ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LÉONARD GALLARDO

Chaînes de Markov à dérive stable et loi des grands nombres sur les hypergroupes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 6 (1996), p. 701-723

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_6_701_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 6, 1996, p. 701-723 *Probabilités et Statistiques*

Chaînes de Markov à dérive stable et loi des grands nombres sur les hypergroupes

par

Léonard GALLARDO

Université de Tours,
Département de Mathématiques,
Parc de Grandmont,
37200 Tours, France.

à Pierre Eymard et Paul Louis Hennequin en témoignage d'amitié à l'occasion de leur 65e anniversaire.

RÉSUMÉ. – Sur une classe d'hypergroupes réels non compacts contenant la plupart des exemples connus, nous montrons que toute marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ d'espérance finie, a une dérive qui tend vers une limite D à l'infini. À l'aide de résultats élémentaires ayant un intérêt indépendant des hypergroupes, nous en déduisons une loi des grands nombres qui prend le plus souvent la forme classique $\lim X_n/n = D$ $p.s.$

Key words: Markov chains, law of large numbers.

ABSTRACT. – On a large class of non compact one dimensional hypergroups we show that every random walk $(X_n)_{n \geq 0}$ with finite expectation, has a drift which tends to a limit D at infinity. By elementary results on Markov chains of independent interest, we can then deduce a law of large numbers which, in most cases, takes the classical form $\lim X_n/n = D$ $a.s.$

A.M.S. Classification : 60 F 15, 43 A 05.

INTRODUCTION

L'intérêt pour l'étude du comportement asymptotique des marches aléatoires sur les hypergroupes remonte à une trentaine d'années. Déjà à la fin des années cinquante, Gertsenshtein et Vasilov [11] et Karpelevich *et al.* [19] considéraient des marches aléatoires sur le demi plan de Poincaré-Lobachevsky $SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ pour résoudre un problème d'impuretés dans un guide d'onde. Mais la loi de ces marches était isotrope et la situation appartenait en fait à l'hypergroupe des doubles classes $SL(2,\mathbb{R})//S0(2) \simeq [0,+\infty[$. Des questions analogues furent alors étudiées sur les espaces hyperboliques ([9], [12]), les espaces à translations généralisées de Delsarte et Levitan ([3], [28]) et plus tard sur les couples de Gelfand ([17], [23]). L'étude de la convolution des mesures à symétrie sphérique de l'espace euclidien (en fait celle du couple de Gelfand $\mathbb{R}^d \times SO(d)//SO(d)$) conduisait d'autre part Haldane [15] et Kingman [20] à mettre en évidence des situations intermédiaires de paramètre α compris entre d et $d+1$ dont l'interprétation géométrique manquait mais où on obtenait les mêmes théorèmes limites. La théorie des marches aléatoires sur les groupes et les espaces homogènes qui s'est ensuite développée autour de Guivarc'h *et al.* ([13], [14]) servait aussi de motivation pour examiner de plus près le cas des couples de Gelfand où l'analyse de Fourier [1] est un outil très efficace dans l'investigation des propriétés asymptotiques.

La notion d'hypergroupe (*voir* le paragraphe 1) réalisant la synthèse de tous les exemples précédents, il était naturel de considérer la question du comportement limite des marches aléatoires dans ce cadre théorique. Ainsi la loi des grands nombres a été étudiée sur divers hypergroupes $(K,*)$ avec $K \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$) ([2], [8], [31], [34], [35]). Généralement, la méthode suivie consiste à trouver des fonctions moments et une notion d'espérance et de variance généralisées qui permettent de « casser » la convolution de $(K,*)$ et d'utiliser les méthodes classiques de Kolmogorov et Doob (*cf.* [31], [34]). Mais ces fonctions moments ne sont pas obtenues de manière intrinsèque et leur mise en évidence nécessite dans chaque exemple un calcul difficile. C'est l'un des principaux inconvénients de ce procédé.

Dans cet article nous abordons le problème d'un point de vue complètement nouveau en utilisant la notion très concrète de dérive d'une chaîne de Markov. Nous avons en effet découvert que pour une vaste classe d'hypergroupes non compacts de dimension un (en fait la plupart des exemples connus) les marches aléatoires avec moment (usuel) d'ordre un, ont une dérive stable à l'infini. Ce phénomène peut très facilement être mis à profit pour obtenir des lois des grands nombres. C'est ce que nous montrons dans une première partie de notre travail où nous établissons par une technique de martingale, quelques lois des grands nombres ayant un intérêt indépendant des hypergroupes. En particulier nous étudions des conditions pour qu'une chaîne de Markov réelle $(X_n)_{n\geq 0}$ dont la dérive tend vers une constante D à l'infini, vérifie une loi des grands nombres sous la forme $\lim_{n\to\infty} X_n/n = D$ $p.s.$. Ces résultats très simples qui sont réduits ici à leur strict minimum, mériteraient une étude approfondie que nous espérons pouvoir développer ultérieurement.

Le paragraphe 2 contient des rappels sur les hypergroupes. Dans la partie 3 nous introduisons la nouvelle classe des hypergroupes stables pour lesquels nous établissons la loi des grands nombres aux paragraphes suivants. La partie 4 est consacrée à une méthode de troncature utilisant une représentation de X_n comme pseudo somme de variables aléatoires iid et qui permet d'obtenir la loi des grands nombres avec moment d'ordre un sous la forme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})\right) = 0 \quad p.s.,$$

où $d(x)$ est la dérive en $x \in K$ de la marche aléatoire (X_n). Une loi des grands nombres sous la forme habituelle $\lim_{n\to\infty} X_n/n = D$ $p.s.$ en découle dans la plupart des cas ainsi qu'une valeur explicite de $D = D(\mu)$, fonction de la loi μ de (X_n) et de la structure d'hypergroupe. Nous terminons dans la partie 5 par quelques remarques concernant des lois des grands nombres déjà connues que nos résultats contiennent et précisent et par une propriété d'additivité de l'application $\mu \mapsto D(\mu)$ qui lui donne une sorte de légitimité à être l'espérance (généralisée) intrinsèque de l'hypergroupe $(K, *)$.

1. LOIS DES GRANDS NOMBRES POUR CERTAINES CHAÎNES DE MARKOV

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov ayant pour espace des états un borélien E de $\mathbb{R}^q$ et dont le noyau de transition à l'instant $k \in \mathbb{N}^*$ est donné par $P_k(x, dy) = \mathbb{P}(X_k \in dy | X_{k-1} = x)$. Si $P_k = P$ (indépendant de k), $(X_n)_{n\geq 0}$ est simplement une chaîne de Markov homogène. Nous supposerons dans toute la suite que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in E$, la probabilité $P_k(x, .)$ a un moment d'ordre 1. Il est alors habituel d'appeler *dérive* (ou drift en anglais) de $(X_n)_{n\geq 0}$ à l'instant k la fonction vectorielle $d_k : E \to \mathbb{R}^q$ définie par

$$d_k(x) = \mathbb{E}(X_k - X_{k-1} | X_{k-1} = x). \tag{1.0}$$

Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, on a bien entendu $d_k = d$ (indépendant de k).

DÉFINITION 1.1. – On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est à accroissements bornés dans L^2 (condition AB) si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction non négative

$$(1.1.1) \qquad c_k(x) = \mathbb{E}(|X_k - X_{k-1}|^2 | X_{k-1} = x) \quad (x \in E),$$

est définie et bornée sur E ($|.|$ désigne la norme euclidienne). On notera alors $\| c_k \|_\infty = \sup_{x\in E} |c_k(x)|$.

