^-(x, y). \quad \square$$

Nous étendons à présent l'identité (16) au n -ième temps de passage τ_n ; on note ici $G_{\lambda, \gamma} = G_{0; \lambda, \gamma}$.

LEMME 4. – On a pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $n \geq 1$:

$$(19) \quad \mathbb{E}_{(x, y)} \left[e^{-\lambda \tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] = \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{G_{\lambda, \gamma}(x, y)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}}.$$

Preuve. – Le caractère fortement markovien du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ nous assure que

$$(20) \quad \mathbb{P}_{(x, y)} \{ \tau_n \in dt, \beta_n \in dz \} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_{(x, y)} \{ \tau_1 \in \underline{ds}, \beta_1 \in \underline{d\zeta} \} \\ \times \mathbb{P}_{(0, \zeta)} \{ \tau_{n-1} \in dt - s, \beta_{n-1} \in dz \}$$

et en conséquence :

$$\mathbb{E}_{(x, y)} \left[e^{-\lambda \tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(x, y)} [e^{-\lambda \tau_1}, \beta_1 \in d\zeta] \\ \times \mathbb{E}_{(0, \zeta)} \left[e^{-\lambda \tau_{n-1}} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_{n-1})}{\beta_{n-1}} \right].$$

L'expression de la seconde espérance figurant dans cette dernière intégrale est donnée par (5). Il vient alors :

$$\mathbb{E}_{(x, y)} \left[e^{-\lambda \tau_n} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)}{\beta_n} \right] \\ = \int_0^{+\infty} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\zeta)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1} \zeta} \mathbb{E}_{(x, y)} [e^{-\lambda \tau_1}, \beta_1 \in d\zeta] \\ = \frac{1}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} \mathbb{E}_{(x, y)} \left[e^{-\lambda \tau_1} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_1)}{\beta_1} \right].$$

La valeur de la dernière espérance ci-dessus est déterminée par (16) et on aboutit finalement à (19). \square

En corollaire il se dégage après inversion de la transformée (19) une représentation intégrale de la loi du couple (τ_n, β_n) sous $\mathbb{P}_{(x, y)}$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$, que voici :

THÉORÈME 3.

$$\begin{aligned}
(21) \quad & \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \tau_n \in dt, \beta_n \in dz \} / dt dz \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \pi_{t-s}(x, y; 0, v) e^{-2(z^2+v^2)/s} \frac{ds dv}{s} \\
&\quad \times \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} K_{i\gamma} \left(\frac{4vz}{s} \right) d\gamma
\end{aligned}$$

avec, numériquement :

$$\pi_t(x, y; 0, v) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp \left[-6 \frac{x^2}{t^3} - 6 \frac{xy}{t^2} - 2 \frac{y^2 + v^2}{t} \right] \operatorname{ch} \left[2 \frac{v}{t^2} (3x + ty) \right].$$

Preuve. – Inversons en premier lieu la transformée de Kontorovich-Lebedev (selon A.2.2) figurant dans (19) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\tau_n}, \beta_n \in dz] / dz &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) \\
&\quad \times \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} G_{\lambda,\gamma}(x, y) d\gamma \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \Psi_\lambda(x, y; 0, v) dv \int_0^{+\infty} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}v) \\
&\quad \times \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} d\gamma \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi\gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} d\gamma \\
&\quad \times \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \pi_t(x, y; 0, v) dv \right] \\
&\quad \times \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} e^{-2(z^2+v^2)/t} K_{i\gamma} \left(\frac{4vz}{t} \right) \frac{dt}{2t} \right]
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (A.3.i). L'inversion de la transformée de Laplace $\mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\tau_n}, \beta_n \in dz] / dz$ s'ensuit immédiatement, faisant ainsi apparaître la convolution temporelle figurant dans (21). \square

COROLLAIRE 3. – 1. La densité de la variable aléatoire τ_n s'explique selon

$$(22) \quad \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \tau_n \in dt \} / dt = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times \int_0^t \int_0^{+\infty} \pi_{t-s}(x, y; 0, v) e^{-v^2/s} \frac{ds dv}{\sqrt{s}} \times \int_0^{+\infty} K_{i\gamma/2} \left(\frac{v^2}{s} \right) \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} d\gamma.$$

2. Sa transformée de Laplace est donnée par :

$$(23) \quad \mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\tau_n}] = \frac{1}{\pi\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} G_{\lambda,\gamma}(x, y) \times \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} d\gamma.$$

Preuve. – 1. La densité (22) s'obtient instantanément en intégrant (21) par rapport à z et en invoquant (A.3.ii.a).

2. La transformée (23) se déduit ensuite de (22) grâce à (A.3.ii.c). □

Remarque 3. – Nous tenons à signaler que nous sommes parvenus à écrire la transformée de Laplace de la seule variable aléatoire τ_n , dont l'émergence directe de la formule générale (aux deux paramètres λ, γ) (19) donnant $\mathbb{E}_{(x,y)} [e^{-\lambda\tau_n} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}\beta_n)/\beta_n]$ nous semble irréalisable.

Il paraît difficile de gagner la loi de β_n à partir de (21). Aussi allons-nous en faire une étude à part. Notons $H_s = H_{0;s}$.

