ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN BRETAGNOLLE
ANDRZEJ KLOPOTOWSKI

Sur l'existence des suites de variables aléatoires s à s indépendantes échangeables ou stationnaires

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, nº 2 (1995), p. 325-350
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_2_325_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 31, n° 2, 1995, p. 325-350 *Probabilités et Statistiques*

Sur l'existence des suites de variables aléatoires s à s indépendantes échangeables ou stationnaires

par

Jean BRETAGNOLLE

Université Paris-Sud, Département de Mathématiques,
U.R.A. D 0743, bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

et

Andrzej KLOPOTOWSKI

Université Paris-Nord, Institut Galilée, U.R.A. 742,
av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse Cedex, France.

RÉSUMÉ. – Il est bien connu que des suites infinies deux à deux indépendantes et échangeables n'existent pas. Dans cet article nous étudions systématiquement les suites finies de variables aléatoires binaires s à s indépendantes et échangeables. Nous donnons des exemples de telles suites qui ne se prolongent pas au delà d'une dimension calculable. Enfin nous proposons quelques exemples nouveaux de suites infinies s à s indépendantes et stationnaires.

ABSTRACT. – It is well known that infinite sequences of pairwise independent and exchangeable random variables do not exist. In this note we consider finite sequences of random variables which are s by s independent and exchangeable. We give examples of such sequences which cannot be extended above some dimension that can be explicitely computed. We have also found some new examples of infinite pairwise independent and stationnary sequences.

Key words: Pairwise independence, exchangeability, stationarity.

A.M.S. 1980 Subject Classification: Primary 60 A 99; Secondary 60 G 09, 60 G 10.

I. INTRODUCTION

Dans cet article nous considérons presque exclusivement des suites de variables aléatoires binaires, c'est-à-dire ne prenant que deux valeurs : par commodité, 0 et 1, avec la convention que la valeur 0 est prise avec Probabilité $0 < p \leq \frac{1}{2}$, le cas $\frac{1}{2} < p < 1$ se traitant en échangeant les deux valeurs.

Rappelons que les x_i, $i \in \mathbb{N}$, sont dites *indépendantes* s à s, si pour chaque choix $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ les variables x_{i_k}, $1 \leq k \leq s$, sont indépendantes. L'indépendance mutuelle (globale) équivaut donc à l'indépendance s à s pour tout $s \geq 2$.

La suite x_i, $i \in \mathbb{N}$, est *stationnaire* si pour chaque $n \geq 1$ le vecteur aléatoire $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ a la même loi conjointe que le vecteur $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Elle est *échangeable* si pour chaque $n \geq 1$ le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a la même loi conjointe que le vecteur $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (donc elle est évidemment stationnaire).

L'échangeabilité est discutée en détail par ex. dans [16] et [1], où l'on peut trouver une bibliographie exhaustive.

L'indépendance mutuelle est une restriction forte (on sait par ex. que sur un espace m points on peut définir au maximum $[\log_2 m]$ v.a. non triviales mutuellement indépendantes [2] et $m - 1$ deux à deux indépendantes [17], ces nombres tant atteints dans le cas binaire (*voir* le fameux exemple de Bernstein [3] pour $m = 4$).

Hors des cadres classiques Markoviens d'une part et de la m-dépendance d'autre part, nous avons choisi d'affaiblir l'indépendance en supposant que les liaisons apparaissent quand le nombre de variables observées simultanément dépasse un niveau fixé. Nous avons donc étudié systématiquement les suites finies de variables s à s indépendantes et échangeables ou plus généralement s à s indépendantes et stationnaires.

Naturellement, tout affaiblissement des contraintes entraîne un comportement plus irrégulier. Par exemple, sous l'hypothèse de l'indépendance deux à deux, le théorème central limite n'est plus vrai même dans le cas stationnaire, comme le montrent les exemples de Janson [13] ou Bradley [4]. Par contre, Etemadi [10] a montré qu'elle suffit pour démontrer la loi forte de grands nombres de Kolmogorov (*voir* aussi [5]).

Les suites deux à deux indépendantes sont parfois présentées comme des curiosités [24] et à vrai dire la construction générale de telles suites infinies parait assez difficile.

Le premier exemple d'une telle suite infinie stationnaire dans le cas de variables uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$ a été donnée par Lévy [18] et ensuite par Rosenblatt et Slepian [23] dans le cas de variables discrètes. Ces deux exemples sont des processus de Markov du second degré. Rosenblatt et Slepian ont aussi montré que les seules suites binaires deux à deux indépendantes de Markov du second degré sont mutuellement indépendantes.

Robertson et Womack ([21], [22]) ont donné le premier exemple de suites de variables aléatoires deux à deux indépendantes (et non indépendantes!) à deux valeurs *équiprobables*. Leur idée est qu'il faut représenter ces valeurs par deux matrices, puis construire la probabilité sur l'espace produit par une formule utilisant la multiplication de ces matrices. Récemment Derriennic a généralisé cette construction pour une loi binaire quelconque [7]. Les suites ainsi construites sont 3-dépendantes, cette methode ne donne donc pas la forme générale, ainsi que nous le verrons dans le paragraphe 5.

Notre première idée était de construire de telles suites par des prolongements successifs, en commençant par les cas fini-dimensionnels. Dans [8] nous avons obtenu une caractérisation complète des triplets, quadruplets et quintuplets (stationnaires) des variables binaires deux à deux indépendantes. Nous avons démontré aussi que :

- il n'est pas possible de prolonger la loi de Bernstein en un quadruplet stationnaire de variables aléatoires binaires deux à deux indépendantes; *a fortiori* il n'existe pas de suite infinie stationnaire vérifiant l'indépendance deux à deux, dans laquelle trois variables aléatoires successives obéissent à la loi de Bernstein;

- il existe des triplets (x_1, x_2, x_3) de variables aléatoires binaires deux à deux indépendantes qui admettent un prolongement en un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) stationnaire (resp. échangeable) vérifiant l'indépendance deux à deux, mais qui n'admettent pas de prolongement en un quintuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ stationnaire (resp. échangeable) vérifiant l'indépendance deux à deux.

Nous disons qu'une hypothèse est *constructive* si les lois de probabilité qui lui sont conformes, peuvent être construites par récurrence; c'est-à-dire, que partant de l'étape n_0, on peut prolonger le processus à l'étape $n_0 + 1$ (pour n_0 quelconque fixé).

Les hypothèses classiques de la théorie des processus, comme l'indépendance mutuelle, la dépendance markovienne, la stationnarité stricte, sont en ce sens, constructives. Par contre, il est bien connu que l'échangeabilité n'est pas constructive. Dans cette note nous montrons, entre autres, l'indépendance s à s n'est pas constructive ([9] pour $s = 2$); ceci est encore pire pour des suites infinies s à s indépendantes et échangeables, qui, tout simplement, n'existent pas (sauf dans le cas trivial) d'après le résultat d'Aldous [1].

Les résultats de notre recherche élémentaire ont été plutôt décevants (et nous avons sagement renoncé à leur publication), parce que, outre les difficultés de prolongement, le nombre de paramètres nécessaires pour préciser une telle loi augmente très rapidement par rapport au nombre de variables considerées.

Il nous semble donc raisonnable de changer de méthode et de limiter notre recherche aux lois échangeables ou stationnaires.

Dans cet article nous exploitons l'aspect géométrique des choses.

Nous représentons les probabilités sur le cube $\{0,1\}^n$ par leur densité relativement au produit de leurs marges. Tout d'abord dans le cas symétrique, l'indépendance s à s s'exprime facilement en termes d'opérateur d'espérance conditionnelle et détermine une suite décroissante de variétés affines (*voir* (2.7) et (2.9)).

Nous décrivons ensuite plusieurs bases de ces variétés affines. L'une a la propriété agréable que pour p assez petit le simplexe qu'elle engendre est exactement l'ensemble des probabilités s à s indépendantes (Théorème 2).

Dans le paragraphe suivant nous donnons une réponse partielle à la question du prolongement des probabilités s à s indépendantes et stationnaires: nous construisons explicitement de telles probabilités qui ne se prolongent pas au delà d'une dimension calculable en fonction des paramètres s et p. (Dans le cas échangeable le résultat d'Aldous [1] règle la question.)

Enfin nous ajoutons quelques exemples explicites de suites s à s indépendantes qui nous semblent avoir leur intérêt propre.

II. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Notons par $[k,l]$, $]k,l]$,... des intervalles des nombres naturels, par $\{0,1\}^n$ le cube n-dimensionnel discret, par $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ ses points et par $f^{\{n\}}$ des fonctions réelles f sur ce cube (pour rappeler le nombre de ses variables).

La mesure de référence sur le cube $\{0,1\}^n$ est toujours la probabilité produit $P_p \overset{\text{df}}{=} \tilde{p}^{\otimes n}$, où

$$\tilde{p} \overset{\text{df}}{=} p\delta_0 + (1-p)\delta_1, \qquad 0 < p \leq \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Les applications coordonnées valent x_i, $1 \leq i \leq n$, (de même loi $\tilde{p}$) et on en utilise aussi leur version centrée

$$\xi_i \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} -1 & \text{avec probabilité } p, \\ \dfrac{p}{1-p} & \text{avec probabilité } 1-p. \end{cases} \tag{2.2}$$

On considère l'espace vectoriel $\mathfrak{V}_n$ de toutes les fonctions réelles sur $\{0,1\}^n$ comme un produit tensoriel de n copies de l'espace $\mathbb{R}^{\{0,1\}}$.

En prenant $\mathbf{1}$ et ξ comme une base pour le dernier et en identifiant les produits tensoriels de vecteurs des bases respectives avec les produits ordinaires on obtient que

$$\{\mathbf{1}^{\{n\}}, \prod_{i \in I} \xi_i \; ; \; \emptyset \neq I \in 2^{[1,n]}\} \tag{2.3}$$

est une base linéaire de $\mathfrak{V}_n$.

I étant une partie de $[1,n]$ de complémentaire I', Π_I note l'opérateur d'espérance conditionnelle relativement à I, soit

$$\Pi_I f^{\{n\}} \overset{\text{df}}{=} \int f^{\{n\}} \bigotimes_{j \in I'} \tilde{p}(dx_j). \tag{2.4}$$

$\Pi_I f^{\{n\}}$ est identifiée à une fonction sur le cube $\{0,1\}^I$.

Écrivons la formule explicite:

$$\begin{aligned} &\Pi_I f^{\{n\}}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \\ &\quad = \sum_{\tilde{\omega} \in \{0,1\}^{n-k}} f^{\{n\}}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \tilde{\omega}) p^{\alpha(\tilde{\omega})}(1-p)^{\beta(\tilde{\omega})}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $I = [1,k]$ et $\alpha(\tilde{\omega})$, $\beta(\tilde{\omega})$ dénotent le nombre des 0 et de 1 dans $\tilde{\omega} \in \{0,1\}^{n-k}$ respectivement.

En particulier

$$\Pi_J(\prod_{i \in I} \xi_i) = \begin{cases} \prod_{i \in I} \xi_i, & \text{si } I \subseteq J, \\ 0, & \text{si } I \setminus J \neq \emptyset. \end{cases} \tag{2.6}$$

Bien sûr, l'opérateur Π_I dépend de p, on l'omet en général, mais pas dans la définition suivante:

$$\mathcal{M}_{s,n,p} \overset{\text{df}}{=} \{f^{\{n\}}; \; \Pi_I f^{\{n\}} = \mathbf{1}^{\{s\}} \text{ pour tout } I \text{ de cardinal } s\}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{P}_{s,n,p} \overset{\text{df}}{=} \{f^{\{n\}} \in \mathcal{M}_{s,n,p}; \; f^{\{n\}} \geq 0\}. \tag{2.8}$$

$\mathcal{P}_{s,n,p}$ est simplement l'ensemble des $f^{\{n\}}$ telles que $f^{\{n\}}dP_p$ soit une probabilité pour laquelle les applications coordonnées sont s à s indépendantes et de la loi marginale $\tilde{p}$; c'est un sous–ensemble *convexe* de la variété affinne $\mathcal{M}_{s,n,p}$, elle même pouvant s'écrire $\mathbf{1}^{\{n\}} + \mathcal{V}_{s,n,p}$, où $\mathcal{V}_{s,n,p}$ est un espace vectoriel.

Pour $s = 0$, on convient que $\mathcal{P}_{0,n,p}$ est l'ensemble des $f^{\{n\}} \geq 0$, d'intégrale 1, $\mathcal{V}_{0,n,p}$ est l'ensemble des $f^{\{n\}}$, d'intégrale nulle, $\mathcal{M}_{0,n,p} = \mathbf{1}^{\{n\}} + \mathcal{V}_{0,n,p}$.

Remarquons aussi que pour $s = 1$ les fonctions de $\mathcal{M}_{1,n,p}$ sont celles qui ont toutes les lois marginales de dimension 1 égales à $\tilde{p}$.

Pour chaque $n \geq 1$ et chaque p fixés on a

$$\mathcal{M}_{0,n,p} \supset \mathcal{M}_{1,n,p} \supset \ldots \supset \mathcal{M}_{n,n,p} = \{\mathbf{1}^{\{n\}}\}, \tag{2.9}$$

donc aussi

$$\mathcal{V}_{0,n,p} \supset \mathcal{V}_{1,n,p} \supset \ldots \supset \mathcal{V}_{n,n,p} = \{\mathbf{0}^{\{n\}}\} \tag{2.10}$$

et

$$\mathcal{P}_{0,n,p} \supset \mathcal{P}_{1,n,p} \supset \ldots \supset \mathcal{P}_{n,n,p} = \{\mathbf{1}^{\{n\}}\}. \tag{2.11}$$

D'après (2.6)

$$\{ \prod_{i\in I} \xi_i \ ; \ \emptyset \neq I \in 2^{[1,n]},\ card(I) > s\} \tag{2.12}$$

est une base linéaire de $\mathcal{V}_{s,n,p}$, donc les inclusions dans (2.9) et (2.10) sont strictes.

De même pour (2.11), comme il est montré à la fin de cet article.

Enfin, il faut observer que pour n, s, fixés et p *différents* les ensembles $(\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{V})_{s,n,p}$ sont distincts.

III. LE CAS ÉCHANGEABLE. BASES DES FONCTIONS ÉCHANGEABLES

On se restreint d'abord aux fonctions *échangeables* (symétriques, ou σ-invariantes), c'est-à-dire, invariantes par toute permutation des coordonnées du cube $\{0,1\}^n$.

Notons par $\Xi^{[n]}$ l'espace linéaire de toutes les fonctions échangeables sur $\{0,1\}^n$ (notées $f^{[n]}$ pour éviter les confusions).

Nous allons noter par $(\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s[n]p}$ les sous-ensembles *symétriques* des $(\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s,n,p}$ définis précédemment, c'est-à-dire,

$$(3.1)\qquad (\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s[n]p} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Xi^{[n]} \cap (\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s,n,p}.$$

Ces sous-ensembles satisfont les relations analogues à (2.9)-(2.11):

$$(3.2)\qquad (\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s[n]p} \supset (\mathcal{M},\mathcal{P},\mathcal{V})_{s+1[n]p},\ s=0,1,\ldots,n-1.$$

L'appartenance à la variété affinne $\mathcal{M}_{s[n]p}$ pour $s \geq 1$ se vérifiera par la seule équation

$$(3.3)\qquad f^{[n]} \in \mathcal{M}_{s[n]p} \text{ si et seulement si } \Pi_s f^{[n]} = \mathbf{1}^{[s]}(=\mathbf{1}^{\{s\}}),$$

où bien entendu $\Pi_s \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Pi_{[1,s]}$.

Notons

$$(3.4)\qquad S_0^{[n]} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{1}^{[n]}$$

et par $S_j^{[n]}$, $1 \leq j \leq n$, les sommes de produits j à j des ξ_i, $1 \leq i \leq n$.

Les fonctions $S_j^{[n]}$; $0 \leq j \leq n$, forment une base linéaire pour $\Xi^{[n]}$.

La deuxième base est formée des fonctions

$$(3.5)\qquad \partial_j^{[n]} \stackrel{\mathrm{df}}{=} I_{A_j^{[n]}},\qquad 0 \leq j \leq n,$$

où I_A est la fonction indicatrice de A,

$$\Sigma^{[n]} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{1\leq i\leq n} x_i,$$

et les ensembles

$$(3.6)\qquad A_j^{[n]} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\Sigma^{[n]} = j\},\qquad 0 \leq j \leq n,$$

forment *la* partition du cube σ-invariante.

On identifie parfois les fonctions échangeables à des fonctions sur $[0,n]$.

