ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

T. J. RABEHERIMANANA

Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire et algèbres de Lie Nilpotentes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 30, nº 3 (1994), p. 331-352

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1994__30_3_331_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 30, n° 3, 1994, p. 331-352 *Probabilités et Statistiques*

Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire et algèbres de Lie Nilpotentes

par

T. J. RABEHERIMANANA

U.F.R. de Mathématiques,
Université Paris-VII,
75251 Paris Cedex 05, 75634, France.

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous étudions un problème de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire en considérant le couple signal/observations $(\mathcal{X}^\varepsilon, \mathcal{Y}^\varepsilon)$, solution de :

$$\left.\begin{array}{c} d\mathcal{X}_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1}^{1} \tilde{\mathrm{A}}_j(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\tilde{\mathrm{B}}_t^{\varepsilon, j} + \mathrm{A}_0(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, k} \\ d\mathcal{Y}_t^\varepsilon = \Gamma(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + d\mathrm{B}_t: \quad \mathrm{X}_0^\varepsilon = x^\varepsilon,\ \mathcal{Y}_0^\varepsilon = 0. \end{array}\right\}$$

Quand $\varepsilon \searrow 0$, et x^ε tend vers x, nous démontrons sous la condition de nilpotence de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ engendrée par les champs de vecteurs $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, un principe de grandes déviations pour la loi conditionnelle $\mathrm{M}^\varepsilon(\cdot, dw)$ du processus signal $\mathcal{X}^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ sachant l'observation $\mathcal{Y}^\varepsilon = (\mathcal{Y}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ généralisant un résultat de Doss.

Mots clés : grandes déviations, filtrage non linéaire, algèbres de Lie nilpotentes, théorie de Wentzell-Freidlin, support de Stroock-Varadhan.

ABSTRACT. – In this paper, we study a problem of large deviations in the theory of non linear filtering and consider the couple signal/observation $(\mathcal{X}^\varepsilon, \mathcal{Y}^\varepsilon)$, solution of:

$$\left.\begin{array}{c} d\mathcal{X}_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1} \tilde{\mathrm{A}}_j(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\tilde{\mathrm{B}}_t^{\varepsilon, j} + \mathrm{A}_0(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + \sum_{k=1} \mathrm{A}_k(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, k} \\ d\mathcal{Y}_t^\varepsilon = \Gamma(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + d\mathrm{B}_t; \quad \mathrm{X}_0^\varepsilon = x^\varepsilon,\ \mathcal{Y}_0^\varepsilon = 0. \end{array}\right\}$$

Classification A.M.S. : 60 F 10, 60 G 35.

When $\varepsilon \searrow 0$, and x^ε tends towards x, we show under the condition of nilpotence of Lie's Algebra $\mathcal{L}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$, generated by vector fields $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, a large deviations principle for the conditional probability distribution $\mathrm{M}^\varepsilon(\cdot, dw)$ of the signal process $\mathcal{X}^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ given the observation $\mathcal{Y}^\varepsilon = (\mathcal{Y}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ extending a Doss' result.

0. INTRODUCTION

Dans son article [1], H. Doss considérait le couple « signal-observation » $(\mathcal{X}_t^\varepsilon, \mathcal{Y}_t^\varepsilon) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$, solution de :

$$\left.\begin{aligned} d\mathcal{X}_t^\varepsilon &= \varepsilon \sum_{j=1}^{1} \tilde{\mathrm{A}}_j(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\tilde{\mathrm{B}}_t^j + \mathrm{A}_0(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k(\mathcal{X}_t^\varepsilon) \circ d\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, k} \\ d\mathcal{Y}_t^\varepsilon &= \Gamma(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt + d\mathrm{B}_t; \quad \mathrm{X}_0^\varepsilon = x^\varepsilon, \ \mathcal{Y}_0^\varepsilon = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ici, les A_0, $\tilde{\mathrm{A}}_j$ et A_k sont $(n+1+1)$-champs de vecteurs assez réguliers sur $\mathbb{R}^d$, Γ est une application régulière de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$. $\tilde{\mathrm{B}} = (\tilde{\mathrm{B}}_t^j)_{j=1,\ldots,1}$ et $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t^k)$ sont deux mouvements browniens indépendants issus de 0 à l'instant 0. La notation « $\circ$ » désigne la différentielle au sens de Stratonovich. Sous la condition que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ est commutative, il démontre, quand ε vers 0 un principe de grandes déviations pour la loi conditionnelle $\mathrm{M}^\varepsilon(\cdot, dw)$ du processus « signal » $\mathcal{X}^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ sachant « l'observation » $\mathcal{Y}^\varepsilon = (\mathcal{Y}_t^\varepsilon)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$.

Dans la suite, si u est un entier naturel, ${}^u\Omega_{\mathrm{T}, x}$ désigne l'espace des fonctions continues de [0, T] dans $\mathbb{R}^u$, issues de x à l'instant 0. Cet espace est équipé de la topologie de la convergence uniforme et de sa tribu borélienne. ${}^u\mathrm{H}_{\mathrm{T}, 0}$ désigne le sous-espace de ${}^u\Omega_{\mathrm{T}, 0}$ constitué des fonctions absolument continues avec une dérivée de carré intégrable. On le munit d'une structure hilbertienne en posant $(f, g) = \int_0^{\mathrm{T}} \dot{f}_s \cdot \dot{g}_s \, \mathrm{ds}$ (espace de Caméron-Marint).

Le but du présent travail est d'examiner le même problème en supposant que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteur $\mathrm{A}_{k,\, k=1,\ldots,n}$ est nilpotente d'ordre p.

Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la solution $\mathcal{X}^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon)$ de l'E.D.S.,

$$\left.\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= \varepsilon \sum_{j=1}^{1} \tilde{A}_j (X_t^\varepsilon) \circ d\tilde{B}_t^j + A_0 (X_t^\varepsilon)\, dt + \sum_{k=1}^{n} A_k (X_t^\varepsilon) \circ dB_t^k \\ X_0^\varepsilon &= x^\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dans le cas nilpotent, X^ε, solution de (2) est, suivant Yamato [2] une fonctionnelle régulière du couple $(D^\varepsilon,\ Y)$ où Y désigne une famille finie d'intégrales itérées du mouvement brownien B et D^ε est solution d'une équation différentielle stochastique relativement à $\varepsilon\tilde{B}$ dont les coefficients dépendent continûment des trajectoires de Y. Nous démontrons l'existence d'une version régulière de la loi conditionnelle $T^\varepsilon(\cdot,\ dw)$ du processus X^ε solution de (2) sachant ces intégrales itérées telle que, pour tout U appartenant au support topologique de Y, la famille de mesures de probabilités $(T^\varepsilon(U,\ dw))_{\varepsilon>0}$ vérifie, quand ε tend vers 0, un principe de grandes déviations, avec un calcul explicite de la fonctionnelle d'action associée. Soit $N^\varepsilon(\cdot,\ dw)$ une version régulière de la loi conditionnelle de X^ε sachant B. On voit facilement que $N^\varepsilon(\cdot,\ dw) = T^\varepsilon(\ominus(\cdot),\ dw)$ où $\ominus$ est une fonctionnelle mesurable telle que $Y = \ominus(B)$. Par conséquent, la famille de mesures de probabilités $(N^\varepsilon(\omega,\ dw))_{\varepsilon>0} = (T^\varepsilon(\ominus(\omega),\ dw))_{\varepsilon>0} = (T^\varepsilon(Y_.(\omega),\ dw))_{\varepsilon>0}$, définie pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{T,\,0'}$ vérifie encore un principe de grandes déviations comme en Doss [1].

Grâce à ces résultats, nous en déduisons un principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire comme en [1]. On verra que les théorèmes essentiels de Doss sont encore valables dans la situation présente et que la famille de fonctionnelles d'actions calculée en [1] est la même que celle qui apparaît dans le cas nilpotent. La question reste, bien entendu, de savoir si ces énoncés restent valables en toute généralité.

Signalons que les résultats précédents peuvent être étendus si l'on remplace $\varepsilon\tilde{B}$ par un système dynamique perturbé Z^ε de type Wentzell-Freidlin [3] indépendant de B et que ce travail constitue une approche complémentaire de : [1] et [5] et d'une partie de [4].

La section 1 est consacrée au théorème de représentation et au résultat de grandes déviations associées à la famille de mesures de probabilités $(T^\varepsilon(\ominus(\omega),\ dw))_{\varepsilon>0} = (T^\varepsilon(Y_.(\omega),\ dw))_{\varepsilon>0}$ puis à la famille de mesures de probabilités $(N^\varepsilon(\omega,\ dw))_{\varepsilon>0}$ par identification.