LEMME 5. – La transformée de Mellin de la variable aléatoire β_n sous $\mathbb{P}_{(x,y)}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, s'exprime selon

$$(24) \quad \mathbb{E}_{(x,y)} [\beta_n^{s-1}] = \left[1 - \frac{1}{2 \cos \frac{\pi s}{3}} \right] \frac{H_s(x, y)}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}}, \quad |s| < \frac{3}{2}.$$

Preuve. – Intégrons (20) par rapport à t . Il sort immédiatement la relation « markovienne »

$$\mathbb{P}_{(x,y)} \{ \beta_n \in dz \} / dz = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \beta_1 \in d\zeta \} \mathbb{P}_{(0,\zeta)} \{ \beta_{n-1} \in dz \}$$

de laquelle on tire successivement les égalités suivantes grâce à (12) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)} [\beta_n^{s-1}] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \beta_1 \in d\zeta \} \mathbb{E}_{(0,\zeta)} [\beta_{n-1}^{s-1}] \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{s-1}}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}} \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \beta_1 \in d\zeta \} \\ &= \frac{1}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}} \mathbb{E}_{(x,y)} [\beta_1^{s-1}], \end{aligned}$$

ce qui corrobore le résultat annoncé (24) d'après (17). \square

Il surgit alors aisément de (24) les représentations de la densité de β_n que voici :

THÉORÈME 4. — Soit $p_n(x, y; z) = \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \beta_n \in dz \} / dz$, $h(x, y; z) = \Psi_0(x, y; 0, z)$. On a :

$$(25.1) \quad p_n(x, y; z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \cos \frac{\pi s}{3}} \right] \times \frac{H_s(x, y)}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}} z^{-s} ds, \quad c \in \left] -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right[,$$

ce qui s'écrit encore sous forme d'une convolution multiplicative :

$$(25.2) \quad p_n(x, y) = h(x, y) * p_{n-1}(0, 1) - h(x, y) * p_n(0, 1).$$

PROPOSITION 1. — « Une curieuse connexion entre les densités des couples (τ_n, β_n) , $n \geq 1$ ». On a pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $t > 0$, $z > 0$:

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \tau_n \in dt, \beta_n \in dz \} / dt dz = z \pi_t(x, y; 0, z).$$

Preuve. — En comparant les transformées de Laplace-Kontorovich-Lebedev de chacun des deux membres de (26), on obtient le résultat désiré. \square

Remarque 3. – On peut s'affranchir de la valeur absolue figurant dans la définition de β_n ; en raisonnant comme pour (26), on trouve :

$$(26') \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)} \{ \tau_n \in dt, B_{\tau_n} \in dz \} / dt dz = |z| p_t(x, y; 0, z)$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $t > 0$, $z \in \mathbb{R}$. Notons que dans cette nouvelle somme, un terme sur deux est nul. Plus précisément

$$\mathbb{P}_{(x,y)} \{ \tau_n \in dt, B_{\tau_n} \in dz \} / dt dz = 0$$

lorsque $xz > 0$ et n est impair, ou $xz < 0$ et n est pair.

Nous donnons une explication probabiliste de ce phénomène dans un article traitant des excursions du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ [12].

II. LA SUITE MARKOVIENNE $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$

Nous divisons ce paragraphe en deux parties. En premier lieu nous nous intéressons au cas particulier $n = 1$, c'est-à-dire à la distribution, absolue de la suite de Markov $(\tau_n^+, \beta_n^+)_{n \geq 1}$. Le second alinéa est ensuite consacré au cas général $n \geq 1$.

A. Nous avons obtenu les représentations intégrales des lois du couple (τ_1^+, β_1^+) et de la variable aléatoire β_1^+ suivantes :

THÉORÈME 5. – 1. On a pour $t > 1$ et $z \in \mathbb{R}$, en posant $p_t(z) = (\sqrt{3}|z|)(\pi t^2)^{-1} e^{-2z^2/t}$:

$$(27) \quad \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_1^+ \in dt, \beta_1^+ \in dz \} / dt dz = p_t(z) - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, |z|) p_{t-s}(\zeta) ds d\zeta.$$

2. Pour $z \in \mathbb{R}$, en posant $p^+(z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi|z|} (1 - e^{-2z^2})$:

$$(28) \quad \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \beta_1^+ \in dz \} / dz = p^+(z) - \int_0^{+\infty} q(\zeta, |z|) p^+(\zeta) d\zeta.$$

Notations : $q(\zeta, z) = \mathbb{P}_{(0,\zeta)} \{ |\beta_1| \in dz \} / dz = \frac{3}{2\pi} \frac{\zeta^{1/2} z^{3/2}}{\zeta^3 + z^3}$, $\zeta, z > 0$ ([13]); pour $q_s(\zeta, z)$ voir l'introduction.

Preuve. – La preuve de ce théorème repose sur le caractère markovien du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ et l'écriture explicite symétrisée (13) de la loi du couple (T_a, B_{T_a}) sous la probabilité $\mathbb{P}_{(x, y)}$, (x, y) étant un point quelconque de \mathbb{R}^2 .

1. Le caractère markovien du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ fournit l'identité :

$$(29) \quad \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_1^+ \in dt, \beta_1^+ \in dz \} \\ = \mathbb{E}_{(0,0)} [\mathbb{P}_{(X_1, B_1)} \{ T_0 \in dt - 1, B_{T_0} \in dz \}].$$

En introduisant l'expression (13) de la probabilité (T_0, B_{T_0}) ($\mathbb{P}_{(x, y)}$) dans (29) nous avons pour $t > 1$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_1^+ \in dt, \beta_1^+ \in dz \} / dt dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0, 0; x, y) dx dy \times |z| \left[\pi_{t-1}(x, u; 0, z) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) \pi_{t-1-s}(x, y; 0, \zeta) ds d\zeta \right] \mathbb{1}_{A_x}(z) \\ &= |z| \left[\int_{A_z} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0, 0; x, y) \pi_{t-1}(x, y; 0, z) dx dy \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{t-1} \int_0^{+\infty} q_s(z, \zeta) ds d\zeta \right. \\ & \quad \left. \times \int_{A_z} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(0, 0; x, y) \pi_{t-1-s}(x, y; 0, \zeta) dx dy \right] \end{aligned}$$

Le résultat souhaité découle alors des trois identités générales :

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x, y; w, z) p_t(w, z; u, v) dw dz = p_{s+t}(x, y; u, v),$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \int_A \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(0, 0; w, z) \pi_{t-s}(w, z; 0, v) dw dz = p_t(0, 0; 0, v) \\ = \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} e^{-2v^2/t}, \quad 0 < s < t, \quad \text{avec } A =]-\infty, 0] \text{ ou } [0, +\infty[\end{cases}$$

$$(iii) \quad z q_s(z, \zeta) = \zeta q_s(\zeta, z), \quad z > 0, \quad \zeta > 0.$$

La première égalité traduit le caractère markovien du processus $(U_t)_{t \geq 0}$ (équation de Chapman-Kolmogorov), la seconde se déduit de la précédente

en faisant appel à la relation triviale $p_t(-x, -y; -u, -v) = p_t(x, y; u, v)$ et la dernière provient de l'écriture explicite (1) de la loi du couple (T_0, B_{T_0}) sous la probabilité $\mathbb{P}_{(0, z)}$.

