ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉTIENNE LAROCHE

# Inégalités de corrélation sur $\{-1,1\}^n$ et dans $\mathbb{R}^n$

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 29, nº 4 (1993), p. 531-567

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_4_531_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 29, n° 4, 1993, p. 531-567. *Probabilités et Statistiques*

# Inégalités de corrélation sur $\{-1, 1\}^n$ et dans $\mathbb{R}^n$

par

**Étienne LAROCHE**

Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne,
31062 Toulouse Cedex, France.

RÉSUMÉ. — Nous généralisons les inégalités GKS, FKG et GHS dans $\mathbb{R}^n$. Dans nos inégalités FKG et GKS, les hypothèses sur les fonctions et le hamiltonien n'interviennent que modulo un ensemble de mesure nulle. La généralisation des hypothèses des inégalités GKS repose surtout sur la décomposition de $(\mathbb{R}^*)^n$ en $(\mathbb{R}_+^*)^n \times \{-1, 1\}^n$. Nous étendons aussi l'inégalité GHS existant auparavant pour des fonctions linéaires de chaque spin à des fonctions présentant certaines propriétés de parité et de convexité.

*Mots clés :* Mécanique statistique, inégalités de corrélation.

ABSTRACT. — We generalise the GKS, FKG and GHS inequalities on $\mathbb{R}^n$. In our FKG and GKS inequalities, the assumptions on functions and on the hamiltonian operate only modulo a zero-measure set. The generalization of the hypotheses for the GKS inequalities mainly relies on the decomposition of $(\mathbb{R})^n$ into $(\mathbb{R}_+^*)^n \times \{-1, 1\}^n$. We also extend the GHS inequality from linear functions of each spin to functions enjoying some parity and convexity properties.

## INTRODUCTION

Les inégalités de corrélation qui font l'objet de cet article ont été introduites il y a une vingtaine d'années dans l'étude des systèmes de spins sur $\{-1, 1\}$.

Il s'agit des inégalités de Griffiths [1], généralisées ensuite par Kelly et Sherman [2], dites inégalités GKS, celle de Fortuin, Kastelyn et Ginibre [3], dite FKG et enfin l'inégalité GHS due à Griffiths, Hurst et Sherman [4].

Elles traduisent les propriétés de certaines mesures sur $\{-1, 1\}^n$ et constituent des outils essentiels pour le passage à la limite thermodynamique ($n \to \infty$ : systèmes infinis de particules). Elles servent en particulier à étudier le comportement des variables macroscopiques (énergie libre, magnétisation), à construire certaines mesures de Gibbs ainsi qu'à caractériser l'unicité de la mesure de Gibbs. On pourra, à ce sujet, consulter les livres de Georgii [7] et de Ellis [6] (chap. IV et V).

Ces inégalités furent ensuite généralisées à $\mathbb{R}^n$, notamment pour être utilisées dans le cadre de la théorie quantique des champs. C'est dans un ouvrage consacré à ce sujet que Simon [9] donne des énoncés des inégalités GKS, FKG et GHS dans $\mathbb{R}^n$ sous des hypothèses assez spécifiques.

Le but de cet exposé est d'étendre ces hypothèses et d'énoncer ces inégalités dans un cadre unifié. Pour les inégalités GKS et FKG, nous donnons des énoncés applicables indiféremment à $\mathbb{R}^n$ ou à certains sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, en particulier à $\{-1, 1\}^n$.

Les améliorations les plus significatives sont obtenues pour les inégalités GKS où les hypothèses gagnent nettement en généralité et en clarté. Celles-ci font jouer un rôle essentiel à la structure de $\mathbb{R}^n$ en $2^n$ quadrants et à la décomposition d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sur les chaos de Walsh : il s'agit en fait d'une généralisation à $\mathbb{R}^n$ de la décomposition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

L'inégalité FKG que nous présentons ici comporte surtout des améliorations techniques (suppression des hypothèses de régularité) mais aussi une formulation unifiée sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une mesure produit très générale que l'on adapte en fonction de l'ensemble dans lequel les spins prennent leurs valeurs (par exemple $(\delta_{-1}+\delta_{+1})^{\otimes n}$ pour des spins à valeurs dans $\{-1, 1\}$). Cette inégalité FKG constitue l'outil principal pour la démonstration de l'inégalité GKS 2.