La section 2 est consacrée au résultat principal concernant le P.G.D. en théorie du filtrage non linéaire.

1. ÉTUDE DU CAS OÙ Γ EST IDENTIQUEMENT NUL

Condition S1. – Nous supposons vérifiées les conditions suivantes :

1) L'application A_0 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est lipchitzienne et bornée.

2) Les champs de vecteurs $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_l$ sur $\mathbb{R}^d$ sont de classe C_b^2, c'est-à-dire que les dérivées de $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_l$ d'ordre ≤ 2 sont continues et bornées. Nous faisons la convention suivante : la dérivée d'ordre 0 est égale à la fonction elle-même.

3) Les champs de vecteurs $A_1, \ldots, A_n$ sont de classe C_b^∞ et l'algèbre de Lie $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)$ engendré par ces champs est nilpotente d'ordre p.

Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et β_x l'application de ${}^n H_{T,0} \times {}^l H_{T,0}$ dans ${}^d\Omega_{T,0}$ définie de la façon suivante :

$$\varphi_t = \beta_x (g, \tilde{g})_t \tag{3}$$

si, et seulement si,

$$\varphi_t = x + \int_0^t \tilde{A}(\varphi_s)\, d\tilde{g}_s + \int_0^t A_0(\varphi_s)\, ds + \int_0^t A(\varphi_s)\, dg_s, \qquad t \in [0, T],$$

où $A(\cdot)$ est l'élément de $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^n$, associé aux champs de vecteurs $A_1, \ldots, A_n$ et $\tilde{A}(\cdot)$ est l'élément de $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^l$, associé aux champs de vecteurs $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_l$.

Sous la condition S1, nous allons d'abord démontrer un principe de grandes déviations pour la version régulière $T^\varepsilon(\cdot, dw)$ de la loi conditionnelle de X^ε sachant $Y = (Y_t)_{t \in [0,T]}$, où Y est défini par (18).

Avant de donner le théorème de représentation de la solution de (2) sous la condition S1, nous allons rappeler les notations et certains résultats de Yamato [2];

Posons $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ (4)

$$E(p) = \{I = (i_1, \ldots, i_a);\, i_1, \ldots, i_a \in E,\, 1 \leq a \leq p\}, \qquad p = 1, 2, \ldots, n$$

$$E(\infty) = \bigcup_{p=1}^{\infty} E(p)$$

$$[X, Y] = XY - YX \tag{5}$$

Définissons par récurrence des champs de vecteurs A_I pour $I \in E(\infty)$

$$A_{(i_1, \ldots, i_n)} = [A_{(i_1, \ldots, i_{n-1})}, A_{i_n}] \tag{6}$$

Nous supposons que les composantes de A_I, $I \in E(\infty)$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$. Nous définissons aussi la famille des intégrales itérées B_t^I, $I \in E(p)$ et $t \geq 0$ par récurrence

$B_t^{(i_1,\dots,i_n)} = \int_0^t B_s^{(i_1,\dots,i_{n-1})} \circ dB_s^{i_n}$. Avec la convention $B_t^0 = t$, $t \geq 0$.(7)

On écrira aussi :

$A_{i_1,\dots,i_n}$ et $B_t^{i_1,\dots,i_n}$ au lieu de $A_{(i_1,\dots,i_n)}$ et $B_t^{(i_1,\dots,i_n)}$. (8)

Nous fixons un entier positif p. L'ensemble $\{y = (y^I),\ I \in E(p)\}$ sera identifié à $\mathbb{R}^m$ avec m=Cardinal de $E(p)$.

On définit aussi les champs de vecteurs Q_i, $i \in E$ sur $\mathbb{R}^m$ par :

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\substack{a+1 \leq p \\ j_1,\dots,j_a \in E}} y^{j_1,\dots,j_a} \frac{\partial}{\partial y^{j_1,\dots,j_a,i}}. \tag{9}$$

Soient $\mathbb{R}(E)$ l'espace linéaire de base E et $\mathbb{T}(E)$ l'algèbre tensorielle basée sur $\mathbb{R}(E)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{T}(E) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}(E) \oplus (\mathbb{R}(E) \oplus \mathbb{R}(E)) \oplus \dots \tag{10}$$

Définissons le crochet dans $\mathbb{T}(E)$ par :

$$[a, b] = a \otimes b - b \otimes a,\ a,\ b \in \mathbb{T}(E). \tag{11}$$

Soit $\mathbb{L}(E)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathbb{T}(E)$ engendré par E. $\mathbb{L}(E)$ et $T(E)$ sont des algèbres de Lie libres engendrées par E.

Nous définissons $[i_1,\dots,i_a] \in \mathbb{L}(E)$ pour $(i_1,\dots,i_a) \in E(\infty)$, par récurrence

$$[i_1,\dots,i_a] = [[i_1,\dots,i_{a-1}],\ i_a]. \tag{12}$$

Chaque $[i_1,\dots,i_a]$ est exprimé par

$$[i_1,\dots,i_a] = \sum_{(j_1,\dots,j_b) \in E(\infty)} C_{i_1,\dots,i_a}^{j_1,\dots,j_b}\ j_1 \otimes \dots \otimes j_b \tag{13}$$

et ces coefficients sont uniquement déterminés par la relation (13). Nous appelons par $C(E, p)$ les matrices C_I^J, I, $J \in E(p)$.

Puisque $C_I^J = \delta_i^j$, i, $j \in E$, nous pouvons toujours choisir un sous-ensemble F de $E(p)$ vérifiant la propriété P suivante :

Propriété P. – F est un sous-ensemble maximal de $E(p)$ tel que les vecteurs-colonnes de $C(E, p) = (C_I^J)$ pour $J \in F$ sont linéairement indépendants.

Soit r le rang de la matrice $\mathrm{C}(\mathrm{E}, p)$ et fixons une bijection :

$$\nu : \quad \mathrm{F} + \mathrm{E}(p)\backslash\mathrm{F} + \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots ; m + d\}$$

avec

$$\nu(\mathrm{F}) = \{1, \ldots, r\}, \ \nu(\mathrm{E}(p)\backslash\mathrm{F}) = \{r+1, \ldots, m\},$$

$\nu\{1, \ldots, d\} = \{m+1, \ldots, m+d\}$ où $\mathrm{F} + \mathrm{E}(p)\backslash\mathrm{F} + \{1, \ldots, d\}$ est la somme directe de ces ensembles.

Soit F un sous-ensemble de $\mathrm{E}(p)$ vérifiant la propriété P. On choisit un sous-ensemble G de $\mathrm{E}(p)$ avec r éléments de telle façon que la matrice $\mathrm{C}(\mathrm{G}, \mathrm{F}) = (\mathrm{C}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{G}, \mathrm{J}\in\mathrm{F}}$ soit inversible.

Pour chaque $\mathrm{I} \in \mathrm{E}(p)$, soit $\mathrm{Q}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}}(y)$, $\mathrm{J} \in \mathrm{E}(p)$ les composantes de Q_{I}. Posons $\mathrm{Q}(\mathrm{G}, \mathrm{F}) = (\mathrm{Q}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{G}, \mathrm{J}\in\mathrm{F}}$. On note $\mathrm{R} = (\mathrm{R}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{J}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{F}, \mathrm{J}\in\mathrm{G}}$ la matrice inverse de $\mathrm{Q}(\mathrm{G}, \mathrm{F})$.

Soit μ la bijection réciproque de ν définie après la propriété P. Nous définissons $\mathrm{T}_{\rho}^{i}(z)$, $z \in \mathbb{R}^{m+d}$ pour chaque $i \in \{r+1, \ldots, m+d\}$, $\rho \in \{1, \ldots, r\}$ par :

$$\mathrm{T}_{\rho}^{i}(z) = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{\mathrm{I}\in\mathrm{G}} \mathrm{R}_{\mu(\rho)}^{\mathrm{I}}(z^1, \ldots, z^m)\, \mathrm{Q}_{\mathrm{I}}^{\mu(i)}(z^1, \ldots, z^m) \\ \text{si} \quad r+1 \leq i \leq m \\ \displaystyle\sum_{\mathrm{I}\in\mathrm{G}} \mathrm{R}_{\mu(\rho)}^{\mathrm{I}}(z^1, \ldots, z^m)\, \mathrm{A}_{\mathrm{I}}^{\mu(i)}(z^{m+1}, \ldots, z^{m+d}), \\ m+1 \leq i \leq m+d \end{array} \right\} \tag{14}$$

Sous la condition S1, le système d'équations aux différentielles totales

$$\left. \begin{array}{c} dv^i = \displaystyle\sum_{\rho=1}^{r} \mathrm{T}_{\rho}^{i}(u^1, \ldots, u^r, v^{r+1}, \ldots, v^{m+d})\, du^{\rho}, \\ r+1 \leq i \leq m+d \end{array} \right\} \tag{15}$$

avec la condition initiale

$$v(q^1, \ldots, q^r) = (q^{r+1}, \ldots, q^{m+d}) \tag{16}$$

a une solution unique définie sur $\mathbb{R}^r$ pour chaque $q = (q^1, \ldots, q^{m+d}) \in \mathbb{R}^{m+d}$.

