

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

NATHANAËL ENRIQUEZ

## **Effet d'un bruit blanc sur l'oscillateur harmonique de dimension $d$**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 32, n° 5 (1996), p. 601-622

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1996\\_\\_32\\_5\\_601\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_5_601_0)

© Gauthier-Villars, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Effet d'un bruit blanc sur l'oscillateur harmonique de dimension $d$

par

**Nathanaël ENRIQUEZ**

Département de Mathématiques, Bat. 425, Université Paris Sud, 91405 Orsay.

---

**RÉSUMÉ.** – On calcule par une méthode perturbative un équivalent de l'exposant de Lyapounov presque sûr de l'oscillateur harmonique aléatoire isotrope dans le cas des petites perturbations.

**ABSTRACT.** – We compute by a perturbative method an equivalent of the almost sure Lyapounov exponent of the random isotropic harmonic oscillator in the case of small perturbations.

---

### 1. INTRODUCTION

Le théorème ergodique multiplicatif d'Oseledec assure l'existence d'exposants de Lyapounov pour des systèmes du type

$$dx = Axd t + \sum_{i=1}^m B_i x \circ dW_i, \quad x(0, x_0) = x_0, t \in \mathbb{R}$$

où  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $A, B_i \in M_d(\mathbb{R})$ , et  $W_i$  sont des mouvements browniens réels indépendants. Ce genre de systèmes a été étudié par un certain nombre d'auteurs. L'étude est assez complète dans le cas de la dimension 2. Elle a été commencée par Auslender et Milhstein [2] en 1982 puis poursuivie par L. Arnold, G. Papanicolaou, E. Pardoux, M. Pinsky, V. Wihstutz [8],

[1], [9]. Sauf dans certains cas particuliers on ne peut évaluer l'exposant de Lyapounov que pour les variances des  $W_i$  tendant vers 0 ou vers  $+\infty$ .

Le cas de la dimension quelconque est resté assez peu étudié. M. Pinsky et V. Wihstutz [10] l'ont étudié pour des matrices  $A$  nilpotentes et les cas de variances limites mais ne concluent qu'au signe de l'exposant (positif en l'occurrence, ce qui prouve l'instabilité du système) et à la forme d'un développement asymptotique sans en donner un équivalent explicite.

Pour avoir des formules explicites dans des cas non triviaux nous imposerons des hypothèses d'isotropie sur le bruit qui perturbe le système initial  $dx = Axdx$ . Ce que l'on entend ici par isotropie du bruit, c'est l'ajout au terme déterministe d'un terme de la forme  $dW_t x_t$  où  $W_t$  est un mouvement brownien additif matriciel qui a pour propriété essentielle

$$W_t \stackrel{(loi)}{=} U^{-1} W_t U, \quad \forall U \in O_d(\mathbb{R}).$$

Du fait de cette propriété, seulement trois paramètres suffisent pour caractériser la covariance de ce processus gaussien matriciel.

Le cas du système  $dx_t = dW_t x_t$  (ici  $A = 0$ ) a été complètement étudié par Y. Le Jan [5], qui donne une formule explicite pour les  $d$  exposants de Lyapounov associés à ce système.

L'objet du présent travail est l'étude de perturbations aléatoires (représentées par le terme  $dW_t x_t$ ) de l'oscillateur harmonique en dimension  $d$ .

On obtient une formule explicite concernant la limite de  $\frac{1}{t} \ln E(\|x_t\|^2)$  (qui peut être obtenue comme la plus grande des racines d'un polynôme de degré 3).

L'étude de la limite presque sûre de  $\frac{1}{t} \ln(\|x_t\|^2 + \|v_t\|^2)$  est traitée dans le cas des variances petites. L'hypothèse d'isotropie, permet de réduire considérablement le nombre de variables du problème. On est pratiquement ramené à l'étude du processus  $\left( \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2 + \|v\|^2}, \frac{(x|v)}{\|x\|^2 + \|v\|^2} \right)$  (où  $x$  et  $v$  sont les variables de position et de vitesse) qui se trouve être un processus de Markov dont on peut calculer le générateur. Après avoir montré l'unicité de la mesure invariante du processus normalisé, on utilise la méthode perturbative employée en dimension 1 par E. Pardoux et V. Wihstutz [8]; la difficulté en dimension supérieure à 1, provient de la non-unicité de la mesure invariante du système non perturbé. Nous nous apercevons d'ailleurs, vu la non-linéarité de l'expression de l'exposant en les paramètres définissant la variance de  $W$ , que suivant les cas, la mesure invariante du système perturbé ne converge pas toujours vers la même mesure lorsque la variance tend vers 0.

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [3]. Je tiens enfin à remercier Y. Le Jan qui m'a fait part de ce problème.

## 2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Avant d'aborder l'étude du mouvement brownien isotrope sur les matrices, on commence par introduire la notion de mesure gaussienne isotrope :

DÉFINITION 1. – Une mesure gaussienne sur  $M_d(\mathbb{R})$  est dite isotrope si et seulement si elle est invariante par tous les automorphismes  $\tau_U$  de  $M_d(\mathbb{R})$  de la forme :  $\tau_U(A) = U^{-1}AU$ ,  $U \in O_d(\mathbb{R})$ .

Le théorème suivant permet de décrire de telles mesures [4].

THÉORÈME 1. – Une mesure gaussienne  $\mu$  est caractérisée par sa covariance qui est donnée par le tenseur suivant :

$$C_{jl}^{ik} = \int_{M_d(\mathbb{R})} A_j^i A_l^k d\mu(A).$$

$\mu$  est isotrope si et seulement si  $C$  a la forme suivante :

$$C_{kl}^{ij} = a\delta^{i,j}\delta_{k,l} + b\delta_k^i\delta_l^j + c\delta_l^i\delta_k^j$$

où  $a, b, c$  vérifient les conditions suivantes :  $a + c$ ,  $a - c$ , et  $a + c + db$  sont des réels positifs.

Étant donnée une telle matrice de covariance, on peut définir un mouvement brownien additif sur les matrices,  $W_j^i(t)$ , de covariance

$$E(W_j^i(t)W_l^k(s)) = C_{jl}^{ik}t \wedge s.$$

Nous distinguerons quatre cas qui apparaîtront dans la suite, notamment pour des questions de contrôlabilité :

– le cas  $a = 0$ , qui donne alors  $c = 0$  et  $b \geq 0$ .  $W_j^i$  est alors une matrice scalaire de mouvements browniens ;

– le cas  $a > 0$  et  $a = c$  que l'on appellera "le cas symétrique". En effet, on a dans ce cas  $W_j^i = W_i^j$  p.s. ;

– le cas  $a > 0$  et  $a = -c$  que l'on appellera "le cas antisymétrique". En effet, on a dans ce cas  $W_j^i = -W_i^j$  p.s. ;

– le cas général qui contient toutes les autres situations.