THÉORÈME 1.2. – *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à accroissements bornés dans L^2 et telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|c_k\|_\infty}{k^2} < +\infty$. Alors*

$$(1.2.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d_k(X_{k-1}) \right) = 0 \quad \mathbb{P}_x \ p.s. \quad (\forall x \in E)$$

(où 0 désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^q$).

Démonstration. – Soit $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle du processus $(X_n)_{n\geq 0}$. On a $\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = d_n(X_{n-1})$ par définition de la dérive. Il en résulte aussitôt que le processus défini par $M_0 = x (\in E)$ et

$$M_n = X_n - \sum_{k=1}^{n} d_k(X_{k-1}) \quad (n \geq 1)$$

est une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. On montre alors comme en dimension un que l'accroissement $Z_n = M_n - M_{n-1}$ vérifie

$$\mathbb{E}(|Z_n|^2) = \mathbb{E}(|M_n|^2) - \mathbb{E}(|M_{n-1}|^2)$$

et que le processus $\{|M_n|^2, n \geq 0\}$ est une sous martingale. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_n|^2) &\leq 2[(\mathbb{E}(|X_n - X_{n-1}|^2) + \mathbb{E}(|d_n(X_{n-1})|^2)] \\ &\leq 4\mathbb{E}(c_n(X_{n-1})) \leq 4 \| c_n \|_\infty, \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|d_n(X_{n-1})|^2) &= \mathbb{E}(|\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(X_n - X_{n-1})|^2) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}|X_n - X_{n-1}|^2) = \mathbb{E}(c_n(X_{n-1})) \leq \| c_n \|_\infty. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|Z_n|^2)/n^2$ est donc convergente et un résultat classique de Chow ([26] p. 153) montre alors que $\lim_{n\to\infty} |M_n|^2/n^2 = 0$ $\mathbb{P}_x$ $p.s.$. D'où le théorème. $\square$

COROLLAIRE 1.3. – *Si* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov homogène satisfaisant* (AB) *(voir 1.1) alors*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}d(X_{k-1})\right)=0\ \mathbb{P}_x\ p.s.\quad (\forall x\in E).$$

Démonstration. – On a $c_n = c$ (indépendant de n) et la condition du théorème est automatiquement vérifiée. □

Remarques 1.4. – a) Le corollaire 1.3 contient la loi des grands nombres classique (avec moment d'ordre 2). En effet si $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ où les ξ_k sont des variables aléatoires i.i.d ayant un moment d'ordre deux, la chaîne de Markov (X_n) satisfait (AB) et sa dérive est constante et égale à $\mathbb{E}(\xi_1)$.
b) Nous verrons dans la partie consacrée aux hypergroupes qu'il existe des chaînes de Markov qui ne sont pas à accroissements bornés dans L^2 et qui satisfont la conclusion du corollaire 1.3. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1.5. – On dira que la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ satisfait la propriété $(L)_x$ (au point $x \in E$) si

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}d(X_{k-1})\right)=0\quad \mathbb{P}_x\ p.s.$$

Hypothèse générale 1.6. – Dans toute la suite de ce paragraphe nous supposerons sans le répéter dans chaque énoncé, que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est à dérive *asymptotiquement stable i.e.* homogène à valeurs réelles avec $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ et sa dérive d est une fonction bornée sur E telle que :

(1.6.1) $$\lim_{|x|\to+\infty} d(x) = D(\in\mathbb{R})\text{ existe.}$$

PROPOSITION 1.7. – *Si la chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *satisfait* $(L)_x$ *et si* $\lim_{n\to\infty}|X_n| = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ *p.s., alors* $\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = D$ $\mathbb{P}_x$ *p.s.*

Démonstration. – La suite $d(X_n)$ converge vers D par hypothèse (1.6.1) donc ses moyennes de Cesaro aussi d'où le résultat. □

THÉORÈME 1.8. – *Si* $E = \mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{N}$ *et si la chaîne* $(X_n)_{n\geq 0}$ *vérifie la propriété* $(L)_x$ *alors :*

(i) *si* x *est récurrent positif, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n/n = 0 \quad \mathbb{P}_x$ *p.s.*

(ii) *si* x *est récurrent nul ou transient, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n/n = D \quad \mathbb{P}_x$ *p.s.*

Démonstration. – i) Soit π la probabilité invariante (concentrée sur la classe des éléments qui communiquent avec x). La dérive d est π intégrable (car bornée) et le théorème ergodique pour les chaînes de Markov donne immédiatement

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1}) = \langle \pi, d\rangle \quad \mathbb{P}_x \ p.s.$$

On a donc aussi $\lim\limits_{n\to\infty} X_n/n = \langle \pi, d\rangle$ $\mathbb{P}_x$ *p.s.*. Si $\langle \pi, d\rangle$ était non nul, la récurrence de X_n serait contredite donc $\langle \pi, d\rangle = 0$. □

(ii) On peut se restreindre au cas récurrent nul d'après la Proposition 1.7. Soit μ la mesure invariante de la chaîne. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_k = \mathbb{1}_{[-k,k]}(d - D),$$

qui vaut $d(x) - D$ si $x \in [-k, k]$ et zéro si $|x| > k$, est μ intégrable (car à support fini). La loi des grands nombres pour les quotients de fonctionnelles (*cf.* [4] p. 127) donne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_k(X_i)|}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[-m,m]}(X_i)} = \frac{\langle \mu, |f_k|\rangle}{\mu([-m, m])} \quad \mathbb{P}_x \ p.s.,$$

pour tous les entiers k et m. Il en résulte que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_k(X_i) \right| \leq \frac{\langle \mu, |f_k|\rangle}{\mu([-m, m])} \quad \mathbb{P}_x \ p.s.,$$

pour tout entier m. Mais $\lim\limits_{m\to\infty} \mu([-m, m]) = +\infty$, donc la $\limsup$ précédente est nulle et on a en fait

$$\text{(1.8.1)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_k(X_i) = 0 \quad \mathbb{P}_x \ p.s.,$$

pour tout entier k. Or la fonction $f = d - D$ tend vers zéro à l'infini. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe donc $K_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f(x) - f_k(x)| \leq \epsilon$ uniformément pour $x \in E$ dès que $k \geq K_\epsilon$. Pour un tel entier k, on a ainsi

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_k(X_i) \right| \leq \epsilon,$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à (1.8.1) on déduit que

$$-\epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \leq \epsilon \qquad \mathbb{P}_x \ p.s.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) = 0 \ \mathbb{P}_x \ p.s.$ puisque ϵ est arbitraire. Les moyennes de Cesaro de $d(X_i)$ convergent donc vers D $\mathbb{P}_x$ $p.s.$. D'où le résultat ii) grâce à la propriété $(L)_x$. □

Remarque 1.9. – Pour les chaînes à accroissements bornés dans L^2 on a donc une loi des grands nombres complète dans le cas discret. Le cas continu est évidemment plus délicat; nous ne l'aborderons que dans le cas $D = 0$. Dans le cas de (1.8) on peut noter que :

1) Dans le cas récurrent positif, on n'a pas toujours $D = 0$ par exemple si $E = \mathbb{N}$ on peut trouver facilement des chaînes avec $D < 0$.

2) Dans le cas récurrent nul on a toujours $D = 0$ mais $D = 0$ est aussi possible dans le cas transient (par exemple prendre sur $\mathbb{N}$ une chaîne de naissance et mort avec une probabilité d'avancer $p(n, n+1) = 1/2 + \alpha/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) avec α une constante strictement supérieure à 1).