La solution de (15) et de (16) nous donne une fonction $f(q, u) = (f^i(q, u))$, $r+1 \leq i \leq m+d$, $q \in \mathbb{R}^{m+d}$, $u \in \mathbb{R}^r$, définie par :

$$\left. \begin{array}{r} f^i(q, u) = u^i, \quad 1 \leq i \leq r \\ f^i(q, u) = v^i, \quad r+1 \leq i \leq m+d \end{array} \right\} \tag{17}$$

Posons :

$$\mathrm{Y}_t = (\mathrm{B}_t^{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{F}} = \mathrm{B}_t^{\mathrm{F}}$$

Y_t est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{Y}_t^{\mathrm{I}} = \sum_{j\in\mathrm{E}} \mathrm{Q}_j^{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}_t)\circ d\mathrm{B}_t^j, \quad \mathrm{I}\in\mathrm{F} \\ \mathrm{Y}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Considérons la fonction f définie par (17). Dans la suite nous écrirons respectivement $\partial_1 f, \ldots, \partial_{m+d} f, \partial_{m+d+1} f, \ldots, \partial_{m+d+r} f$ les différentes dérivées partielles de f par rapport aux variables $z^1, \ldots, z^{m+d}, u^1, \ldots$ et u^r.

Posons :

$$h = (f^{m+1}, \ldots, f^{m+d}). \tag{19}$$

Pour chaque $g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ soit $\ominus$ l'application de ${}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ dans ${}^r\Omega_{\mathrm{T},0}$ définie par :

$\ominus(g) = \mathrm{U}$, si U est solution de :

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{U}_t^{\mathrm{I}} = \sum_{j\in\mathrm{E}} \mathrm{Q}_j^{\mathrm{I}}(\mathrm{U}_t)\, dg_t^j, \quad \mathrm{I}\in\mathrm{F} \\ \mathrm{U}_0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

La résolution de (20) nous permet d'écrire dans ce cas :

$$\mathrm{U} = \ominus(g) = g^{\mathrm{F}} \tag{21}$$

Posons

$${}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0} = \{\mathrm{U} \in {}^r\mathrm{H}_{\mathrm{T},0} \text{ tel qu'il existe } g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0} \text{ avec } \mathrm{U} = (g^{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathrm{F}}\}. \tag{22}$$

Par le théorème du support de Stroock-Varadhan,

$$\operatorname{Supp} \mathrm{Y} = \overline{{}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0}}, \text{ où Y est défini par (18).} \tag{23}$$

Nous posons

$${}^r\Omega'_{\mathrm{T},0} = \operatorname{Supp} \mathrm{Y}. \tag{24}$$

Pour chaque $\mathrm{U} \in {}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0}$, définissons une application $(\beta_x)'$ de ${}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0} \times {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ dans ${}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$ par :

$$(\varphi_t) = (\beta_x)'(\mathrm{U}, \tilde{g})_t \tag{25}$$

si, et seulement si,

$\varphi_t = \beta_x(g, \tilde{g})_t$ où β_x est définie par (3) lorsque $\mathrm{U} = \ominus(g) = g^{\mathrm{F}}$.

LEMME 1. – *Sous la condition* S1, *la fonctionnelle* $(\beta_x)'$ *définie par* (25), *admet un prolongement unique, noté encore* $(\beta_x)'$ *défini sur* ${}^r\Omega'_{\mathrm{T},x} \times {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ *à valeurs dans* ${}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$ *tel que pour tout* $\tilde{g} \in {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ *l'application :* $\mathrm{U} \in {}^r\Omega'_{\mathrm{T},0} \to (\beta_x)'(\mathrm{U}, \tilde{g}) \in {}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$ *soit continue pour la norme uniforme.*

Le prolongement $(\beta_x)'$ est donné par la formule explicite :

$$\left.\begin{array}{l}(\beta_x)'(\mathrm{U},\,\tilde{g})_t = h\,(0,\ldots,\,0,\,\mathrm{D_t};\,\mathrm{U}_t),\\ t\in[0,\,\mathrm{T}],\qquad (\mathrm{U},\,\tilde{g})\in{}^r\Omega'_{\mathrm{T},\,0}\times{}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}.\end{array}\right\}\tag{26}$$

$\mathrm{D} = (\mathrm{D}_t)_{t\in[0,\,\mathrm{T}]}$ est la solution de l'équation intégrale.

$$\mathrm{D}_t = x + \int_0^t b\,(\mathrm{D}_s,\,\mathrm{U}_s)\,ds + \int_0^t \sigma\,(\mathrm{D}_s,\,\mathrm{U}_s)\,d\tilde{g}_s,\tag{27}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} b\,(x,\,u) = \sum_{1\le i\le d} [\mathrm{A}_0^i\,(h\,(0,\ldots,0,\,x\,;\,u))\\ \times\,\partial_{m+i}\,h\,(f\,(0,\ldots,\,0,\,x,\,u)\,;\,0,\ldots,\,0)],\end{aligned}\tag{28}$$

pour chaque $1\le j\le 1$,

$$\sigma_j(x,u) = \sum_{1\le i\le d} [\tilde{\mathrm{A}}_j^i(h(0,\ldots,0,x;u))\times\partial_{m+i}h(f(0,\ldots,0,x,u);0,\ldots,0)],$$

$\sigma = (\sigma_1,\ldots,\,\sigma_1)$ est un élément de $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^1$, $(x,\,u)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^r$, f et h sont définies dans (17) et (19).

La solution de (27) existe à cause de la condition S1, *cf.* [2].

Démonstration, cf [2]. – Si $(\mathrm{U},\,\tilde{g})\in{}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},\,0}\times{}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}$, la démonstration consiste à vérifier, grâce à la formule du changement de variables, que $h\,(0,\ldots,\,0,\,\mathrm{D}_t\,;\,\mathrm{U}_t)$ est solution de (3). La propriété de continuité énoncée se lit ensuite sur les formules explicites donnant $h\,(0,\ldots,\,0,\,\mathrm{D}_t\,;\,\mathrm{U}_t)$ qui est bien défini pour tout $(\mathrm{U},\,\tilde{g})\in{}^r\Omega'_{\mathrm{T},\,0}\times{}^l\Omega'_{\mathrm{T},\,0}$.

Pour tous $\varepsilon>0$ et $g\in{}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}$, soit $\mathrm{X}^{\varepsilon,\,g} = (\mathrm{X}_t^{\varepsilon,\,g})_{t\in[0,\,\mathrm{T}]}$ la solution de

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_t^{\varepsilon,\,g} = x^\varepsilon + \sum_{1\le k\le n}\int_0^t \mathrm{A}_k\,(\mathrm{X}_s^{\varepsilon,\,g})\,dg_s^k\\ +\,\varepsilon\sum_{1\le j\le l}\int_0^t \tilde{\mathrm{A}}_j\,(\mathrm{X}_s^{\varepsilon,\,g})\circ d\tilde{\mathrm{B}}_s^j + \int_0^t \mathrm{A}_0\,(\mathrm{X}_s^{\varepsilon,\,g})\,ds.\end{aligned}\tag{29}$$

THÉORÈME 2.

1) *Nous avons les représentations suivantes pour* X^ε, *solution de* (2) *et* $\mathrm{X}^{\varepsilon,\,g}$, *solution de* (29) :

$$\mathrm{X}_t^\varepsilon = h\,(0,\,\mathrm{D}_t^\varepsilon,\,\mathrm{B}_t^{\mathrm{F}})\tag{2'}$$

(29') $X_t^{\varepsilon,g} = h(0, D_t^\varepsilon, U_t)$ *pour tout* $U \in {}^r H'_{T,0}$ *de la forme* $U = g^F$ *où les processus* $D_t^\varepsilon = (D_t^\varepsilon)$ *et* $D_t^\varepsilon = (D_t^\varepsilon)$ *sont les solutions respectives de :*

$$D_t^\varepsilon = x^\varepsilon + \int_0^t b(D_s^\varepsilon, B_s^F)\, ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(D_s^\varepsilon, B_s^F) \circ d\tilde{B}_s \tag{30}$$

$$D_t^\varepsilon = x^\varepsilon + \int_0^t b(D_s^\varepsilon, g_s^F)\, ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(D_s^\varepsilon, g_s^F) \circ d\tilde{B}_s. \tag{30'}$$

Le triplet (h, b, σ) est défini dans le lemme 1; B^F et g^F sont définis par les équations (18) et (20).