Définissons les fonctions suivantes:

$$(3.7)\qquad e_k^{[n]} \stackrel{\mathrm{df}}{=} (-1)^k \frac{1}{p^k} \sum_{0\leq j\leq n} \left(\frac{p}{p-1}\right)^j \binom{j}{k} \partial_j^{[n]},\qquad 0 \leq k \leq n,$$

avec les conventions usuelles sur les coefficients binomiaux: $\binom{j}{k} \neq 0$ si et seulement si $0 \leq k \leq j$.

Les $e_k^{[n]}$, $0 \leq k \leq n$, forment également une base de $\Xi^{[n]}$, car la matrice de changement de base par rapport aux ∂ est triangulaire.

Notons que

$$\sum_{k=0}^{n} e_k^{[n]} = \sum_{j=0}^{n} \partial_j^{[n]} = \mathbf{1}^{[n]}; \tag{3.8}$$

$$\int_{\{0,1\}^n} e_k^{[n]} dP_p = \delta_{nk}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{3.9}$$

Décomposons les projections Π_m dans ces bases:

LEMME 1. – *Convenant que* $\partial_j^{[n]} = S_j^{[n]} = e_j^{[n]} = 0$ *si* $j < 0$ *ou* $j > n$, *on a*

$$\Pi_m S_j^{[n]} = S_j^{[m]}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \Pi_m \partial_j^{[n]} &= \Pi_m \Pi_{m+1} \dots \Pi_{n-1} \partial_j^{[n]}, \\ \Pi_{n-1} \partial_j^{[n]} &= (1-p)\partial_{j-1}^{[n-1]} + p\partial_j^{[n-1]}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\Pi_m e_k^{[n]} = e_{k+m-n}^{[m]}, \ \Pi_m \mathbf{1}^{[n]} = \mathbf{1}^{[m]}, \tag{3.12}$$

pour tout $0 \leq j \leq n$ *et* $1 \leq m \leq n$.

Démonstration. – La première formule est évidente d'après (2.6); la seconde s'obtient en remarquant que

$$\{\Sigma^{[n]} = j\} = \{\Sigma^{[n-1]} = j-1;\ x_n = 1\} + \{\Sigma^{[n-1]} = j;\ x_n = 0\}, \tag{3.13}$$

pour la troisième

$$\begin{aligned} \Pi_{n-1} e_k^{[n]} =& (-1)^{k-1} \frac{1}{p^{k-1}} \sum_{0 \leq j < n} \left(\frac{p}{p-1}\right)^j \\ & \left\{ -\binom{j}{k} + \binom{j+1}{k} \right\} \partial_j^{[n-1]} = e_{k-1}^{[n-1]}. \quad \square \end{aligned} \tag{3.14}$$

Rappelons que si $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de dimension d et $\mathcal{M}$ est la variété affinne $\mathfrak{a} + \mathcal{V}$, alors $\{\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \dots \mathfrak{z}_d\}$ est dit *base affinne* de $\mathcal{M}$

si et seulement si $\mathfrak{z}_0 \in \mathcal{M}$ et $\{\mathfrak{z}_i - \mathfrak{z}_0;\ 1 \leq i \leq d\}$ est une base linéaire de $\mathcal{V}$, ce qui équivaut à

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \mathfrak{z}_i\ ;\ \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \in \mathbf{R},\ 0 \leq i \leq d \right\}. \tag{3.15}$$

On dira que $\mathfrak{z}_0$ est *adjoint* à la base de $\mathcal{V}$.

Fixons $s \geq 0$ et posons dans la suite

$$\boxed{K \overset{\text{df}}{=} n - s.}$$

On convient que si en dimension n, $K = n - s$, il faut le lire $K + 1$ en dimension $n + 1$.

LEMME 2. – 1° *La variété affinne $\mathcal{M}_{s[n]p}$ est de dimension K.*

2° *Deux bases linéaires de $\mathcal{V}_{s[n]p}$ sont: $\{S_j^{[n]};\ s < j \leq n\}$ et $\{e_k^{[n]};\ 0 \leq k < K\}$.*

3° *On obtient des bases affinnes de $\mathcal{M}_{s[n]p}$ en leur adjoignant $\mathbf{1}^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} e_k^{[n]} = S_0^{[n]}$ au sens ci-dessus.*

Démonstration. – C'est une conséquence de (3.3) et du Lemme 1; le passage des $\partial^{[n]}$ aux $e^{[n]}$ étant triangulaire.

Ceci montre ausssi que les inclusions concernant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ dans (3.2) sont strictes. □

COROLLAIRE 1. – *Une fonction échangeable $\varphi^{[n]}$ de $\mathcal{V}_{s[n]p}$ nulle sur $[0, K-1]$ est identiquement nulle.*

Si une fonction échangeable $f^{[n]}$ de $\mathcal{M}_{s[n]p}$ est égale $1^{[K-1]}$ sur $[0, K-1]$, alors $f^{[n]} = 1^{[n]}$.

LEMME 3. – *Soit*

$$\varphi_j^{[n]} \overset{\text{df}}{=} \sum_{K \leq k \leq n} e_k^{[n]} + \mathbf{1}_{[j<K]} p^{-K} \binom{K}{j}^{-1} \sum_{0 \leq k < K} p^k \binom{k}{j} e_k^{[n]}, \quad 0 \leq j \leq K. \tag{3.16}$$

1° *C'est une base affinne de $\mathcal{M}_{s[n]p}$.*

2° *Pour tout $0 \leq j \leq K$*

$$\int_{\{0,1\}^n} \varphi_j^{[n]} dP_p = 1. \tag{3.17}$$

3° *Pour tout* $0 \leq j \leq K$ *et tout* $0 \leq m \leq K$

$$\binom{K}{j} p^{K-j}(1-p)^j \varphi_j^{[n]}(m) = \delta_{mj}. \tag{3.18}$$

4° *Pour tout* $0 \leq j \leq K$ *et tout* $K < m \leq n$

$$\begin{aligned}(1-p)^m \varphi_j^{[n]}(m) = &\sum_{0 \leq l \leq m-K} (-1)^l \binom{m}{l} p^l \\ &- (-1)^{m-K} \binom{m}{K} \frac{K-j}{m-j} p^{m-K}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

5° *Pour tout* $0 \leq m \leq n$

$$\sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} p^{K-j}(1-p)^j \varphi_j^{[n]}(m) = 1. \tag{3.20}$$

Démonstration. – La première somme à (3.16) vaut $\mathbf{1}^{[n]} - \sum_{0 \leq k < K} e_k^{[n]}$, d'après 2° du Lemme 2 les fonctions $\varphi_j^{[n]}$ vérifient (2.7), donc elles appartiennent à $\mathcal{M}_{s[n]p}$.

L'égalité (3.17) est une conséquence de (3.9).

Ensuite, la première somme à (3.16) vaut pour $0 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned}\sum_{K \leq k \leq n} e_k^{[n]}(m) &= \sum_{k=K}^{m} (-1)^k \frac{1}{p^k} \left(\frac{p}{p-1}\right)^m \binom{m}{k} \\ &= \frac{1}{(1-p)^m} \sum_{l=0}^{m-K} (-1)^l p^l \binom{m}{l},\end{aligned} \tag{3.21}$$

d'où il vient la première moitié de (3.19).

Pour la seconde somme à (3.16), en utilisant la formule « hypergéométrique »

$$\binom{k}{j}\binom{m}{k} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{m-k}, \tag{3.22}$$

il vient pour $0 \le j \le K$ et pour $0 \le m \le n$:

$$(3.23) \quad \mathbf{1}_{[j<K]} p^{m-K} \binom{K}{j}^{-1} \frac{1}{(1-p)^m} \sum_{0\le k<K} (-1)^{m-k} \binom{k}{j}\binom{m}{k}$$
$$= \mathbf{1}_{[j<K]} p^{m-K} \binom{K}{j}^{-1} \frac{1}{(1-p)^m} \binom{m}{j} \sum_{m-K<l\le m} (-1)^l \binom{m-j}{l}$$
$$= \mathbf{1}_{[j<K]} p^{m-K} \binom{m}{j}\binom{K}{j}^{-1} \frac{1}{(1-p)^m}$$
$$\left\{\delta_{mj} - \sum_{0\le l\le m-K} (-1)^l \binom{m-j}{l}\right\}.$$

Pour finir, on a pour $0 \le m \le n$:

$$(3.24) \quad (1-p)^m \varphi_j^{[n]}(m) = \sum_{0\le l\le m-K} (-1)^l \binom{m}{l} p^l$$
$$+ \mathbf{1}_{[j<K]} p^{m-K} \binom{m}{j}\binom{K}{j}^{-1} \left\{\delta_{mj} - \sum_{0\le l\le m-K} \binom{m-j}{l}(-1)^l\right\}.$$

Si $m < K$, les sommations disparaissent et on obtient (3.18).