2. Une simple intégration de la formule (27) par rapport à t sur $]1, +\infty[$ nous permet d'obtenir (28), après avoir remarqué que $p^+(z) = \int_1^{+\infty} p_t(z) dt$. \square

Nous avons obtenu pour la loi de β_1^+ la formule numérique suivante :

COROLLAIRE 4.

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \mathbb{P}_{(0,0)}\{\beta_1^+ \in dz\}/dz &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi|z|} \left[2e^{z^2} \cos\left(z^2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - e^{-2z^2} \right] \\
 &+ \frac{\sqrt{3}\Gamma(1/4)}{8\pi^2|z|} e^{-2z^2} \int_0^{2z^2} x^{-1/4} e^x dx \\
 &- \frac{\sqrt{3}\Gamma(3/4)}{8\pi^2|z|} e^{-2z^2} \int_0^{2z^2} x^{-3/4} e^x dx \\
 &+ \frac{2^{3/4}\sqrt{3}\Gamma(1/4)}{\pi^2} \sqrt{|z|} e^{z^2} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n z^{2n}}{n!(4n+3)} \\
 &\times \cos\left(z^2\sqrt{3} - (n+1)\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &- \frac{2^{1/4}\sqrt{3}\Gamma(3/4)}{\pi^2\sqrt{|z|}} e^{z^2} \sum_{n \geq 0} \frac{2^n z^{2n}}{n!(4n+1)} \\
 &\times \cos\left(z^2\sqrt{3} - (n-1)\frac{2\pi}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Preuve. – Nous calculons explicitement l'intégrale figurant dans (28) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} q(\zeta, |z|) p^+(\zeta) d\zeta &= \frac{3^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{|z|^{3/2} \zeta^{-1/2}}{\zeta^3 + |z|^3} (1 - e^{-2\zeta^2}) d\zeta \\
 &= \frac{3^{3/2}}{4\pi^2|z|} \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{-1/2}}{\zeta^3 + 1} (1 - e^{-2z^2\zeta^2}) d\zeta \\
 &= \frac{3^{3/2}}{4\pi^2|z|} [J(0) - J(2z^2)]
 \end{aligned}$$

où nous avons posé $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{-1/2}}{\zeta^3 + 1} e^{-y\zeta^2} d\zeta, y \geq 0$.

Le calcul de $J(y)$ est présenté dans l'annexe A.5 et conduit à la formule annoncée (30). \square

Nous énonçons un deuxième résultat intéressant en soi et qui nous sera utile pour l'obtention de la loi générale du couple (τ_n^+, β_n^+) .

COROLLAIRE 5. – 1. La transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_1^+, β_1^+) est donnée par :

$$(31) \quad \mathbb{E}_{(0,0)} \left[e^{-\lambda \tau_1^+} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} |\beta_1^+|)}{|\beta_1^+|} \right] = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \\ \times \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\lambda t - 2z^2/t} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dt dz \\ = \frac{3^{1/2}}{2^{3/2} \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{2}} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{\lambda}} W_{-1, i\gamma/2}(\lambda).$$

2. La transformée de Mellin de la variable aléatoire β_1^+ est fournie par :

$$(32) \quad \mathbb{E}_{(0,0)} [|\beta_1^+|^{s-1}] = \frac{\sqrt{3}}{\pi} 2^{(1-s)/2} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{1-s} \left[1 - \frac{1}{2 \cos \frac{\pi s}{3}} \right], \quad |s| < 1.$$

Preuve. – 1. Nous calculons la transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_1^+, β_1^+) directement à partir de la densité (27), après avoir noté la propriété de symétrie $(\tau_1^+, \beta_1^+) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\tau_1^+, -\beta_1^+)$, résultant de la parité de (27) par rapport à z :

$$\mathbb{E}_{(0,0)} \left[e^{-\lambda \tau_1^+} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} |\beta_1^+|)}{|\beta_1^+|} \right] \\ = 2 \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z)}{z} p_t(z) dt dz \\ - 2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z)}{z} dz d\zeta \\ \times \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \int_0^{t-1} q_s(\zeta, z) p_{t-s}(\zeta) ds.$$

L'identité triviale

$$\int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \int_0^{t-1} q_s(\zeta, z) p_{t-s}(\zeta) ds \\ = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} q_u(\zeta, z) du \int_1^{+\infty} e^{-\lambda v} p_v(\zeta) dv$$

mène à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)} \left[e^{-\lambda \tau_1^+} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} |\beta_1^+|)}{|\beta_1^+|} \right] &= 2 \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z)}{z} p_t(z) dt dz \\ &\quad - 2 \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda v} p_v(\zeta) dv d\zeta \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z)}{z} q_u(\zeta, z) du dz. \end{aligned}$$

D'après (6), nous reconnaissons dans la deuxième intégrale double la quantité

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z)}{z} q_u(\zeta, z) du dz &= \mathbb{E}_{(0,\zeta)} \left[e^{-\lambda \tau_1} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} \beta_1)}{\beta_1} \right] = \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} \zeta)}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3}) \zeta}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à la première formulation de l'espérance (31).

La deuxième expression de (31) provient alors successivement des identités (A.3.iii.a) et (b).