3) Si $D = 0$, on a toujours $\lim X_n/n = 0$ $\mathbb{P}_x$ $p.s.$ (*voir* 1.10).

THÉORÈME 1.10. – *Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov satisfaisant $(L)_x$ et telle que $D = 0$, alors* $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0 \quad \mathbb{P}_x \ p.s.$

Si $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ la preuve de 1.10 résulte de 1.8 mais dans le cas général elle découle du lemme analytique suivant

LEMME 1.11. – *Soit (u_n) une suite de nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et telle que* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$. *Supposons que*

$$\lim_{n\to\infty} \left(u_n/n - (1/n) \sum_{k=1}^{n} f(u_{k-1}) \right) = 0. \textit{ Alors } \lim_{n\to\infty} u_n/n = 0.$$

Démonstration. – Soit $\epsilon_n = u_n/n - (1/n) \sum_{k=1}^{n} f(u_{k-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) et soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse il existe $A > 0$ tel que $|x| > A$ implique $|f(x)| < \epsilon$. Notons $M = \sup\{|f(x)|, x \in E\}$. Il y a deux cas possibles :

(i) Il existe un entier N tel que $|u_n| > A$ pour tout $n > N$. Alors pour tout $n > N$, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n}{n}\right| &\leq |\epsilon_n| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(u_{k-1}) \\ &\leq |\epsilon_n| + \frac{N}{n} M + \frac{n-N}{n} \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\limsup |u_n|/n \leq 3\epsilon$.

(ii) Il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_p) telle que $u_{n_p} \in [-A, A]$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $q \in [n_p, n_{p+1}[$ on a

$$\begin{aligned}\frac{u_q}{q} &= \epsilon_q + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n_p} f(u_{k-1}) + \frac{1}{q} f(u_{n_p}) + \frac{1}{q}\sum_{k=n_p+2}^{q} f(u_{k-1}) \\ &= \epsilon_q + \frac{n_p}{q}\left(\frac{u_{n_p}}{n_p} - \epsilon_{n_p}\right) + \frac{1}{q} f(u_{n_p}) + \frac{1}{q}\sum_{k=n_p+2}^{q} f(u_{k-1})\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|u_q|}{q} \leq \epsilon_q + \frac{|u_{n_p}|}{n_p} + \epsilon_{n_p} + \frac{M}{q} + \frac{q-n_p}{q}\epsilon,$$

ce qui montre aussitôt que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{n} \leq 5\epsilon$.

Dans tous les cas $\limsup |u_n|/n \leq 5\epsilon$ d'où le résultat puisque ϵ est arbitraire. □

Remarque 1.12. – Si $D \neq 0$, on peut dans certains cas montrer que la chaîne de Markov est transiente à condition qu'elle vérifie une certaine hypothèse d'irréductibilité. C'est ce que montre le résultat suivant que nous considérons comme purement illustratif.

PROPOSITION 1.13. – *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov satisfaisant la condition (AB) (voir 1.1) et à espace d'états $E = \mathbb{R}_+$. On suppose de plus que $(X_n)_{n\geq 0}$ a des sauts bornés inférieurement* (i.e. $\exists B > 0$, $\forall x \in E$, $-B \leq X_1 - x$ $\mathbb{P}_x$ *p.s.*) *et vérifie $\mathbb{P}_x(\limsup X_n = +\infty) = 1$ pour un $x \in E$ (condition d'irréductibilité). Alors $D > 0$ implique $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ $\mathbb{P}_x$ p.s.*

La preuve qui utilise les idées de Lamperti (*cf.* [21]) nécessite le lemme suivant :

LEMME 1.14. – *(cf. [21] Th. 2.2, p. 318) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus à valeurs dans l'intervalle borné $[0, T]$ et tel que $\mathbb{P}(\limsup X_n = T) = 1$. On suppose qu'il existe $M < T$ tel que*

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1} \qquad \text{si } X_{n-1} \geq M.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} X_n = T$ $\mathbb{P}$ p.s.

Démonstration de 1.13. – Notons $F_x(dy)$ la loi de $X_1 - x$ sachant $X_0 = x$. On a évidemment

$$d(x) = \int_{max(-x,-B)}^{+\infty} yF_x(dy) \text{ et } c(x) = \int_{max(-x,-B)}^{+\infty} y^2 F_x(dy).$$

Pour le processus $Y_n = 1 - (1 + X_n)^{-1}$, on voit facilement que pour tout entier n et tout $x > B$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | X_n = x) &= - \int \left(\frac{1}{x+1+y} - \frac{1}{x+1} \right) F_x(dy) \\ &= \frac{d(x)}{(x+1)^2} - \int_{-B}^{+\infty} \frac{y^2}{(x+1+\theta y)^3} F_x(dy),\end{aligned}$$

où $\theta = \theta(x, y) \in]0, 1[$ d'après la formule de Taylor Lagrange appliquée à la fonction $f(x) = (x + 1)^{-1}$. Mais le terme résiduel est majoré par $\| c \|_\infty (x + 1 - B)^{-3}$ si $x > B$. Si de plus x est assez grand ($x \geq x_0$) pour que $d(x) \geq D/2 > 0$, on a

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} - Y_n | Y_n = 1 - (x+1)^{-1}) \geq \frac{D/2}{(x+1)^2} - \frac{\| c \|_\infty}{(x+1-B)^3} > 0$$

pour $x \geq x_1$. Ainsi $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq Y_n$ si $Y_n \geq M = 1 - (x_1 + 1)^{-1}$. Le lemme 1.14 appliqué à Y_n donne alors immédiatement le résultat 1.13 □.

2. RAPPELS SUR LES HYPERGROUPES

Pour faciliter la lecture de la suite de cet article nous présentons brièvement les principaux exemples d'hypergroupes dont il est question dans les paragraphes suivants.

DÉFINITION 2.1. – Soit K un espace topologique localement compact à base dénombrable (LCD) et $*$ une opération bilinéaire et séparément continue (pour la topologie faible) sur l'espace $M(K)$ des mesures de Radon complexes bornées sur K, appelée convolution et qui préserve les probabilités (*i.e.* $M_1(K) * M_1(K) \subset M_1(K)$). On dit que $(K, *)$ est un hypergroupe (ou convo au sens de Jewett [18]) si les propriétés suivantes sont satisfaites (δ désigne une masse de Dirac) :

1) (associativité) $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z \quad (\forall x, y, z \in K)$.

2) (élément unité) Il existe $e \in K$ tel que $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x \quad (\forall x \in K)$.

3) (involution) Il existe une involution continue $x \mapsto x^-$ de K telle que

a) $(\delta_x * \delta_y)^- = \delta_{y^-} * \delta_{x^-} \quad (\forall x, y \in K)$

b) $e \in supp(\delta_x * \delta_y) \Longleftrightarrow x = y^-$

où pour $\mu \in M_1(K), \mu^-$ désigne l'image de μ par $x \mapsto x^-$ et $supp\mu$ est le support de μ

4) (continuité) $supp(\delta_x * \delta_y)$ est compact $(\forall x, y \in K)$ et

a) l'application $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ de K^2 dans $M_1(K)$ est continue pour la topologie faible.

b) l'application $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ de K dans l'ensemble des parties compactes de K est continue pour la topologie de Hausdorff.

