ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. TOUATI

Vitesse de convergence en loi de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle autorégressif (Cas mixte)

Annales de l'I. H. P., section B, tome 32, nº 2 (1996), p. 211-230

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1996__32_2_211_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 32, n° 2, 1996, p. 211-230 *Probabilités et Statistiques*

Vitesse de convergence en loi de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle autorégressif (Cas mixte)

par

A. TOUATI

Université de Paris-Sud, U.A. 743, C.N.R.S., Statistique Appliquée Mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France ou Faculté des Sciences de Bizerte, Tunisie.

RÉSUMÉ. – Pour un processus autorégressif vectoriel, dont le polynôme caractéristique n'a pas de racine sur le cercle unité, on montre la convergence en loi de l'estimateur des moindres carrés – convenablement centré et normalisé – vers un mélange de matrices aléatoires non gaussiennes en général.

ABSTRACT. – For a vector autoregressive process such that the roots of its characteristic polynomial do not lie on the unit circle, we show the convergence in law of the least squares estimate – suitably centred and normalized – to a mixture of random matrices which are not Gaussian in general.

0. INTRODUCTION

Ce travail présente une partie d'une étude générale consacrée au comportement asymptotique en loi de l'estimateur des moindres carrés (M.C. en abrégé) d'un modèle autorégressif p-dimensionnel d'ordre 1 ($AR_p(1)$ en abrégé), dont le « bruit » est une suite de v.a. i.i.d. centrées et de covariance non nécessairement inversible.

Cette étude vient compléter les résultats obtenus dans [4] sur le comportement asymptotique presque sûr d'un tel estimateur, notamment sa consistance forte et sa vitesse de convergence presque sûre.

On s'intéresse ici au cas mixte où la matrice du modèle n'a pas de valeurs propres sur le cercle unité. La situation générale est examinée dans [9]. Le résultat principal de cet article assure, que dans le cas envisagé, l'estimateur M.C. – convenablement centré et normalisé – converge en loi vers un mélange de matrices aléatoires. Sa démonstration repose sur la méthode de la fonction caractéristique conditionnelle résumée dans l'énoncé du théorème A, &-2.

Dans la littérature abondante sur la statistique des processus autorégressifs, très peu de travaux ont été consacrés au comportement asymptotique en loi de l'estimateur M.C. d'un processus $\mathrm{AR}_p(1)$. Ce comportement est seulement bien connu dans le cas stable où les valeurs propres de la matrice du modèle sont à l'intérieur strict du cercle unité (voir rappel &-3). Dans les autres cas, notamment le cas explosif où les valeurs propres de la matrice du modèle sont à l'extérieur strict du cercle unité, les résultats antérieurs sont tout à fait partiels (*cf.* [1], [6], [10], ...).

Récemment, Chan et Wei ont étudié d'une manière exhaustive dans [3], la convergence en loi de l'estimateur M.C. d'un modèle autorégressif réel d'ordre p (AR(p) en abrégé). Mais leur approche est inadaptée au cas du modèle $\mathrm{AR}_p(1)$ (*cf.* [9]).

La suite de l'article est organisée de la façon suivante : au paragraphe 1, on précise les notations et les hypothèses adoptées. Aux paragraphes 2 et 3, on étudie la convergence en loi de l'estimateur M.C. respectivement dans le cas explosif et dans le cas mixte.

1. NOTATIONS. DÉFINITIONS

Désormais, $Y = (Y_n;\ n \in \mathbf{N})$ désigne un processus autorégressif p-dimensionnel d'ordre 1 ($\mathrm{AR}_p(1)$) défini par l'équation de récurrence :

$$Y_n = A\,Y_{n-1} + e_n; \qquad n \geq 1 \tag{1.1}$$

et la donnée sur un espace de probabilité $(\Omega,\ F,\ \mathbf{P})$, d'une suite $(e_n;\ n \geq 1)$ de variables indépendantes équidistribuées (i.i.d.) et d'une v.a. Y_0 indépendante de la suite $(e_n;\ n \geq 1)$. On suppose que la v.a. e_1 est centrée, que les v.a. e_1, Y_0 sont de carré intégrable et on note :

$$K_e = \mathbf{E}\,\{e_1,\ e_1^{'}\}, \qquad K_{Y_0} = \mathbf{E}\,\{Y_0,\ Y_0'\}$$

(u' désigne le transposé du vecteur u).

DÉFINITION 1. – *Le modèle* $\mathrm{AR}_p(1)$ *défini par* (1.1) *est dit « commandable » si la matrice* $C_n = \sum_0^n A^k K_e (A^k)'$ *est inversible pour* n *assez grand.*

Remarque 1. – Pour $n > d$, la matrice C_n est inversible si, et seulement si, la matrice C_{d-1} l'est, d étant le degré du polynôme minimal de A. L'hypothèse de commandabilité signifie que pour tout $n > d$, la loi de la v.a. Y_n n'est pas concentrée sur un hyperplan de $\mathbf{R}^p$.

Lorsque A est inversible, cette hypothèse équivaut à dire que $\sum_1^d A^{-k} K_e (A^{-k})'$ est inversible.

DÉFINITION 2. – *Le modèle* $\mathrm{AR}_p(1)$ *défini par* (1.1) *est dit « régulier » si* A *n'a pas de valeur propre de module strictement supérieur à* 1, *associée à un sous-espace propre de dimension supérieure ou égale à* 2. *Il est dit « singulier » dans le cas contraire.*

D'après [4], les hypothèses de commandabilité et de régularité apparaissent incontournables pour l'obtention de la consistance forte de l'estimateur M.C.

DÉFINITION 3. – *Le modèle* $\mathrm{AR}_p(1)$ *défini par* (1.1) *est dit « stable »* [resp. *« explosif »*], *si les valeurs prores de* A *sont à l'intérieur* [resp. *à l'extérieur*] *strict du cercle unité. Il est dit « mixte », si* A *a des valeurs propres à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, mais n'a pas de valeur propre sur le cercle unité.*

Dans le cas explosif, la décomposition de Jordan de la matrice A, permet de voir que l'hypothèse de régularité équivaut à dire : les polynômes minimal et caractéristique de A ont le même degré.