2. La transformée de Mellin de la variable aléatoire β_1^+ se calcule également à partir de l'expression de la densité (28) comme suit. Après avoir observé que l'on a

$$\int_0^{+\infty} q(\zeta, z) p^+(\zeta) d\zeta = \int_0^{+\infty} k\left(\frac{z}{\zeta}\right) p^+(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = (k * p^+)(z)$$

avec $k(y) = q(1, y) = \frac{3}{2\pi} \frac{y^{3/2}}{y^3+1} = \mathbb{P}_{(0,1)}\{\beta_1 \in dy\}/dy$, nous en déduisons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)} [|\beta_1^+|^{s-1}] &= 2 \int_0^{+\infty} z^{s-1} p^+(z) \left[1 - \int_0^{+\infty} \zeta^{s-1} k(\zeta) d\zeta \right] \\ &= 2 \tilde{p}^+(s) [1 - \tilde{k}(s)]. \end{aligned}$$

La première intégrale, $\tilde{p}^+(s)$, se calcule élémentairement et vaut $\frac{\sqrt{3}}{2\pi} 2^{(1-s)/2} \Gamma(\frac{1+s}{2}) / (1-s)$ pour $|s| < 1$. Quant à la deuxième, $\tilde{k}(s)$, elle représente la transformée de Mellin $\mathbb{E}_{(0,1)}[\beta_1^{s-1}]$ dont la valeur est $1/(2 \cos \frac{\pi s}{3})$ pour $|s| < \frac{3}{2}$ en vertu de (12). \square

B. Dans cette partie nous déterminons la distribution du couple (τ_n^+, β_n^+) dans le cas général $n \geq 1$.

THÉORÈME 6. – 1. On a pour $n \geq 1$, $t > 1$ et $z \in \mathbb{R}$:

$$(33) \quad \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_n^+ \in dt, \beta_n^+ \in dz \} / dt dz \\ = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2} \frac{t-1}{t|z|} e^{-\frac{2t-1}{i(t-1)} z^2} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \\ \times \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} W_{-1, i\gamma/2} \left(\frac{2z^2}{t(t-1)} \right) d\gamma.$$

2. On a pour $n \geq 1$, $z \in \mathbb{R}$ et $|c| < 1$:

$$(34) \quad \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \beta_n^+ \in dz \} / dz = \frac{\sqrt{3}}{i\pi^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{-(1+s)/2} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{1-s} \\ \times \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi s}{3}} \right] \frac{|z|^{-s}}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}} ds.$$

Pour démontrer ce théorème nous procédons de la même façon que dans la preuve du théorème 1. Nous utiliserons deux lemmes similaires, dont les preuves sont semblables à celles des lemmes 1.1 et 1.2.

Tout d'abord on a une décomposition du couple (τ_n^+, β_n^+) analogue à (4) :

LEMME 6.1. – L'identité en loi suivante est satisfaite pour $n \geq 2$:

$$(35) \quad (\tau_n^+, \beta_n^+) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\tau_{n-1}^+ + \beta_{n-1}^+ t_1, \beta_{n-1}^+ b_1)$$

où (t_1, b_1) représente un vecteur aléatoire de loi la probabilité (τ_1, β_1) ($\mathbb{P}_{(0,0)}$), indépendant du couple $(\tau_{n-1}^+, \beta_{n-1}^+)$.

LEMME 6.2. – 1. La transformée de Laplace-Kontorovich-Lebedev du couple (τ_n^+, β_n^+) s'explique selon

$$(36) \quad \mathbb{E}_{(0,0)} \left[e^{-\lambda \tau_n^+} \frac{K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} |\beta_n^+|)}{|\beta_n^+|} \right] \\ = \frac{2\sqrt{3}}{\pi (2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \\ \times \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\lambda t - 2z^2/t} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dt dz \\ = \frac{3^{1/2}}{2^{3/2} \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{2} (2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}} \right] \frac{e^{-\lambda/2}}{\sqrt{\lambda}} W_{-1, i\gamma/2}(\lambda).$$

2. La transformée de Mellin de la variable aléatoire β_n^+ est donnée par

$$(37) \quad \mathbb{E}_{(0,0)} [|\beta_n^+|^{s-1}] = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{2^{(1-s)/2} \Gamma(\frac{1+s}{2})}{(1-s)(2 \cos \frac{\pi s}{3})^{n-1}} \left[1 - \frac{1}{2 \cos \frac{\pi s}{3}} \right], \quad |s| < 1.$$

Preuve du théorème 6. - 1. Nous inversons la transformée de Kontorovich-Lebedev (36) (première formulation) en faisant appel aux formules de réciprocity (A.2.2). Ceci donne pour $z > 0$:

$$(38) \quad \mathbb{E}_{(0,0)} [e^{-\lambda \tau_n^+}, |\beta_n^+| \in dz] / dz \\ = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^3} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi \gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3})^{n-1}} d\gamma \\ \times \int_1^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\lambda t - 2y^2/t} \\ \times K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} y) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dt dy.$$

La relation (A.3.i) fournit la valeur de l'intégrale intermédiaire suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\lambda t - 2y^2/t} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} y) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda} z) dt \\ = \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \int_0^{t-1} \frac{1}{2s(t-s)^2} e^{-2\frac{y^2+z^2}{s} - 2\frac{y^2}{t-s}} K_{i\gamma}\left(\frac{4yz}{s}\right) ds,$$

laquelle permet alors d'inverser la transformée de Laplace (38) :

$$\mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_n^+ \in dt, |\beta_n^+| \in dz \} / dt dz \\ = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi \gamma}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3})^{n-1}} d\gamma \\ \times \int_0^{t-1} e^{-2z^2/s} \frac{ds}{s(t-s)^2} \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{t}{s(t-s)} y^2} K_{i\gamma}\left(\frac{4z}{s} y\right) dy \\ = \frac{\sqrt{3}}{2^{3/2} \pi^{5/2}} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3}} \right] \frac{\gamma \operatorname{sh} \pi \gamma}{(\operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{2}) (2 \operatorname{ch} \frac{\pi \gamma}{3})^{n-1}} d\gamma \\ \times \int_0^{t-1} e^{-(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}) z^2} K_{i\gamma/2} \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) z^2 \right] \frac{ds}{\sqrt{st} (t-s)^{3/2}}.$$

La deuxième égalité provient de (A.3.iii.a).