Quant à notre inégalité GHS, elle n'apporte qu'une légère amélioration par rapport à la généralisation obtenue par Ellis et Newman [13]. Cependant, notre preuve diffère sensiblement de la leur. En particulier, elle utilise les inégalités FKG et GKS et il nous a paru intéressant de montrer ce lien avec les autres inégalités de corrélation.

L'article s'organise selon le plan suivant :

§ 1. Rappel des inégalités GKS sur $\{-1, 1\}^n$.

§ 2. Inégalité FKG.

§ 3. Inégalités GKS généralisées dans $\mathbb{R}^n$.

§ 4. Inégalité GHS.

## DÉFINITIONS ET NOTATIONS GÉNÉRALES

– Soit $(E, \mathscr{E}, \rho)$ un espace muni d'une tribu et d'une mesure $\rho$ positive ou nulle, $\sigma$-finie et non identiquement nulle.

– Une application $H : E \to \mathbb{R}$ est appelée hamiltonien (pour la mesure $\rho$) si $e^H \in L^1(\rho)$; on notera $Z_H = \int e^H \, d\rho$ de telle sorte que $d\mu_H = \frac{E^H}{Z_H} d\rho$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathscr{E})$.

– $E_H f$ désigne l'espérance d'une fonction $f$ sous la loi de probabilité $\mu_H$.

– Soit X une variable aléatoire sur $(E, \mathscr{E})$; $\sigma(X)$ la sous-tribu de $\mathscr{E}$ engendrée par X.

$E_H(f \mid X)$ désigne l'espérance conditionnelle de $f$ sachant $\sigma(X)$. On trouvera aussi les notations $Ef$ et $E(f \mid X)$ lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté.

– On notera « $\rho$-p.s. » et « pour $\rho$-p.t.$x$ » respectivement pour « $\rho$ presque-sûrement » et « pour $\rho$-presque tout $x$ » même si $\rho$ n'est pas une probabilité.

D'une façon générale, si un ensemble est un produit cartésien : $Y = A \times B$, et que l'on note $y = (a, b) \in Y$, on notera $a^*$ et $b^*$ les projections coordonnées :

$$a^* : \begin{array}{l} Y \to A \\ (a, b) \mapsto a \end{array} \qquad b^* : \begin{array}{l} Y \to B \\ (a, b) \mapsto b \end{array}$$

D'autres notations seront introduites en temps utile.

## I. LES INÉGALITÉS GKS DANS $\{-1, 1\}^n$

Ce paragraphe est un rappel des inégalités dues à Griffiths, Kelly et Sherman [1] et [2]. Il ne contient pas de résultat nouveau. Seules la première formulation de l'inégalité GKS1 et la preuve de cette dernière ne sont pas classiques.

### 1. Cadre et notations

Dans cette partie, l'espace fini : $\{-1, 1\}^n$, noté $\Omega$, est muni de sa tribu discrète et de la mesure uniforme $\left(\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}\right)^{\otimes n} = d\omega$. Il faut voir ici $\Omega$ comme l'ensemble des configurations d'un système de $n$ spins pouvant prendre les valeurs $\{-1, 1\}$.

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$.

Pour une partie $A \in \mathcal{P}$ et une configuration $\omega \in \Omega$, on notera

$$\omega_A = \prod_{i \in A} \omega_i.$$

et $\omega_A^*$ l'application :

$$\Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto \omega_A.$$

Les $2^n$ $(\omega_A^*)_{A \in \mathcal{P}}$ forment une base orthonormée de $L^2(\Omega, d\omega)$.