Un cas particulier important de ce modèle, est fourni par le modèle autorégressif réel d'ordre p (AR(p)) défini par l'équation de récurrence :

$$y_n = \theta_1 y_{n-1} + \cdots + \theta_p y_{n-p} + \varepsilon_n; \qquad n \geq 1 \tag{1.2}$$

où $y_0, \ldots, y_{-p+1}$ sont p variables aléatoires réelles de carré intégrable et $(\varepsilon_n;\ n \geq 1)$ est une suite de variables alaétoires réelles i.i.d. indépendantes de $(y_0, \ldots, y_{-p+1})$, de moyenne nulle et de variance σ^2.

Posons : $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$; $Y_n' = (y_n, , y_{n-1}, \ldots, y_{n-p+1})$; $A = \begin{bmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_{p-1} & \theta_p \\ I_{p-1} & & & 0 \end{bmatrix}$ (I_q = matrice identité de taille q); $e_n' = (\varepsilon_n, 0, \ldots, 0)$; alors l'équation (1.2) s'écrit sous la forme matricielle :

$$Y_n = A Y_{n-1} + e_n \tag{1.3}$$

Dans la suite, on dira que $(Y_n;\ n \in \mathbf{N})$ défini par (1.3) est le processus $\mathrm{AR}_p(1)$ associé au processus AR(p) défini par (1.2).

Remarque 2. – Le polynôme minimal de la matrice A du processus $\mathrm{AR}_p(1)$ défini par (1.3) est égal à son polynôme caractéristique : $P(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \cdots - \theta_p$. Donc ce processus est toujours régulier. Par ailleurs, si $v_1 = (1, 0, \ldots, 0)'$, la matrice de vecteurs colonnes $(v_1, A v_1, \ldots, A^{p-1} v_1)$ est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux valent tous 1. Il en résulte que le processus $\mathrm{AR}_p(1)$ défini par (1.3) est commandable, si, et seulement si, $\sigma > 0$, car dans ce cas :

$$C_{p-1} = \sum_0^{p-1} A^k K_e (A^k)' = \sigma^2 \sum_0^{p-1} A^k v_1 v_1' (A^k)'.$$

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à M. Duflo, à J. Bretagnolle et au referee pour les corrections qu'ils m'ont signalées dans la première version de ce travail.

2. VITESSE DE CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR M.C. DANS LE CAS EXPLOSIF

Dans ce paragraphe, on se propose de donner la vitesse de convergence de l'estimateur M.C. du modèle $\mathrm{AR}_p(1)$ défini par (1.1), lorsque son polynôme caractéristique a toutes ses racines à l'extérieur strict du cercle unité. Pour cela nous avons besoin d'un théorème de convergence en loi relatif aux tableaux triangulaires non asymptotiquement négligeables, établi dans [8], dont une variante est la suivante.

THÉORÈME A. – *Soit* $(\Omega,\ F,\ \mathbf{P})$ *un espace de probabilité muni d'une suite de filtrations* $\{(F_{n,k};\ k \in N);\ n \in \mathbf{N}^*\}$ *telles que* $F_{n,0} = \{\emptyset,\ \Omega\}$ *et pour tout* $(n,\ k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$: $F_{n,k} \subset F_{n+1,k}$ *sur lequel on suppose données :*

– une suite double $\{(\xi_{n,k});\ (n,\ k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*\}$, *telle que* $\xi_{n,k}$ *soit* $F_{n,k}$*-mesurable et à valeurs dans* $\mathbf{R}^d$;

– une suite $(\nu_n;\ n \in \mathbf{N}^*)$ *telle que pour tout* n, ν_n *soit un* F_n*-temps d'arrêt, croissant vers* $+\infty$, *lorsque* $n \uparrow \infty$;

– une v.a. η *à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie* $\mathcal{X}$

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1) *Pour tout* $k \in \mathbf{N}^*$: $\xi_{n,k} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbf{P}} 0.$

2) *Il existe une probabilité* $\mathbf{Q}$ *sur l'espace* $C = C(\mathcal{X},\ \mathbf{R}^d)$ *des fonctions continues de* $\mathcal{X}$ *dans* $\mathbf{R}^d$*, telle qu'en posant :*

$$\varphi(u,\ x) = \int_C \exp(i\langle u,\ f(x)\rangle)\, d\,\mathbf{Q}(f); \qquad u \in \mathbf{R}^d, \quad x \in \mathcal{X},$$

on ait, quel que soit $u \in \mathbf{R}^d$ *:*

$$\pi_1^{\nu_n}\, \mathbf{E}\{\exp(i\langle u,\ \xi_{n,k}\rangle)/F_{n,k-1}\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbf{P}} \varphi(u,\ \eta).$$

Alors la suite $\left(\sum_1^{\nu_n} \xi_{n,k}\right)$ *est tendue. En outre, si* $|\varphi(u,\ \eta)| > 0$ $\lambda \otimes \mathbf{P}$ *p.s.* (λ *mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^d$), *alors pour un processus* $\Sigma = (\Sigma(x);\ x \in \mathcal{X})$ *de loi* $\mathbf{Q}$ *indépendant de* F (*donc de* η), $\left(\sum_1^{\nu_n} \xi_{n,k}\right)$ *converge en loi de manière stable vers* $\Sigma(\eta)$, *à savoir : pour toute v.a.* ζ *sur* $(\Omega,\ F)$, $\left(\zeta,\ \sum_1^{\nu_n} \xi_{n,k}\right) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} (\zeta,\ \Sigma(\eta))$.

Par application du théorème A, on obtient :

THÉORÈME 1. – *Soit* $Y_n = A\,Y_{n-1} + e_n$ $(n \geq 1)$, *le processus* $AR_p(1)$ *défini par* (1.1). *S'il est commandable et explosif, alors on a les résultats suivants :*

1) $A^{-n}\,Y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} Y_0 + \sum_1^{\infty} A^{-k}\,e_k = \eta$, *presque sûrement et en moyenne quadratique. De plus, pour tout* $x \in \mathbf{R}^p\backslash\{0\}$, *la distribution de la v.a.* $\langle x,\ \eta\rangle$ *est diffuse.*

2) *Si* $G = \sum_1^{\infty} A^{-k}\,\eta\,\eta'\,(A^{-k})'$, $G = A^{-n}\left(\sum_0^{n-1} Y_k,\ Y_k'\right)(A^{-n})'$, *on a :* $G_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} G$ *presque sûrement et en moyenne d'ordre* 1. *De plus,* G *est p.s. de rang* d *où* d *est le degré du polynôme minimal de* A.