Dans toute la suite de l'article nous ne considérerons que des hypergroupes commutatifs *i.e.* satisfaisant $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x \quad (\forall x, y \in K)$. En particulier si l'involution « - » est l'identité, on dit que K est hermitien et 3a montre aussitôt que K est commutatif.

Pour deux mesures μ et $\nu \in M(K)$ et pour toute $f \in B(K)$ (ensemble des fonctions mesurables bornées sur K) on a bien entendu

$$\text{(2.1.1)} \qquad \langle \mu * \nu, f \rangle = \int\int_{K^2} \langle \delta_x * \delta_y, f \rangle \mu(dx) \nu(dy).$$

Pour $\mu \in M(K)$, on définit la translatée $T_\mu f$ de $f \in B(X)$ par μ (ou même de f localement bornée si μ est à support compact) par la formule

$$\text{(2.1.2)} \qquad (T_\mu f)(x) = \langle \delta_x * \mu^-, f \rangle.$$

On abrège en T_x lorsque $\mu = \delta_x$ et on écrira aussi $T_\mu f = \mu * f$ de sorte qu'on a la formule agréable suivante

$$\text{(2.1.3)} \qquad \langle \nu * \mu, f \rangle = \langle \nu, \mu^- * f \rangle$$

pour toutes $\mu, \nu \in M(K)$ et $f \in B(K)$.

D'après un résultat de Spector [25] tout hypergroupe (commutatif) a une mesure de Haar m unique à constante multiplicative près *i.e.* une mesure de Radon positive m sur K telle que $\langle m, T_x f \rangle = \langle m, f \rangle \quad (\forall f \in C_c(K)$ et $\forall x \in K)$.

Tout hypergroupe commutatif possède un dual $\hat{K}$ et une analyse de Fourier mais comme nous n'en aurons pas besoin dans cet article nous renvoyons le lecteur intéressé à [18].

Exemples 2.2. – Tout groupe G est évidemment un hypergroupe pour la convolution naturelle $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ mais les espaces de doubles classes sont les exemples clés : Soit G un groupe LCD et H un sous groupe compact. L'espace $K = G//H = \{HgH; g \in G\}$ des doubles classes est un hypergroupe lorsqu'il est muni de la topologie quotient, de l'élément unité HeH (où e est le neutre de G), de l'involution $(HgH)^- = Hg^{-1}H$ et de la convolution

$$\delta_{HgH} * \delta_{Hg'H} = \int_H \delta_{Hghg'H} dh \tag{2.2.1}$$

où dh est la mesure de Haar de H. La mesure de Haar de $(K, *)$ est alors $m = \int_G \delta_{HgH} dg$ (avec dg la mesure de Haar de G). Lorsque la convolution (2.2.1) est commutative, on dit que (G, H) et (par abus de langage) que $K = G//H$ est un couple de Gelfand.

2.3. Hypergroupes de Chebli-Trimèche

Soit A une fonction strictement croissante non bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que $A(0) = 0$. On suppose A dérivable, A'/A décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $A'(x)/A(x) = \alpha/x + B(x)$ dans un voisinage de zéro, où $\alpha > 0$ et B est une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Considérons l'opérateur

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{A'(x)}{A(x)} \frac{d}{dx}. \tag{2.3.1}$$

Chebli [3] et Trimèche [27] ont montré qu'il existe une unique structure d'hypergroupe $(\mathbb{R}_+, *)$ sur $\mathbb{R}_+$ muni de sa topologie usuelle, telle que pour toute fonction paire f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par

$$u(x, y) = \int f d(\delta_x * \delta_y) \tag{2.3.2}$$

soit solution du problème de Cauchy hyperbolique $L_x u = L_y u$ de conditions initiales $u(x, 0) = f(x)$ et $(\partial u/\partial y)(x, 0) = 0$. Cet hypergroupe est hermitien et d'unité 0. De plus la convolution est telle que

$$\text{supp } (\delta_x * \delta_y) \subset [|x - y|, x + y] \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}_+).$$

Un couple de Gelfand $G//H \simeq \mathbb{R}_+$ est toujours du type Chebli-Trimèche avec une fonction $A(x)$ de l'une des formes suivantes : $x^n (n \geq 1)$, $sh^n x (n \geq 2)$, $sh^{2n-1}(x) ch(x) (n \geq 2)$, $sh^{4n-1}(x) ch^3(x) (n \geq 2)$ et $sh^{15}(x) ch^7(x)$ (*cf.* [33]). Ceci correspond au cas où l'espace homogène G/H est l'un des espaces Riemanniens symétriques non compacts de rang 1 suivants :

$$\mathbb{R}^n (n \geq 1), \ H^n(\mathbb{R}), \quad H^n(\mathbb{C}), H^n(\mathbb{H}) (n \geq 2) \text{ et } H^2(\mathbb{O}).$$

Dans ce cas L est la partie radiale de l'opérateur de Laplace Beltrami de G/H et $A(x)$ s'interprète comme l'aire de la boule Riemannienne de rayon x (*cf.* [16]).

2.4. Hypergroupes polynomiaux

Soient $(p_n)(q_n)$ et (r_n) trois suites de nombres réels tels que $p_n > 0, r_n \geq 0, q_{n+1} > 0, q_0 = 0$ et $p_n + r_n + q_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les polynômes définis par $P_0 \equiv 1, P_1(x) = x$ et

$$xP_n(x) = q_nP_{n-1}(x) + r_nP_n(x) + p_nP_{n+1}(x) \quad (n \geq 1), \tag{2.4.1}$$

forment une suite $(P_n, n \geq 0)$ de polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ pour une certaine mesure $d\pi(x)$. S'ils sont à coefficients de linéarisation non négatifs (*i.e.* si pour tout m et n, on a $P_m(x)P_n(x) = \sum_{r=|m-n|}^{m+n} c(m,n,r)P_r(x)$ avec $c(m,n,r) \geq 0$ pour tout r) on définit une structure d'hypergroupe hermitien $(\mathbb{N}, *)$ sur $\mathbb{N}$ avec $e = 0$ et

$$\delta_m * \delta_n = \sum_{r=|m-n|}^{m+n} c(m,n,r)\delta_r. \tag{2.4.2}$$

C'est l'hypergroupe polynomial associé aux paramètres $(p_n), (q_n)$ et (r_n).

On dit qu'il est à paramètres convergents si les limites $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in]0,1[$ et $\lim_{n\to\infty} q_n = q \in]0,1[$ existent. Presque toutes les familles classiques de polynômes orthogonaux sur $[-1,1]$ sont associées à des structures d'hypergroupes (*cf.* [22]).

DÉFINITION 2.5. – *On appelle marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi $\mu \in M_1(K)$ sur l'hypergroupe $(K, *)$, toute chaîne de Markov homogène de noyau de transition $P(x, dy) = (\delta_x * \mu)(dy)$* (cf. [6], [7]).

Remarque 2.6. – Dans cet article nous ne nous intéressons pas aux hypergroupes compacts sur lesquels la loi des grands nombres est triviale.

3. HYPERGROUPES STABLES

3.1. – Soit $(K, *)$ un hypergroupe (commutatif) tel que $K \subset \mathbb{R}$. Si $K = \mathbb{R}$ avec sa topologie usuelle, il n'y a qu'une seule structure d'hypergroupe; c'est celle de groupe additif usuel (*cf.* [33]). Sur $\mathbb{R}_+$ par contre il y a de nombreuses structures d'hypergroupe et à isomorphisme près, on peut supposer que la convolution vérifie la propriété suivante :

$$\text{supp}(\delta_x * \delta_y) \subset [|x-y|, x+y] \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}_+). \tag{3.1.1}$$

Le cas discret (*i.e.* $K = \mathbb{N}$ avec la topologie discrète) est plus varié mais dans la plupart des exemples connus la convolution vérifie aussi (3.1.1).