Également pour $m = K$, car il vient $1 + \mathbf{1}_{[j<K]}(\delta_{Kj} - 1)$.

Si $m > K$, alors le δ_{jm} donne 0, puis

$$(3.25) \quad \sum_{0\le l\le m-K} \binom{m-j}{l}(-1)^l = (-1)^{m-K} \frac{K-j}{m-j} \binom{m-j}{m-K},$$

puis d'après (3.22)

$$\binom{m}{j}\binom{K}{j}^{-1}\binom{m-j}{m-K} = \binom{m}{K}$$

et la forme finale (3.19) s'ensuit.

De par leurs valeurs sur $[0, K]$, les $\varphi_j^{[n]}$ sont linéairement indépendants, donc elles forment une base affinne de $\mathcal{M}_{s[n]p}$.

La combinaison proposée dans 5° vaut $\mathbf{1}^{[K]}$ sur $[0, K]$, donc elle vaut $\mathbf{1}^{[n]}$ partout d'après Corollaire 1. □

Comment opère la projection Π_n sur cette base:

LEMME 4. – *On a (avec la convention* $\varphi_j^{[n]} = 0$ *pour* $j < 0$ *ou* $j > K$*):*

$$(3.26)\qquad \begin{cases} \Pi_n \varphi_j^{[n+1]} = \dfrac{1}{\dbinom{K+1}{j}} \left\{ \dbinom{K}{j} \varphi_j^{[n]} + \dbinom{K}{j-1} \varphi_{j-1}^{[n]} \right\}, \\ \qquad j \in [0, K+1]; \end{cases}$$

et

$$(3.27)\qquad \begin{cases} \Pi_n \varphi_j^{[n+t]} = \dfrac{1}{\dbinom{K+t}{j}} \displaystyle\sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} \binom{K}{j-l} \varphi_{j-l}^{[n]}, \\ \qquad j \in [0, K+t], \qquad t \geq 1; \end{cases}$$

et, en particulier,

$$(3.28)\qquad \Pi_n \varphi_0^{[n+t]} = \varphi_0^{[n]}, \qquad \Pi_n \varphi_{K+t}^{[n+t]} = \varphi_K^{[n]}, \qquad t \geq 1.$$

Démonstration. – Vérification directe en appliquant la définition (3.16) et (3.12). (3.27) s'en déduit par récurrence. □

Rappelons que le *simplexe* engendré par les vecteurs $\mathfrak{x}_j$, $1 \leq j \leq k$, est l'ensemble

$$(3.29)\qquad \mathcal{S}(\mathfrak{x}_j;\ 1 \leq j \leq k) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathfrak{x}_j;\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq k \right\}.$$

THÉORÈME 1. – 1° *Le convexe* $\mathcal{P}_{s[n]p}$ *est contenu dans le simplexe* $\mathcal{S}_{s[n]p} \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{S}(\varphi_j^{[n]}\ ;\ j \in [0, K]) \subset \mathcal{M}_{s[n]p}$.

2° *Il lui est identique si et seulement si* $0 < p \leq \dfrac{1}{K+1}$.

3° *Si* $p = \dfrac{1}{K+1} + \varepsilon$ *, alors pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petits, seuls les* $\varphi_j^{[n]}$, $0 < j < K$, *appartiennent à* $\mathcal{P}_{s[n]p}$.

Remarque 1. – Les notations apparaissent ici insuffisantes car elles ne tiennent pas compte de ce que les φ (et leur enveloppe convexe $\mathcal{S}$) dépendent aussi de p!

Il est bien clair que $\mathcal{P}_{s[n]p}$ est toujours une enveloppe convexe engendrée par un nombre *fini* des points extremaux, mais dès que p dépasse $\dfrac{1}{K+1}$, on voit que $\mathcal{P}_{s[n]p}$ n'est en général plus un simplexe, cependant il est toujours non-vide (d'après (2.11)).

Démonstration. – Si $f^{[n]} = \sum_{j=0}^{K} \lambda_j \varphi_j^{[n]}$ avec $\sum_{j=0}^{K} \lambda_j = 1$, mais l'un au moins des $\lambda_i < 0$, $f^{[n]}$ ne peut être une densité de probabilité, étant strictement négative au point i (d'après (3.18)).

Puis, pour que tout élément de $\mathcal{S}_{s[n]p}$ appartient à $\mathcal{P}_{s[n]p}$, d'après (3.17) il suffit de vérifier que chaque fonction $\varphi_j^{[n]}$ est non-négative en tout point $m \in [0, n]$. Elles le sont (3.18) en tout point de $[0, K]$; soit $m \in]K, n]$. On vérifie que pour chaque $0 \leq j \leq K$ nous avons

$$\frac{m(K-j)}{K(m-j)}\varphi_0^{[n]}(m) + \frac{j(m-K)}{K(m-j)}\varphi_K^{[n]}(m) = \varphi_j^{[n]}(m). \tag{3.30}$$

Les coefficients de (3.30) étant > 0, la positivité de $\varphi_0^{[n]}$ et $\varphi_K^{[n]}$ assure celle de toutes les $\varphi_j^{[n]}$.

Considérons d'abord la fonction $\varphi_K^{[n]}$:

K étant fixé, on considère $(1-p)^m \varphi_K^{[n]}(m)$ comme une suite de polynômes de p:

$$\begin{aligned} (1-p)^m \varphi_K^{[n]}(m) &= \sum_{0 \leq l \leq m-K} \binom{m}{l} (-p)^l \\ &= \sum_{0 \leq l \leq l_0} \binom{K+l_0}{l} (-p)^l \overset{\text{df}}{=} A_{l_0}(p) \overset{\text{df}}{=} A_{l_0}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

où $m = K + l_0,\ 1 \leq l_0 \leq n - K = s$.

Soit $E \overset{\text{df}}{=} \left]0, \dfrac{1}{K+1}\right]$. E est l'ensemble de $\mathbb{R}^+$ où $A_1 = 1 - (K+1)p$ est ≥ 0.

Par ailleurs

$$(1-p)A_{l_0} + \binom{K+l_0}{K-1}(-p)^{l_0+1} = A_{l_0+1}, \tag{3.32}$$

et si les A_{l_0} sont non-négatifs pour l_0 impair, ils le sont pour l_0 pair.

Enfin

$$\begin{aligned} A_{l_0+2} &= (1-p)A_{l_0+1} + \binom{K+l_0+1}{K-1}(-p)^{l_0+2} \\ &= (1-p)^2 A_{l_0} + (-p)^{l_0+1}\binom{K+l_0}{K-1}\left[1 - p\frac{K+2l_0+3}{l_0+2}\right]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Si $p \in E$, alors le terme $1 - p\dfrac{K + 2l_0 + 3}{l_0 + 2}$ est positif, car

$$\frac{1}{K+1} \leq \frac{l_0 + 2}{K + 2l_0 + 3}, \qquad K \geq 1, \quad l_0 \geq 0,$$

donc les A_{l_0} sont non-négatifs pour l_0 impair.

Nous avons démontré donc que si $p \in E$, alors la fonction $\varphi_K^{[n]}$ est non-négative pour $m \in]K, n]$, qu'elle est strictement positive pour $m \geq K + 2$, mais qu'elle est strictement négative en $m = K + 1$, si $p \notin E$.

Vérifions maintenant la positivité de $\varphi_0^{[n]}$:

Considérons les

$$(3.34)\quad (1-p)^m \varphi_0^{[n]}(m) = \sum_{0 \leq l \leq m-K} \binom{m}{l} (-p)^l - (-p)^{m-K} \binom{m}{K} \frac{K}{m}$$
$$= A_{l_0} - (-p)^{l_0} \binom{K + l_0 - 1}{K - 1} \overset{\text{df}}{=} B_{l_0},$$

où $m = K + l_0,\ 1 \leq l_0 \leq n - K$.