3) *L'estimateur M.C.* $\hat{A}_n$ *de* A *est fortement consistant dans le cas régulier; il peut ne pas l'être dans le cas singulier.*

4) *La suite* $\left((\hat{A}_n - A)\left(\sum_0^{n-1} Y_k,\ Y_k'\right)(A^{-n})'\right)$ *est toujours tendue. En outre, dès que l'ensemble des zéros de la fonction caractéristique des v.a.* (e_k) *est au plus dénombrable :*

$$(\hat{A}_n - A)\left(\sum_0^{n-1} Y_k,\ Y_k'\right)(A^{-n})' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H'$$

où $H = \sum_1^\infty A^{-k}\,\eta\,\bar{e}'_k$ *et* $(\bar{e}_k;\ k \geq 1)$ *est une suite indépendante de* $(Y_n;\ n \in \mathbf{N})$ *(donc de* η *et* G*) et de même loi que* $(e_n;\ n \geq 1)$. *En conséquence*

$$(\hat{A}_n - A)\,A^n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H'\,G^{-1}$$

si, et seulement si, le processus (Y_n) *est régulier (i.e.* G *est p.s. inversible).*

La v.a. H *est centrée, de covariance* $K_H = K_e \otimes \sum_1^\infty A^{-k}\,K_\eta\,(A^{-k})'$ *où* $K_\eta = K_{Y_0} + \sum_1^\infty A^{-k}\,K_e\,(A^{-k})'$ *est la covariance de* η.

Dans les énoncés ci-dessus, $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ dénote le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^p$ et $\otimes$ le produit tensoriel.

Démonstration du théorème 1 :

Les parties 1), 2) et 3) du théorème 1 sont établies dans [4]. Montrons la partie 4). L'estimateur M.C. $\hat{A}_n$ de A vérifie :

$$(\hat{A}_n - A)\sum_0^{n-1} Y_k,\ Y'_k = \left(\sum_0^{n-1} Y_k,\ e'_{k+1}\right)'$$

d'où, en posant, $H_n = A^{-n}\sum_0^{n-1} Y_k,\ e'_{k+1}$

$$(2.1)\qquad (\hat{A}_n - A)\,A^n\,G_n = (\hat{A}_n - A)\left(\sum_0^{n-1} Y_k,\ Y'_k\right)(A^{-n})' = H'_n.$$

Remarquons maintenant que $M_n = \left(\sum_0^{m-1} A^{-n}\,Y_k,\ e'_{k+1};\ m \in \mathbf{N}^*\right)$ est une martingale centrée, de carré intégrable, à valeurs dans les matrices $p \times p$ et de variation quadratique prévisible :

$$\langle M_n\rangle\,(m) = K_e \otimes \left[A^{-n}\left(\sum_0^{m-1} Y_k\,Y'_k\right)(A^{-n})'\right].$$

Par suite on a :

$$M_n\,(n) = H_n, \qquad \langle M_n\rangle\,(n) = K_e \otimes G_n.$$

Pour étudier la convergence en loi de (H_n), il suffit d'étudier la convergence en loi de la suite $(\tilde{H}_n\,(u_1,\,\ldots,\,u_p))$ définie par :

$$\tilde{H}_n\,(u_1,\,\ldots,\,u_p) = \sum_{j=1}^{p}\langle u_j,\ H_n\,v_j\rangle = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j,\ A^{-n}\,Y_k\rangle\,\langle e_{k+1},\ v_j\rangle\right)$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont p vecteurs quelconques de $\mathbf{R}^p$, $(v_1, \ldots, v_p)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^p$. Posons :

$$\xi_{n,k} = \sum_{j=1}^{p} \langle u_j, A^{-n} Y_k \rangle \langle e_{k+1}, v_j \rangle,$$

$$\psi_n(u_1, \ldots, u_p) = \pi_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}\{\exp(i\,\xi_{n,k})/F_k\}$$

où F_k est la tribu engendrée par Y_0 et $e_1, \ldots, e_k$ si $k \geq 1$ et F_0 est celle engendrée par Y_0.

Si φ_e est la fonction caractéristique commune des (e_k), alors on a :

$$\psi_n(u_1, \ldots, u_p) = \pi_{k=0}^{n-1} \varphi_e(\langle u_1, A^{-n} Y_k \rangle, \ldots, \langle u_p, A^{-n} Y_k \rangle).$$

D'autre part, posant pour tout $x \in \mathbf{R}^p$:

$$\varphi_n(u_1, \ldots, u_p; x) = \pi_{k=0}^{n-1} \varphi_e(\langle u_1, A^{-(n-k)} x \rangle, \ldots, \langle u_p, A^{-(n-k)} x \rangle)$$

il vient :

$$\begin{aligned} &|\psi_n(u_1, \ldots, u_p) - \varphi_n(u_1, \ldots, u_p; \eta)| \\ &\leq \sum_{0}^{n-1} |\varphi_e(\langle u_1, A^{-(n-k)} A^{-k} Y_k \rangle, \ldots, \langle u_p, A^{-(n-k)} A^{-k} Y_k \rangle) \\ &\qquad - \varphi_e(\langle u_1, A^{-(n-k)} \eta \rangle, \ldots, \langle u_p, A^{-(n-k)} \eta \rangle)| \\ &\leq \mathbf{E}\{|e_1|\} \sum_{0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{p} \langle u_j, A^{-(n-k)} (A^{-k} Y_k - \eta) \rangle^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

car $|\varphi_e(u) - \varphi_e(v)| \leq \mathbf{E}\{|e_1|\}\,|u - v|$, pour tous u, v dans $\mathbf{R}^p$. Par suite, si $\rho_k = ||A^{-k}||$:

$$\begin{aligned} &|\psi_n(u_1, \ldots, u_p) - \varphi_n(u_1, \ldots, u_p; \eta)| \\ &\qquad \leq \sqrt{p}\,\mathbf{E}\{|e_1|\} \sum_{j=1}^{p} |u_j| \sum_{0}^{n-1} \rho_{n-k}\, |A^{-k} Y_k - \eta|. \end{aligned}$$