On va désormais étudier le système suivant :

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = dW_t \cdot X_t - \tau X_t dt. \end{cases}$$

On étudiera successivement la limite de  $\frac{1}{t} \ln E(\|X_t\|^2)$ , puis la limite *p.s.* de  $\frac{1}{t} \ln(\|X_t\|^2 + \|V_t\|^2)$  dans le cas des petites perturbations, c'est-à-dire dans la limite  $(a, b, c) = \epsilon^2(a', b', c')$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Le cas  $a = 0$  n'est que la superposition de systèmes de dimension un. On se référera pour l'étude de ce cas à [2], [8] et [9].

### 3. EXPOSANT DU MOMENT D'ORDRE 2

PROPOSITION 1. – *Le moment d'ordre 2 de  $X$  a un exposant de Lyapounov égal à la plus grande des racines de l'équation*

$$x^3 + 4\tau x - 2\tau\nu = 0$$

où

$$\nu = \frac{ad + b + c}{\tau}.$$

*Preuve.* – On commence par utiliser la méthode de variations des constantes qui fournit une expression autonome de  $X_t$  :

$$X_t = X_0 \cos(\sqrt{\tau}t) + V_0 \sin(\sqrt{\tau}t) + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^t \sin(\sqrt{\tau}(t-u)) X_u dW_u$$

avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent.

Si l'on note  $f$  la fonction

$$f(t) = E(\|X_t\|^2),$$

alors

$$\begin{aligned} f(t) = & \text{termes du second degré en } \cos(\sqrt{\tau}t) \text{ et } \sin(\sqrt{\tau}t) \\ & + \nu \left( \int_0^t \sin^2(\sqrt{\tau}(t-u)) f(u) du \right). \end{aligned}$$

Puis

$$f'(t) = p \cos(2\sqrt{\tau}t) + q \sin(2\sqrt{\tau}t) \\ + \sqrt{\tau}\nu \left( \int_0^t \sin(2\sqrt{\tau}(t-u))f(u)du \right)$$

où  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$f''(t) = 2\sqrt{\tau}(-p \sin(2\sqrt{\tau}t) + q \cos(2\sqrt{\tau}t)) \\ + 2\tau\nu \left( \int_0^t \cos(2\sqrt{\tau}(t-u))f(u)du \right)$$

$$f'''(t) = -4\tau(p \cos(2\sqrt{\tau}t) + q \sin(2\sqrt{\tau}t)) \\ + 2\tau\nu f(t) - 4\tau^{3/2}\nu \left( \int_0^t \sin(2\sqrt{\tau}(t-u))f(u)du \right).$$

On aboutit à l'équation suivante

$$f''' + 4\tau f' - 2\tau\nu f = 0$$

ce qui donne un exposant de Lyapounov égal au maximum des racines de l'équation

$$x^3 + 4\tau x - 2\tau\nu = 0$$

ceci pour presque tous les états de départ. Si on examine la limite  $\nu \rightarrow 0$  on obtient  $x \simeq \nu/2$ .

## 4. CALCUL DE L'EXPOSANT PRESQUE SÛR

### 4.1. Réduction du nombre de variables

On commence par faire le changement de variables suivant :  $X' = X$ ,  $V' = V/\sqrt{\tau}$  qui transforme le système précédent en

$$\begin{cases} dX'_t = \sqrt{\tau}V'_t dt \\ dV'_t = \frac{1}{\sqrt{\tau}}dW_t \cdot X'_t - \sqrt{\tau}X'_t dt. \end{cases}$$

C'est ici, dans la réduction du nombre de variables du problème que va intervenir la propriété d'isotropie du bruit. L'intérêt de la proposition suivante est de transformer un problème à  $2d$  variables en un problème à seulement 3 variables (voire 2, grâce à l'homogénéité).

Posons  $\beta = \frac{a'}{2}$  et  $\gamma = \frac{b' + c'}{2}$ .

PROPOSITION 2. — Le processus  $(x_1, x_2, x_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\|X'\|^2, \|V'\|^2, (X'|V'))$  est un processus de diffusion dans  $\mathbb{R}^3$ , de générateur  $L_\epsilon$  : (avec la notation  $f_{x_i} = \partial/\partial x_i$ ,  $f_{x_i x_j} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ )

$$\begin{aligned} L_\epsilon f &= 2\sqrt{\tau}x_3(f_{x_1} - f_{x_2}) + \sqrt{\tau}(x_2 - x_1)f_{x_3} \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{\tau}(2(\beta d + \gamma)x_1 f_{x_2} + 4(\beta + \gamma)x_1 x_3 f_{x_2 x_3} \\ &\quad + 4(\beta x_1 x_2 + \gamma x_3^2)f_{x_2^2} + (\beta + \gamma)x_1^2 f_{x_3^2}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} (L_0 + \epsilon^2 L_1)f. \end{aligned}$$

Preuve. — Le processus  $Z' = (X', V')$  est un processus de diffusion de générateur  $L$  avec pour toute fonction réelle  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}^{2d}$ , deux fois dérivable,  $L\tilde{f}(X', V')$  de la forme :

$$\left( \sum \sqrt{\tau}(V'_k \frac{\partial}{\partial X'_k} - X'_k \frac{\partial}{\partial V'_k}) + \frac{a}{2\tau} \|X'\|^2 \frac{\partial^2}{\partial V'_k{}^2} + \frac{b+c}{2\tau} X'_k X'_l \frac{\partial^2}{\partial V'_k \partial V'_l} \right) \tilde{f}.$$

En effet, la formule d'Itô donne

$$\tilde{f}(X'_t, V'_t) = \int_0^t (\nabla \tilde{f} | dZ'_i) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2d} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Z'_i \partial Z'_j} d\langle Z'_i, Z'_j \rangle$$

où  $Z'_i = X'_i$  ( $i \leq d$ ) et  $Z'_i = V'_{i-d}$  ( $i > d$ ). Mais

$$d\langle X'_i, Z'_k \rangle = 0$$

et

$$d\langle V'_i, V'_j \rangle = \frac{1}{\tau} d\langle \sum X'_k dW_k^i, \sum X'_l dW_l^j \rangle$$

soit

$$d\langle V'_i, V'_j \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{k,l} X'_k X'_l (a\delta^{i,j} \delta_{k,l} + b\delta_k^i \delta_l^j + c\delta_l^i \delta_k^j).$$

D'où

$$\sum \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial Z'_i \partial Z'_j} d\langle Z'_i, Z'_j \rangle = \frac{a}{\tau} \|X'\|^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial V'_i{}^2} + \frac{b+c}{\tau} X'_i X'_j \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial V'_i \partial V'_j}$$

ce qui donne l'expression du générateur annoncée ci-dessus.