Démonstration. – En effet, grâce à la formule d'Ito pour l'intégrale de Stratonovich, on vérifie que $h(0, D_t^\varepsilon, B_t^F)$ et $h(0, D_t^\varepsilon, U_t)$ sont les solutions respectives de (2) et de (29).

Par cette représentation explicite, le processus $(h(0, D_t^\varepsilon, U_t))\, t \in [0, T]$ est bien défini pour tout $U \in {}^r\Omega_{T,0}$.

Puisque les solutions de (2) et de (29') sont respectivement paramétrées par $Y = (B)^F$ et $U = g^F$, nous les notons respectivement par $X^{\varepsilon, Y}$ et $X^{\varepsilon, U}$.

Nous supposons toujours que $\lim_{\varepsilon \to 0} x^\varepsilon = x$.

Notons $T^\varepsilon(U, dw)$ la loi du processus $h(0, D_t^\varepsilon, U_t)$. C'est un élément de l'espace $M_1({}^d\Omega_T)$ des mesures de probabilités sur ${}^d\Omega_T$, muni de la topologie de la convergence étroite et de la métrique de Lévy-Prohorov, *voir* [6].

THÉORÈME 3. – *Sous la condition* S1,

1) *L'application qui à* $U \in {}^r H'_{T,0}$ *fait correspondre* $T^\varepsilon(U, dw)$ *admet un prolongement unique, noté encore* $T^\varepsilon(\cdot, dw)$, *défini sur* ${}^r\Omega'_{T,0}$ *à valeurs dans* $M_1({}^d\Omega_T)$ *continu pour la topologie de la convergence uniforme sur* ${}^r\Omega'_{T,0}$.

$T^\varepsilon(\cdot, dw)$ *est une version régulière de la loi conditionnelle du processus* X^ε *solution de* (2) *sachant* $(B^F) = (B_t^F)_{t \in [0,T]}$.

2) *Pour chaque* $U \in {}^r\Omega'_{T,0}$, *définissons une fonctionnelle d'action sur* ${}^d\Omega_{T,x}$ *par :*

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_U(\varphi) = \operatorname{Inf} \Big\{ \frac{1}{2} \|\tilde{g}\|^2_{{}^l H_{T,0}},\ \tilde{g} \in {}^l H_{T,0} \\ \text{tel que } \varphi = (\beta_x)'(U, \tilde{g}) \Big\} \\ (\inf\{\varnothing\} = +\infty). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Nous désignons par Λ'_U la fonctionnelle de Cramer correspondante.

Nous avons les estimations suivantes :

$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} T^\varepsilon (U, 0) \geq -\Lambda'_U (0)$ si 0 est un ouvert de ${}^d\Omega_{T, x}$.

$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} T^\varepsilon (U, F) \leq -\Lambda'_U (F)$ si F est un fermé de ${}^d\Omega_{T, x}$.

De plus, les ensembles de niveau associés à la fonctionnelle λ'_U sont compacts.

Démonstration. – Pour 1), on utilise le théorème 2, la régularité de h, *voir* [2] et l'indépendance de B^F et de $\varepsilon\tilde{B}$.

L'assertion 2) résulte du théorème 4, *cf* [7] et [8]. La méthode consiste à regarder où se trouve $X^{\varepsilon, U}$ défini par (2′) lorsque $\varepsilon\tilde{B}$ est proche de $\tilde{g}$, ceci avec une erreur inférieure à $\exp -(R/\varepsilon^2)$. Comme dans le cas abélien (*cf.* [1]), nous utilisons explicitement la représentation (29′) de $X^{\varepsilon, U}$.

THÉORÈME 4.

Soit $(U, \tilde{g}) \in {}^r\Omega'_{T, 0} \times {}^l H_{T, 0}$ *où $\tilde{g}$ est tel que* $\|\tilde{g}\|^2_{{}^l H_{T, 0}} = \int_0^t |\tilde{g}_s|^2 \, ds \leq a < +\infty$.

Alors on a :

Pour tous $R > 0$, $\rho > 0$, *il existe* $\varepsilon_{0>0}$, $\alpha > 0$, $r > 0$ *tels que si* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|x^\varepsilon - x| < r$,

$$\varepsilon^2 \operatorname{Log} P (\|X^{\varepsilon, U} - \varphi\| > \rho, \|\varepsilon\tilde{B} - \tilde{g}\| < \alpha) \leq -R$$

$X^{\varepsilon, U}$ et φ sont définis par (29′) et (26).

Démonstration. – Posons $M' = \sup_{t \in [0, T]} |U_t|$

D'après Yamato [2], il existe de constantes M et L telles que : $\|X^{\varepsilon, u} - \varphi\| \leq \exp M' ML (\|D^\varepsilon - D\|)$, où D^ε et D sont données respectivement par (30) et (27).

Il suffira donc d'estimer :

$*$ $\|D^\varepsilon - D\|$ sur $\{\|\varepsilon\tilde{B} - \tilde{g}\| < \alpha\}$.

Pour estimer $*$, nous aurons besoin de la proposition suivante :

PROPOSITON 5. – *Soient* $c_\varepsilon (s, x, U_s)$ *et* $c(s, x, U_s)$ *des champs vérifiant :*

$$\left.\begin{array}{ll} a) & |c_\varepsilon (s, x, U_s)| + |c (s, x, U_s)| \leq \mathfrak{X} (s), \ s \leq T \\ & \quad \text{avec} \displaystyle\int_0^t \mathfrak{X}^2 (s) \, ds < +\infty \\ b) & |c (s, x, U_s) - c (s, y, U_s)| \leq \mathfrak{t} (s) \, |x - y| \\ & \quad \text{avec} \displaystyle\int_0^t \mathfrak{t} (s) \, ds = K < +\infty \\ c) & c_\varepsilon \to c \text{ uniformément quand } \varepsilon \to 0. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Supposons que S_t^ε et S_t vérifient pour un mouvement brownien $\tilde{B}^\varepsilon$,

$$\left.\begin{aligned} S_t^\varepsilon &= x^\varepsilon + \int_0^t c_\varepsilon(s, S_s^\varepsilon, U_s)\, ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(S_s^\varepsilon, U_s)\, d\tilde{B}_s^\varepsilon \\ S_t &= x + \int_0^t c(s, S_s, U_s)\, ds, \\ &\text{où } \sigma \text{ est définie par (27) et (28).} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Alors pour tous $R > 0$, $\rho > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$, $r > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|x^\varepsilon - x| < r$, on a :

$$\varepsilon^2 \operatorname{Log} P(\|S^\varepsilon - S\| > \rho,\ \|\varepsilon\tilde{B}^\varepsilon\| < \alpha) \leq -R.$$

Démonstration. – En effet,

$$\begin{aligned} S_t^\varepsilon - S_t =& (x^\varepsilon - x) + \int_0^t [c_\varepsilon(s, S_s^\varepsilon, U_s)\, ds - c(s, S_s, U_s)]\, ds \\ &+ \int_0^t [c(s, S_s^\varepsilon, U_s) - c(s, S_s, U_s)]\, ds + \tilde{V}_t^\varepsilon, \end{aligned}$$

où $\tilde{V}_t^\varepsilon = \varepsilon \int_0^t \sigma(S_s^\varepsilon, U_s)\, d\tilde{B}_s^\varepsilon$.

Par 32, on a pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ et $|x^\varepsilon - x| < \frac{\rho}{4} e^{-K}$,

$$|S_t^\varepsilon - S_t| \leq \frac{\rho}{2} e^{-K} + \|\tilde{V}^\varepsilon\| + \int_0^t \mathrm{t}(s) |S_s^\varepsilon - S_s|\, ds.$$

Grâce à l'inégalité de Gronwall, on a :

$$\|S^\varepsilon - S\| \leq \frac{\rho}{2} + \|\tilde{V}^\varepsilon\|\, e^K.$$

Pour avoir la proposition, il nous suffit d'estimer :

** $\|\tilde{V}^\varepsilon\|$ sur $\|\varepsilon\tilde{B}^\varepsilon\| < \alpha$.

Soient n un entier positif, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{T}{n}, \ldots, t_n = T$.