Comme d'après 1) : $A^{-k} Y_k \to \eta$ p.s. et $\Sigma\,\rho_n < \infty$, il en résulte que p.s. :

$$(2.2) \qquad |\psi_n(u_1, \ldots, u_p) - \varphi_n(u_1, \ldots, u_p; \eta)| \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} 0.$$

Montrons maintenant que

$$(2.3) \qquad \varphi_n(u_1, \ldots, u_p; x) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \varphi(u_1, \ldots, u_p; x)$$

où $\varphi(u_1, \ldots, u_p; x)$ est la fonction caractéristique au point 1 de la série aléatoire convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A^{-k}x\rangle\langle e_k, v_j\rangle\right)$. En effet, notant pour $x \in \mathbf{R}^p$:

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A^{-(n-k)}x\rangle\langle e_{k+1}, v_j\rangle\right)$$

on voit que : $\varphi(u_1, \ldots u_p; x) = \mathbf{E}\{\exp(i N_n(x))\}$. Par ailleurs, la v.a. $N_n(x)$ a même loi que la v.a. :

$$\overline{N}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A^{-k}x\rangle\langle e_{k+1}, v_j\rangle\right)$$

et on a :

$$\mathbf{E}\{(\overline{N}_m(x) - \overline{N}_n(x))^2\} \leq p\,|x|^2 \operatorname{trace}(K_e)\sum_{j=1}^{p}|u_j|^2\sum_{n+1}^{m}\rho_k^2$$

$(m > n)$. Par conséquent :

$$N_n(x) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A^{-k}x\rangle\langle e_k, v_j\rangle\right)$$

d'où (2.3). Compte tenu de (2.2), p.s. :

$$\psi_n(u_1, \ldots, u_p) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \varphi(u_1, \ldots, u_p; \eta)$$

Les hypothèses 1), 2) et 3) du théorème A, sont manifestement vérifiées, on peut donc affirmer que pour tous vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathbf{R}^p$, la suite $(\tilde{H}_n(u_1, \ldots, u_p))$ est tendue; donc la suite (H_n) est tendue. Par ailleurs, la relation évidente suivante, valable pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}&\varphi(u_1, \ldots, u_p; x)\\ &\quad = \pi_{l=1}^{k}\varphi_e(\langle u_1, A^{-l}x\rangle, \ldots, \langle u_p, A^{-l}x\rangle)\cdot\varphi(u_1, \ldots, u_p; A^{-k}x)\end{aligned}$$

et le fait que l'ensemble des zéros de φ_e est au plus dénombrable, impliquent $\varphi(u_1, \ldots u_p; \eta) \neq 0\,\mathbf{P}$ p.s., car la loi de η ne charge pas les hyperplans, affines de $\mathbf{R}^p$. La dernière partie du théorème A, implique alors que pour tous $u_1, \ldots, u_p$ de $\mathbf{R}^p$:

$$\tilde{H}_n(u_1, \ldots, u_p) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} \tilde{H}(u_1, \ldots, u_p)$$

de manière stable où $\tilde{H}(u_1, \ldots, u_p) = \Sigma(u_1, \ldots, u_p; \eta)$ et $(\Sigma(u_1, \ldots, u_p; x);\ x \in \mathbf{R}^p)$ est un processus indépendant de F (donc de η et G) et de même loi que le processus

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A^{-k}x\rangle\langle e_k, v_j\rangle\right)\right)$$

Autrement dit :

$$(H_n, G_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} (H, G) \tag{2.4}$$

où $H = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}\,\eta\,\bar{e}_k'$ et $(\bar{e}_k; k \geq 1)$ est une suite indépendante du processus $(Y_n;\ n \in \mathbf{N})$ (donc de η et G) et de même loi que $(e_k;\ k \geq 1)$.

Vu (2.1) et (2.4), on a :

$$(\hat{A}_n - A)\left(\sum_{0}^{n-1} Y_k Y_k'\right)(A^{-n})' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H'$$

et

$$(\hat{A}_n - A)\,A^n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H'\,G^{-1}$$

si et seulement si, le polynôme minimal de A est de degré p (i.e. le processus (Y_n) est régulier). La dernière affirmation du théorème est évidente. □

Remarque 3. – Supposons que Y_0 suit la loi normale $N_p(m_{Y_0}, K_{Y_0})$ et que la loi des (e_k) est $N_p(O, K_e)$. Alors :

– η suit la loi $N_p(m_{Y_0}, K_\eta)$; $\left(K_\eta = K_{Y_0} + \sum_{1}^{+\infty} A^{-k}K_e(A^{-k})'\right)$.

– Conditionnellement à $\eta = x$, H suit la loi $N_{p^2}(O, K(x))$ avec $K(x) = K_e \otimes \sum_{1}^{+\infty} A^{-k}xx'(A^{-k})'$.

– On peut expliciter la fonction caractéristique de la v.a. G car $\eta\eta'$ suit une loi de Whishart décentrée à 1 degré de liberté.

Remarque 4. – Pour un processus AR(1) : $Y_n = \theta\, Y_{n-1} + \varepsilon_n\ (n \geq 1)$, tel que $|\theta| > 1$, $Y_0 = 0$ et la loi commune des (ε_n) soit la loi $N\,(O,\ \sigma^2)$, on retrouve les résultats classiques suivants (*cf.* [1], [6], [10]) :

– $\theta^n\,(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} (\theta^2 - 1)\,C$ où C est une v.a. suivant la loi de Cauchy de paramètre 1.

– $\left(\sum_0^{n-1} Y_k^2\right)^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} N$ où N est une v.a. suivant la loi $N\,(0,\ 1)$.

3. VITESSE DE CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR M.C. DANS LE CAS MIXTE

Dans ce paragraphe, on se propose de déterminer la vitesse de convergence de l'estimateur M.C. pour le modèle $\mathrm{AR}_p(1)$ (ou bien $\mathrm{AR}(p)$), lorsque son polynôme caractéristique a ses racines à l'intérieur ou bien à l'extérieur du cercle unité. Pour cela, nous aurons besoin de décomposer le modèle $\mathrm{AR}_p(1)$ (ou bien $\mathrm{AR}(p)$) en deux modèles autorégressifs dont un est explosif et l'autre est stable.