L'expression d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dans cette base : $f(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{P}} f_A \omega_A$ s'appelle *décomposition de f en chaos de Walsh*. Le cône des fonctions à coordonnées positives joue un rôle essentiel.

DÉFINITION 1.1. — Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite GKS si ses coordonnées $f_A$ dans la base $(\omega_A^*)_{A \in \mathcal{P}}$ des chaos de Walsh sont $\geqq 0$.

## 2. Inégalité GKS1

Elle s'énonce de deux façons équivalentes :

PROPOSITION 1.2. — *a) Si* H *est une fonction GKS alors* $e^H$ *est aussi GKS.*

*b) Soient f et* H *deux fonctions GKS alors* $E_H(f) \geqq 0$.

*Preuve.* — Pour montrer *a*, remarquons que $\omega^A . \omega^B = \omega^{A \triangle B}$ où $A \triangle B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

Donc, si

$$f(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{P}} f_A \omega_A \qquad \text{et} \qquad g(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{P}} g_A \omega_A$$

alors

$$fg(\omega) = \sum_{A \in \mathcal{P}} (fg)_A \omega_A$$

avec pour tout $A \in \mathcal{P}$, $(fg)_A = \sum_{\substack{(B, C) \in \mathcal{P}^2 \\ B \triangle C = A}} f_B g_C.$

Donc si $f$ et $g$ sont GKS, $(fg)$ l'est aussi (et $f+g$ évidemment).

De plus, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de fonctions GKS sa limite $f$ l'est aussi.

Par conséquent, si H est GKS, $e^H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$ est aussi GKS.

*Nota.* — Nous pouvons résumer cela en disant : le cône des fonctions GKS est convexe, fermé, stable par multiplication, donc par l'exponentielle.

Pour montrer *b*, il suffit de le faire avec $f = \omega_A^*$, A quelconque dans $\mathcal{P}$; le cas général en découle par linéarité. Remarquons alors que pour une fonction $g$,

$$\int_\Omega g\,\omega_A\,d\omega = \langle g, \omega_A^* \rangle$$
$$= g_A.$$

$\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $(L^2(\Omega, d\omega))$.

Par conséquent, d'après *a*), $E_H(\omega_A^*) = \frac{1}{Z_H}\int \omega_A e^H d\omega \geqq 0$.

*Remarque.* — 1) On voit dans le développement en série de $e^H$ que si H est GKS, alors non seulement $e^H$ est GKS mais aussi $(e^H - 1)$.

2) L'inégalité GKS1 affirme en particulier que pour un hamiltonien GKS, la valeur moyenne du spin en chaque site est positive ou : $\mu\{\omega_i = +1\} \geqq \frac{1}{2} \geqq \mu\{\omega_i = -1\}$.

L'inégalité GKS2 donne des renseignements sur la corrélation des spins.

### 3. Inégalité GKS2

PROPOSITION 1.3. — *Soit* H *un hamiltonien GKS.*

*Si deux fonctions sont GKS, alors elles sont corrélées positivement pour la mesure de probabilité associée à* H :

$$E_H(fg) - E_H(f)\,E_H(g) \geqq 0.$$

*Preuve.* — Il suffit de le montrer pour toute paire de fonctions $f = \omega_A^* : \omega \mapsto \omega_A$ et $g = \omega_B^* : \omega \mapsto \omega_B$. Le cas général s'obtient ensuite par bilinéarité de la covariance.

Notons

$$\begin{aligned} C &= E_H(\omega_A^* \omega_B^*) - E_H(\omega_A^*)(\omega_B^*) \\ &= \int_\Omega \omega_A \left[\omega_B - \int_\Omega \omega_B\, d\mu(\omega)\right] d\mu(\omega). \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \omega_A(\omega_B - \omega'_B)\, d\mu(\omega)\, d\mu(\omega'). \end{aligned}$$

Ce procédé dit de *duplication* et le *changement de variable* qui suit, dû à *Percus* sont les clés de la preuve. (Nous les retrouverons dans la démonstration des inégalités FKG et GHS.) Ils vont permettre de se ramener à l'inégalité GKS1.