Si  $\tilde{f}$  n'est fonction que de  $(\|X'\|^2, \|V'\|^2, (X'|V')) \stackrel{def}{=} (x_1, x_2, x_3)$ ,

$$\tilde{f}(X'_1, \dots, X'_d, V'_1, \dots, V'_d) = f(x_1, x_2, x_3),$$

l'opérateur  $L$  se simplifie et prend la forme annoncée : on utilise en effet les formules suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial X'_k} = 2X'_k f_{x_1} + V'_k f_{x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial V'_k} = 2V'_k f_{x_2} + X'_k f_{x_3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V'^2_k} = 2f_{x_2} + 4V'^2_k f_{x_2 x_2} + 4X'_k V'_k f_{x_2 x_3} + X'^2_k f_{x_3 x_3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V'_k \partial V'_l} = 4V'_k V'_l f_{x_2 x_2} + 2(X'_k V'_l + X'_l V'_k) f_{x_2 x_3} + X'_k X'_l f_{x_3 x_3}$$

et aussi

$$x^2_1 = \sum_{k,l} X'^2_k X'^2_l, \quad x_1 x_2 = \sum_{k,l} X'^2_k V'^2_l,$$

$$x_1 x_3 = \sum_{k,l} X'^2_k X'_l V'_l, \quad x^2_3 = \sum_{k,l} X'_k X'_l V'_k V'_l.$$

ce qui termine la preuve.

Lorsque l'on applique la formule d'Itô à la fonction  $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + x_2)$ , on obtient

$$\ln(x_1 + x_2) + \epsilon^2 g = \text{constante} + M(t) + \int_0^t Lf ds$$

où  $M$  est l'intégrale stochastique d'une fonction bornée ce qui entraîne  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0$ . Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(x_1 + x_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q_\epsilon(s) ds$$

avec

$$q_\epsilon(s) = \epsilon^2 (2(\beta d + \gamma) \frac{x_1}{x_1 + x_2} - 4\beta \frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} - 4\gamma \frac{x^2_3}{(x_1 + x_2)^2})(s) \\ \stackrel{def}{=} \epsilon^2 q_1(s).$$

Pour pouvoir conclure à l'existence d'une limite presque sûre, indépendante de  $\omega$ , on a besoin de l'existence et de l'unicité de la mesure invariante



relative au processus  $U_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(X'_t, V'_t)}{\|(X'_t, V'_t)\|}$ . En effet, on remarque que la fonction  $q_1$  ne dépend que de  $U_t$  (et pas de  $\|(X'_t, V'_t)\|$ ), ce qui permet d'appliquer le théorème ergodique à l'expression du dessus.

#### 4.2. Étude du processus $U_t$

En vertu de l'homogénéité de l'équation initiale,  $U_t$  est un processus de diffusion à valeurs sur la sphère  $S^{2d-1}$ . Vu que ce processus est à valeurs dans un compact, on est assuré de l'existence d'une mesure invariante.

Nous allons montrer maintenant l'unicité de la mesure invariante du processus  $U_t$ . Pour ce faire, nous allons montrer que le support de toute mesure invariante relative au processus  $U_t$  est la sphère toute entière. En effet, dans ces conditions si l'on raisonne par l'absurde, et que l'on suppose l'existence de deux mesures invariantes extrémales, le fait qu'elles seraient alors étrangères permet de conclure à l'unicité de la mesure invariante.

Nous allons distinguer le cas général d'un bruit isotrope, des cas particuliers évoqués dans la description du début.

##### 4.2.1. Le cas général

On pourra se passer des considérations habituelles sur les algèbres de Lie de champ de vecteurs concernant les problèmes de contrôlabilité et raisonner de manière élémentaire.

Pour avoir le résultat il suffit de montrer qu'étant donnés deux points  $x$  et  $y$  de la sphère unité, la probabilité pour  $U_t$  d'atteindre un voisinage quelconque de  $y$  en partant de  $x$  est strictement positive.

Pour plus de commodité on va raisonner dans  $\mathbb{R}^{2d}$  : il suffit de montrer qu'étant donnés deux points  $(x_1, x_2)$  ( $\neq (0, 0)$ ) et  $(y_1, y_2)$  de  $\mathbb{R}^{2d}$ , la probabilité pour  $X_t$  d'atteindre un voisinage quelconque de  $(y_1, y_2)$  en partant de  $(x_1, x_2)$  est strictement positive.

LEMME 1. – *Pour tout  $t$  la variable aléatoire matricielle  $W_t$  charge le voisinage de n'importe quelle matrice.*

*Preuve.* – un terme  $W_{j_t}^i$  ( $i \neq j$ ) est une variable aléatoire indépendante de toutes les autres excepté de  $W_{i_t}^j$  qui ne lui est ni égal ni opposé, par conséquent ces deux variables peuvent évaluer n'importe quelle paire de réels.

Quant aux termes diagonaux de  $W_t$ , ils sont de variances  $(a + b + c)t$ , et de covariance avec les autres termes diagonaux égale à  $bt$ . La diagonale de  $W_t$ , couvre donc  $\mathbb{R}^d$  tout entier indépendamment des termes non diagonaux. Q.E.D.

Supposons que l'on parte de  $(x_1, x_2)$  et que l'on veuille arriver à  $(y_1, y_2)$ , on commence par passer par  $(x_1, y_1)$ , en utilisant pour  $W$  (lemme 1) une matrice arbitrairement grande qui envoie  $x_2$  en  $y_1$  en un temps arbitrairement petit (sauf si  $x_2$  est nul ce qui est contournable en laissant évoluer auparavant le système de manière à aboutir à un état à vitesse non nulle), puis au bout d'un temps  $\pi/2$ , on passe par  $(y_1, -x_1)$  en prenant pour  $W$  une matrice arbitrairement petite qui va laisser évoluer le système comme s'il n'était pas perturbé, puis comme précédemment on va arriver en un temps arbitrairement court au point  $(y_1, y_2)$ . Et le résultat.

#### 4.2.2. *Le cas symétrique*

Ce cas correspond à la situation  $a > 0$ ,  $a = c$ .

LEMME 2. – *Pour tout  $t$  la variable aléatoire matricielle  $W_t$  charge le voisinage de n'importe quelle matrice symétrique.*

*Preuve.* – On suit un raisonnement analogue à celui du lemme précédent.