3.1. Décomposition des modèles $\mathrm{AR}_p(1)$ et $\mathrm{AR}(p)$

Considérons le modèle $\mathrm{AR}_p(1)$ défini par (1.1) et désignons par P (resp. Q) le polynôme caractéristique (resp. minimal) de A. On peut toujours écrire P (resp. Q) sous la forme :

$$P\,(z) = P_1\,(z) \cdot P_2\,(z); \qquad Q\,(z) = Q_1\,(z) \cdot Q_2\,(z) \tag{3.1}$$

où le polynôme P_1 (resp. Q_1) a toutes ses racines à l'intérieur ou bien sur le cercle unité, tandis que le polynôme P_2 (resp. Q_2) a toutes ses racines strictement à l'extérieur du cercle unité. Désormais, on supposera vérifiées les hypothèses suivantes :

$$d^0\,P_1 = r \geq 1; \qquad d^0\,P_2 = s \geq 1, \quad r + s = p \tag{3.2}$$

Vu que les racines complexes du polynôme Q interviennent par paire (la racine et sa conjuguée), il est toujours possible de trouver une matrice à coefficients réels $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$ régulière, telle que M_1 soit de taille $s \times p$,

M_2 soit de taille $r \times p$ et on ait :

$$MAM^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

où A_1 est une matrice $s \times s$ de polynôme caractéristique (resp. minimal) P_2 (resp. Q_2) et A_2 est une matrice $r \times r$ de polynôme caractéristique (resp. minimal) P_1 (resp. Q_1). (*Cf.* [4]).

Grâce à (3.3), on peut écrire :

$$MY_n = (MAM^{-1})\, MY_{n-1} + M\, e_n$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & Y_n \\ M_2 & Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & Y_{n-1} \\ M_2 & Y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & e_n \\ M_2 & e_n \end{bmatrix}$$

et posant pour $j = 1,\ 2$: $Y_n(j) = M_j\, Y_n$, on obtient :

$$Y_n(j) = A_j\, Y_{n-1}(j) + M_j\, e_n, \qquad n \geqq 1. \tag{3.4}$$

$(Y_n(1);\ n \geq 0)$ est un processus AR$_s$(1) explosif et $(Y_n(2);\ n \geq 0)$ est un processus AR$_r$(1) non explosif (i.e. P_1 n'a pas de racines à l'extérieur strict du cercle unité).

Dans le cas particulier du modèle AR(p) défini par (2.1) ou bien (1.3), on a :

$$P(z) = Q(z) = z^p - \theta_1\, z^{p-1} - \cdots - \theta_p.$$

De plus, si dans la décomposition (3.1) de P, on a :

$$P_1(z) = r^r + \alpha_1\, z^{r-1} + \cdots + \alpha_r; \qquad P_2(z) = z^s + \beta_1\, z^{s-1} + \cdots + \beta_s,$$

alors, les matrices M_1, M_2, A_1, A_2 définies par :

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} 1 & & \alpha_1 & \cdots & \alpha_r & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots & & \alpha_r & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 & \cdots & & & \alpha_r \end{bmatrix}_{s \times p}; \\ M_2 &= \begin{bmatrix} 1 & & \beta_1 & \cdots & \beta_s & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & 1 & \cdots & & \beta_s & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_s \end{bmatrix}_{r \times p}; \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \cdots & -\beta_{s-1} & -\beta_s \\ I_{s-1} & & & 0 \end{bmatrix}_{s\times s}; \\ \\ A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{r-1} & -\alpha_r \\ I_{r-1} & & & 0 \end{bmatrix}_{r\times r}; \end{cases}$$

vérifient (3.3) (*cf.* [5]). Dans ce cas, le système correspondant à (3.4) s'écrit :

$$\text{(3.7)} \qquad U_n = A_1 \, U_{n-1} + M_1 \, e_n; \qquad X_n = A_2 \, X_{n-1} + M_2 \, e_n$$

à condition de poser :

$$U_n = M_1 \, Y_n = (u_n, \, u_{n-1}, \, \ldots, \, u_{n-s+1})';$$
$$X_n = M_2 \, Y_n = (x_n, \, x_{n-1}, \, \ldots, \, x_{n-r+1})'$$

où $(u_n; \; n \geq 1)$ et $(x_n; \; n \geq 1)$ sont les processus autorégressifs AR(s) et AR(r) respectivement définis par :

$$u_n = -\beta_1 \, u_{n-1} \cdots - \beta_s \, u_{n-s} + \varepsilon_n; \qquad x_n = -\alpha_1 \, x_{n-1} - \cdots - \alpha_r \, x_{n-r} + \varepsilon_n$$

3.2. Rappels sur le cas stable

Pour la commodité du lecteur, rappelons le résultat classique suivant :

THÉORÈME B. – *Soit* $Y_n = A \, Y_{n-1} + e_n$, $n \geq 1$ *le processus* AR$_p(1)$ *défini par* (1.1). *S'il est commandable et stable, on a les résultats suivants :*

1) *Pour* $\eta = \sum_1^\infty A^{k-1} \, e_k$, $Y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} \eta$, *quelle que soit la loi de* Y_0.

2) *La chaîne de Markov* $(Y_n; \; n \in \mathbf{N})$ *est récurrente dans les ouverts chargés par la loi* μ *de* η, *qui est son unique distribution stationnaire.*

3) *La matrice* $G = \sum_0^\infty A^k \, K_e \, (A^k)'$ *est définie positive et* $G_n = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} Y_k \, Y_k' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} G$ $\mathbf{P}$ *p.s. En outre, on a une « loi des grands nombres » : pour toute fonction* f μ *p.s. continue et telle que* $|x|^{-2} f(x)$ *soit bornée sur* $\mathbf{R}^p$, $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f(Y_k) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \mu(f)$, *hors d'un ensemble* $\mathbf{P}$-*négligeable ne dépendant pas de* f.