DÉFINITION 3.2. – *Soit* $(K, *)$ *un hypergroupe hermitien, d'unité 0, tel que* $K = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{R}_+$ *(avec la topologie usuelle) et dont la convolution vérifie la condition (3.1.1). On dira qu'il est* stable *si pour tout* $y \in K$, *la limite* $\lim\limits_{x \to \infty} \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x = D(y)$ *existe* ($\mathbb{E}(\mu)$ *désigne l'espérance de la probabilité* μ).

Remarques 3.3. – 1) Pour $y \in K$ fixé, la probabilité $\delta_x * \delta_y$ a une espérance $\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) \sim x$ quand $x \to \infty$ et la différence $\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x$ est même bornée (par y). Si elle a une limite quand $x \to +\infty$, il est naturel d'y voir une propriété de stabilité de la convolution. Voici une autre raison :

2) Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire sur K, de loi $\mu = \delta_y$, sa dérive (*cf.* (1.0)) est précisément la fonction $d(x) = \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x$. On demande donc que la dérive soit stable à l'infini.

3) Il aurait été préférable de parler d'hypergroupe à convolution asymptotiquement stable plutôt que d'hypergroupe stable mais cette terminologie a l'avantage d'être plus concise.

PROPOSITION 3.4. – *Sur un hypergroupe stable* $(K, *)$, *toute marche aléatoire de loi* μ *ayant une espérance finie est à dérive bornée et asymptotiquement stable de limite*

$$D = D(\mu) = \int_K D(y)\mu(dy) \tag{3.4.1}$$

Démonstration. – Si $d(x; y) = \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x$, on a $|d(x; y)| \leq y$ pour tout $x \in K$ d'après (3.1.1). La fonction $d(x; .)$ est donc μ intégrable car μ a un moment d'ordre 1.

Or par définition de la convolution (*voir* (2.1.1))

$$\int_K d(x; y)\mu(dy) = \mathbb{E}(\delta_x * \mu) - x = d(x)$$

est la dérive en x de la marche aléatoire de loi μ. On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = \int_K D(y)\mu(dy)$ d'après le théorème de convergence dominée. □

THÉORÈME 3.5. – *Les hypergroupes de Chebli-Trimèche* $(\mathbb{R}_+, *)$ *engendrés par la fonction* A *sont stables et pour tout* $y \in \mathbb{R}_+$, *on a*

$$D(y) = 2\rho \int_0^y \frac{1}{A(t)} \int_0^t A(\xi) d\xi dt \quad où\ 2\rho = \lim_{x \to +\infty} A'(x)/A(x).$$

Pour la preuve on aura besoin du résultat suivant

LEMME 3.5.1. – *Soit* L *l'opérateur (2.3.1). Pour toute fonction* g *de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et telle que* $g'(0) = 0$, *on a*

$$g(y) = g(0) + \int_0^y \left(\int_t^y \frac{dz}{A(z)} \right) Lg(t) A(t) dt \tag{3.5.1}$$

Démonstration. – On peut invoquer un résultat de [29] mais il est plus simple d'intégrer par parties l'intégrale ci dessus, on obtient

$$\left[\left(\int_t^y \frac{dz}{A(z)} \right) A(t) g'(t) \right]_0^y + \int_0^y \frac{1}{A(t)} A(t) g'(t) dt = g(y) - g(0),$$

d'où le résultat puisque le terme tout intégré est nul. □

Démonstration du théorème 3.5. – Soit $y_0 > 0$. Pour x assez grand, la fonction g_x définie par

$$g_x(y) = \int_{x-y}^{x+y} t \delta_x * \delta_y(dt) \quad (y \in [0, y_0]), \tag{3.5.2}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $g_x'(0) = 0$. En effet soit $\epsilon > 0$; on peut trouver une fonction paire $f(t)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(t) = t$ si $t \geq \epsilon$. Pour $x > y_0 + \epsilon$ on a alors :

$$g_x(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) \delta_x * \delta_y(dt) = (T_x f)(y),$$

avec les notations de (2.1.2) et $u(x, y) = (T_x f)(y)$ satisfait au problème de Cauchy hyperbolique associé à l'opérateur L. En particulier g_x est de classe $\mathcal{C}^2$ et $g_x'(0) = 0$ pour tout $x > y_0 + \epsilon$ fixé. D'autre part comme L commute aux translations T_x on a pour tout $x > y_0 + \epsilon$:

$$\begin{aligned} Lg_x &= LT_x f = LT_x Id \\ &= T_x L Id = T_x A'/A \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

où Id est la fonction $t \mapsto t$. On a alors

$$\lim_{x\to+\infty} T_x A'/A(t) = \lim_{x\to+\infty} \int_{x-t}^{x+t} A'(\xi)/A(\xi)\delta_x * \delta_t(d\xi) = 2\rho$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé. La formule (3.5.1) avec $g = g_x$ et y fixé et le théorème de convergence dominée donnent alors

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x = 2\rho \int_0^y \left(\int_t^y \frac{dz}{A(z)} \right) A(t)dt$$

d'où le résultat. □

THÉORÈME 3.6. – *Tout hypergroupe polynomial* $(\mathbb{N}, *)$ *à paramètres convergents est stable et pour tout* $y \in \mathbb{N}$ *, on a*

(3.6.1) $$D(y) = (p-q)\sum_{z=1}^{y} \left(\sum_{k=2}^{z} \left(\prod_{i=k-1}^{z-1} \frac{q_i}{p_i} \right) \frac{1}{p_{k-2}} + \frac{1}{p_{z-1}} \right).$$

La preuve est basée sur le lemme suivant

LEMME 3.6.2. – *Avec les notations de (2.4.2) et si l'hypergroupe* $(\mathbb{N}, *)$ *est à paramètres convergents, alors pour tout* $y \in \mathbb{N}$ *et tout* $\ell \in \{0, \cdots, 2y\}$, *la limite*

(3.6.3) $$\lim_{x\to+\infty} c(x, y, x+y-\ell) = c(y, \ell) \quad (\in [0, 1]) \text{ existe.}$$

Démonstration. – Comme la convolution est telle que

(3.6.4) $$\delta_x * \delta_1 = q_x\delta_{x-1} + r_x\delta_x + p_x\delta_{x+1} \quad (x \geq 1),$$

le résultat est donc vrai pour $y = 1$. On voit de même que les masses de $\delta_x * \delta_1 * \delta_1$ tendent aussi vers une limite lorsque $x \to +\infty$. Par récurrence il en est de même des coefficients (masses) de la probabilité $\delta_x * \delta_1^y$ pour tout $y \in \mathbb{N}$ fixé ($\delta_1^y = \delta_1 * \cdots * \delta_1$, y fois). Mais par définition de la convolution, δ_y est une fonction polynomiale de δ_1, précisément

$$\delta_y = P_y(\delta_1), \quad (y \in \mathbb{N}),$$

où P_y est le y^e polynôme de la famille (P_n). Il en résulte alors immédiatement que les masses de $\delta_x * \delta_y$ *i.e.* les coefficients $\{c(x, y, x+y-\ell) : \ell \in \{0, \cdots, 2y\}\}$ tendent vers une limite quand $x \to +\infty$. □