Pour ce qui est de la contrôlabilité du système, on utilise le lemme 2 et le fait que tout vecteur non nul  $x_2$  peut être envoyé sur tout vecteur  $y_1$ , par une matrice symétrique.

#### 4.2.3. *Le cas antisymétrique*

Ce cas correspond à la situation  $a > 0$ ,  $a = -c$ ,  $b = 0$ .

On remarque que le résultat dans ce cas entraîne le résultat dans le cas  $b \neq 0$ , vu que l'ensemble des matrices atteintes par  $W$  y est strictement plus grand (c'est en fait la somme directe de l'espace des matrices scalaires et des matrices antisymétriques).

LEMME 3. – *Le processus matriciel  $W_t$  charge le voisinage de n'importe quelle matrice antisymétrique.*

*Preuve.* – Même raisonnement que ci-dessus. Q.E.D.

Pour montrer l'unicité de la mesure invariante du processus  $U_t$ , on passera par des considérations d'algèbres de Lie. On commence par remarquer que le champ de vecteurs défini par le système non perturbé est périodique, (en effet la solution de l'équation initiale non perturbée, s'écrit sous la forme  $X_0 \cos t + V_0 \sin t$ ), et que par conséquent on peut avancer aussi bien positivement que négativement le long des lignes de champ.

On notera  $A$  la matrice qui définit le système non perturbé,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier la contrôlabilité du système  $(X, V)$ , nous démontrerons le lemme suivant :

LEMME 4. – Pour tous vecteurs  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  tels que  $x_1 \not\perp x_2$  et  $y_1 \not\perp y_2$  il existe un chemin reliant les deux vecteurs tel que pour tous les vecteurs  $(z_1, z_2)$  du chemin :

$$\dim \text{Lie} \left\{ A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{so}_d(\mathbb{R}) & 0 \end{pmatrix} \right\} (z_1, z_2) = 2d,$$

Preuve. – si  $B$  est une matrice de  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{so}_d(\mathbb{R}) & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$[[B, A], A] = -4(B + {}^t B).$$

Donc  $\text{Lie} \left\{ A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{so}_d(\mathbb{R}) & 0 \end{pmatrix} \right\}$ , contient les matrices  $Id$ ,  $B$ ,  ${}^t B$  et  $A$  ce qui explique respectivement la présence dans  $\text{Lie} \left\{ A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{so}_d(\mathbb{R}) & 0 \end{pmatrix} \right\} (z_1, z_2)$  de  $(z_1, z_2)$ ,  $(0, z_1^\perp)$ ,  $(z_2^\perp, 0)$ ,  $(-z_2, z_1)$ .

Ces vecteurs engendrent  $\mathbb{R}^{2d}$  tout entier dès que  $z_1 \not\perp z_2$ .

Or il est aisé de voir qu'il existe toujours un chemin qui évite la zone  $\{z_1 \perp z_2\}$ .

Le lemme est donc démontré.

Pour vérifier la contrôlabilité du système il suffit d'utiliser le lemme précédent et de remarquer que l'on sort de la zone  $z_1 \perp z_2$  avec une probabilité strictement positive. Le lemme précédent permet donc de conclure.

Soit donc  $p_\epsilon$  l'unique mesure invariante de  $U_t$ , l'exposant de Lyapounov presque sûr vaut :

$$\frac{1}{2} \lambda_\epsilon = \frac{1}{2} \int_P q_\epsilon dp_\epsilon.$$

Nous allons maintenant utiliser une méthode perturbative pour évaluer  $\lambda_\epsilon$ .

### 4.3. La méthode perturbative

Désormais  $L_\epsilon$  opérera sur les fonctions définies sur la sphère projective, et toutes les fonctions considérées seront également définies sur la sphère projective.

Au lieu de calculer  $\lambda_\epsilon = \int_P q_\epsilon dp_\epsilon$  en faisant le développement de  $p_\epsilon$  en puissance de  $\epsilon$ , on préférera considérer  $\lambda_\epsilon$  comme l'unique réel vérifiant le problème adjoint

$$(1) \quad L_\epsilon f_\epsilon = q_\epsilon - \lambda_\epsilon.$$

En effet l'équation  $L_\epsilon f_\epsilon = q_\epsilon - c$  a une solution, seulement si  $c = \lambda_\epsilon$ , ce que l'on peut constater grâce aux égalités suivantes :

$$0 = \langle f_\epsilon, (L_\epsilon^* p_\epsilon) \rangle = \langle (L_\epsilon f_\epsilon), p_\epsilon \rangle = \langle q_\epsilon, p_\epsilon \rangle - c \langle 1, p_\epsilon \rangle = \lambda_\epsilon - c.$$

On peut alors faire un développement *a priori* de  $f_\epsilon$  et de  $\lambda_\epsilon$  en puissances de  $\epsilon^2$  :

$$f_\epsilon = f_0 + \epsilon^2 f_1 + \dots + \epsilon^{2N} f_N + \epsilon^{2(N+1)} g_\epsilon^N,$$

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon^2 \lambda_1 + \dots + \epsilon^{2N} \lambda_N + \epsilon^{2(N+1)} \rho_\epsilon^N,$$

et si l'on identifie les puissances de  $\epsilon$  dans l'équation (1), on obtient la série d'équations

$$(2) \quad \begin{aligned} L_0 f_0 &= -\lambda_0 \\ L_0 f_1 &= -L_1 f_0 + q_1 - \lambda_1 \\ &\dots \\ L_0 f_N &= -L_1 f_{N-1} - \lambda_N \\ L_\epsilon g_\epsilon^N &= -L_1 f_N - \rho_\epsilon^N. \end{aligned}$$

Si  $L_0$  avait une unique mesure invariante  $p_0$ ,

$$\lambda_k = \langle -L_1 f_{k-1}, p_0 \rangle,$$

mais ce ne sera pas le cas dans le cadre de ce problème, par contre on a nécessairement  $\lambda_0 = 0$ , et vu l'unicité de la mesure invariante de  $L_\epsilon$ , on a effectivement

$$\rho_\epsilon^N = -\langle L_1 f_N, p_\epsilon \rangle.$$

LEMME 5 [8]. – Si  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont des réels et  $f_0, f_1, \dots, f_N$  des fonctions du domaine de  $L_0$  et  $L_1$  qui vérifient les équations du dessus, et tels qu'en plus on ait

$$|\rho_\epsilon^N| \leq C_N \quad \text{pour tout } \epsilon > 0,$$

alors on a effectivement

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon^2 \lambda_1 + \dots + \epsilon^{2N} \lambda_N + O(\epsilon^{2(N+1)}).$$

*Preuve.* – On fera la démonstration pour  $N = 1$  (on ne poussera d'ailleurs pas le calcul plus loin dans la mise en œuvre de la méthode).