L'intégrale simple suivante s'exprime, après avoir effectué le changement de variable $s \in]0, t - 1[\mapsto u = t(t - 1) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \in]1, +\infty[$, à l'aide de la fonction de Whittaker selon (voir A.3.iii.b) :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-1} e^{-\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)z^2} K_{i\gamma/2} \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) z^2 \right] \frac{ds}{\sqrt{st}(t-s)^{3/2}} \\ &= \frac{(t-1)^{1/2}}{t^{3/2}} e^{-2z^2/t} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{t(t-1)}u} K_{i\gamma/2} \left(\frac{z^2}{t(t-1)} u \right) \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t-1}{tz} e^{-\frac{2t-1}{t(t-1)}z^2} W_{-1, i\gamma/2} \left(\frac{2z^2}{t(t-1)} \right), \end{aligned}$$

ce qui démontre (33), après avoir noté la propriété évidente $(\tau_n^+, \beta_n^+) \stackrel{(\text{loi})}{=} (\tau_n^+, -\beta_n^+)$.

2. Pour aboutir à (34) il suffit d'inverser la transformée de Mellin (37) en ayant recours aux formules de réciprocity (A.2.1.). \square

Remarque 4. – Nous venons d'obtenir en particulier une deuxième écriture de la loi du couple (τ_1^+, β_1^+) ne comportant cette fois qu'une seule intégrale. Toutefois l'expression (27) nous a permis d'accéder directement à la distribution (30) de β_1^+ .

Remarque 5. – De l'égalité (37) écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(0,0)} [|\beta_n^+|^{s-1}] &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{2^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{(1-s) \left(2 \cos \frac{\pi s}{3}\right)^{n-1}} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{2^{(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{(1-s) \left(2 \cos \frac{\pi s}{3}\right)^n} \\ &= 2\tilde{p}^+(s) \mathbb{E}_{(0,1)} [\beta_{n-1}^{s-1}] - 2\tilde{p}^+(s) \mathbb{E}_{(0,1)} [\beta_n^{s-1}] \end{aligned}$$

nous déduisons une écriture de la densité de β_n^+ sous la forme d'un produit de convolution multiplicative (cf. A.2.i)

$$p_n^+ = p^+ * p_{n-1} - p^+ * p_n, \quad n \geq 2,$$

avec les notations $p_n^+(z) = \mathbb{P}_{(0,0)} \{\beta_n^+ \in dz\}/dz$ et $p_n(z) = \mathbb{P}_{(0,1)} \{\beta_n \in dz\}/dz$. Cette dernière formule nous a semblé plus exploitable que (34) pour en tirer une éventuelle expression numérique à partir de (10) généralisant (30). Nous ne présenterons pas le résultat particulièrement compliqué ainsi obtenu. Signalons seulement qu'il fait intervenir des intégrales du type

$$\int_0^{2z^2} t^\nu e^{\alpha t} (\ln t)^p dt \quad \text{avec } \nu \in \left\{ -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4} \right\}, p \in \mathbb{N} \quad \text{et } \alpha \in \{1, j, \bar{j}\},$$

ainsi que les dérivées successives de la fonction Γ en $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}$.

COROLLAIRE 6. – On a pour $t > 1$ et $n \geq 1$:

$$(39) \quad \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^+ \in dt\}/dt = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{1/2} \times \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}}\right] \frac{\gamma \operatorname{th} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} P_{(-1+i\gamma)/2}^{(-1)}(2t-1) d\gamma.$$

Preuve. – Il suffit d'intégrer (33) par rapport à z sur $] -\infty; +\infty[$ en faisant appel à (A.3.iv).

Remarque 6. – Il existe entre toutes les densités des couples (τ_n^+, β_n^+) une relation similaire à (26) que voici :

$$(40) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^+ \in dt, \beta_n^+ \in dz\}/dt dz = p_t(z), \quad t > 1, \quad z \in \mathbb{R}.$$

III. LA SUITE MARKOVIENNE $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$

En procédant à un changement de temps nous pouvons déduire de la distribution de (τ_n^+, β_n^+) précédente, celle du couple (τ_n^-, β_n^-) .

LEMME 7. – 1. Posons : $\hat{X}_0 = \hat{B}_0 = 0$, et pour $t > 0$: $\hat{X}_t = t^3 X_{1/t}$, $\hat{B}_t = d\hat{X}_t/dt = 3t^2 X_{1/t} - t B_{1/t}$. Alors les processus gaussiens $(X_t, B_t)_{t \geq 0}$ et $(\hat{X}_t, \hat{B}_t)_{t \geq 0}$ sont identiques en loi.

2. On obtient en conséquence l'identité en loi sous $\mathbb{P}_{(0,0)}$ suivante :

$$(41) \quad (\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1} \stackrel{(loi)}{=} \left(\frac{1}{\tau_n^+}, \frac{\beta_n^+}{\tau_n^+}\right)_{n \geq 1}.$$

Nous laissons la preuve élémentaire de ce lemme à l'attention du lecteur.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la loi absolue (τ_1^-, β_1^-) ($\mathbb{P}_{(0,0)}$) de la suite de Markov $(\tau_n^-, \beta_n^-)_{n \geq 1}$, et plus généralement la distribution du couple (τ_n^-, β_n^-) pour tout $n \geq 1$.

THÉORÈME 7. – 1. Pour $0 < t < 1$ et $z \in \mathbb{R}$ on a l'expression intégrale suivante :

$$(42) \quad \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_1^- \in dt, \beta_1^- \in dz\}/dt dz \\ = p_t(z) - \int_0^{t-t^2} \int_0^{+\infty} q_s(\zeta, |z|) p_{t-s}(\zeta) ds d\zeta$$

la valeur de $p_t(z)$ étant explicitée dans le théorème 5.