Soit l'application $\mathscr{C} : \Omega \times \Omega \to \Omega \times \Omega$

$$(\omega, \omega') \mapsto (\omega, \omega'')$$

avec pour tout $i$, $\omega''_i = \omega_i\,\omega'_i$.

On vérifie sans peine que $\mathscr{C}$ est bijective et qu'elle laisse invariante la mesure uniforme sur $\Omega \times \Omega$ : $d\omega \otimes d\omega$.

Effectuons ce changement de variable dans l'intégrale C :

Posons

$$H(\omega)+H(\omega') = \sum_{A \in \mathscr{P}} H_A(\omega_A + \omega'_A) = \sum_{A \in \mathscr{P}} H_A \omega_A (1+\omega''_A) = K(\omega, \omega'')$$

d'où

$$\begin{aligned} C &= \int_{\Omega \times \Omega} \omega_A (\omega_B - \omega'_B) \frac{e^{H(\omega)+H(\omega')}}{Z_H^2} d\omega\, d\omega' \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} \omega_A \omega_B (1 - \omega''_B) \frac{e^{K(\omega, \omega'')}}{Z_H^2} d\omega\, d\omega'' \\ &= \int_{\omega} (1-\omega''_B) \left[ \int_{\Omega} \omega_{A \Delta B} \frac{e^{K(\omega, \omega'')}}{Z_H^2} \right] d\omega'' \end{aligned}$$

Pour tout $\omega'' \in \Omega$ (fixé), $(1+\omega''_A) \geqq 0$; donc le hamiltonien $K(., \omega'') : \Omega \to \mathbb{R}$ est GKS.

Par conséquent; on peut appliquer l'inégalité GKS1 (formulation *b*) à la fonction $\omega \mapsto \omega_{A \Delta B}$ :

Pour tout $\omega'' \in \Omega\, C(\omega'') = \int_{\Omega} \omega_{A \Delta B} \frac{e^{K(\omega, \omega'')}}{Z_H^2} d\omega \geqq 0.$

Finalement, puisque $(1-\omega''_B) \geqq 0$,

$$C = \int_{\Omega} C(\omega'')(1-\omega''_B)\, d\omega'' \geqq 0 \quad \square$$

*Remarque.* — En particulier, l'inégalité GKS2 affirme que pour un hamiltonien GKS, deux spins quelconques sont corrélés positivement :

$$\mu\{\omega_i = \omega_j = 1\} \geqq \mu\{\omega_i = 1\} \mu(\omega_j = 1\}.$$

Elle indique aussi que, dans le domaine des coefficients (H hamiltonien GKS), la moyenne d'un spin est une fonction croissante des coefficients $H_A$ de H.

En effet, pour toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial H_A} E_H(f) = E_H(f\, \omega_A^*) - E_H(f)\, E_H(\omega_A^*).$$

En particulier $\frac{\partial}{\partial H_A} E_H(\omega_i^*) \geqq 0.$

## II. L'INÉGALITÉ FKG

Cette inégalité, due à Fortuin, Kastelyn et Ginibre [3], joue un role essentiel dans l'étude des systèmes de spins ferromagnétiques.

Sur $\Omega = \{-, 1\}^n$, elle établit la propriété suivante : $\Omega$ est muni de l'ordre partiel : $\omega \leqq \omega'$ ssi $\forall i = 1 \ldots n$, $\omega_i \leqq \omega'_i$.