On écrit l'expression de  $\lambda_\epsilon$  que l'on transforme en utilisant les équations (2) :

$$\begin{aligned}\lambda_\epsilon &= \langle q_\epsilon, p_\epsilon \rangle \\ &= \epsilon^2 \langle q_1, p_\epsilon \rangle \\ &= \langle L_0 f_0 + \lambda_0, p_\epsilon \rangle + \epsilon^2 \langle L_0 f_1 + L_1 f_0 + \lambda_1, p_\epsilon \rangle \\ &= \langle L_\epsilon f_0, p_\epsilon \rangle + \epsilon^2 \langle L_\epsilon f_1, p_\epsilon \rangle + \epsilon^2 \langle -L_1 f_1, p_\epsilon \rangle + \lambda_0 + \epsilon^2 \lambda_1 \\ &= \lambda_0 + \epsilon^2 \lambda_1 + \epsilon^2 \langle -L_1 f_1, p_\epsilon \rangle.\end{aligned}$$

*Remarque.* – On utilise le fait que les fonctions sont définies sur une variété compacte sans bord pour pouvoir écrire  $\langle L_\epsilon f, p_\epsilon \rangle = \langle f, L_\epsilon^* p_\epsilon \rangle$  sans imposer de condition particulière à  $f$ .

Le cas d'un ordre quelconque se traite de la même manière.

Dans la suite on se contentera de montrer que  $L_1 f_N$  est uniformément bornée en  $\epsilon$ .

#### 4.4. Mise en œuvre du calcul

On remarque d'abord que l'effet de la constante  $\tau$  est de diviser l'exposant de Lyapounov par  $\tau$ , on fera donc le calcul pour le cas  $\tau = 1$ . Commençons par donner les relations qui lient  $\beta$  et  $\gamma$ . D'après le théorème 1,  $a + c$  et  $a - c$  sont positifs, il en va donc de même pour  $a$ , et donc

$$\beta \geq 0.$$

Mais on a aussi  $(d - 1)(a + c) + a + c + db$  positif, par conséquent

$$\beta + \gamma \geq 0.$$

Commençons par régler le cas  $\beta = 0$  qui en fait n'est autre que le cas unidimensionnel vu que le mouvement brownien  $W$  est alors une matrice diagonale de mouvements browniens, tous égaux. Par conséquent, on obtient  $\lambda_1 = \gamma/2$  ([1], [4], [5]).

LEMME 6. – Dans le cas  $\beta \neq 0$ , il existe une unique constante  $\lambda_1$  telle qu'il existe une fonction  $f_0$  qui vérifie

$$(3) \quad L_0 f_0 = 0$$

et une fonction  $f_1$  solution de

$$(4) \quad L_0 f_1 = -L_1 f_0 + q_1 - \lambda_1,$$

avec en plus

$$L_1 f_1 \text{ borné.}$$

*Preuve.* – On va commencer par faire intervenir les variables

$$(r, s) \stackrel{(def)}{=} \left( \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_3}{x_1 + x_2} \right).$$

En effet le processus  $(r, s)$  est un processus de diffusion, et  $L_0$  s'exprime dans ces variables sous la forme,

$$L_0 f(r, s) = 2s f_r + (1 - 2r) f_s.$$

(où  $f_r$  et  $f_s$  désigne les dérivées partielles par rapport à  $r$  et  $s$ ).

*Remarque.* – les fonctions de  $r$  et  $s$  sont bien des fonctions définies sur la sphère projective, vu que ces variables sont homogènes et invariantes par changement de signe de la variable  $(X', V')$ . C'est d'ailleurs dans ces fonctions là que l'on choisira  $f_0$  et  $f_1$ .

On cherchera  $f_0$  parmi les fonctions de  $v \stackrel{(def)}{=} s^2 - r(1 - r)$ .

$$(v \in [-1/4, 0])$$

( $v = -1/4$  pour  $s = 0$  et  $r = 1/2$ , et  $v = 0$  pour  $X$  et  $V$  colinéaires.)

L'équation (3) est alors vérifiée.

Mais

$$q_1 = 2(\beta d + \gamma)r - 4\beta r(1 - r) - 4\gamma s^2,$$

et si l'on utilise l'expression de  $L_1$  dans les variables  $(x_1, x_2, x_3)$ , l'équation (4) devient

$$\begin{aligned} L_0 f_1 = & 2(\beta d + \gamma)(r(2s^2 + r - 2r(1 - r)))f_0'(v) \\ & + 16(\beta + \gamma)r s^2 f_0'(v) + 8(\beta + \gamma)r s^2 (2s^2 + r - 2r(1 - r))f_0''(v) \\ & - 4(\beta r(1 - r) + \gamma s^2)((6s^2 + 4r - 6r(1 - r))f_0' \\ & + (-2s^2 - r + 2r(1 - r))^2 f_0''(v)) \\ & - (\beta + \gamma)(2r^2 f_0'(v) + 4r^2 s^2 f_0''(v)) \\ & + q_1 - \lambda_1. \end{aligned}$$

Le problème de la résolution de cette équation va être transformé en plusieurs étapes, par linéarité de l'équation, en un problème équivalent de résolution d'une nouvelle équation où seule la variable  $v$  apparaîtra dans le second membre.

$$\begin{aligned} q_1(r, s) = & (\beta(2d - 1) + \gamma) \left( r - \frac{1}{2} \right) + 2(\beta + \gamma) \left( r^2 - s^2 - \frac{r}{2} \right) \\ & + 2(\beta - \gamma)v + \beta d + \frac{1}{2}(\gamma - \beta), \end{aligned}$$

et  $s$  et  $rs$  sont respectivement les solutions de  $L_0f = r - 1/2$  et de  $L_0f = r^2 - s^2 - r/2$ .

Vu la linéarité de l'équation précédente, la fonction

$$\hat{f}_1 = f_1 + (\beta(2d - 1) + \gamma)s/2 + (\beta + \gamma)rs$$

vérifie :

$$\begin{aligned} L_0\hat{f}_1 = & 2(\beta d + \gamma)((-2rv - r^2)f'(v)) \\ & - 16(\beta + \gamma)rs^2f'(v) + 8(\beta + \gamma)rs^2(-2v - r)f''(v) \\ & + 4((\beta + \gamma)s^2 - \beta v)((6v + 4r)f'(v) + (2v + 4r)^2f''(v)) \\ & + (\beta + \gamma)(2r^2f'(v) + 4r^2s^2f''(v)) \\ & + 2(\beta - \gamma)v + \beta d + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) - \lambda_1. \end{aligned}$$

On remarque de plus qu'étant données 2 fonctions de  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $f$  et  $g$ , et une fonction de  $v$ ,  $h$ , si  $f$  vérifie  $L_0f = g$ , alors  $fh(v)$  vérifie  $L_0(fh(v)) = gh(v)$ . En particulier  $L_0(sh(v)) = (1 - 2r)h(v)$ .