Alors on a

$$(3.35)\ B_1 = \sum_{0 \leq l \leq 1} \binom{K+1}{l} (-p)^l - (-p)^1 \binom{K+1}{K} \frac{K}{K+1} = 1 - p,$$

$$(3.36)\ B_{l_0+1} = A_{l_0+1} - (-p)^{l_0+1} \binom{K + l_0}{K - 1} = (1-p) A_{l_0},$$

pour $l_0 \geq 1$, donc:

a) si $0 < (K+1)p < 1$, alors pour $K \geq 1$ les fonctions $\varphi_0^{[n]}$ et $\varphi_K^{[n]}$ sont strictement positives en tout m de $]K, n]$;

b) au bord $p = \dfrac{1}{K+1}$ on a

$$(3.37)\qquad \varphi_K^{[n]}(K+1) = \frac{1}{(1-p)^{K+1}} A_1 = 0$$
$$< \frac{1}{(1-p)^K} = \frac{1}{(1-p)^{K+1}} B_1 = \varphi_0^{[n]}(K+1),$$

$$(3.38)\qquad \varphi_0^{[n]}(K+2) = \frac{1}{(1-p)^{K+2}} B_2 = 0$$
$$< \binom{K+1}{K-1} \frac{p^2}{(1-p)^{K+2}} = \varphi_K^{[n]}(K+2);$$

c) pour $p > \frac{1}{K+1}$, $\varphi_K^{[n]}(K+1)$ et $\varphi_0^{[n]}(K+2)$ sont strictement négatives.

On a donc prouvé que si $0 \leq p \leq \frac{1}{K+1}$, $\mathcal{P}_{s[n]p}$ est identique au simplexe $\mathcal{S}_{s[n]p}$.

La partie c) montre que ni $\varphi_K^{[n]}$ ni $\varphi_0^{[n]}$ n'appartiennent $\mathcal{P}_{s[n]p}$ pour $p > \frac{1}{K+1}$.

L'égalité (3.19) implique que dans chaque point $m \in]K,n]$ toutes les fonctions $\varphi_j^{[n]}$, $0 \leq j \leq K$, ont les valeurs *différentes*. Soit

$$\psi(p) \stackrel{\text{df}}{=} \min_{K<m\leq n} \min_{0<j<K} \varphi_j(m), \qquad 0 < p \leq \frac{1}{2}.$$

C'est une fonction continue de p; de plus (3.37) et (3.38) montrent que $\psi\left(\frac{1}{K+1}\right) > 0$. Par continuité, on obtient le point 3° du Théorème. □

Pour $K = 0$, c'est-à-dire, n variables indépendantes, le problème dégénère : la base affinne de $\mathcal{M}_{n[n]p}$ a un seul élément $\varphi_0^{[n]} = \mathbf{1}^{[n]}$ et la seule probabilité de $\mathcal{P}_{n[n]p}$ est $\mathbf{1}^{[n]}$.

IV. EXTENSIONS ÉCHANGEABLES OU STATIONNAIRES

Le problème étudié dans ce paragraphe est le suivant:

Étant donnée une densité de probabilité sur $\{0,1\}^n$ pour laquelle les applications coordonnées sont s à s indépendantes, à quelle condition est-elle la loi marginale d'une probabilité pour laquelle les applications coordonnées sont en nombre $n+1$ et s à s indépendantes?

Avec cette généralité, un tel prolongement est toujours possible en rajoutant un facteur indépendant.

Nous allons traiter le cas des probabilités échangeables, puis élargir au cas où les deux probabilités ont à leur échelle (n puis $n+1$) la propriété de stationnarité stricte, dont nous rappelons la définition (à l'échelle n):

(4.1) pour chaque $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n$, le système $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ a la même loi que le système $(x_{i_1+1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_k+1})$.

Dans les deux cas les lois marginales de dimension 1 sont identiques, on pose donc comme précédemment $p = P(x_1 = 0)$ avec $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Le problème se ramène donc à celui-ci:

A quelle condition une loi de probabilité $\Phi^{\{n\}} \in \mathcal{P}_{s,n,p}$ échangeable (ou stationnaire) peut–elle s'écrire $\Pi_n \Phi^{\{n+1\}}$, où $\Phi^{\{n+1\}} \in \mathcal{P}_{s,n+1,p}$ est échangeable (ou stationnaire)?

PROPOSITION 1 (Aldous [1], Lemme (4.11)). – *Soit $s > 1$ et soit $\Phi^{[n]} \in \mathcal{P}_{s[n]p}$ échangeable. Elle ne peut avoir d'extensions échangeables $\Phi^{[n+t]} \in \mathcal{P}_{s[n+t]p}$* ad infinitum *sauf si elle vaut $1^{[n]}$.* □

On s'intéresse en particulier au « temps d'arrêt » à partir duquel il n'y a plus d'extension qui soit une probabilité. On a vu plus haut que, dans le cas échangeable :

COROLLAIRE 1. – *Si $n > s$ et $0 < p \leq \dfrac{1}{n-s+1}$, alors $\varphi_0^{[n]}$ est une probabilité extrémale de $\mathcal{P}_{s[n]p}$, différente de $1^{[n]}$ et sa seule extension possible en probabilité échangeable est $\varphi_0^{[n+1]}$.*

Démonstration. – En effet, la seconde est bien extension « algébrique » (*i.e.* est une fonction de $\mathcal{M}_{s,n+1,p}$ telle que sa projection Π_n est $\varphi_0^{[n]}$) en vertu de (3.28). Montrons que c'est l'unique extension appartenant à $\mathcal{S}_{s[n+1]p}$.

Si $f^{[n+1]} \in \mathcal{S}_{s[n+1]p}$ est telle que $\Pi_n f^{[n+1]} = \varphi_0^{[n]}$, alors

$$f^{[n+1]} = \sum_{j=0}^{n-s+1} \alpha_j \varphi_j^{[n+1]}; \qquad \alpha_j \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{n-s+1} \alpha_j = 1, \tag{4.2}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_0^{[n]} &= \sum_{j=0}^{n-s} \alpha_j \frac{\binom{n-s}{j}}{\binom{n-s+1}{j}} \varphi_j^{[n]} + \sum_{j=1}^{n-s+1} \alpha_j \frac{\binom{n-s}{j-1}}{\binom{n-s+1}{j}} \varphi_{j-1}^{[n]} \\ &= \sum_{j=0}^{n-s} \left\{ \alpha_j \frac{\binom{n-s}{j}}{\binom{n-s+1}{j}} + \alpha_{j+1} \frac{\binom{n-s}{j}}{\binom{n-s+1}{j+1}} \right\} \varphi_j^{[n]}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ceci implique $\alpha_j = 0$ pour $1 \leq j \leq n-s+1$, donc $\alpha_0 = 1$. Enfin, cette extension est "possible" si et seulement si elle appartient à $\mathcal{P}_{s[n+1]p}$, *i.e.* si et seulement si $p \leq \dfrac{1}{n-s+2}$ (d'après le Théorème 1). □

THÉORÈME 2. – *Supposons $0 < s < n$ et $p \leq \dfrac{1}{n-s+1}$. Les seules extensions stationnaires s à s indépendantes de $\varphi_0^{[n]}$ sont les $\varphi_0^{[n+t]}$, tant que $p \leq \dfrac{1}{n-s+t+1}$. Au delà, il n'en existe plus.*

Démonstration. – On va prouver que si $\varphi_0^{[n]}$ a une extension *stationnaire*, alors c'est $\varphi_0^{[n+1]}$, l'extension échangeable (tout cela sous l'hypothèse de s à s indépendance pour les deux).

Toute extension stationnaire de $\varphi_0^{[n]}$ dans $\mathcal{P}_{s,n+1,p}$ s'écrit $\varphi_0^{[n+1]} + \theta^{\{n+1\}}$, où la fonction $\theta^{\{n+1\}}$ est telle que pour toute partie I de $[1, n+1]$ de cardinal s, d'après (2.7) on a $\Pi_I(\varphi_0^{[n+1]} + \theta^{\{n+1\}}) = 1^{\{s\}}$, et comme $\Pi_I(\varphi_0^{[n+1]}) = 1^{\{s\}}$, $\Pi_I(\theta^{\{n+1\}}) = 0^{\{s\}}$, soit $\theta^{\{n+1\}} \in \mathcal{V}_{s,n+1,p}$.

De plus, elle vérifie

$$\int \theta^{\{n+1\}} \tilde{p}(dx_1) = \int \theta^{\{n+1\}} \tilde{p}(dx_{n+1}) = 0. \tag{4.4}$$

($\Pi_n \theta^{\{n+1\}} = 0$ donne la deuxième égalité, et la stationnarité (4.1) la première.)