Posons :

$$\begin{aligned} S_t^{\varepsilon, n} &= S_{t_k}^\varepsilon \qquad \text{si} \quad t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, \ldots, n-1. \\ U_t^n &= U_{t_k}^n \qquad \text{si} \quad t_k \leq t < t_{k+1},\ k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\{\|\tilde{\mathrm{V}}^\varepsilon\| > \rho,\ \|\varepsilon \tilde{\mathrm{B}}^\varepsilon\| < \alpha\} \\
&\quad \subset \{\|\mathrm{S}^\varepsilon - \mathrm{S}\| + \|\mathrm{U} - \mathrm{U}^{\varepsilon,\, n}\| > \gamma\} \\
&\quad \cup \left\{ \|\mathrm{S}^\varepsilon - \mathrm{S}\| + \|\mathrm{U} - \mathrm{U}^n\| \le \gamma\,; \right. \\
&\qquad\quad \left. \left\| \varepsilon \int_0^{\cdot} [\sigma(\mathrm{S}_s^\varepsilon,\, \mathrm{U}_s) - \sigma(\mathrm{S}_s^{\varepsilon,\, n},\, \mathrm{U}_s^n)]\, d\tilde{\mathrm{B}}_s^\varepsilon \right\| > \frac{\rho}{2} \right\} \\
&\quad \cup \left\{ \left\| \varepsilon \int_0^t \sigma(\mathrm{S}_s^{\varepsilon,\, n},\, \mathrm{U}_s^n)\, d\tilde{\mathrm{B}}_s^\varepsilon \right\| > \frac{\rho}{2}\,;\ \|\varepsilon \tilde{\mathrm{B}}^\varepsilon\| < \alpha \right\} \\
&\quad = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité exponentielle, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$\mathrm{P}(\mathcal{A}_2) \le \mathrm{C}_1 \exp - \dfrac{\mathrm{C}_2\, \rho^2}{\varepsilon^2\, \gamma^2} \le \dfrac{1}{2} \exp - \dfrac{\mathrm{R}}{\varepsilon^2}$ si γ est convenablement choisi et $\varepsilon \le \varepsilon_1$

γ étant fixé, si $n \le n_1$, on a :

$$\|\mathrm{U} - \mathrm{U}^n\| < \frac{\gamma}{2}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathcal{A}_1) &= \mathrm{P}\left[\bigcup_{k=0}^{n} \sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} |\mathrm{S}^\varepsilon(t) - \mathrm{S}(t)| > \frac{\gamma}{2} \right] \\
&\le \sum_0^{n-1} \mathrm{P}\left[\sup_{t_k \le t \le t_{k+1}} \left| \int_{t_k}^t c_\varepsilon(s,\, \mathrm{S}_s^\varepsilon,\, \mathrm{U}_s)\, ds \right| > \frac{\gamma}{4} \right] \\
&\quad + \mathrm{P}\left[\sup \left| \varepsilon \int_{t_k}^t \sigma(\mathrm{S}_s^\varepsilon,\, \mathrm{U}_s)\, d\tilde{\mathrm{B}}_s^\varepsilon \right| > \frac{\gamma}{4} \right].
\end{aligned}$$

Par (32) a), la probabilité du premier est nulle si $n \ge n_1 \vee n_2 = n'$, quand à la probabilité du second, grâce à l'inégalité exponentielle – elle est majorée par C_1' $\exp - \frac{C_2' \, n' \, \gamma^2}{\varepsilon^2 \, T} \leq \frac{1}{2} \exp - \frac{R}{\varepsilon^2}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_0$. n' est ainsi choisi, alors que $\|\varepsilon \tilde{B}^\varepsilon\| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
&\left| \varepsilon \int_0^t \sigma \, (S_s^{\varepsilon, n}, U_s^n) \, d\tilde{B}_s^\varepsilon \right| \\
&\quad = \left| \sum_0^{n'-1} \varepsilon \, \sigma \, (S_{t_k}^\varepsilon, U_{t_k}) \, d\tilde{B}_s^\varepsilon \right| \\
&\quad = \left| \sum_0^{n'-1} \varepsilon \, \sigma \, (S_{t_k}^\varepsilon, U_{t_k}) \, (\tilde{B}_{t_{k+1} \wedge t}^\varepsilon - \tilde{B}_{t_k \wedge t}^\varepsilon) \right| \leq 2 \, C_3'' \, n' \, \alpha
\end{aligned}$$

et $\mathcal{A}_3 = \varnothing$ si $\alpha < \rho / 4 \, C'' \, n'$.

*Revenons à l'estimation de *.*

Soit donc $\tilde{g} \in {}^l H_{T,0}$ tel que $\|\tilde{g}\|_{{}^l H_{T,0}}^2 \leq a \leq +\infty$.

Posons :

$$\tilde{B}_t^\varepsilon = \tilde{B}_t - \frac{\tilde{g}_t}{\varepsilon}.$$

Par Girsanov,

$$\frac{d\overline{P}^\varepsilon}{dP} = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\dot{\tilde{g}}_s, \, d\tilde{B}_s) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t |\dot{\tilde{g}}_s|^2 \, ds \right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&P \, (\|D^\varepsilon - D\| > \rho, \, \|\varepsilon \tilde{B} - \tilde{g}\| < \alpha) \\
&\quad \leq P \left[\exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\dot{\tilde{g}}_s, \, d\tilde{B}_s) \right) > \exp \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \right] \\
&\quad + \overline{E}^\varepsilon \left[\frac{dP}{d\overline{P}^\varepsilon} \, ; \, A_\rho \cap \left\{ \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\dot{\tilde{g}}_s, \, d\tilde{B}_s) \right) \leq \exp \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \right\} \right]
\end{aligned}$$

La première probabilité est majorée par $2 \exp - \frac{\lambda^2}{2a\varepsilon^2}$, quant à la seconde, elle est majorée par :

$$\exp \frac{a}{2\varepsilon^2} \times \exp \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \times \overline{P}^\varepsilon \, (\|D^\varepsilon - D\| > \rho, \, \|\varepsilon \tilde{B}\| < \alpha).$$

Le dernier facteur peut être estimé par la proposition (5).

En effet, il suffit de poser :

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon \, (s, \, x, \, U_s) &= b \, (x, \, U_s) + \frac{\varepsilon^2}{2} \, \hat{\sigma} \, (x, \, U_s) + \sigma \, (x, \, U_s) \cdot \dot{\tilde{g}}_s \\
c \, (s, \, x, \, U_s) &= b \, (x, \, U_s) + \sigma \, (x, \, U_s) \cdot \dot{\tilde{g}}_s,
\end{aligned}$$

où les coefficients b et σ sont donnés par (28) et

$$\hat{\sigma}(x, \mathrm{U}_s) = \sum_{j=1}^{1} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_j(x, \mathrm{U}_s)\, \sigma_j(x, \mathrm{U}_s).$$

On a donc :

$$\mathrm{P}(\|\mathrm{D}^\varepsilon - \mathrm{D}\| > \rho,\ \|\varepsilon\tilde{\mathrm{B}} - \tilde{g}\| < \alpha)$$
$$\leq 2\exp -\frac{\lambda^2}{2a\varepsilon^2} + \exp\frac{a}{2\varepsilon^2} \times \exp\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\,\overline{\mathrm{P}}(\|\mathrm{S}^\varepsilon - \mathrm{S}\| > \rho,\ \|\varepsilon\tilde{\mathrm{B}}^\varepsilon\| < \alpha).$$

Étant donné R, on choisit λ pour que le premier terme soit inférieur à $\exp -\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon^2}$ puis, par la proposition (5) ε_0, α, r tels que

$$\overline{\mathrm{P}}(\|\mathrm{S}^\varepsilon - \mathrm{S}\| > \rho,\ \|\varepsilon\tilde{\mathrm{B}}^\varepsilon\| < \alpha) \leq \exp -\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon^2} \quad \square$$

Posons $\tilde{\mathrm{C}}_a = \left\{\tilde{g},\ \frac{1}{2}\|\tilde{g}\|_{{}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}} \leq a\right\}$ et $\mathrm{K}_a = \{\varphi,\ \lambda'_{\mathrm{U}}(\varphi) \leq a\}$, λ'_{U} est définie par (31).

Pour démontrer la compacité de K_a, il suffit de montrer que, lorsque $\mathrm{U} \in {}^r\Omega'_{\mathrm{T},0} \backslash {}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0}$, la restriction de $(\beta_x)'(\mathrm{U}, \cdot)$ à $\tilde{\mathrm{C}}_a$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\tilde{\mathrm{C}}_a$, car le cas où $\mathrm{U} \in {}^r\mathrm{H}'_{\mathrm{T},0}$ se réduit à quelque chose près au cas classique, *cf.* [7] et [8]. Mais ceci ne pose pas de difficulté, vu le caractère lipschitzien de h, *voir* [2] et [1].

Les estimations du théorème 3 s'obtiennent à partir du théorème 4, *cf.* [7] et [8].