4) *Si $\hat{A}_n$ est l'estimateur M.C. de A :*
– pour tous vecteurs x, y de $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{P}$ p.s. :

$$\limsup \sqrt{\frac{n}{2 \operatorname{Log} \operatorname{Log} n}}\, |x' (\hat{A}_n - A)\, y| = (x' K_e\, x)^{1/2} (y' G^{-1}\, y)^{1/2}$$

– $\{(\sqrt{n}\,(\hat{A}_{[nt]} - A);\, t \geq 0\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} \{W_t' G^{-1};\, t \geq 0\}$ *où W est un P.A.I. gaussien, à valeurs dans les matrices $p \times p$, centré, de covariance $K_e \otimes G$.*

Remarque 5. – Dans le cadre du théorème B, on peut affirmer qu'il existe $b > 0$, tel que pour tout $a \in]0,\, b]$, $\mathbf{P}\,\{|\eta| = a\} = 0$. Donc la fonction $x| \to |x|^2\, \mathbf{1}_{\{|x|>a\}}$ est μ p.s. continue pour tout $0 < a \leq b$ et la loi des grands nombres, implique :

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} |Y_k|^2\, \mathbf{1}_{\{|Y_k|>a\}} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \int |x|^2\, \mathbf{1}_{\{|x|>a\}}\, d\mu\,(x).$$

Grâce à ce résultat, il est aisé de voir que la martingale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{[nt]-1} Y_k\, e_{k+1}';\; t \geq 0 \right\}$$

vérifie la condition de Lindeberg ce qui est essentiel pour l'obtention de la fin de la partie 4) du théorème B et du théorème 2 suivant.

3.3. Propriétés de l'estimateur M.C. dans le cas mixte

THÉORÈME 2. – *Soit $Y_n = A\, Y_{n-1} + e_n$ le processus* $\mathrm{AR}_p(1)$ *défini par* (1.1). *On suppose qu'il est commandable et mixte. Alors, pour une matrice* $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$ *vérifiant* (3.3), *posant :*

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A_1^{-n} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{n}} I_r \end{bmatrix} M;$$

$$H_n = \Gamma_n \sum_0^{n-1} Y_k\, e_{k+1}' = \Gamma_n \left(\sum_0^{n-1} Y_k\, Y_k' \right) (\hat{A}_n - A)';$$

$G_n = \Gamma_n \left(\sum_0^{n-1} Y_k\, Y_k' \right) \Gamma_n'$, *on a les résultats suivants :*

1) $G_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} G$ **P** *p.s. où* $G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$, *avec :*

$$G_1 = \sum_1^\infty A_1^{-k}\,\eta_1\,\eta_1'\,(A_1^{-k})'\,;$$

$$\eta_1 = M_1\,Y_0 + \sum_1^\infty A_1^{-k}\,M_1\,e_k\,;$$

$$G_2 = \sum_1^\infty A_2^k\,M_2\,K_e\,M_2'\,(A_2^k)'.$$

De plus, G est **P** *p.s. définie positive si, et seulement si, (Y_n) est régulier.*

2) *Dans le cas régulier, l'estimateur M.C. de A est fortement consistant.*

3) *La suite (H_n) est toujours tendue et dès que l'ensemble des zéros de la fonction caractéristique des v.a. (e_n) est au plus dénombrable : $H_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H$ et la loi de $H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$ peut être décrite de la manière suivante : H_2 suit une loi normale $N_{r\times p}(O,\ K_e \otimes G_2)$; $H_1 = \sum_1^\infty A_1^{-k}\,\eta_1\,\bar{e}_k'$ où $(\bar{e}_k;\ k \geq 1)$ est une suite de même loi que $(e_k;\ k \geq 1)$ et telle que η_1, H_2 et $(\bar{e}_k;\ k \geq 1)$ soient indépendants. En conséquence dans le cas régulier : $(\hat{A}_n - A)\,\Gamma_n^{-1} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H'\,G^{-1}$.*

La transcription de ce théorème pour le modèle AR(p) est la suivante.

THÉORÈME 3. – *Soit $Y_n = \theta_1\,Y_{n-1} + \cdots + \theta_p\,Y_{n-1} + \varepsilon_n$, le processus* AR($p$) *défini par* (1.2) *et $Y_n = A\,Y_{n-1} + e_n$, $n \geq 1$, le processus* $\mathrm{AR}_p(1)$ *associé par* (1.3). *On suppose qu'il est mixte et que la variance des (ε_n) n'est pas nulle. Alors pour les matrices $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$, A_1, A_2 définies par* (3.5) *et* (3.6), *posant :*

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} A_1^{-n} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,I_r \end{bmatrix} M;$$

$$H_n = \Gamma_n \sum_0^{n-1} Y_k\,\varepsilon_{k+1} = \Gamma_n \left(\sum_0^{n-1} Y_k\,Y_k'\right)(\hat{\theta}_n - \theta);$$

$$G_n = \Gamma_n \left(\sum_0^{n-1} Y_k\,Y_k'\right)\Gamma_n'.$$

On a les résultats suivants :

1) $G_n \to G$ **P** *p.s. où* $G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$, *avec*

$$G_1 = \sum_1^\infty A_1^{-k}\, \eta_1\, \eta_1'\, (A_1^{-k})';\ \eta_1 = M_1\, Y_0 + \sum_1^\infty A_1^{-k}\, M_1\, v_1;\ v_1 = (1, 0, \ldots, 0)';$$

$$G_2 = \sigma^2 \sum_1^\infty A_2^k\, M_2\, v_1\, v_1'\, M_2'\, (A_2^k)'.$$

De plus, G *est* **P** *p.s. définie positive.*

2) *L'estimateur M.C. de* θ *est fortement consistant.*

3) *La suite* (H_n) *est toujours tendue et dès que l'ensemble des zéros de la fonction caractéristique des v.a.* (ε_k) *est au plus dénombrable :* $H_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} H$ *et la loi de* $H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$ *peut être décrite de la manière suivante :* H_2 *suit une loi normale* $N_r(O, \sigma^2 G_2)$*;* $H_1 = \sum_1^\infty \bar{\varepsilon}_k\, A_1^{-k}\, \eta_1$ *où* $(\bar{\varepsilon}_k;\ k \geq 1)$ *est une suite de même loi que* $(\varepsilon_k;\ k \geq 1)$ *et telle que* η_1, H_2 *et* $(\bar{\varepsilon}_k;\ k \geq 1)$ *soient indépendants. En conséquence :* $(\Gamma_n')^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} G^{-1} H$.

On donne uniquement la démonstration du théorème 2; celle du théorème 3 est tout à fait semblable.

Démonstration du théorème 2.