Démonstration du théorème 3.6. – On a (si $x \geq y$) :

$$\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) = \sum_{\ell=0}^{2y}(x+y-\ell)c(x,y,x+y-\ell)$$
$$= x+y-\sum_{\ell=0}^{2y}\ell c(x,y,x+y-\ell).$$

Posons $d(x;y) = \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x$. Grâce à 3.6.2 on a donc

$$\lim_{x\to\infty} d(x;y) = y - \sum_{\ell=0}^{2y}\ell c(y,\ell) = D(y) \text{ existe.}$$

En utilisant ensuite de manière répétitive la relation (3.6.4), on montre aisément que l'on a :

$$\begin{aligned}(3.6.5)\quad & p_x d(x+1;y) + r_x d(x;y) + q_x d(x-1;y)\\ &= \mathbb{E}(\delta_x * (\delta_1 * \delta_y - \delta_1))\\ &= p_y d(x;y+1) + r_y d(x;y) + q_y d(x;y-1) - (p_x - q_x).\end{aligned}$$

Si on fait tendre x vers $+\infty$ dans (3.6.5) on obtient

$$(3.6.6)\quad D(y) = p_y D(y-1) + r_y D(y) + q_y D(y-1) - (p-q) \quad (y \geq 1)$$

avec $D(0) = 0$ et $D(1) = p - q$. Il est facile de résoudre cette équation aux différences finies en posant $\Delta(z) = D(z) - D(z-1), a_z = q_{z-1}/p_{z-1}$ et $b_z = p - q/p_{z-1}$, on obtient

$$\Delta(z) = a_z\Delta(z-1) + b_z,$$

et par récurrence descendante :

$$\Delta(z) = a_z a_{z-1}\cdots a_2\Delta(1) + a_z a_{z-1}\cdots a_3 b_2 + \cdots + a_z b_{z-1} + b_z.$$

On obtient alors la formule annoncée pour $D(y)$ en sommant tous les $\Delta(z)$ de $z = 1$ à y. □

PROPOSITION 3.7 (loi des grands nombres avec moment d'ordre 2). – *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une marche aléatoire de loi* μ *sur un hypergroupe stable* $(K,*)$

telle que μ ait un moment d'ordre deux (au sens usuel). Alors (X_n) satisfait la propriété $(L)_x(\forall x \in K)$ (voir 1.5) i.e. :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1})\right) = 0 \quad \mathbb{P}_x \quad p.s. \quad (\forall x \in K).$$

où $d(x) = \mathbb{E}(\delta_x * \mu) - x$ est la dérive de (X_n).

Démonstration. – Grâce à la condition (3.1.1) sur la convolution, on a

$$\begin{aligned} c(x) &= \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2 | X_{k-1} = x) = \mathbb{E}_x((X_1 - x)^2) \\ &= \int_K (t-x)^2 \delta_x * \mu(dt) = \int_K \left(\int_{|x-y|}^{x+y} (t-x)^2 \delta_x * \delta_y(dt)\right)\mu(dy) \\ &\leq \int_K y^2 \mu(dy) < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que $(X_n)_{n\geq 0}$ est à accroissements bornés dans L^2, le corollaire 1.3 donne alors le résultat. □

Remarque 3.8. – Les résultats du paragraphe 1 s'appliquent alors immédiatement à $(X_n)_{n\geq 0}$. En particulier on obtient la limite de X_n/n dans le cas discret, dans le cas transient ou lorsque $D(\mu) = 0$. Le but du paragraphe 4 est de montrer que (3.7) est encore vrai avec seulement une hypothèse de moment d'ordre un pour μ.

Remarque 3.9. – En ce moment nous ne connaissons pas d'exemple d'hypergroupe non stable. Nous laissons donc ouverte la question de savoir si une loi des grands nombres est quand même possible dans ce cas.

4. LA LOI DES GRANDS NOMBRES SUR LES HYPERGROUPES STABLES

4.1. Pseudo sommes

Depuis les articles [15] et [20], on sait qu'on peut de diverses manières représenter l'état X_n d'une marche aléatoire de loi μ sur un hypergroupe $(K, *)$ comme une pseudo somme de variables aléatoires ξ_k iid à valeurs dans K et de loi μ. On peut se référer à [34] mais il est plus simple d'en donner brièvement une construction. Étant donné une probabilité ν sur $\mathbb{R}$, de fonction de répartition $F(t) = \nu(]-\infty, t])$ et $Z : \Omega \to [0,1]$ une v.a. uniforme, il est bien connu que la v.a. (définie sur Ω) :

$$S(\omega) = \text{Inf}\,\{t : F(t) \geq Z(\omega)\}$$

est de loi ν sur $\mathbb{R}$. Si maintenant $(K, *)$ est un hypergroupe avec $K \subset \mathbb{R}$, pour construire une v.a. de loi $\mu * \nu$ à partir de deux v.a. indépendantes X et Y à valeurs dans K et de lois respectives μ et ν, il suffit de choisir une v.a. auxiliaire Z indépendante de (X, Y) de loi uniforme sur $[0, 1]$ puis de définir

$$S(\omega) = \text{Inf } \{t; \delta_{X(\omega)} * \delta_{Y(\omega)}(]-\infty, t]) \geq Z(\omega)\}.$$

Nous dirons alors que $S = X \overset{Z}{+} Y$ est la pseudo somme de X et Y relativement à Z. On peut alors construire canoniquement une marche aléatoire de loi μ sur K à partir d'une suite (ξ_n) de v.a. i.i.d de loi μ et d'une suite auxiliaire indépendante (Z_n) de v.a. i.i.d uniformes sur $[0, 1]$ en posant $X_0 = x, X_1 = x \overset{Z_n}{+} \xi_1$ et $X_n = X_{n-1} \overset{Z_n}{+} \xi_n$ pour $n \geq 1$. On écrira alors

$$X_n = x \overset{Z_1}{+} \xi_1 \overset{Z_2}{+} \cdots \overset{Z_n}{+} \xi_n \tag{4.1.1}$$

en respectant l'ordre des facteurs car cette pseudo somme n'est pas commutative.

4.2. Méthode de troncature

Avec les notations de (4.1.1), supposons que μ a un moment d'ordre 1 et pour tout $c > 0$ (fixé), posons

$$\xi_k^c = \mathbf{1}_{[\xi_k < ck]} \xi_k. \tag{4.2.1}$$

La v.a. tronquée ξ_k^c est de loi μ_k qui est manifestement telle que

$$\int_K h(x)\mu_k(dx) = h(0)\mu_k(0) + \int_{]0, ck[} h(x)\mu(dx) \tag{4.2.2}$$

pour toute fonction h mesurable bornée sur K et où $\mu_k(0) = \mathbb{P}(\xi_k = 0) + \mathbb{P}(\xi_k \geq ck)$. Considérons maintenant la pseudo somme

$$X_n^c = x \overset{Z_1}{+} \xi_1^c + \cdots \overset{Z_n}{+} \xi_n^c, \tag{4.2.3}$$

où la suite auxiliaire (Z_k) est la même qu'en (4.1.1). Le processus $(X_n^c)_{n \geq 0}$ est clairement une chaîne de Markov non homogène dont le noyau de transition à l'instant k est donné par $P_k(x, dy) = (\delta_x * \mu_k)(dy)$ et dont la dérive à l'instant k est la fonction

$$d_k(x) = \mathbb{E}(\delta_x * \mu_k) - x \quad (x \in K). \tag{4.2.4}$$

Rappelons que $d(x) = \mathbb{E}(\delta_x * \mu) - x$ est la dérive de la marche aléatoire X_n. Le résultat crucial suivant montre que d_k est uniformément proche de d lorsque $k \to +\infty$:

LEMME 4.3. – *Avec les notations de 4.2, on a*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{x\in K}|d_k(x) - d(x)|\right) = 0.$$

Démonstration. – En utilisant (4.2.2) et le fait que $\mathbb{E}(\delta_x * \delta_0) - x = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}|d_k(x) - d(x)| &= \left|\int_K (\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x)\mu_k(dy)\right.\\ &\qquad \left.- \int_K (\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x)\mu(dy)\right|\\ &= \left|(\mathbb{E}(\delta_x * \delta_0) - x)\mu_k(0)\right.\\ &\qquad \left.+ \int_{ck}^{+\infty} (\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - x)\mu(dy)\right| \leq \int_{ck}^{+\infty} y\mu(dy)\end{aligned}$$

et le majorant tend clairement vers zéro uniformément en x. □

LEMME 4.4. – *Si $M_2(\mu_k)$ est le moment d'ordre 2 de la probabilité μ_k (voir 4.2), on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_2(\mu_k)}{k^2} < +\infty$.*

Démonstration. – Ce résultat est classique (*cf.* [5] p. 240).

THÉORÈME 4.5. – *Sur un hypergroupe stable K, toute marche aléatoire ayant une loi d'espérance finie, satisfait la propriété $(L)_x$ (*i.e.* la loi des grands nombres 1.5) pour tout $x \in K$.*

Démonstration. – Le lemme 4.4 montre qu'on peut appliquer le Théorème 1.2 à la chaîne de Markov $(X_n^c)_{n\geq 0}$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n^c}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d_k(X_{k-1}^c)\right) = 0 \quad \mathbb{P}_x \quad p.s. \quad (\forall x \in K). \tag{4.5.1}$$

Or on a

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(d_k(X_{k-1}^c) - d(X_{k-1}^c))\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k, \tag{4.5.2}$$

où $\epsilon_k = \| d_k - d \|_\infty$ tend vers 0 d'après 4.3 donc $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^n \epsilon_k = 0$ et on peut remplacer d_k par d dans la formule (4.5.1). Si on considère maintenant l'ensemble

$$A_c = \{\omega; \xi_k(\omega) = \xi_k^c(\omega) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}\},$$

on a $X_n(\omega) = X_n^c(\omega)$ pour tout n et tout $\omega \in A_c$. D'après (4.5.1) et (4.5.2) on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X_n(\omega)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(X_{k-1}(\omega))\right) = 0$$

pour tout $\omega \in A_c$. Mais $\mathbb{P}(A_c) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_k[\xi_k \geq kc]) \geq 1 - \sum_k \mathbb{P}(\xi_k \geq kc) = 1 - \frac{1}{c}\mathbb{E}(\mu) \to 1$ quand $c \to +\infty$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE 4.6. – *Sur un hypergroupe de Chebli-Trimèche ou sur un hypergroupe polynomial stable avec $p \geq q$, toute marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ ayant une loi μ d'espérance finie, satisfait la loi des grands nombres*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = D(\mu) \quad \mathbb{P}_x \quad p.s.$$

où la constante $D(\mu)$ est donnée par les formules (3.4.1), 3.5, (3.6.1).

Démonstration. – Si l'hypergroupe est de Chebli-Trimèche, le résultat découle de 1.10 si $\rho = 0$. Si $\mu \neq \delta_0$ et si $\rho > 0$, la marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ est transiente ; ([10] ou [30]) permet de conclure (ρ est défini dans le Théorème 3.5). Lorsque l'hypergroupe est polynomial le résultat découle de 1.8. □

Remarques 4.7. – 1) Lorsque l'hypergroupe polynomial est stable avec $p < q$, on a bien entendu $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0 \quad \mathbb{P}_x \quad p.s.$ conformément à 1.8 i).
2) Dans le cas $\rho > 0$ et $p > q$ le résultat de 4.6 avait été obtenu dans [31] et [34] mais le « cas difficile » $\rho = 0$ et $p \leq q$ résistait aux méthodes utilisées.
3) Le corollaire énoncé pour les hypergroupes polynomiaux, est vrai pour toute structure d'hypergroupe discret stable d'après 1.8.

5. REMARQUES FINALES

La constante $D(\mu)$ de la loi des grands nombres a aussi une signification analytique comme l'indique le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. – *Sur un hypergroupe stable* $(K,*)$, *pour toutes les probabilités* μ *et* $\nu \in M_1(K)$ *d'espérance finie, on a*

$$D(\mu * \nu) = D(\mu) + D(\nu). \tag{5.1.1}$$

Démonstration. – Il est clair qu'il suffit de prouver le résultat lorsque $\mu = \delta_y$ et $\nu = \delta_z$ sont des masses de Dirac. Avec la notation $d(x;t) = \mathbb{E}(\delta_x * \delta_t) - x$, on a :

$$\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y * \delta_z) - x = d(x;y) + d(x;z) + \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y * \delta_z) - \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) - d(x;z).$$

Le résultat découle alors immédiatement du lemme suivant

LEMME 5.1.2. – *Pour tous* $y, z \in K$ *on a*

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y * \delta_z) - \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) = D(z).$$

Démonstration. – Si Id désigne la fonction identité sur K, on a grâce à (2.1.3) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_x * \delta_y * \delta_z) - \mathbb{E}(\delta_x * \delta_y) &= \langle \delta_x * \delta_y * \delta_z, Id\rangle - \langle \delta_x * \delta_y, Id\rangle \\ &= \langle \delta_x * \delta_y, \delta_z * Id - Id\rangle \\ &= \int_{|x-y|}^{x+y} (\mathbb{E}(\delta_t * \delta_z) - t)\delta_x * \delta_y(dt).\end{aligned}$$

Mais si on fait tendre $x \to +\infty$, on a aussi $t \to +\infty$, la fonction sous le signe somme tend vers la constante $D(z)$ et le résultat s'en suit. $\square$

Remarque 5.1.3. – La fonction $y \to D(y)$ est donc une fonction moment d'ordre 1 généralisé au sens de Zeuner [35] de l'hypergroupe $(K,*)$. La loi des grands nombres s'interprète alors comme la convergence de X_n/n vers l'espérance généralisée de la loi μ de la marche aléatoire.

5.2. – Soit $R = G/H$ un espace Riemannien symétrique non compact de rang 1 et $|x|$ la distance riemannienne de $x \in R$ à l'origine. Soit ν une mesure de probabilité sur R invariante à gauche par H et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire gauche sur R de loi ν. La distance $|S_n| = X_n$ est clairement une marche aléatoire de loi $\tilde{\nu}$ profil de ν sur l'hypergroupe des doubles classes $G//H = [0,+\infty[$ (précisément $\tilde{\nu}(A) = \nu\{x \in R; |x| \in A\}$ pour A borélien de $\mathbb{R}_+$). La loi des grands nombres 4.6 exprime alors que $\lim |S_n|/n = D(\tilde{\nu})$ $p.s.$ Évidemment dans ce cas la convergence de $|S_n|/n$ résulte plus simplement du théorème ergodique sous additif (*cf.* [13]) mais notre méthode fournit une valeur de la limite.