Enfin, l'expression $\varphi_0^{[n+1]} + \theta^{\{n+1\}}$ est non-négative, ce qui compte tenu de la nullité de $\varphi_0^{[n+1]}$ sur $[1, n-s+1]$ (d'après (3.18)) donne la non-négativité de $\theta^{\{n+1\}}$ sur cet intervalle, c'est-à-dire, $\theta^{\{n+1\}}(\omega) \geq 0$ pour $\omega \in A_l^{[n+1]}$, $1 \leq l \leq n-s+1$.

Nous allons montrer maintenant que $\theta^{\{n+1\}} \equiv 0$ sur le cube $\{0,1\}^{n+1}$.

Renumérotons les variables en posant

$$\xi = \xi_1, \qquad \zeta = \xi_{n+1}, \qquad \eta_i = \xi_{i+1}, \tag{4.5}$$

pour $i \in [1, n-1]$, de sorte que $\theta^{\{n+1\}}$ se factorise en

$$\theta^{\{n+1\}} = \xi\zeta\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}). \tag{4.6}$$

La propriété (2.12) implique que Δ est combinaison linéaire des monômes $\prod_{i \in J} \eta_i$ pour J de cardinal $| J |> s-2$.

Notons par B'_k un sous-ensemble de $\{0,1\}^{n-1}$, où:

- $n-s$ des η_i (ou k des ξ_{i+1}) valent $\dfrac{p}{1-p}$, les autres -1 $(0 \leq k \leq n-1)$;

et par B''_l un sous–ensemble de $\{0,1\}^{n+1}$, où:

- l des ξ_i valent $\dfrac{p}{1-p}$, les autres -1 $(0 \leq l \leq n+1)$.

(Dans les notations précédentes $B'_k = A_k^{[n-1]}, B''_l = A_l^{[n+1]}$.)

On voit facilement que:

- en un point ω de B'_k complété par $\xi = -1, \zeta = -1$, on se trouve en B''_k;
- en un point ω de B'_k complété par $\xi = -1, \zeta = \dfrac{p}{1-p}$ $\left(\text{ou par } \xi = \dfrac{p}{1-p}, \zeta = -1\right)$, on se trouve en B''_{k+1};

• en un point ω de B'_k complété par $\xi = \frac{p}{1-p}, \zeta = \frac{p}{1-p}$, on se trouve en B''_{k+2}.

Soit donc pour $k = 0$ et pour $\omega \in B'_0$,

• $\Delta(\omega) \leq 0$ car $\theta^{\{n+1\}}\left(-1, \frac{p}{1-p}, \omega\right) = -\frac{p}{1-p}\Delta(\omega) \geq 0$ (puisque $\varphi_0^{[n+1]}$ est nulle sur B''_1);

• $\Delta(\omega) \geq 0$ car $\theta^{\{n+1\}}\left(\frac{p}{1-p}, \frac{p}{1-p}, \omega\right) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \Delta(\omega) \geq 0$ (puisque $\varphi_0^{[n+1]}$ est nulle sur B''_2);

ensuite pour $k = 1$ et pour $\omega \in B'_1$,

• $\Delta(\omega) \leq 0$ car $\theta^{\{n+1\}}\left(-1, \frac{p}{1-p}, \omega\right) = -\frac{p}{1-p}\Delta(\omega) \geq 0$ (puisque $\varphi_0^{[n+1]}$ est nulle sur B''_2);

• $\Delta(\omega) \geq 0$ car $\theta^{\{n+1\}}\left(\frac{p}{1-p}, \frac{p}{1-p}, \omega\right) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \Delta(\omega) \geq 0$ (puisque $\varphi_0^{[n+1]}$ est nulle sur B''_3);

et allant jusqu'à la dernière équation :

• Δ est nulle sur B'_k pour $k \in [0, n-s]$

(pour $k = n - s$, ω dans B'_k peut être combiné avec le système $-1, -1$ et $\frac{p}{1-p}, -1$, mais pour $k = n - s + 1$ la considération des zéros de $\varphi_0^{[n+1]}$ ne donne que la non–négativité de Δ en choisissant $\zeta = \xi = -1$).

On obtient donc que Δ est nulle en tout point de $\{0, 1\}^{n-1}$ dont le nombre de 1 est compris entre 0 et $n - s$, ou encore dont le nombre de zéros est compris entre $s - 1$ et $n - 1$. Ceci suffit à assurer la nullité de Δ:

Soit J un sous-ensemble correspondant à un des monôme de plus bas degré dans Δ; disons, de cardinal $s - 1$ (d'après (4.7)). On a

$$\Delta = \alpha_J \prod_{j \in J} \eta_j + (\Delta - \alpha_J \prod_{j \in J} \eta_j); \tag{4.7}$$

d'où

$$\Pi_J \Delta = \alpha_J \prod_{j \in J} \eta_j, \tag{4.8}$$

puis d'après (2.5)

(4.9)
$$\Pi_J \Delta(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s-1 \text{ fois}}) = \sum_{\tilde{\omega} \in \{0,1\}^{n-s}} \Delta(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s-1 \text{ fois}}, \tilde{\omega}) p^{\alpha(\tilde{\omega})} (1-p)^{\beta(\tilde{\omega})} = 0,$$

car on a au moins $s-1$ zéros dans chaque point $(0, 0, \dots, 0, \tilde{\omega})$, c'est-à-dire que $\alpha_J \prod_{j \in J} \eta_j = 0$ quand $\eta_j = -1$ pour tout $j \in J$, ce qui exige $\alpha_J = 0$.

Ceci implique que Δ ne contient que des monômes d'ordre $\geq s$, on projette maintenant par les Π_J, J de cardinal s, le résultat est nul sur $(0, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^s$, donc pour tous $\eta_j = -1$, $j \in J$, donc α_J est nul, ...

De proche en proche on trouve enfin que $\theta^{\{n+1\}} \equiv 0$, et la seule extension stationnaire possible de $\varphi_0^{[n]}$ est $\varphi_0^{[n+1]}$, à condition bien sûr, que $p \leq \dfrac{1}{n-s+2}$. □

COROLLAIRE 2. – *Soient $0 < s < n \leq m$ des entiers par ailleurs arbitraires. Il existe une probabilité sur $\{0, 1\}^n$ stationnaire et s à s indépendante, qui a des extensions stationnaires s à s indépendantes jusqu'à la dimension m incluse, mais pas au delà.*

Démonstration. – Le corollaire s'obtient en réglant p. □

V. EXEMPLES

Pour valider ce qui précède, encore faut-il montrer qu'à la différence du cas échangeable, il existe des processus stationnaires x_n, $n \in \mathbb{N}$, qui sont deux à deux indépendants sans être indépendants dans leur ensemble.

EXEMPLE 1. – On se donne:

- ε_n, $n \in \mathbb{Z}$, une suite de signes centrés indépendants;
- y_n, $n \in \mathbb{Z}$, une suite d'indicatrices de même loi indépendantes mutuellement et de la suite précédente, telle que

$$\alpha \stackrel{\text{df}}{=} E y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

On pose

$$(5.1) \qquad x_n \stackrel{\text{df}}{=} y_n \varepsilon_n + (1 - y_n) \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Cette suite possède les propriétés suivantes:

a) x_n a comme valeurs -1 et $+1$;

b) $E x_n = 0$, $\sigma^2(x_n) = 1$, $E x_n x_{n+k} = 0$; $n, k > 0$.

Ce processus est donc stationnaire, 2 à 2 indépendant, mais pas 3 à 3, car

c) $E x_n x_{n+1} x_{n+2} = \alpha^2 (1 - \alpha)$, $n \geq 1$.

En effet, parmi les huit termes, sept sont clairement centrés, mais il reste

$$(y_n\varepsilon_n)(y_{n+1}\varepsilon_{n+1})((1-y_{n+2})\varepsilon_{n+1}\varepsilon_n), \tag{5.2}$$

dont l'espérance vaut $\alpha^2(1-\alpha)$.

Il est évident (par construction) que la suite x_n, $n \in \mathbb{N}$, est 2-dépendante, c'est-à-dire, les σ-algèbres $\mathcal{B}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ et $\mathcal{B}(x_s, x_{s+1}, \ldots)$ sont indépendantes pour tous $s - r > 2$. De plus, elle est stationnaire et uniformément bornée, donc elle satisfait la condition de Lindeberg.