1) On a :

$$\begin{aligned} G_n &= \Gamma_n \left(\sum_0^{n-1} Y_k\, Y_k' \right) \Gamma_n' \\ &= \begin{bmatrix} A_1^{-n} \sum_0^{n-1} M_1\, Y_k\, (M_1\, Y_k)'\, (A_1^{-n})', & \frac{1}{\sqrt{n}} A_1^{-n} \sum_0^{n-1} M_1\, Y_k\, (M_2\, Y_k)' \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} M_2\, Y_k\, (M_1\, Y_k)'\, (A_1^{-n})', & \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} M_2\, Y_k\, (M_2\, Y_k)' \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par ailleurs l'hypothèse de commandabilité et [4], impliquent que $(M_1\, Y_k)$ [resp. $(M_2\, Y_k)$] est un processus $\mathrm{AR}_s(1)$ commandable et explosif [resp. $\mathrm{AR}_r(1)$ commandable et stable]. Compte tenu du théorème 1 [resp. B] :

$$A_1^{-n}\, M_1\, Y_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} M_1\, Y_0 + \sum_1^\infty A_1^{-k}\, M_1\, e_k = \eta_1 \tag{3.8}$$

P p.s. et en moyenne quadratique.

$$(3.9)\qquad A_1^{-n} \sum_0^{n-1} M_1 Y_k (M_1 Y_k)' (A_1^{-n})' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \sum_1^{\infty} A_1^{-k} \eta_1 \eta_1' (A_1^{-k})' = G_1$$

P p.s. et en moyenne d'ordre 1; en outre G_1 est **P** p.s. de rang d_1 où d_1 est le degré du polynôme minimal de A_1.

$$(3.10)\qquad \frac{1}{n} \sum_1^{n-1} M_2 Y_k (M_2 Y_k)' \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \sum_1^{\infty} A_2^k M_2 K_e M_2' (A_2^k)' = G_2$$

P p.s.; en outre G_2 est définie positive. Le dernier résultat implique en particulier :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} (M_2 Y_k)(M_1 Y_k)' (A_1^{-n})' \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} A_1^{-n} \sum_0^{n-1} (M_1 Y_k)(M_2 Y_k)' \right\|$$
$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leq k\leq n-1} |M_2 Y_k| \right) \sum_0^{n-1} |A_1^{-n} M_1 Y_k| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \mathbf{P}\text{ p.s.}$$

car :

$$\sum_0^{n-1} |A_1^{-k} M_1 Y_k| = \sum_1^{n-1} |A_1^{-(n-k)} A_1^{-k} M_1 Y_k| \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \sum_0^{\infty} |A_1^{-k} \eta_1|$$

P p.s. d'après (3.8).

Vu (3.9), (3.10), (3.11), la partie 1) du théorème est établie.

2) La partie 2) du théorème est établie dans [4].

3) Quant à la troisième partie du théorème, on remarque que :

$$H_n = \Gamma_n \sum_0^{n-1} Y_k e_{k+1}' = \begin{bmatrix} A_1^{-n} \sum_0^{n-1} M_1 Y_k e_{k+1}' \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_0^{n-1} M_2 Y_k e_{k+1}' \end{bmatrix}$$

et que pour étudier la convergence en loi de la suite (H_n), il suffit d'étudier la convergence en loi de la suite :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_n &= \tilde{H}_n(u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots w_p)\\ &= \sum_0^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A_1^{-n} M_1 Y_k\rangle\right)\langle e_{k+1}, v_j\rangle\\ &\quad+\sum_0^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle w_j, \frac{1}{\sqrt{n}} M_2 Y_k\rangle\right)\langle e_{k+1}, v_j\rangle = \sum_{k=0}^{n-1}(\xi_{n,k}+\zeta_{n,k}),\end{aligned}$$

où $(u_1, \ldots, u_p)$ sont p vecteurs quelconques de $\mathbf{R}^s$ $(w_1, \ldots, w_p)$ sont p vecteurs quelconques de $\mathbf{R}^r$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

En vue d'appliquer le théorème A, étudions la convergence de la fonction caractéristique conditionnelle de la suite $(\xi_{n,k}+\zeta_{n,k})$. Désignant par F_0, la tribu engendrée par la v.a. Y_0 et F_k celle engendrée par les v.a. Y_0, $e_1, \ldots, e_k$ pour $k \geq 1$, on vérifie que :

$$\begin{aligned}&|\pi_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{\exp(i\,\xi_{n,k}+i\,\zeta_{n,k})/F_k\}\\ &\quad-\pi_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{e^{i\,\xi_{n,k}}/F_k\}\,\pi_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{e^{i\,\zeta_{n,k}}/F_k\}|\\ &\leq\sum_{k=0}^{n-1}|\mathbf{E}\{(e^{i\,\xi_{n,k}}-1)(e^{i\,\zeta_{n,k}}-1)/F_k\}\\ &\quad-\mathbf{E}\{e^{i\,\xi_{n,k}}-1/F_k\}\,\mathbf{E}\{e^{i\,\zeta_{n,k}}-1/F_k\}|\\ &\leq\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{|\xi_{n,k}\,\zeta_{n,k}|/F_k\}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{\xi_{n,k}^2/F_k\}\,\mathbf{E}\{\zeta_{n,k}^2/F_k\}\end{aligned}$$

car $|e^{ix}-1| \leq |x|$, $|e^{ix}-1-ix| \leq \dfrac{x^2}{2}$ et on a :

$$\mathbf{E}\{\xi_{n,k}/F_k\} = \mathbf{E}\{\zeta_{n,k}/F_k\} = 0.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|\xi_{n,k}\zeta_{n,k}|/F_k\} = \mathbf{E}\Bigg\{\Bigg|&\sum_{j=1}^{p}\langle u_j, A_1^{-n} M_1 Y_k\rangle\langle e_{k+1}, v_j\rangle\\ &\times\sum_{j=1}^{p}\left\langle w_j, \frac{1}{\sqrt{n}} M_2 Y_k\right\rangle\langle e_{k+1}, v_j\rangle\Bigg|/F_k\Bigg\}\\ \leq \mathbf{E}\{|e_1|^2\}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}&|u_j|\,|w_l|\,|A_1^{-n} M_1 Y_k|\left|\frac{1}{\sqrt{n}} M_2 Y_k\right|.\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.11) :

$$(3.12)\qquad \sum_{0}^{n-1} \mathbf{E}\{|\xi_{n,k}\,\zeta_{n,k}|/F_k\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \mathbf{P}\text{ p.s.}$$