Si $\mu$, mesure de probabilité sur $\Omega$, est attractive [*i.e.* pour tout $(\omega, \omega')$, $\mu(\omega)\mu(\omega') \leqq \mu(\omega \wedge \omega')\mu(\omega \vee \omega')$],

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$, croissantes pour l'ordre $\leqq$, alors $f$ et $g$ sont positivement corrélées pour la probabilité $\mu$.

Depuis, cette inégalité a été généralisée à des espaces infinis, en particulier à $\mathbb{R}^n$ (*voir*, par exemple [10]).

Ici, nous donnons une version plus générale et unifiée de cette inégalité dans $\mathbb{R}^n$ : par exemple, l'inégalité FKG dans $\{-1, 1\}^n$ (ci-dessus) découlera de celle établie dans $\mathbb{R}^n$, en identifiant $\{-1, 1\}$ et $\mathbb{R}$ muni de la mesure $(\delta_{-1} + \delta_1)$. Plus généralement, cette nouvelle version ne tient compte que des propriétés du hamiltonien et des fonctions sur le support de la mesure. Ceci nous sera utile pour montrer l'inégalité GKS2 généralisée dans $\mathbb{R}^n$.

### 1. Définitions et notations

• $\mathbb{R}^n$ est muni de sa tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et d'une mesure produit $\rho = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i$ où pour tout $i$, $\rho_i$ est une mesure $\geqq 0$, $\sigma$-finie, et non identiquement nulle sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

• $\mathbb{R}^n$ est aussi muni de l'*ordre partiel* :

$$x \leqq y \quad \text{ssi} \quad \forall i = 1 \ldots, n, \quad x_i \leqq y_i.$$

Notons $x \vee y$ et $x \wedge y$ les éléments de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées respectives $\max(x_i, y_i)$ et $\min(x_i, y_i)$.

Définissons : Le « quadrant fermé au-dessus de $z$ » par :

$$\underline{[z, +\infty[} = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \geqq z\}$$

le « quadrant ouvert au-dessus de $z$ » par :

$$\underline{]z, +\infty[} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall i, x_i > z_i\}$$

$]-\infty, z]$ et $]-\infty, z[$ par symétrie.

DÉFINITIONS. — 2.1.1. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\rho$-*p.s. croissante* si $f$ est mesurable et $\rho^{\otimes 2}\{(x, y); (x \leqq y) \text{ et } f(x) > f(y)\} = 0$.

2.1.2. Un hamiltonien H est dit $\rho$-*p.s. attractif* si

$$\rho^{\otimes 2}\{(x, y); \mathrm{H}(x) + \mathrm{H}(y) > \mathrm{H}(x \wedge y) + \mathrm{H}(x \vee y)\} = 0.$$

2.1.3. Une mesure de probabilité $\mu$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$ est dite *attractive* s'il existe une mesure produit $\rho$, $\sigma$-finie, et un Hamiltonien H $\rho$-p. s. attractif tel que $d\mu = e^{\mathrm{H}}\, d\rho$.

*Remarques.* — 1. On ne change pas la propriété d'attractivité d'un hamiltonien lui ajoutant une fonction ne dépendant que d'une seule coordonnée, en particulier, une constante.

2. Si un hamiltonien est de classe $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et si $\forall\, i \neq j$, $\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_i\, \partial x_j} \geqq 0$, alors H est $\rho$-p.s. attractif.

## 2. Énoncé de l'inégalité FKG

THÉORÈME 2.2.1. — *Soit* $\mu$ *une mesure de probabilité attractive sur* $\mathbb{R}^n$. *Si* $f$ *et* $g$ *sont deux fonctions de* $\mathrm{L}^2(\mu)$, $\mu$-*p.s. croissantes, alors elles sont positivement corrélées :* $\operatorname{cov}_\mu(f, g) \geqq 0$.