5.3. – La situation archiclassique de 5.2 a un analogue discret dans le cas des marches pseudoisotropes sur les groupes libres et sur certains semi groupes discrets comme cela a été souligné par Voit dans [32]. Soit Γ le groupe libre avec d générateurs $g_1, \cdots, g_d$. Fixons une constante $c > 0$ et des nombres $s_1, \cdots s_d, t_1, \cdots t_d > 0$ tels que $\sum_{k=1}^{d}(s_k + t_k) = 1$ et $s_i t_i = c$ $(\forall i = 1, \cdots, d)$. On note $\mu_n \in M_+(\Gamma)$ $(n \in \mathbb{N})$ les mesures positives sur Γ définies par

$$\begin{aligned} &\mathrm{supp}\mu_n \subset \{g \in \Gamma; |g| = n\} \\ &\mu_n(g) = \prod_{\ell=1}^{k} s_{i_\ell}^{max(n_\ell,0)} t_{i_\ell}^{max(-n_\ell,0)}, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

où $g = g_{i_1}^{n_1} \cdots g_{i_k}^{n_k}$ est la représentation réduite de g et $|g|$ est la longueur de g. Le sous espace fermé M de $M(\Gamma)$ engendré par les $\mu_n (n \in \mathbb{N})$ est une sous algèbre de Banach (*cf.* [32]). Si on considère une suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ de v.a. iid à valeurs dans Γ et de loi $\mu \in M$, la marche aléatoire $S_n = \xi_1\xi_2 \cdots \xi_n$ est dite pseudo isotrope (elle est isotrope dans le cas particulier $s_1 = \cdots s_d = t_1 = \cdots t_d = 1/(2d)$) et le processus $X_n = |S_n|$ est en fait une marche aléatoire sur un hypergroupe polynomial $(\mathbb{N}, *)$ pour laquelle on peut donner une loi des grands nombres avec valeur explicite de la limite (*cf.* [32], *voir* également [24]).

RÉFÉRENCES

[1] Ph. BOUGEROL, Un mini cours sur les couples de Gelfand, *Publications de l'Université Paul Sabatier*, Toulouse, 1983.

[2] M. BOUHAIK et L. GALLARDO, Un théorème limite central dans un hypergroupe bidimensionnel, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **28**, 1992, p. 47-61.

[3] H. CHEBLI, Opérateurs de translation généralisée et semi groupes de convolution, *Lecture Notes in Math.*, n° 404, 1974, p. 35-59.

[4] D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO, *Probabilités et Statistiques*, tome 2, Masson éditeur, Paris, 1983.

[5] W. FELLER, An introduction to probability theory and its applications, Vol. **2**, 2nd edition, *John Wiley ed.*, New York, 1971.

[6] L. GALLARDO, Asymptotic behaviour of the paths of random walks on some commutative hypergroups, *Proceedings of the AMS-SIAM Conference applications of hypergroups and related measure algebras*, Seattle, 1993, *Contemporary Mathematics* (to appear).

[7] L. GALLARDO et O. GEBUHRER, Marches aléatoires et hypergroupes, *Expo. Math.*, Vol. **5**, 1987, p. 41-73.

[8] L. GALLARDO et V. RIES, La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de $SU(2)$, *Studia Math.*, t. **66**, 1979, p. 93-105.

[9] R. GANGOLLI, Isotropic infinitely divisible measures on symmetric spaces, *Acta Math.*, Vol. **111**, 1964, p. 213-246.

[10] O. GEBUHRER, Quelques propriétés du noyau potentiel d'une marche aléatoire sur les hypergroupes de Kunze-Stein, *Lecture notes in Math*, n° 1210, 1986, p. 77-83.

[11] M. E. GERTSENSHTEIN et V. B. VASILEV, Waveguides with random inhomogeneities and brownian motion in the Lobachevsky plane, *Theory of Prob. and Appl.*, Vol. **4**, 1959, p. 391-398.
[12] R. K. GETOOR, Infinitely divisible probabilities on the hyperbolic plane, *Pacific J. Math.*, Vol. **11**, 1961, p. 1287-1308.
[13] Y. GUIVARC'H, Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire, *Astérisque*, n° 74, 1980, p. 47-98.
[14] Y. GUIVARC'H, M. KEAN et B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur les groupes de Lie, *Lecture Notes in Math.*, n° 624, 1977.
[15] J. B. S. HALDANE, The addition of random vectors, *Sankhyà*, Vol. **22**, 1960, p. 213-220.
[16] S. HELGASON, Differential geometry and symmetric spaces, *Academic Press ed.*, 1962.
[17] H. HEYER, Convolution semi groups of probability measures on Gelfand pairs, *Expo. Math.*, Vol. **1**, 1983, p. 3-45.
[18] R. I. JEWETT, Spaces with an abstract convolution of measures, *Advances in Math.*, Vol. **18**, 1975, p. 1-101.
[19] F. I. KARPELEVICH, V. N. TUTUBALIN et G. SHUR, Limit theorems for the compositions of distributions in the Lobachevsky plane and space, *Theory of Prob. and Appl.*, Vol. **4**, 1959, p. 399-401.
[20] J. F. C. KINGMAN, Random walks with spherical symmetry, *Acta Math.*, Vol. **109**, 1963, p. 11-53.
[21] J. LAMPERTI, Criteria for recurrence or transience of stochastic processes, *Journ. of Math. Anal. and Appl.*, Vol. **1**, 1960, p. 313-330.
[22] R. LASSER, Orthogonal polynomials and hypergroups, *Rend. di Math.*, Vol. **2**, 1983, p. 185-209.
[23] G. LETAC, Problèmes classiques de probabilité sur un couple de Gelfand, *Lecture Notes in Math.*, n° 861, 1981, p. 93-117.
[24] P. M. SOARDI, Limit theorems for random walks on discrete semi groups related to non homogeneous trees and Chebysshef polynomials, *Math. Zeit.*, Vol. **200**, 1989, p. 313-327.
[25] R. SPECTOR, Mesures invariantes sur les hypergroupes, *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. **239**, 1978, p. 147-165.
[26] W. F. STOUT, Almost sure convergence, *Academic Press ed.*, New York, 1974.
[27] K. TRIMÈCHE, Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $[0, \infty[$, *J. Math. Pures Appl.*, Vol. **60**, 1981, p. 51-98.
[28] K. TRIMÈCHE, Probabilités indéfiniment divisibles et théorème de la limite centrale pour une convolution généralisée sur la demi droite, *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série A, t. **286**, 1978, p. 63-66.
[29] K. TRIMÈCHE, Convergence des séries de Taylor généralisées au sens de Delsarte, *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série A, t. **281**, 1975, p. 1015-1017.
[30] M. VOIT, Positive characters on commutative hypergroups and some applications, *Math. Z*, Vol. **198**, 1988, p. 405-421.
[31] M. VOIT, Laws of large numbers for polynomial hypergroups and some applications, *Journal Theor. Prob.*, Vol. **3**, 1990, p. 245-266.
[32] M. VOIT, Pseudo isotropic random walks on free groups and semi groups, *Journ. Mult. Anal.*, Vol. **38**, 1991, p. 275-293.
[33] H. ZEUNER, One dimensional hypergroups, *Adv. in Math.*, Vol. **76**, 1989, p. 1-18.
[34] H. ZEUNER, Laws of large numbers of hypergroups on $\mathbb{R}_+$, *Math. Ann.*, Vol. **283**, 1989, p. 657-678.
[35] H. ZEUNER, Moment functions and laws of large numbers on hypergroups, *Math. Zeit.*, Vol. **211**, 1992, p. 369-407.

(Manuscrit reçu le 24 octobre 1994;
corrigé le 5 octobre 1995.)