Ainsi par le même raisonnement que celui transformant le problème sur  $f_1$  en un problème sur  $\hat{f}_1$ , on constate que l'on peut remplacer les termes du second membre où "2r" précède une fonction de  $v$ , en des termes où cette fois, "1" précède la même fonction de  $v$ .

Dans cette même idée on peut faire un tableau des correspondances entre fonction de  $(r, s)$  et fonctions de  $v$  qui donne entre autres :

$2r$	1
$4r^2 - 3r$	$2v$
$4r^2$	$2v + 3/2$
$-6rs^2 + 3s^2$	0
$4s^2 - r$	$2v$
$4s^2$	$2v + 1/2$
$8rs^2$	$2v + 1/2$

(En effet

$$L_0(-rs) = 4r^2 - 3r - 2v,$$

$$L_0(s^3) = -6rs^2 + 3s^2,$$

$$L_0(rs) = 4s^2 - r - 2v.)$$

On est donc ramené à considérer l'équation

$$\begin{aligned} L_0 f_1 &= v \left( v + \frac{1}{4} \right) (8(\gamma - \beta)v - 6\beta) f''(v) \\ &+ \left( \left( v + \frac{1}{4} \right) ((-3d+1)\beta - 2\gamma + 12(\gamma - \beta)v) + \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - 2\beta v \right) f'(v) \\ &+ 2(\beta - \gamma)v + \beta d + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) - \lambda_1. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de trouver un réel  $\lambda_1$  tel que l'équation (en  $f$ )

$$\begin{aligned} &v \left( v + \frac{1}{4} \right) (8(\gamma - \beta)v - 6\beta) f''(v) \\ &+ \left( \left( v + \frac{1}{4} \right) ((-3d+1)\beta - 2\gamma + 12(\gamma - \beta)v) + \frac{1}{2}(\beta + \gamma) - 2\beta v \right) f'(v) \\ &+ 2(\beta - \gamma)v + \beta d + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) - \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

ait une solution bornée à dérivées bornées sur  $[-1/4, 0]$ .

On remarque déjà que si  $\beta = \gamma$ , en prenant  $f = 0$  on résoud le problème en choisissant  $\lambda_1 = \beta d + \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \beta d$ .

Désormais on se limitera au cas  $\beta \neq \gamma$ . Posons

$$A(v) = 8(\gamma - \beta)v - 6\beta$$

$$B(v) = 12(\gamma - \beta)v^2 + ((\gamma + \beta) - 3(d+1)\beta) - \frac{3(d-1)}{4}\beta.$$

et

$$v_0 = \frac{3\beta}{4(\gamma - \beta)},$$

alors  $v_0 \notin [-\frac{1}{4}; 0]$  (en effet  $\beta > 0$  et  $\beta + \gamma \geq 0$ )

et  $A(v) = 8(\gamma - \beta)(v - v_0)$ .

On est donc ramené à l'étude de l'équation,

$$v \left( v + \frac{1}{4} \right) f'' + g(v) f' = \frac{v - \lambda}{4(v - v_0)},$$

où

$$g(v) = \frac{B(v)}{A(v)}, \quad \text{et} \quad v \in \left[ -\frac{1}{4}; 0 \right],$$

et  $g(-1/4) = -1/4$ ,  $g(0) = (d-1)/8$ .



*Remarque.* – ici  $\lambda_1 = \beta d - 1/2(\beta - \gamma) + 2(\beta - \gamma)\lambda$ .

Mais alors  $f'$  s'écrit :

$$f'(\tilde{v}) = \exp \left( - \int_{x_0}^{\tilde{v}} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) \left( \int_{x_1}^{\tilde{v}} \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0) \left( v_1 + \frac{1}{4} \right)} \exp \left( \int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) dv_1 \right)$$

(où la valeur de  $x_0$  est indifférente et où  $f'$  décrit l'ensemble des solutions lorsque  $x_1$  décrit  $\mathbb{R}$ ). On cherche donc  $\lambda$  tel que  $f'$  et ses dérivées soient bornées au voisinage de 0 et de  $-1/4$ .

Commençons par l'étude au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \exp \left( - \int_{x_0}^{\tilde{v}} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) &= \tilde{v}^{-4g(0)} (a_0 + a_1 \tilde{v} + \dots) \\ &= \tilde{v}^{-\frac{d-1}{2}} (a_0 + a_1 \tilde{v} + \dots). \end{aligned}$$

Mais si l'on peut choisir  $x_1$  de sorte que

$$\int_{x_1}^0 \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0) \left( v_1 + \frac{1}{4} \right)} \exp \left( \int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) dv_1 = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{\tilde{v}} \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0) \left( v_1 + \frac{1}{4} \right)} \exp \left( \int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) dv_1 \\ = \tilde{v}^{-\frac{d-1}{2}} (b_0 + b_1 \tilde{v} + \dots) \end{aligned}$$

et  $f'$  est développable en série entière au voisinage de 0.

Une étude analogue au voisinage de  $v = -1/4$  montre que si l'on peut choisir  $x_1$  tel que l'on ait simultanément

$$\int_{x_1}^0 \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0) \left( v_1 + \frac{1}{4} \right)} \exp \left( \int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v \left( v + \frac{1}{4} \right)} dv \right) dv_1 = 0,$$

et

$$\int_{x_1}^{-1/4} \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0)\left(v_1 + \frac{1}{4}\right)} \exp\left(\int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v\left(v + \frac{1}{4}\right)} dv\right) dv_1 = 0,$$

alors  $f'$  sera développable en série entière sur l'intervalle  $[-1/4, 0]$  tout entier. Ceci est possible si et seulement si

$$\int_{-1/4}^0 \frac{(v_1 - \lambda)}{4v_1(v_1 - v_0)\left(v_1 + \frac{1}{4}\right)} \exp\left(\int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v\left(v + \frac{1}{4}\right)} dv\right) dv_1 = 0,$$

(en effet il suffit alors de prendre  $x_1 = 0$  ou  $-1/4$ ), ce qui détermine  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{\int_{-1/4}^0 \frac{1}{4(v_1 - v_0)\left(v_1 + \frac{1}{4}\right)} \exp\left(\int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v\left(v + \frac{1}{4}\right)} dv\right) dv_1}{\int_{-1/4}^0 \frac{1}{4v_1(v_1 - v_0)\left(v_1 + \frac{1}{4}\right)} \exp\left(\int_{x_0}^{v_1} \frac{g(v)}{v\left(v + \frac{1}{4}\right)} dv\right) dv_1}.$$