Remarque R. – Notons encore $\ominus$ une extension mesurable de $\ominus$ (donnée par (20)) définie sur ${}^n\Omega_{\mathrm{T},0}$, avec la propriété que tous les éléments de ${}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ sont les points de continuité de $\ominus$ au sens de Strook-Varadhan [9], c'est-à-dire : $\ominus(\omega, t) = \mathrm{Y}_t(\omega)$ p.s. si Y est solution de (18) avec la propriété suivante :

$$\forall\alpha > 0, \quad \mathrm{P}(\|\mathrm{Y} - \ominus(g)\| < \alpha / \|\mathrm{B} - g\| < \delta) \to 1 \text{ lorsque } \delta \searrow 0.$$

Grâce à ce fait, notons de même β_x l'extension mesurable de β_x (donnée par (3)) définie p.s. sur ${}^n\Omega_{\mathrm{T},0} \times {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ par :

$$\varphi_t = \beta_x(\omega, \tilde{g})_t$$

si, et seulement si,

$\varphi_t = (\beta_x)'(\mathrm{Y}.(\omega), \tilde{g})_t$ où $(\beta_x)'$ est donnée par le lemme 1.

THÉORÈME 6. – *Sous la condition* S1, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *notons* $\mathbf{N}^\varepsilon(g, dw)$ *la loi du processus* $X^{\varepsilon, g}$, *solution de* l'E.D.S. *définie par* (29) *pour chaque* $g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$.

Alors :

1) L'application, qui à $g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$ fait correspondre $\mathbf{N}^\varepsilon(g, dw)$ admet un prolongement mesurable unique, noté encore $\mathbf{N}^\varepsilon(\cdot, dw)$ défini p.s. sur ${}^n\Omega_{\mathrm{T},0}$ à valeurs dans $\mathrm{M}_1({}^d\Omega_{\mathrm{T},0})$, donné par la formule :

$$\mathbf{N}^\varepsilon(\omega, dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\ominus(\omega), dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\mathrm{Y}_{.}(\omega), dw)$$

où $\mathbf{T}^\varepsilon(\cdot, dw)$ est le prolongement continu défini dans le théorème 3, $\ominus$ l'extension mesurable définie dans la remarque **R** et Y la solution de (18).

$\mathbf{N}^\varepsilon(\cdot, dw)$ est une version régulière de la loi conditionnelle de $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \in [0,\mathrm{T}]}$ sachant $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_t)_{t \in [0,\mathrm{T}]}$ vérifiant la propriété de continuité :

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathrm{P}(\delta(\mathbf{N}^\varepsilon(\mathrm{B}, dw), \mathbf{N}^\varepsilon(g, dw)) \geq \alpha / \|\mathrm{B} - g\| < \tau) \to 0 \quad \text{quand} \quad \tau \to 0.$$

2) Pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{\mathrm{T},0}$, définissons une fonctionnelle d'action sur ${}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$ par :

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_\omega(\varphi) = \inf\left\{\dfrac{1}{2}\|\tilde{g}\|^2_{{}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}},\ \tilde{g} \in {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},0} \text{ tel que } \varphi = \beta_x(\omega, \tilde{g})\}\right\} \\ (\inf\{\varnothing\} = +\infty) \end{array}\right\} \tag{34}$$

où β_x est le prolongement mesurable introduit précédemment (Remarque **R**). Nous désignons par Λ_ω la fonctionnelle de Cramer correspondante.

Nous avons les estimations suivantes, pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{\mathrm{T},0}$:

$\liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathbf{N}^\varepsilon(\omega, 0) \geq -\Lambda_\omega(0)$ si 0 est un ouvert de ${}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$.

$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathbf{N}^\varepsilon(\omega, \mathrm{F}) \geq -\Lambda_\omega(\mathrm{F})$ si F est un fermé de ${}^d\Omega_{\mathrm{T},x}$.

De plus, les ensembles de niveau sont compacts.

Démonstration. – 1) Remarquons que si $g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},0}$, alors on a :

$$\mathbf{N}^\varepsilon(g, dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\ominus(g), dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\mathrm{U}, dw).$$

L'existence du prolongement mesurable de l'application qui à $g \in {}^n\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}$ fait correspondre $\mathbf{N}^\varepsilon(g,\, dw)$ dans $\mathrm{M}_1({}^d\Omega_\mathrm{T})$ défini p.s. sur l'espace ${}^n\Omega_{\mathrm{T},\,0'}$ résulte de la remarque **R**, du théorème 2 et du théorème 3. Et l'on a :

$$\mathbf{N}^\varepsilon(\omega,\, dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\ominus(\omega),\, dw) = \mathbf{T}^\varepsilon(\mathrm{Y}_.(\omega),\, dw).$$

La propriété de continuité résulte du fait que :

$$\begin{aligned}(\delta(\mathbf{N}^\varepsilon(\mathrm{B},\, dw),\, \mathbf{N}^\varepsilon(g,\, dw)) \geq \alpha,\ \|\mathrm{B}-g\| < \tau)\\ \subset (\delta(\mathbf{T}^\varepsilon(\mathrm{Y},\, dw),\, \mathbf{T}^\varepsilon(\ominus(g),\, dw)) \geq \alpha,\ \|\mathrm{Y}-\ominus(g)\| < \alpha')\\ \cup\ (\|\mathrm{Y}-\ominus(g)\| \geq \alpha',\ \|\mathrm{B}-g\| < \tau).\end{aligned}$$

La remarque **R** et les résultats du théorème 3 nous permettent de conclure.

2) On utilise le théorème 3 et le 1). Il suffit de démontrer que pour tout $\varphi \in {}^d\Omega_{\mathrm{T},\,x}$ et pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{\mathrm{T},\,0'}$ on a :
$\lambda'_{\ominus(\omega)}(\varphi) = \lambda_\omega(\varphi)$. Mais ceci résulte des définitions (31) et (34) et de la fin de la remarque **R**.

2. APPLICATION AU PROBLÈME DU FILTRAGE NON LINÉAIRE

Nous considérons le couple « signal-observation » $(\mathcal{X}^\varepsilon,\, \mathcal{Y}^\varepsilon)$ défini par (1).

On se propose d'établir un principe de grandes déviations pour la version régulière $\mathbf{M}^\varepsilon(\cdot,\, dw)$ de la loi conditionnelle du processus « signal » $\mathcal{X}^\varepsilon = (\mathcal{X}_t^\varepsilon)\ t \in [0,\, \mathrm{T}]$ sachant « l'observation » $\mathcal{Y}^\varepsilon = (\mathcal{Y}_t^\varepsilon)\ t \in [0,\, \mathrm{T}]$.

Condition S2. – En plus de la condition S1, nous supposons que Γ est de classe C_b^∞ et que l'algèbre de Lie engendrée par les n-champs de vecteurs $\hat{\mathrm{A}}_1, \ldots,\, \hat{\mathrm{A}}_n$ sur $\mathbb{R}^{d+1}$ est nilpotente d'ordre p où

$$\hat{\mathrm{A}}_k(x^1, \ldots,\, x^d,\, x^{d+1}) = \begin{bmatrix} A_k(x^1, \ldots,\, x^d) \\ \Gamma^k(x^1, \ldots,\, x^d) \end{bmatrix} \text{ pour chaque } k \in [1,\, n].$$

LEMME 7. – *Considérons le couple*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_t^\varepsilon &= (\mathcal{X}_t^\varepsilon,\, \int_0^t \Gamma(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, d\mathrm{B}_s)_{t\in[0,\,\mathrm{T}]}\\ &= (\mathcal{C}_{1,\,t}^\varepsilon,\, \mathcal{C}_{2,\,t}^\varepsilon).\end{aligned}$$

Alors :

a) $\mathcal{C}^\varepsilon$ est un processus d + 1-dimensionnel, solution de l'E.D.S. :

$$d\mathcal{C}_t^\varepsilon = \hat{\mathrm{A}}_0 (\mathcal{C}_t^\varepsilon)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathrm{A}}_i (\mathcal{C}_t^\varepsilon) \circ d\mathrm{B}_t^i$$
$$+ \varepsilon \sum_{j=1}^{l} \hat{\tilde{\mathrm{A}}}_j (\mathcal{C}_t^\varepsilon) \circ d\tilde{\mathrm{B}}_t^j,\ \mathcal{C}_0^\varepsilon = (x^\varepsilon, 0) \in \mathbb{R}^{d+1}, \tag{35}$$

où

$$\hat{\mathrm{A}}_0 (x^1, \ldots, x^d, x^{d+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_0 (x^1, \ldots, x^d) \\ -\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{1} \Gamma^k (x^1, \ldots, x^d) \end{bmatrix},$$

pour chaque $k \in [1, n]$ $\hat{\mathrm{A}}_k$ est défini dans la condition S2 et pour chaque $j \in [1, 1]$,

$$\hat{\tilde{\mathrm{A}}}_j (x^1, \ldots, x^d, x^{d+1}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathrm{A}}_j (x^1, \ldots, x^d) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Grâce à la condition S2 sur les champs de vecteurs $\hat{\mathrm{A}}_k (x)$, alors on a :

b) $\mathcal{C}_t^\varepsilon = \hat{h} (0, \hat{\mathrm{D}}_t^\varepsilon, \mathrm{B}_t^\mathrm{F})$ (analogue de la formule (2′) et (30) pour X_t^ε défini par (2), où $\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ avec $\hat{h}_1 = h$ introduite dans le lemme 1 et le théorème 2. $\hat{\mathrm{D}}_t^\varepsilon$ est solution de (27) et (28) en mettant partout des « ^ ». (36)

Pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{\mathrm{T},0}$, soit $\mathcal{C}^{\varepsilon,\omega} = (\mathcal{C}_1^{\varepsilon,\omega}, \mathcal{C}_2^{\varepsilon,\omega})$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ défini par :

$\mathcal{C}^{\varepsilon,\omega} = \hat{h} (0, \hat{\mathrm{D}}^{\varepsilon, \ominus(\omega))}, \ominus(\omega))$, où $\hat{\mathrm{D}}^{\varepsilon, \ominus(\omega))}$ est solution de : (37)

$$\hat{\mathrm{D}}_t^{\varepsilon, \ominus(\omega)} = \begin{pmatrix} x^\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \hat{b} (\hat{\mathrm{D}}_s^{\varepsilon, \ominus(\omega)}, \ominus(\omega)_s)\, ds$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \hat{\sigma} (\hat{\mathrm{D}}_s^{\varepsilon, \ominus(\omega)}, \ominus(\omega)_s) \circ d\tilde{\mathrm{B}}_s\,, \tag{38}$$

analogue de (29′) et de (30′). Alors :

c) pour tout $\mathrm{U} \in {}^r\Omega'_{\mathrm{T},0'}$ la loi de $\hat{h} (0, \hat{\mathrm{D}}^{\varepsilon,\mathrm{U}}, \mathrm{U})$ constitue la version très régulière $\hat{\mathbf{T}}^\varepsilon (\mathrm{U}, dw)$ de la loi conditionnelle de $\mathcal{C}^\varepsilon$ sachant que $\mathrm{B}^\mathrm{F} = \mathrm{U}$, *voir* le théorème 3 et par le théorème 6 nous fournit la version régulière de la loi conditionnelle de $\mathcal{C}^\varepsilon$ sachant B, par identification.

THÉORÈME 8. – *Sous la condition* S2, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *considérons le couple de* v.a. $(\mathcal{X}^\varepsilon, \mathcal{Y}^\varepsilon) = (\mathcal{X}_t^\varepsilon, \mathcal{Y}_t^\varepsilon)_{t\in[0,\,T]}$ *défini par* (1), *à valeurs dans* ${}^d\Omega_{T,\,x} \times {}^n\Omega_{T,\,0}$ *alors :*

1) La loi conditionnelle de $\mathcal{X}^\varepsilon$ sachant $(\mathcal{Y}^\varepsilon)$ admet une version régulière, notée $\mathbf{M}^\varepsilon(\cdot, dw)$, définie pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{T,\,0}$ et donnée par la formule :

$\mathbf{M}^\varepsilon(\omega, dw) = \tilde{\mathbf{T}}^\varepsilon(\ominus(\omega), dw)$, où $\ominus$ est l'extension mesurable de la remarque **R** et $\tilde{\mathbf{T}}^\varepsilon(\cdot, dw)$ désigne l'application continue de ${}^r\Omega'_{T,\,0}$ pour la norme uniforme sur cet espace dans $M_1({}^d\Omega_T)$ donnée par la formule explicite : (39)

$$\tilde{\mathbf{T}}^\varepsilon(U, dw) = \frac{E\left\{1_{dw}(\mathcal{C}_{1,\,T}^{\varepsilon,\,U}) \exp\left\{\mathcal{C}_{2,\,T}^{\varepsilon,\,U} - \frac{1}{2}\int_0^T (|\Gamma|^2(\mathcal{C}_{1,\,s}^{\varepsilon,\,U})\, ds\right\}\right\}}{E\left\{\exp\left\{\mathcal{C}_{2,\,T}^{\varepsilon,\,U} - \frac{1}{2}\int_0^T (|\Gamma|^2(\mathcal{C}_{1,\,s}^{\varepsilon,\,U})\, ds\right\}\right\}} \qquad (39')$$

2) Pour presque tout $\omega \in {}^n\Omega_{T,\,0'}$ nous avons les estimations suivantes :

$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathbf{M}^\varepsilon(\omega, 0) \geq -\Lambda_\omega(0)$ si 0 est un ouvert de ${}^d\Omega_{T,\,x}$.

$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathbf{M}^\varepsilon(\omega, F) \geq -\Lambda_\omega(F)$ si F est un fermé de ${}^d\Omega_{T,\,x}$, où $\Lambda_\omega(\cdot)$ est définie par (34).

Démonstration. – Nous suivons la preuve introduite en [1] :

1) Soit $(\mathcal{F}_t)$ la filtration associée à $(B, \tilde{B})$.

Posons :

$$d\mathcal{Y}_t^\varepsilon = dB_t + \Gamma(\mathcal{X}_t^\varepsilon)\, dt, \qquad \mathcal{Y}_0^\varepsilon = 0. \qquad (40)$$

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t \Gamma(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, d\mathcal{Y}_s^\varepsilon - \frac{1}{2}\int_0^t (|\Gamma|^2(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, ds\right\}. \qquad (41)$$

De S2, la transformation de Girsanov définit une nouvelle loi de probabilité P_0 par la formule :

$\frac{dP_0}{dP}/\mathcal{F}_t = L_t^{-1}$, et sous cette loi $\mathcal{Y}^\varepsilon$ est un mouvement brownien indépendant de $\varepsilon\tilde{B}$. (42)

Considérons le processus X^ε, solution de (2) :

Soient $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X}_1$ 2 applications mesurables et bornées de ${}^d\Omega_{T,\,x}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. ${}^n\Omega_{T,\,0} \to \mathbb{R}$).

Par Girsanov, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,\{\mathcal{X}_0\,(\mathcal{X}^\varepsilon)\,\mathcal{X}_1\,(\mathcal{Y}^\varepsilon)\}\\
&\quad = \mathrm{E}_0 \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{X}_0\,(\mathcal{X}^\varepsilon)\,\mathcal{X}_1\,(\mathcal{Y}^\varepsilon) \\ \times \exp \left\{ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \Gamma\,(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, d\mathcal{Y}_s^\varepsilon - \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, ds \right\} \end{array} \right\}\\
&\quad = \mathrm{E} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{X}_0\,(\mathrm{X}^\varepsilon)\,\mathcal{X}_1\,(\mathrm{B}) \\ \times \exp \left\{ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \Gamma\,(\mathrm{X}_s^\varepsilon)\, d\mathrm{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathrm{X}_s^\varepsilon)\, ds \right\} \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{43}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,\{\mathcal{X}_0\,(\mathcal{X}^\varepsilon)/\mathcal{Y}^\varepsilon = \omega\}\\
&= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E} \left\{ \mathcal{X}_0\,(\mathrm{X}^\varepsilon) \exp \left\{ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \Gamma\,(\mathcal{X}_s^\varepsilon)\, d\mathrm{B}_s \right.\right. \\ \left.\left. -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathrm{X}_s^\varepsilon)\, ds \right\} \Big/ \mathrm{B} = \omega \right\} \end{array} \right\}}{\mathrm{E} \left\{ \exp \left\{ \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \Gamma\,(\mathrm{X}_s^\varepsilon)\, d\mathrm{B}_s - \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathrm{X}_s^\varepsilon)\, ds \right\} \Big/ \mathrm{B} = \omega \right\}}
\end{aligned} \tag{44}$$

Par (44) et le lemme 7, $\forall \mathrm{A}$, borélien de ${}^d\Omega_{\mathrm{T},\,x}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,\{1_{\mathrm{A}}\,(\mathcal{X}^\varepsilon)/\mathcal{Y}^\varepsilon = \omega\}\\
&= \frac{\mathrm{E} \left\{ 1_{\mathrm{A}}\,(\mathcal{C}_{1,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)}) \exp \left\{ (\mathcal{C}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)}) - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathcal{C}_{1,\,s}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)})\, ds \right\}\right\}}{\mathrm{E} \left\{ \exp \left\{ (\mathcal{C}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)}) - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathcal{C}_{1,\,s}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)})\, ds \right\}\right\}}
\end{aligned}$$

où $(\mathcal{C}_{1,\,.}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)},\ (\mathcal{C}_{2,\,.}^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)})$ est défini par (37) et (38),

$= \tilde{\mathrm{T}}^\varepsilon\,(\ominus\,(\omega),\ \mathrm{A})$.