2. Plus généralement pour $n \geq 1$, $0 < t < 1$ et $z \in \mathbb{R}$:

$$(43) \quad \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^- \in dt, \beta_n^- \in dz\}/dt dz \\ = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2} \frac{1-t}{t^2|z|} e^{-\frac{2-t}{t(1-t)}z^2} \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}}\right] \\ \times \frac{\gamma \operatorname{sh} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} W_{-1, i\gamma/2} \left(\frac{2z^2}{1-t}\right) d\gamma.$$

Preuve. – Les égalités (42) et (43) se déduisent facilement des relations (27), (33) et (41). \square

Remarque 7. – La présence de la borne $t - t^2$ dans l'intégrale figurant dans (43) nous empêche apparemment d'obtenir pour la loi de β_1^- , par intégration relative à t sur $]0, 1[$, une expression analogue à (28). Ceci s'explique en fait par l'apparition, dans l'identification $\beta_1^- \stackrel{(\text{loi})}{=} \beta_1^+/\tau_1^+$, de l'instant τ_1^+ qui amène une complication supplémentaire par rapport au calcul de la loi de β_1^+ .

Enfin, de la relation $\tau_n^- \stackrel{(\text{loi})}{=} 1/\tau_n^+$, nous obtenons immédiatement d'après (39) :

COROLLAIRE 7. – Pour $0 < t < 1$ et $n \geq 1$:

$$(45) \quad \mathbb{P}_{(0,0)}\{\tau_n^- \in dt\}/dt = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{(1-t)^{1/2}}{t^2} \\ \times \int_0^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3}}\right] \frac{\gamma \operatorname{th} \frac{\pi\gamma}{2}}{(2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{3})^{n-1}} P_{(-1+i\gamma)/2}^{(-1)} \left(\frac{2}{t} - 1\right) d\gamma.$$

Nous terminons cette section en présentant l'analogue de (41) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{(0,0)} \{ \tau_n^- \in dt, \beta_n^- \in dz \} / dt dz = p_t(z), \quad 0 < t < 1, z \in \mathbb{R}.$$

ANNEXE

Le lecteur trouvera ci-dessous les notations des fonctions spéciales, les transformations fonctionnelles et les formules classiques utilisées, ainsi que le calcul des deux intégrales $I(y)$ et $J(y)$ laissé de côté au cours de cet article.

A.1. Fonctions spéciales

$\Gamma(x)$: fonction d'Euler

$\text{Erf}(x)$: fonction d'erreur

$K_\nu(x)$: fonction de Bessel modifiée

$W_{\mu,\nu}(x)$: fonction de Whittaker

$P_\nu^{(\mu)}(x)$: fonction de Legendre associée

$B_p^{(n)}, D_p^{(n)}, B_p^{(n)}(x)$: nombres et polynômes de Bernoulli généralisés.

A.2. Transformations fonctionnelles

(i) Transformation de Mellin :

$$(A.2.1) \quad \begin{cases} \tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(z) z^{s-1} dz \\ f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) z^{-s} ds. \end{cases}$$

« *Propriété convolutive* » associée à la transformation de Mellin : si $*$ représente la convolution multiplicative définie par

$$(f * g)(z) = \int_0^{+\infty} f(y) g\left(\frac{z}{y}\right) \frac{dy}{y}$$

alors

$$(f * g)^\sim = \tilde{f} \times \tilde{g}.$$

Cette propriété s'étend aux mesures définies sur $]0, +\infty[$ comme suit. Posons

$$\tilde{\mu}(s) = \int_0^{+\infty} z^{s-1} d\mu(s) \quad \text{et} \quad (\mu * \nu)(A) = \int_0^{+\infty} \mu\left(\frac{1}{y}A\right) d\nu(y).$$

On a alors

$$(\mu * \nu)^\sim = \tilde{\mu} \times \tilde{\nu}.$$

(ii) Transformation de Kontorovich-Lebedev (adaptée à notre étude, $\lambda > 0$ étant un paramètre fixé) :

$$(A.2.2) \quad \begin{cases} \hat{f}(\gamma) = \int_0^{+\infty} f(z) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) \frac{dz}{z}, & \gamma > 0, \\ f(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\gamma) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) \gamma \operatorname{sh} \pi\gamma d\gamma, & z > 0. \end{cases}$$

A.3. Formules classiques, [5]

Pour chacune des relations suivantes nous donnons la référence de la formule classique sous-jacente, ainsi que celle de la partie de cet article s'y rapportant.

$$(i) \quad K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}b) K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - 2(b^2+z^2)/t} K_{i\gamma}\left(\frac{4bz}{t}\right) \frac{dt}{2t}$$

(p. 725, n° 6.653/preuve des théorèmes 1 et 6).

$$(ii) \quad a) \quad \int_0^{+\infty} e^{-2z^2/t} K_{i\gamma}\left(\frac{4bz}{t}\right) dz = \frac{1}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} e^{b^2/t} K_{i\gamma/2}\left(\frac{b^2}{t}\right)$$

$$b) \quad \int_0^t e^{-b^2/s} K_{i\gamma/2}\left(\frac{b^2}{s}\right) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{b} e^{-b^2/t} W_{-1, i\gamma/2}\left(2\frac{b^2}{t}\right)$$

$$c) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - b^2/t} K_{i\gamma/2}\left(\frac{b^2}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{4\pi}{\lambda}} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}b)$$

(p. 710, n° 6.618,3, p. 714, n° 6.625,10 et p. 725, n° 6.654/preuve du corollaire 1).

$$(iii) \quad a) \quad \int_0^{+\infty} e^{-2z^2/t} K_{i\gamma}(\sqrt{8\lambda}z) dz = \frac{1}{4 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\pi t}{2}} e^{\lambda t/2} K_{i\gamma/2}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)$$

$$b) \quad \int_1^{+\infty} e^{-\lambda t/2} K_{i\gamma/2}\left(\frac{\lambda t}{2}\right) \frac{dt}{t^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda/2} W_{-1, i\gamma/2}(\lambda)$$

(ibid./preuve du corollaire 3 et du théorème 6).

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t-1}{t(t-1)}z^2} W_{-1, i\gamma/2} \left(\frac{2z^2}{t(t-1)} \right) \frac{dz}{z} \\
 = \frac{\pi}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\gamma}{2}} \left(\frac{t-1}{t} \right)^{-1/2} P_{(-1+i\gamma)/2}^{(-1)}(2t-1)
 \end{aligned}$$

(p. 861, n° 7. 621,9/preuve du corollaire 6).