## 3. Préliminaires à la preuve de l'inégalité FKG

Cette preuve repose essentiellement, pour cette version en termes « p.s. », sur le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3.1. — *Soit* $f$ *une fonction :* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho$-*p.s. croissante; alors elle admet une modification* $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, *croissante.*

Avant de montrer cette proposition, nous ressentons la nécessité de justifier son utilité. En effet, devant la longueur de la preuve, que nous n'avons pas su rendre plus courte, le lecteur est en droit de se demander pourquoi nous n'avons pas simplement adopté comme définition d'une fonction $\rho$-p.s. croissante « cette fonction admet une modification croissante ».

Il y a au moins deux bonnes raisons à cela : premièrement, avec cette définition, il serait *a priori* beaucoup plus difficile de vérifier qu'une fonction est $\rho$-p.s. croissante. Deuxièmement, dans la démonstration de notre inégalité GKS2 nous aurons bien besoin d'appliquer l'inégalité FKG à une fonction $f$ dont on sait seulement que $\rho^{\otimes 2}\{x \leqq y, f(x) > f(y)\} = 0$.

*Preuve de la proposition* 2.3.1. — *a*) Montrons-le d'abord dans le cas où $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Soit

$$\mathscr{I} = \{(x, y);\ x \in \mathrm{A},\ y \notin \mathrm{A} \text{ et } x \leqq y\}.$$

et pour

$$a \in \mathbb{R}^n, \quad \mathscr{I}_a = \{(x, y);\ x \in \mathrm{A},\ y \notin \mathrm{A} \text{ et } x \leqq a \leqq y\}.$$

Soient

$$F(a)=\rho\{x;\ x\geqq a,\ x\notin A\}=\rho([a,+\infty[\cap A^c)$$

et

$$G(a)=\rho\{x;\ x\leqq a,\ x\in A\}=\rho(]-\infty,a]\cap A)$$

Par définition $\mathbf{1}_A$ $\rho$-p.s. croissante $\Leftrightarrow \rho^{\otimes 2}(\mathscr{J})=0$

$$\Rightarrow \forall a\in\mathbb{R}^n,\quad \rho^{\otimes 2}(\mathscr{J}a)=0$$
$$\Rightarrow \forall a\in\mathbb{R}^n,\quad F(a)G(a)=0.$$

F et G définissent deux fonctions : $\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$.

F est décroissante, continue à gauche et admet en tout point une limite à droite.

G est croissante, continue à droite et admet en tout point une limite à gauche.

Pour préciser ce qui signifie ici « limite à gauche » nous généralisons cette notion à l'ordre mis sur $\mathbb{R}^n$ :

DÉFINITIONS. — Une fonction $f:\mathbb{R}^n\to[-\infty,+\infty]$ admet une limite à gauche [resp. à droite] en $z_0$ si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in]-\infty,z_0[\ (\text{resp. }]z_0,+\infty[)}} f(x)$ existe.

• $f$ est continue à gauche (resp. à droite) en $z_0$ si cette limite égale la valeur de $f$ en $z$.

Posons maintenant $\tilde{A}=\{z\in\mathbb{R}^n;\ F(z)=0\}$.

Nous allons montrer que $\mathbf{1}_{\tilde{A}}$ est une modification croissante de $\mathbf{1}_A$.

• Vérifions d'abord que $\tilde{A}$ est mesurable :

$$\{F=0\}=\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}\left\{F<\frac{1}{k}\right\}$$

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\left\{F<\frac{1}{k}\right\}=\bigcup_{F(z)<(1/k)}]z,+\infty[$$

car F est décroissante et continue à gauche.

• $\mathbf{1}_{\tilde{A}}$ est bien croissante car F est $\geqq 0$, décroissante.