Les variables x_n, $n \in \mathbb{N}$, sont non-corrélées (c'est l'indépendance 2 à 2!), donc

$$\sigma^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n.$$

Le Théorème de Hoeffding, Robbins et Diananda [6] implique que la suite x_n, $n \in \mathbb{N}$, satisfait le Théorème central limite:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1). \tag{5.3}$$

Remarquons aussi que la suite x_n, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas 1-dépendante, c'est-à-dire, les variables aléatoires $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ et $(x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots)$ sont dépendantes pour tous $r \geq 1$. □

On peut facilement généraliser cet exemple en: stationnaire, s à s indépendant et non indépendant mutuellement, en prenant une combinaison aléatoire de ε et d'un produit sur son passé :

$$x_n \stackrel{\text{df}}{=} y_n\varepsilon_n + (1-y_n)\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}\cdots\varepsilon_{n-s}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

EXEMPLE 2. – Définissons

$$\tilde{x}_n \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} V_l^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

où

$$V_{2k}^{(n)} \stackrel{\text{df}}{=} I_{A_{2k}^{(n)}}\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}\cdots\varepsilon_{n+\alpha_k-1}; \tag{5.6}$$
$$V_{2k+1}^{(n)} \stackrel{\text{df}}{=} I_{A_{2k+1}^{(n)}}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}\cdots\varepsilon_{n-\beta_k};$$

où les suites α_k, β_k, sont données par :

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = s(s+1), \ldots, \alpha_k = s(s+1)^{2k-3}, \ldots$$
$$\beta_1 = s, \qquad \beta_2 = s(s+1)^2, \ldots, \beta_k = s(s+1)^{2k-2}, \ldots$$

La suite $\tilde{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$, est s à s indépendante, mais pas $s+1$ à $s+1$. □

Il est très peu probable, que l'Exemple 2 soit m-dépendant pour un certain $m > 1$.

Un contre-exemple définitif quand la m-dépendance est le suivant :

EXEMPLE 3. – En reprenant les y_n du premier exemple, pour un $m > 1$ quelconque fixé définissons

$$\left\{\begin{array}{l} x_n^{(m)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} y_n \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \ldots \varepsilon_{n+m-1} + (1 - y_n) \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2} \ldots \varepsilon_{n-2m}, \\ \qquad\qquad n \in \mathbb{N}. \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Cette suite est stationnaire et

$$E x_{k+1}^{(m)} x_{k+m+1}^{(m)} x_{k+2m+1}^{(m)} > 0, \qquad k \geq 1, \tag{5.8}$$

donc elle n'est pas m-dépendante.

Maintenant, soit $M : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire indépendante de toutes les variables $x_n^{(m)}$ et telle que

$$P[M = m] > 0, \qquad m \geq 1. \tag{5.8}$$

Définissons

$$\bar{x}_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} I_{[M=m]} x_n^{(m)}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

On a

$$\bar{x}_n \bar{x}_k = \sum_{m=1}^{\infty} I_{[M=m]} x_n^{(m)} x_k^{(m)}, \qquad n, k \in \mathbb{N}, \tag{5.10}$$

$$\bar{x}_n \bar{x}_k \bar{x}_l = \sum_{m=1}^{\infty} I_{[M=m]} x_n^{(m)} x_k^{(m)} x_l^{(m)}, \qquad n, k, l \in \mathbb{N}, \tag{5.11}$$

donc cette suite ne peut pas être m-dépendante, $m \geq 1$. Évidemment cette suite n'est pas ergodique. □

Mais ces constructions ne fonctionnent que pour $p = \frac{1}{2}$.

Nous allons construire maintenant des processus stationnaires à valeurs 0 et 1, indépendants s à s (et non indépendants) pour $0 < p < 1$ quelconque.

Considérons une suite des variables aléatoires U_n, $n \in \mathbb{Z}$, mutuellement indépendantes distribuées uniformément sur le tore $\mathbb{T}_1$ (c'est-à-dire, leurs sommes ainsi que toutes les égalités et inégalités concernant les U se lisent modulo 1). Fixons $s > 1$ et posons

$$Z_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} U_{n-s} + \ldots + U_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

LEMME 5. – *a) pour toute partie I de $\mathbb{Z}$ $k \leq s$ éléments et toute suite c_n, $n \in I$, étant choisi comme U_n ou Z_n, on a l'indépendance mutuelle;*

b) le même pour toute partie J de $\mathbb{Z}$ $s+1$, des éléments c_n, $n \in J$, étant choisi comme U_n ou Z_n, sauf dans le cas de $J = [n, n+s]$ et des variables $U_n, U_{n+1}, \ldots U_{n+s-1}, Z_{n+s}$.

(On peut trouver un cas particulier $\{U_1, U_2, U_1+U_2\}$ de ce lemme dans [20].)

Démonstration. – Il est facile de généraliser un résultat de Janson [13] de la façon suivante :

SOUS-LEMME. – *Pour $n \geq 1$ quelconque fixé, soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, variables aléatoires complexes telles que*

$$| Y_1 |=| Y_2 |= \ldots | Y_n |= 1, \ p.s.$$

Alors le vecteur $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ a la même loi de probabilité conjointe que le vecteur aléatoire $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ si et seulement si

$$E(Y_1^{m_1} Y_2^{m_2} \ldots Y_n^{m_n}) = \mathbf{1}_{[m_1=m_2=\ldots=m_n=0]}$$

pour tous $m_1, m_2, \ldots, , m_n \in \mathbb{Z}$. □

En particulier, les variables

$$V_i \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} U_j, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

où les coefficients α_{ij} sont entiers et les sommes modulo 1, sont mutuellement indépendantes si et seulement si le rang de la matrice A est égal n. □

Fixons $s > 1$ et $0 \leq p < 1$.

Posons

$$\beta(x) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{1}_{[0,p]}(x), \qquad x \in [0,1];$$

$$b_n \stackrel{\text{df}}{=} \beta(U_n), \qquad n \in \mathbb{Z};$$

$$\xi_n \stackrel{\text{df}}{=} \beta(U_{n-s} + \ldots + U_{n-1}) = \mathbf{1}_{[0 \leq U_{n-s}+\ldots+U_{n-1} \leq p]}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

LEMME 6. – *a)*

$$E(b_n) = E(\xi_n) = p. \tag{5.12}$$

b) pour toute partie I de $\mathbb{Z}$ $k \leq s$ éléments et toute suite c_n, $n \in I$, étant choisi comme b_n ou ξ_n, on a

$$E \prod_{n \in I} c_n = p^k. \tag{5.13}$$

c) pour toute partie J de $\mathbb{Z}$ $s+1$, des éléments c_n, $n \in J$, étant choisi comme b_n ou ξ_n, on a

$$E \prod_{n \in J} c_n = p^{s+1}, \tag{5.14}$$

sauf peut-être dans le cas de $J = [n, n+s]$ et du produit $b_n b_{n+1} \ldots b_{n+s-1} \xi_{n+s}$, où cette valeur peut être différente.

Démonstration. – La première partie est en fait une conséquence du Lemme 5, mais nous allons la démontrer autrement.

Notons $S[a, b[$ pour la somme des U_k, $a \leq k < b$. b_n est $\beta(S[n, n+1[)$ et ξ_n est $\beta(S[n-s, n[)$.

Notons J_n l'intervalle associé c_n, de sorte que quand $c_n = b_n$ on a $J_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} [n, n+1[$, sinon $J_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} [n-s, n[$. On note également $S(J)$ pour la somme sur J.

L'espérance d'un I produit est l'intégrale de la mesure de Haar du $T_1^{\otimes \mathbb{Z}}$ sur l'ensemble déterminé par l'intersection des conditions $\{S(J_i) \in [0, p];\ i \in I\}$.

Chaque fois que l'on trouve un indice j appartenant à exactement un J_i, la variable U_j correspondante apparaît dans une seule condition et

$$\int \mathbf{1}_{\{S(J_i) \in [0,p]\}} du_j = p. \tag{5.15}$$

Ceci prouve (5.12) (une seule condition). De plus, la condition intégrée disparaît. Si un indice d'un J_i, $i \in I$, est isolé, on sort donc un facteur p et on est ramené au problème avec la cardinalité de I diminuée de 1.

Soit I de cardinal k, $I = \{\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k\}$.

Le plus grand indice de $J(\tau_j)$ est soit τ_j (cas b)) soit $\tau_j - 1$, (cas ξ)).

Pour $j = k$, il est isolé sauf dans le cas ou on a ξ en τ_k et b en τ_{k-1} et $\tau_k = \tau_{k-1} + 1$.

Pour que son second indice qui est $\tau_k - 2$ ne soit pas isolé, il faut qu'on ait à la fois $\tau_{k-2} = \tau_k - 2$ et la situation b) en τ_{k-2}, ...