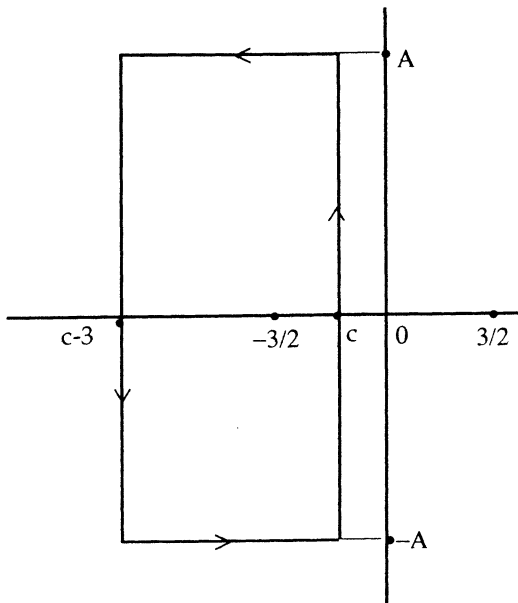
A.4. Calcul de l'intégrale $I(y) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^{-s} (2 \cos \frac{\pi s}{3})^{-n} ds, |c| < \frac{3}{2}$

(Preuve du théorème 2.)

Nous calculons l'intégrale $I(y)$ par la méthode des résidus en intégrant la fonction méromorphe ($y > 0$ étant fixé)

$$f(s) = \frac{y^{-s}}{(2 \cos \frac{\pi s}{3})^n}$$

sur le rectangle $(c + i[-A, A]) \cup ([c - 3, c] + iA) \cup (c - 3 + i[-A, A]) \cup ([c - 3, c] - iA)$, A étant un réel positif assujéti à tendre vers $+\infty$ (cf. figure ci-dessous).



La fonction f ne présente à l'intérieur de ce contour que la singularité $-\frac{3}{2}$ qui est un pôle d'ordre n . On a donc :

$$i \int_{-A}^A f(c+iv) dv - \int_{c-3}^c f(u+iA) du - i \int_{-A}^A f(c-3+iv) dv + \int_{c-3}^c f(u-iA) du = 2i\pi \operatorname{Res}\left(f, -\frac{3}{2}\right).$$

(i) Sur les côtés horizontaux du rectangle nous avons la majoration suivante, obtenue en utilisant $|\cos(\alpha + i\beta)| \geq |\operatorname{sh}\beta|$:

$$|f(u \pm iA)| \leq \frac{y^{-u}}{(2 \operatorname{sh} \frac{\pi A}{3})^n}$$

et alors

$$\sup_{u \in [c-3, c]} |f(u \pm iA)| \leq \frac{\max(y^{-c}, y^{3-c})}{(2 \operatorname{sh} \frac{\pi A}{3})^n},$$

ce qui assure la convergence des intégrales $\int_{c-3}^c f(u \pm iA) du$ vers zéro lorsque A tend vers $+\infty$.

(ii) Sur le bord vertical gauche nous avons :

$$\int_{-A}^A f(c-3+iv) dv = (-1)^n y^3 \int_{-A}^A f(c+iv) dv.$$

Nous obtenons ainsi $I(y) = \frac{2i\pi \operatorname{Res}(f, -3/2)}{1+(-1)^{n+1}y^3}$.

(iii) Il nous reste à calculer le résidu $\operatorname{Res}(f, -\frac{3}{2})$. Effectuons le développement en série de Laurent de f au voisinage du pôle $-\frac{3}{2}$. Posons à cet effet $s = -\frac{3}{2} + h$.

$$f(s) = \frac{y^{3/2} e^{-h \ln y}}{(2 \sin \frac{\pi h}{3})^n} = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^n \frac{y^{3/2}}{h^n} \left(\frac{\pi h}{3}\right)^n e^{-h \ln y}.$$

Faisant appel aux développements de Taylor respectifs de $e^{-h \ln y}$ et $(\frac{\pi h}{3} / \sin \frac{\pi h}{3})^n$, à savoir

$$\sum_{q \geq 0} \frac{(-\ln y)^q}{q!} h^q \quad \text{et} \quad \sum_{p \geq 0} (-1)^p \frac{D_{2p}^{(n)}}{(2p)!} \left(\frac{\pi h}{3}\right)^{2p}$$

([2], vol. 1, p. 40, n° 38) nous obtenons en isolant le coefficient de h^{-1} dans le développement en série de Laurent de f en $-\frac{3}{2}$ la valeur du résidu

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(f, -\frac{3}{2} \right) &= \left(\frac{3}{2\pi} \right)^n y^{3/2} \sum_{\substack{p \geq 0, q \geq 0 \\ 2p+q=n-1}} \frac{(-\ln y)^q}{q!} \frac{(-1)^p D_{2p}^{(n)}}{(2p)!} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2p} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^n y^{3/2} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^p C_{n-1}^{2p} D_{2p}^{(n)} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2p} (\ln y)^{n-1-2p}. \end{aligned}$$

Nous en tirons ainsi l'expression de l'intégrale $I(y)$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{2i\pi}{(n-1)!} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^n \frac{y^{3/2}}{y^3 + (-1)^{n+1}} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^p C_{n-1}^{2p} D_{2p}^{(n)} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2p} (\ln y)^{n-1-2p}. \end{aligned}$$

A.5. Calcul de l'intégrale $J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{-1/2}}{\zeta^3+1} e^{-y\zeta^2} d\zeta$

(Preuve du corollaire 2.)