Mais  $g(v) = \frac{B(v)}{8(\gamma - \beta)(v - v_0)}$ , et  $d^\circ B < 3$ , on décompose  $\frac{g(v)}{v(v + 1/4)}$  en éléments simples, ce qui permet d'avoir la formule suivante :

$$\lambda = - \frac{\int_{-1/4}^0 |v - v_0|^{k-1} |v|^l \left|v + \frac{1}{4}\right|^{m-1} dv}{\int_{-1/4}^0 |v - v_0|^{k-1} |v|^{l-1} \left|v + \frac{1}{4}\right|^{m-1} dv}$$

où  $k, l, m \in \mathbb{R}$ . Le lemme est donc démontré, et la détermination de  $\lambda$  s'ensuit :

$$k = \frac{B(v_0)}{8(\gamma - \beta)v_0\left(v_0 + \frac{1}{4}\right)} = 1 - \frac{d}{2},$$

$$l = \frac{B(0)}{8(\gamma - \beta)\left(-v_0\right)\frac{1}{4}} = 4g(0) = \frac{d-1}{2},$$

$$m = \frac{B(-\frac{1}{4})}{8(\gamma - \beta)^{\frac{1}{4}} \left(v_0 + \frac{1}{4}\right)} = -4g\left(-\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Faisons le changement de variables  $v' = -4v$ , on obtient

$$\lambda = -\frac{1}{4} \frac{\int_0^1 \left(1 + \frac{v'}{4v_0}\right)^{-\frac{d}{2}} v'^{\frac{d-1}{2}} dv'}{\int_0^1 \left(1 + \frac{v'}{4v_0}\right)^{-\frac{d}{2}} v'^{\frac{d-3}{2}} dv'}.$$

On obtient une expression de  $\lambda$  en utilisant les fonctions hypergéométriques du type  ${}_1F_2(a, b, c, z)$ , [6] qui donnent l'expression :

$$\lambda = -\frac{(d-1)}{4(d+1)} \frac{{}_1F_2\left(\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}, \frac{d+3}{2}, \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)}{{}_1F_2\left(\frac{d}{2}, \frac{d-1}{2}, \frac{d+1}{2}, \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)}.$$

et

$$\lambda_1 = \beta d - \frac{1}{2}(\beta - \gamma) + 2(\beta - \gamma)\lambda.$$

L'exposant de Lyapounov presque sûr est donc égal à

$$\frac{\lambda_1}{2\tau} \epsilon^2 + O(\epsilon^4).$$

*Remarque.* – On retrouve le résultat connu en dimension 1, où l'exposant de Lyapounov vaut  $\sigma^2/8\tau$ , au deuxième ordre en  $\sigma$ . En effet, la formule du dessus donne  $\lambda_1 = (\beta + \gamma)/2$  soit  $(a' + b' + c')/4$ , or c'est  $a + b + c$  qui joue le rôle de la variance en dimension 1.

– On vérifie également que lorsque  $\beta \rightarrow 0$ , l'exposant converge vers celui annoncé au début du paragraphe pour la valeur  $\beta = 0$ , soit  $\gamma/2$ , une étude de  $\lambda$  sous sa forme intégrale donne en effet  $\lambda \rightarrow 0$ , pour  $\beta \rightarrow 0$ .

– On obtient un encadrement simple de l'exposant de Lyapounov; en effet,  $-1 \leq \lambda \leq 0$ , ce qui donne  $\beta d - |\beta - \gamma| \leq \lambda_1 \leq \beta d + |\beta - \gamma|$ . Cet encadrement peut s'obtenir de manière élégante par la méthode employée par M. Pinsky [9] dans l'étude de l'oscillateur de dimension 1.

– On vérifie également que  $\lambda_1 \geq 0$ , ce que l'on obtient directement par examen de la matrice  $A$ , qui définit le système non perturbé : la somme de tous les exposants de Lyapounov vaut  $\text{Trace}A$ , c'est-à-dire 0; on en conclut que le plus grand de ces exposants est positif.

## 5. UNE AUTRE PERTURBATION

### 5.1. Présentation du problème

On va s'intéresser maintenant au cas où la perturbation dépend linéairement de la vitesse, ceci modélise entre autres, le cas d'une perturbation magnétique d'un oscillateur harmonique de dimension 3.

On reprend la méthode utilisée dans le cas précédent.

On étudie le système :

$$\begin{cases} dX_t = V_t dt \\ dV_t = dW_t \cdot V_t - \tau X_t dt. \end{cases}$$

On commence par faire le changement de variables suivant :  $X' = X$ ,  $V' = V/\sqrt{\tau}$  qui transforme le système précédent en

$$\begin{cases} dX'_t = \sqrt{\tau} V'_t dt \\ dV'_t = dW_t \cdot V'_t - \sqrt{\tau} X'_t dt. \end{cases}$$

### 5.2. Étude du processus $U_t$

On va montrer là aussi l'unicité de la mesure invariante du processus normalisé. De même que dans le cas précédent, on distingue le cas général du cas symétrique et du cas antisymétrique. On ne traitera que le cas antisymétrique qui est le plus délicat. On doit vérifier dans le cas antisymétrique, que mis à part dans des cas très particuliers,

$$\dim Lie \left\{ A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & so_d(\mathbb{R}) \end{pmatrix} \right\} (z_1, z_2) = 2d,$$

mais l'algèbre de Lie contient également

$$\begin{pmatrix} so_d(\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient grâce à ces matrices les vecteurs  $(z_1, z_2)$ ,  $(0, z_2^\perp)$ ,  $(z_1^\perp, 0)$ ,  $(-z_2, z_1)$ . La situation est la même que dans le cas précédent à une inversion de  $z_1$  et  $z_2$  près. On obtient donc le résultat.