Autrement dit, on ne peut éliminer simplement la dernière condition que si la fin de I est $\ldots \tau_k - s, \tau_k - s + 1, \ldots, \tau_k$, ce qui exige que sa cardinalité k soit $> s$.

Pour b), la cardinalité tant s, on peut donc choisir un indice d'intégration qui élimine la dernière condition et met p en facteur. On est donc ramené au problème en cardinalité $s-1, \ldots$, on trouve bien p^s.

Pour c), le seul cas douteux est le cas indiqué dans l'énoncé.

Évidemment le même résultat est valable si on prend dans la définition des b et des ξ l'appartenance, non pas $[0, p]$ modulo 1, mais celle $[\alpha, \alpha + p]$, les α pouvant d'ailleurs dépendre du n (le numéro) et de la catégorie (b ou ξ).

Prenant $\alpha = 0$ pour les b, un autre α commun pour tous les ξ, on va montrer qu'il existe toujours un choix (de α) tel que

$$E(b_n b_{n+1} \dots b_{n+s-1} \xi_{n+s}) \neq p^{s+1}. \tag{5.16}$$

En considérant les b comme réelles, uniformes sur $[0, p]$, indépendantes et en nombre s, de somme S, il suffit de démontrer qu'il existe un α_0 tel que

$$P(S \in [\alpha_0, \alpha_0 + p] + \mathbb{Z}) \neq p. \tag{5.17}$$

Supposons *a contrario* que pour tout α on a

$$P(S \in [\alpha, \alpha + p] + \mathbb{Z}) = p. \tag{5.18}$$

Soit g_s la densité de S, elle est continue (puisque $s > 1$) et satisfait l'équation

$$g_{s+1}(x) = \int_{x-p}^{x} g_s(y) \frac{dy}{p}. \tag{5.19}$$

Considérons la densité de S modulo 1:

$$h(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_s(x + k).$$

Alors pour tout α on a

$$\int_{\alpha}^{\alpha+p} h(x)dx = P(S \in [\alpha, \alpha + p] + \mathbb{Z}) = p, \tag{5.20}$$

donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha}^{\alpha+p} h(x)dx = h(\alpha + p) - h(\alpha), \tag{5.21}$$

c'est-à-dire, h serait périodique de période p.

Notons maintenant $h_{s,p}$ la dite fonction. L'équation (5.19) implique

$$ph_{s+1,p}(x) = \int_{x-p}^{x} h_{s,p}(y)dy, \tag{5.22}$$

donc on a

$$ph'_{s+1,p}(x) = h_{s,p}(x) - h_{s,p}(x - p). \tag{5.23}$$

On vérifie tout d'abord "à la main" que $h_{2,p}$ n'est pas périodique de période p.

Ensuite, supposons que les fonctions $h_{s,p}$ ne sont pas périodiques jusqu'à un certain s_0, mais $h_{s_0+1,p}$ devient périodique (de période p).

Alors $h'_{s_0+1,p}$ l'est aussi et on a

$$ph'_{s_0+1,p}(x) = ph'_{s_0+1,p}(x+p), \tag{5.24}$$

donc d'après (5.23)

$$h_{s_0,p}(x) = \frac{1}{2}[h_{s_0,p}(x-p) + h_{s_0,p}(x+p)]. \tag{5.25}$$

Ceci implique que la fonction $h_{s_0,p}$ est constante sur les trajectoires ($k \longrightarrow x + kp$), donc périodique, d'où une contradiction. $\square$

Maintenant une construction analogue à l'Exemple 1 avec une pièce de monnaie équilibrée et indépendante des U_n; $n \in \mathbb{N}$, donne:

THÉORÈME 3. – *Pour tout* $0 < p < 1$ *et tout* $s > 1$ *il existe un processus* x_n; $n \in \mathbb{N}$, *à deux valeurs,* $P[x_n = 1] = p$, $n \in \mathbb{N}$, *stationnaire,* s *à* s *indépendant et non* $s+1$ *à* $s+1$ *indépendant.* $\square$

Remarque finale. – Ce processus est ergodique, comme celui de l'exemple 1 : Si on désigne l'opérateur de shift par T et par $\mathcal{F}_o$ l'algèbre des événements ne dépendant que d'un nombre fini de x_n, comme la construction est à horizon fini, pour tout couple A, B de parties de $\mathcal{F}_o$, il existe $K(A, B, s)$ tel que pour $k > K(A, B, s)$, A et $T^{-k}B$ sont indépendants. Comme $\mathcal{F}_o$ est générateur, on obtient l'ergodicité en appliquant le Théorème 1.4 de [3 *bis*].

RÉFÉRENCES

[1] D. J. ALDOUS, Exchangeability and related topics, *Springer Lecture Notes in Math.*, Vol. **1117**, 1983, pp. 1-198.

[2] C. B. BELL, Maximal independent stochastic processes, *Ann. Math. Statist.*, Vol. **32**, 1961, pp. 704-708.

[3] S. N. BERNSTEIN, Théorie des probabilités, *en Russe*, Gostechizdat, Moscou-Leningrad, 4e éd., 1946.

[3 *bis*] P. BILLINGSLEY, Ergodic Theory and Information, *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics,* 1965.

[4] R. C. BRADLEY, A stationary, pairwise independent, absolutely regular sequence for which the central limit theorem fails, *Probab. Th. Rel. Fields*, Vol. **81**, 1989, pp. 1-10.

[5] S. CSÖRGÖ, K. TANDORI et V. TOTIK, On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, *Ann. Math. Hung.*, Vol. **42**, 1983, p. 319-330.

[6] P. H. DIANANDA, The central limit theorem for m-dependent variables, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. **51**, 1955, p. 92-95.

[7] Y. DERRIENNIC, Une lettre, *Janvier* 1991.

[8] Y. DERRIENNIC et A. KLOPOTOWSKI, Cinq variables aléatoires binaires stationnaires deux à deux indépendantes, *Prépubl. Institut Galilée,* Université Paris XIII, Novembre 1991, p. 1-38.

[9] Y. DERRIENNIC et A. KLOPOTOWSKI, Sur les hypothèses constructibles concernant des suites de variables aléatoires binaires, *Idem*, Décembre 1991, p. 1-10.
[10] N. ETEMADI, An elementary proof of the strong law of large numbers, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, Vol. **55**, 1981, p. 119-122.
[11] S. GEISSER et N. MANTEL, Pairwise independence of jointly dependent variables, *Ann. Math. Statist.*, Vol. **32**, 1962, pp. 290-291.
[12] C. P. HAN, Dependence of random variables, *The Amer. Statist.*, Vol. **25**, 1971, p. 35.
[13] S. JANSON, Some pairwise independent sequences for which the central limit theorem fails, *Stochastics*, Vol. **23**, 1988, pp. 439-448.
[14] A. JOFFE, On a sequence of almost deterministic pairwise independent random variables, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. **29**, 1971, pp. 381-382.
[15] A. JOFFE, On a set of almost deterministic k-independent random variables, *Ann. of Prob.*, Vol. **2**, 1974, pp. 161-162.
[16] J. F. C. KINGMAN, Uses of exchangeability, *Ann. of Prob.*, Vol. **6**, 1978, pp. 183-197.
[17] H. O. LANCASTER, Pairwise statistical independence, *Ann. Math. Statist.*, Vol. **36**, 1965, pp. 1313-1317.
[18] P. LÉVY, Exemple de processus pseudo-Markoviens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **228**, 1949, pp. 2004-2006.
[19] G. L. O'BRIEN, Pairwise independent random variables, *Ann. of Prob.*, Vol. **8**, 1980, pp. 170-175.
[20] E. J. G. PITMAN et E. J. WILLIAMS, Cauchy - distributed functions of Cauchy variates, *Ann. Math. Statist.*, Vol. **38**, 1967, pp. 916-918.
[21] J. B. ROBERTSON, Independence and Fair Coin-Tossing, *Math. Scientist*, Vol. **10**, 1985, pp. 109-117.
[22] J. B. ROBERTSON et J. M. WOMACK, A pairwise independent stationary stochastic process, *Statistics and Probability Letters*, Vol. **3**, 1985, pp. 195-199.
[23] M. ROSENBLATT et D. SLEPIAN, Nth order Markov chain with every N variables independent, *J. SIAM*, Vol. **10**, 1962, pp. 537-549.
[24] J. M. STOYANOV, Counterexamples in probability, John Wiley & Sons, 1987.

(Manuscrit reçu le 23 juin 1992;
version révisée reçue le 30 novembre 1993.)