(i) La décomposition en éléments simples, où $j = e^{i2\pi/3}$,

$$\frac{1}{\zeta^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta + 1} + \frac{2}{3} \mathcal{R}e \frac{j}{\zeta + 1},$$

fournit l'expression intermédiaire de $J(y)$ suivante :

$$J(y) = \frac{1}{3} J_1(y) + \frac{2}{3} \mathcal{R}e [j J_j(y)]$$

avec

$$J_\alpha(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{-1/2}}{\zeta + \alpha} e^{-y\zeta^2} d\zeta \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad \text{et } y \geq 0.$$

(ii) Calcul de $J_\alpha(y)$.

a) Nous allons écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par la fonction J_α . On a successivement, pour $y > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\alpha}{dy}(y) &= - \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^2}{\zeta + \alpha} \zeta^{-1/2} e^{-y\zeta^2} d\zeta \\ &= - \int_0^{+\infty} \left[\zeta - \alpha + \frac{\alpha^2}{\zeta + \alpha} \right] \zeta^{-1/2} e^{-y\zeta^2} d\zeta \\ &= - \int_0^{+\infty} \zeta^{1/2} e^{-y\zeta^2} d\zeta + \alpha \int_0^{+\infty} \zeta^{-1/2} e^{-y\zeta^2} d\zeta \\ &\quad - \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\zeta^{-1/2}}{\zeta + \alpha} e^{-y\zeta^2} d\zeta. \end{aligned}$$

D'où l'équation recherchée :

$$\frac{dJ_\alpha}{dy}(y) + \alpha^2 J_\alpha(y) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) y^{-3/4} + \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) y^{-1/4}.$$

b) La résolution de l'équation différentielle précédente procure aisément la valeur de $J_\alpha(y)$ en faisant appel à l'intégrale élémentaire « valeur initiale » $J_\alpha(0) = \frac{i\pi}{\omega}$, où ω est la racine carrée de $-\alpha$ de partie imaginaire positive :

$$\begin{aligned} J_\alpha(y) &= e^{-\alpha^2 y} \left[\frac{i\pi}{\omega} + \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \int_0^y t^{-1/4} e^{\alpha^2 t} dt \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \int_0^y t^{-3/4} e^{\alpha^2 t} dt \right] \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors l'expression de $J(y)$ suivante :

$$\begin{aligned} J(y) &= \frac{\pi}{3} \left[e^{-y} + 2 e^{y/2} \cos\left(y \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &\quad + \frac{\Gamma(1/4)}{6} \left[e^{-y} \int_0^y t^{-1/4} e^t dt + 2 \operatorname{Re} \left(j e^{-jy} \int_0^y t^{-1/4} e^{jt} dt \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Gamma(3/4)}{6} \left[e^{-y} \int_0^y t^{-3/4} e^t dt + 2 \operatorname{Re} \left(\bar{j} e^{-jy} \int_0^y t^{-3/4} e^{jt} dt \right) \right]. \end{aligned}$$

(iii) Finalement, afin d'obtenir une écriture réelle explicite des expressions complexes figurant ci-dessus, nous utilisons les développements

en série élémentaires

$$\int_0^y t^{-1/4} e^{jt} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!(n + 3/4)} y^{n+3/4},$$

$$\int_0^y t^{-3/4} e^{jt} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!(n + 1/4)} y^{n+1/4},$$

lesquels conduisent à la formule valable pour $y \geq 0$:

$$J(y) = \frac{\pi}{3} \left[e^{-y} + 2 e^{y/2} \cos \left(y \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$+ \frac{\Gamma(1/4)}{6} e^{-y} \int_0^y t^{-1/4} e^t dt - \frac{\Gamma(3/4)}{6} e^{-y} \int_0^y t^{-3/4} e^t dt$$

$$+ \frac{\Gamma(1/4)}{3} e^{y/2} \sum_{n \geq 0} \frac{y^{n+3/4}}{n!(n + 3/4)} \cos \left(y \frac{\sqrt{3}}{2} - (n + 1) \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$- \frac{\Gamma(3/4)}{3} e^{y/2} \sum_{n \geq 0} \frac{y^{n+1/4}}{n!(n + 1/4)} \cos \left(y \frac{\sqrt{3}}{2} - (n - 1) \frac{2\pi}{3} \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ASPANDIAROV et J.-F. LE GALL, Some new classes of exceptional times of linear Brownian Motion, preprint (Université Paris 6), 1994.
- [2] A. ERDELYI, Higher transcendental functions, vol. 1 et 2, 1953.
- [3] M. GOLDMAN, On the first passage of the integrated Wiener process, *Ann. Math. Stat.*, 42, 1971, p. 2150-2155.
- [4] Ju. P. GOR'KOV, A formula for the solution of a certain boundary value problem for the stationary equation of Brownian motion, *Soviet. Math. Dokl.*, 16, 1975, p. 904-908.
- [5] I. S. GRADSHTEYN and I. M. RYZHIK, Table of integrals, series and products, 1965.
- [6] Y. ISOZAKI and S. WATANABE, An asymptotic formula for the Kolmogorov diffusion and a refinement of Sinai's estimates for the integral of Brownian Motion, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 70, n° 9, 1994, p. 271-276.
- [7] G. A. KORN and T. M. KORN, Mathematical handbook for scientists and engineers, 1961.
- [8] A. LACHAL, Sur l'intégrale du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 311, série I, 1990, p. 461-464.
- [9] A. LACHAL, Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien, *Ann. I.H.P. sect. B*, vol. 27, n° 3, 1991, p. 385-405.
- [10] A. LACHAL, Sur les excursions de l'intégrale du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 314, série I, 1992, p. 1053-1056.
- [11] A. LACHAL, Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 321, série I, 1995, p. 903-908.
- [12] A. LACHAL, Quelques applications de la théorie des excursions à l'intégrale du mouvement brownien, prépublication.

- [13] A. LACHAL, Étude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien, 1992, Thèse de Doctorat, Université Lyon 1.
- [14] M. LEFEBVRE et E. LEONARD, On the first hitting place of the integrated Wiener process, *Adv. Appl. Prob.*, 21, 1989, p. 945-948.
- [15] W. MAGNUS, F. OBERHETINGER and R. P. SONI, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, 1966.
- [16] M. MCKEAN Jr., A winding problem for a resonator driven by a white noise, *J. Math. Kyoto Univ.*, 2, 1963, p. 227-235.
- [17] G. Ya SINAI, Distribution of some functionals of integral of Brownian Motion, *Theor. Math. Phys.* in Russian, 1992.

*(Manuscrit reçu le 8 novembre 1994;
révisé le 4 janvier 1996.)*