On a aussi :

$$(3.13)\qquad \sum_{0}^{n-1} \mathbf{E}\{\xi_{n,k}^2/F_k\}\,\mathbf{E}\{\zeta_{n,k}^2/F_k\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0 \quad \mathbf{P}\text{ p.s.}$$

car :

$$\sum_{0}^{n-1} \mathbf{E}\{\xi_{n,k}^2/F_k\}\,\mathbf{E}\{\zeta_{n,k}^2/F_k\} \leq \max_{0\leq k\leq n-1} \mathbf{E}\{\zeta_{n,k}^2/F_k\} \sum_{0}^{n-1} \mathbf{E}\{\xi_{n,k}^2/F_k\}$$

$$\leq \left(\|\mathbf{K}_e\| \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |w_j|\,|w_l|\right)\left(\frac{1}{n} \max_{0\leq k\leq n-1} |M_2\,Y_k\,(M_2\,Y_k)'|\right)$$

$$\times \left(\|\mathbf{K}_e\| \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |u_j|\,|u_l|\right)\left\|A_1^{-n} \sum_{0}^{n-1} M_1\,Y_k\,(M_1\,Y_k)'\,(A_1^{-n})\right\|$$

et (3.13) résulte de (3.9) et (3.10). Grâce à (3.12) et (3.13) on voit que p.s. :

$$(3.14)\quad \lim_{n\uparrow\infty} |\pi_{k=0}^{n-1}\,\mathbf{E}\{e^{i(\xi_{n,k}+\zeta_{n,k})}/F_k\}$$
$$- (\pi_{k=0}^{n-1}\,\mathbf{E}\{e^{i\,\xi_{n,k}}/F_k\})\,(\pi_{k=0}^{n-1}\,\mathbf{E}\{e^{i\,\zeta_{n,k}}/F_k\})| = 0.$$

Or, d'après la démonstration du théorème 1, on a :

$$(3.15)\qquad \pi_{k=0}^{n-1}\,\mathbf{E}\{e^{i\,\xi_{n,k}}/F_k\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \varphi_1(u_1,\,\ldots,\,u_p;\,\eta_1).$$

où $\varphi_1(u_1,\,\ldots,\,u_p;\,x)$ est, pour $x\in\mathbf{R}^s$, la fonction caractéristique au point 1 de la série aléatoire convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\langle u_j,\,A_1^{-k}\,x\rangle\,\langle e_k,\,v_j\rangle\right)$.

D'autre part, (3.10) et le fait que la suite $(\zeta_{n,k})$ vérifie la condition de Lindeberg : pour tout $\varepsilon>0$ $\sum_{0}^{n-1}\mathbf{E}\{\zeta_{n,k}^2\,\mathbf{1}_{\{(\zeta_{n,k})>\varepsilon\}}/F_k\}\to 0$ $\mathbf{P}$ p.s. (*cf.* remarque 5) permettent de montrer (*cf.* [7]) :

$$(3.16)\qquad \pi_{k=0}^{n-1}\,\mathbf{E}\{e^{i\,\zeta_{n,k}}/F_k\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbf{P}} \varphi_2(w_1,\,\ldots,\,w_p)$$

où $\varphi_2(w_1, \ldots, w_p) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}(v_j' K_e v_l)(w_j' G_2 w_l)\right\}$. Compte tenu de (3.14), (3.15), (3.16) :

$$\pi_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{e^{i\xi_{n,k}+i\zeta_{n,k}}/F_k\} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathbf{P}} \varphi_1(u_1, \ldots, u_p; \eta_1)\varphi_2(w_1, \ldots, w_p) \tag{3.17}$$

d'où la partie 3) du théorème par le théorème A, car :

$$(\hat{A}_n - A)\Gamma_n^{-1} G_n = H_n' = (\hat{A}_n - A)\left(\sum_0^{n-1} Y_k Y_k'\right)\Gamma_n'$$

et

$$(H_n, G_n) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{\mathcal{L}} (H, G).$$

Le théorème est donc établi. □

Remarque 6. – On peut également donner une transcription du théorème 2 à un processus autorégressif d'ordre q et de dimension p, car à un tel processus on peut associer un modèle $\mathrm{AR}_{p\times q}(1)$ (*cf.* [4]).

RÉFÉRENCES

[1] W. T. ANDERSON, On asymptotic distribution of estimates of parameters of stochastic difference equations, *Ann. Math. Stat.*, vol. **30**, 1959, p. 676-687.

[2] R. AZENCOTT et D. DACUNHA-CASTELLE, Série d'observations irrégulières, Masson, 1984.

[3] N. H. CHAN et C. Z. WEI, Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive process, *Ann. of Stat.*, vol. **16**, n° 1, 1989, p. 367-401.

[4] M. DUFLO, R. SENOUSSI et A. TOUATI, Propriétés asymptotiques presque sûres de l'estimateur des moindres carrés d'un modèle autorégressif vectoriel, *Ann. Inst. H.-Poincaré,* vol. **27**, n° 1, 1991, p. 1-25.

[5] L. LAIT et C. Z. WEI, Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least squares estimates of their parameters, *J. Multivariate Analysis,* vol. **13**, 1983, p. 1-23.

[6] M. M. RAO, Consistency and limit distributions of estimators of parameters in explosive stochastic difference equations, *Ann. Math. Stat.,* vol. **32**, 1961, p. 195-218.

[7] A. TOUATI, Sur la convergence en loi fonctionnelle de suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens, *Teoria. Veroiat. Nostei,* vol. **36**, 1991, p. 195-218.

[8] A. TOUATI, Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastiques et application statistique, *Probab. Th. Applications,* vol. **38**, 1993, p. 95-117.

[9] A. TOUATI, Loi limite de l'estimateur des moindres carrés dans le modèle autorégressif (Cas général), 1988 (à paraître).
[10] J. S. WHITE, The limiting distribution of the serial coefficient in the explosive case, *Ann. Math. Stat.*,, vol. **29**, 1958, p. 1188-1197.
[11] J. S. WHITE, The limiting distribution of the serial coefficient in the explosive case (II), *Ann. Math. Stat.*, vol. **30**, 1959, p. 831-834.

(Manuscrit reçu le 27 mai 1992;
révisé le 2 décembre 1994.)