### 5.3. Présentation du calcul

Le processus  $Z' = (X', V')$  est un processus de diffusion de générateur  $L$  avec  $Lf(X', V')$  de la forme :

$$\left( \sum \sqrt{\tau} (V'_k \frac{\partial}{\partial X'_k} - X'_k \frac{\partial}{\partial V'_k}) + \frac{a}{2} \|V'\|^2 \frac{\partial^2}{\partial V_k'^2} + \frac{b+c}{2\tau} V'_k V'_l \frac{\partial^2}{\partial V_k' \partial V_l'} \right) f.$$

Si  $f$  est fonction de  $(x_1, x_2, x_3)$ , on a avec les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} Lf &= 2\sqrt{\tau}x_3(f_{x_1} - f_{x_2}) + \sqrt{\tau}(x_2 - x_1)f_{x_3} \\ &\quad + \epsilon^2\beta(x_2(2df_{x_2} + 4x_2f_{x_2}^2 + 4x_3f_{x_2x_3} + x_1f_{x_3}^2) \\ &\quad + \epsilon^2\gamma(4x_2^2f_{x_2}^2 + 4x_2x_3f_{x_2x_3} + x_3^2f_{x_3}^2 + 2x_2f_{x_2}) \\ &= 2\sqrt{\tau}x_3(f_{x_1} - f_{x_2}) + \sqrt{\tau}(x_2 - x_1)f_{x_3} \\ &\quad + \epsilon^2(2(\beta d + \gamma)x_2f_{x_2} + 4(\beta + \gamma)x_2^2f_{x_2}^2 \\ &\quad + 4(\beta + \gamma)x_2x_3f_{x_2x_3} + (\beta x_1x_2 + \gamma x_3^2)f_{x_3}^2) \\ &\stackrel{def}{=} (L_0 + \epsilon^2L_1)f. \end{aligned}$$

On applique comme précédemment la méthode perturbative :  $f_0$  vérifie toujours  $L_0f_0 = 0$ .

L'équation  $L_0f_1 = -L_1f_0 + q_1 - \lambda_1$  s'écrit, (où  $q_1(x_1, x_2, x_3) = L_1(\ln(x_1 + x_2)) = 2(\beta d + \gamma)(1 - r) - 4(\beta + \gamma)(1 - r)^2$ ) :

$$\begin{aligned} L_0f_1 &= 2(\beta d + \gamma)(1 - r)(2v + r)f' \\ &\quad - 4(\beta + \gamma)(1 - r)^2((6v + 4r)f' + (2v + r)^2f'') \\ &\quad + 16(\beta + \gamma)(1 - r)s^2f' + 8(\beta + \gamma)(1 - r)s^2(2v + r)f'' \\ &\quad + (\beta v - (\beta + \gamma)s^2)(2f' + 4s^2f'') - 2(\beta + \gamma)(v - \lambda). \end{aligned}$$

(on a noté  $\lambda_1 = (\beta d + \gamma) - \frac{3}{2}(\beta + \gamma) - 2(\beta + \gamma)\lambda$ ). On rappelle en les complétant les correspondances utilisées au paragraphe précédent entre fonctions de  $r$  et  $s$  et fonctions de la seule variable  $v$  :

$2r$	1
$4r^2 - 3r$	$2v$
$-6rs^2 + 3s^2$	0
$4s^2 - r$	$2v$
$4s^2$	$2v + \frac{1}{2}$
$8rs^2$	$2v + \frac{1}{2}$
$2r^3$	$\frac{3}{2}v + \frac{5}{8}$
$8r^2s^2$	$\left(v + \frac{1}{4}\right)\left(v + \frac{5}{4}\right)$
$2s^4$	$\frac{3}{4}\left(v + \frac{1}{4}\right)^2$
$r^4 = r^2(v - s^2 + r)$	$\frac{1}{2}\left(v + \frac{3}{4}\right)v - \frac{1}{8}\left(v + \frac{1}{4}\right)\left(v + \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}v + \frac{5}{16}$ .

Le traitement de l'équation précédente mène à l'étude de l'équation suivante (en  $v$  uniquement) :

$$v\left(v + \frac{1}{4}\right)f'' + \frac{(bd + \gamma)\left(v + \frac{1}{4}\right) - (\beta + \gamma)\left(12v^2 + 2v + \frac{1}{4}\right) + 2\beta v}{-8(\beta + \gamma)v + 2\beta}$$

$$= \frac{-(v - \lambda)}{a(v - v_0)}$$

où  $v_0 = \frac{\beta}{4(\beta + \gamma)}$ .

On trouve finalement,

$$\lambda = -\frac{(d-1) {}_1F_2\left(\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}, \frac{d+3}{2}, -1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}{4(d+1) {}_1F_2\left(\frac{d}{2}, \frac{d-1}{2}, \frac{d+1}{2}, -1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)}$$

et

$$\lambda_1 = \beta d + \gamma - \frac{3}{2}(\beta + \gamma) - 2(\beta + \gamma)\lambda.$$

*Remarque.* – Ce dernier résultat dans le cas  $\beta = -\gamma$  traite de la situation d'un oscillateur de dimension 3 perturbé par un champ magnétique dont

les trois composantes suivant les axes d'un repère orthonormé sont des bruits blancs indépendants et de même loi. On obtient alors  $\lambda_1 = 2\beta$  qui est strictement positif ce qui implique qu'une telle perturbation rend le système instable.

## RÉFÉRENCES

- [1] L. ARNOLD, G. PAPANICOLAOU and V. WIHSTUTZ, Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and applications, *SIAM Journal Appl. Math.*, Vol. **46**, 1986, p. 427-449.
- [2] E. I. AUSLENDER and G. N. MIL'SHTEIN, Lyapunov expansions of the Lyapunov index for linear stochastic systems with small noise, *Prikl. Math. Mekh.*, Vol. **46**, 1982, p. 358-365. En Russe. *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, p. 277-283. En Anglais.
- [3] N. ENRIQUEZ, Effet d'un bruit blanc sur l'oscillateur harmonique de dimension  $d$ , *Note au CRAS*, 1994.
- [4] G. B. GUREVITCH, Foundations of the theory of algebraic invariants, Groningen: Noordhoff, 1964.
- [5] Y. LE JAN, On isotropic brownian motion, *ZfW*, Vol. **70**, 1985, p. 609-620.
- [6] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and R. P. SONI, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, Springer-Verlag, New-York Inc., 1966, Chap 2.
- [7] OSELEDEC, A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical system, *Trans. Moscow Math. Soc.*, Vol. **19**, 1968, p. 197-230.
- [8] E. PARDOUX and V. WIHSTUTZ, Lyapunov exponent and rotation number of two-dimensional linear stochastic systems with small diffusion noise, *SIAM Journal Appl. Math.*, Vol. **48**, 1988, p. 442-457.
- [9] M. PINSKY, Extremal character of the Lyapunov exponent of the stochastic harmonic oscillator, *Annals of Appl. Prob.*, Vol. **2**, 1992, p. 942-950.
- [10] M. PINSKY and V. WIHSTUTZ, Lyapunov exponents of nilpotent Itô systems, *Stochastics*, Vol. **25**, 1988, p. 43-57.

(Manuscrit accepté le 2 janvier 1995.)