$= \mathbf{M}^\varepsilon\,(\omega,\ \mathrm{A})$ par le théorème 6.

2) On a aussi :

$$\mathcal{C}_1^{\varepsilon,\,\ominus\,(\omega)} = \mathcal{C}_1^{\varepsilon,\,\omega} = \mathcal{X}^{\varepsilon,\,\omega} \text{ défini par } (29') \text{ et } (30'). \tag{45}$$

Posons :

$$\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon} = \exp\left\{\mathcal{C}^{\varepsilon,\,\omega}_{2,\,\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} (|\Gamma|^2\,(\mathcal{C}^{\varepsilon,\,\omega}_{1,\,\mathrm{T}})\,ds\right\}. \tag{46}$$

On voit, compte tenu des hypothèses et des formules (37) et (38) que la famille des v.a. $(\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est bornée dans L^p, pout tout $p > 1$ et $\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon} = \hat{\mathrm{U}}^0 > 0$ existe p.s.

De (39′) et grâce à cette remarque, la *majoration* résulte de l'inégalité de Hölder, *cf.* [1].

Minoration. – On utilise le théorème 6. Soit donc 0 un ouvert de ${}^d\Omega_{\mathrm{T},\,x}$. Soit $\varphi \in 0$ telle que $\lambda_\omega\,(\varphi) < +\infty$, où λ_ω est définie par (34).

Il existe donc $\tilde{g} \in {}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}$ telle que $\varphi = (\beta_x)'\,(\ominus\,(\omega),\,\tilde{g}) = \beta_x\,(\omega,\,g)$ (remarque **R**) vérifiant :

$$\frac{1}{2}\|\tilde{g}\|^2_{{}^l\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}} = \lambda_\omega\,(\varphi).$$

Posons $\overline{\overline{\mathrm{B}}} = \tilde{\mathrm{B}} - \dfrac{\tilde{g}}{\varepsilon}$.

Par Girsanov, grâce à (39′), on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\,\{1_0\,(\mathcal{X}^{\varepsilon,\,\omega})\,\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon}\}\\
&= \overline{\mathrm{E}}\left\{1_0\,(\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega}) \times \exp\,(\overline{\mathcal{C}}^{\varepsilon,\,\omega}_{2,\,\mathrm{T}}) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} |\Gamma|^2\,(\overline{\mathcal{C}}^{\varepsilon,\,\omega}_{1,\,s})\,ds\right)\right.\\
&\qquad \left.\times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{T}} \dot{\tilde{g}}_s\,d\overline{\overline{\mathrm{B}}}_s\right)\right\} \times \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\,ds\right).
\end{aligned} \tag{47}$$

où :

$\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega}_t = h\,(0,\,\overline{\mathcal{D}}^{\varepsilon}_t,\,\ominus\,(\omega)_t)$, $\overline{\mathcal{D}}^{\varepsilon}_t$ est défini comme dans (30′) en remplaçant $\varepsilon\tilde{\mathrm{B}}$ par $\varepsilon\overline{\overline{\mathrm{B}}} + \tilde{g}$, de même pour $\overline{\mathcal{C}}^{\varepsilon,\,\omega}$. (48)

Par S2 Γ est bornée. Il existe $\mathrm{K} > 0$ tel que

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} |\Gamma|^2\,(\mathcal{C}^{\varepsilon,\,\omega}_{1,\,s})\,ds\right) \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{T}\right). \tag{49}$$

Choisissons $\mathrm{M} > 0$ assez grand pour que :

$\overline{\mathrm{P}}\,(-\overline{\mathcal{C}}^{\varepsilon,\,\omega}_{2,\,\mathrm{T}} < \mathrm{M}) = m > 0$, alors (50)

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\,\overline{\mathrm{E}}\,\{1_0\,(\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega}) \times 1_{\{\overline{\mathcal{C}}^{\varepsilon,\,\omega}_{2,\,\mathrm{T}} < \mathrm{M}\}}\} \geq m > 0,$$

car $\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega} \to (\beta_x)'(\ominus(\omega), \tilde{g}) = \beta_x(\omega, g)$, p.s. $\beta_x(\omega, g) \in 0$ et $\overline{\mathcal{C}}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\omega} \to \overline{\mathcal{C}}_{2,\,\mathrm{T}}^{0,\,\omega}$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

Il en résulte alors, que le deuxième membre de (47) est minoré par (51)

$$\geq \overline{\mathrm{E}}\left\{1_0(\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega}) \times 1_{\{-\overline{\mathcal{C}}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\omega}<\mathrm{M}\}} \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{T}} \dot{\tilde{g}}_s\, d\overline{\tilde{\mathrm{B}}}_s\right)\right\}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mathrm{K}^2\,\mathrm{T}}{2}\right) \times \exp(-\mathrm{M}) \times \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds\right)$$

$$\geq \left[\overline{\mathrm{E}}\left\{1_0(\overline{\mathcal{X}}^{\varepsilon,\,\omega}) \times 1_{\{-\overline{\mathcal{C}}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon}<\mathrm{M}\}}\right\}\right]^{1/p}$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mathrm{K}^2\,\mathrm{T}}{2}\right) \times \exp(-\mathrm{M}) \times \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds\right)$$

$$\times \underbrace{\left[\overline{\mathrm{E}}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\mathrm{T}} \dot{\tilde{g}}_s\, d\overline{\tilde{\mathrm{B}}}_s\right)^q\right]^{1/q}}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \exp\left(\frac{q}{2\varepsilon^2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds\right)}$$

, où $p < 1$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *cf.* [10].

Donc

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathrm{E}\{1_0(\mathcal{X}^{\varepsilon,\,\omega})\,\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon}\}$$

$$\geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2 \operatorname{Log} \overline{\mathrm{P}}_0(-\overline{\mathcal{C}}_{2,\,\mathrm{T}}^{\varepsilon,\,\omega} < \mathrm{M}) - \varepsilon^2\mathrm{M} - \frac{\varepsilon^2\,\mathrm{K}^2\,\mathrm{T}}{2}\right)$$

$$\times\left(-\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds\right) = -\frac{1}{1-p} \times \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds,$$

dont le sup pour $p \in [0,\ 1]$ vaut $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{\tilde{g}}_s|^2\, ds$.

D'où :

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathbf{M}^{\varepsilon}(\omega,\ 0))$$

$$= \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log}\{\mathrm{E}\{1_0(\mathcal{X}^{\varepsilon,\,\omega})\,\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon}\}/\{\mathrm{E}_0(\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon})\}\}$$

$$\geq -\frac{1}{2}\,\|\tilde{g}\|^2_{l_{\mathrm{H}_{\mathrm{T},\,0}}} \qquad \text{car} \quad \liminf_{\varepsilon\to 0} E(\hat{\mathrm{U}}^{\varepsilon}) = E(\hat{\mathrm{U}}^{0}). \quad \square$$

REMERCIEMENTS

Cet article est une partie de thèse de doctorat de l'université Paris VII [4] écrite sous la direction du Professeur H. Doss, à qui l'auteur tient à exprimer toute sa reconnaissance.

RÉFÉRENCES

[1] H. DOSS, Un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. **27**, n° 3, 1991, p. 407-423.
[2] Y. YAMATO, Stochastic Differential Equations and Nilpotent Lie Algebra, *Z. Warschlichkeitshtheorie und verw. Gebiete*, **47**, 1979, p. 213-219.
[3] M. I. FREIDLIN et A. D. WENTZELL, Small random perturbations of dynamical systems, *Russian Math. Surveys*, 1970, **25**, p. 1-55.
[4] T. J. RABEHERIMANANA, *Petites perturbations de systèmes dynamiques et Algèbres de Lie Nilpotentes*, Thèse de doctorat de l'université Paris VII, 1992.
[5] H. DOSS et D. W. STROOCK, Nouveaux résultats concernant les petites perturbations de systèmes dynamiques, *J. Funct. Anal.*, Vol. **101**, n° 2, 1991.
[6] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York, 1968.
[7] R. AZENCOTT, Grandes Déviations et Applications, École d'Été de Proba. de Saint-Flour, VIII, 1978, *Lect. Notes in Math.*, **774**, 1980, p. 1-76., Springer-Verlag.
[8] H. DOSS et P. PRIOURET, Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion, *Lect. Notes Math.*, n° **986**, 1983, Springer.
[9] D. W. STROOCK et S. R. S. VARADHAN, On the support of diffusion process with applications to the strong maximum principle. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.*, **3**, 1972, p. 333-360, Univ. California.
[10] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1950.

(Manuscrit reçu le 31 août 1992;
révisé le 8 décembre 1993.)