• Il nous reste à montrer que $\tilde{A}=A$ $\rho$-p.s *i.e.*

$$\rho(\tilde{A}^c\cap A)=\rho(\tilde{A}\cap A^c)=0.$$

Montrons que $\rho(\tilde{A}^c\cap A)=0$ :

$$\tilde{A}^c=\{z\in\mathbb{R}^n;\ F(z)>0\}\subset\{z\in\mathbb{R}^n;\ G(z)=0\}\ \text{car } F.G=0.$$

Nous allons voir que $\{G=0\}\cap A$ est de mesure nulle.

$$\{G=0\}=\bigcup_{G(z)=0}]-\infty,z]=\bigcup_{G(z)=0}]-\infty,z[\cup B$$

où $B=\{z; G(z)=0$ et $\forall z'>z, G(z')>0\}$ est le « bord » de la région $\{G=0\}$.

$\bigcup_{z\in\mathbb{R}^n;\, G(z)=0} ]-\infty, z[$ se réduit à une union dénombrable. En effet, c'est aussi $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n;\, G(q)=0} ]-\infty, q[$ grâce à la croissance de G.

Or pour tout $z\in\mathbb{R}^n$ tel que $G(z)=0$ on a $\rho(]-\infty, z[\cap A)=0$ par définition de G.

Il nous reste maintenant à montrer que $\rho(B\cap A)=0$, ce qui constitue la partie la plus technique de la démonstration.

(i) Considérons d'abord le cas où *aucun des* $\rho_i$ *ne charge les points i.e.* : $\forall i=0\ldots n, \forall x\in\mathbb{R}, \rho_i\{x\}=0$.

Nous remarquons que B possède la propriété suivante :

$$\forall x, y\in B \quad x\leqq y \;\Rightarrow\; \exists i=1, \ldots, n; \qquad x_i=y_i.$$

DÉFINITION 2.3.2. — On dira d'une partie de $\mathbb{R}^n$ qui possède cette propriété qu'elle est à variations contradictoires : en effet, entre deux points quelconques, si $(n-1)$ coordonnées croissent strictement, alors la $n$-ième décroît nécessairement (au sens large).

Pour montrer que $\rho(B)=0$, il suffira d'appliquer le lemme général suivant :

LEMMA 2.3.2. — *Soit une mesure sur* $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ : $\rho=\bigotimes_{i=1}^{n}\rho_i$ *où pour tout i,* $\rho_i$ *est une mesure* $\sigma$*-finie* $\geqq 0$, *ne chargeant pas les points. Et soit* S *une partie de* $\mathbb{R}^n$ *à variations contradictoires.*

*Alors* $\rho(S)=0$.

*Autrement dit, une partie à variations contradictoires n'a pas d'épaisseur.*

*Preuve du lemme.* — Par récurrence sur la dimension $n$ :

• $n=1$ : les seules parties à variations contradictoires de $\mathbb{R}$ sont les singletons.

• Soit S une partie à variations contradictoires de $\mathbb{R}^n$.

Pour un réel $x$, notons $S_x=\{y\in\mathbb{R}^{n-1}; (x, y)\in S\}$ la section $x$ de S. Notons aussi $\bar{\rho}_1=\bigotimes_{j\neq 1}\rho_j$ mesure sur $(\mathbb{R}^{n-1}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n-1}})$.

$S_x$ n'est pas nécessairement à variations contradictoires dans $\mathbb{R}^{n-1}$ mais pour tout couple de réels : $(a\neq b)$, $S_a\cap S_b$ est à variations contradictoires.

D'où, par hypothèse de récurrence : $\rho(S_a\cap S_b)=0, \forall a\neq b$.

Déduisons-en que $\{x\in\mathbb{R}; \bar{\rho}_1(S_x)>0\}$ est dénombrable :

Soit $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}^{n-1}$, de $\bar{\rho}_1$-mesure finie convergeant vers $\mathbb{R}^{n-1}$ ($\bar{\rho}_1$ $\sigma$-finie).

Alors

$$\{x\in\mathbb{R}; \bar{\rho}_1(S_x)>0\}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_{m,k}.$$

où

$$C_{m,k}=\left\{x\in\mathbb{R};\ \bar{\rho}_1(S_x\cap\Omega_m)\geq\frac{1}{k}\right\}$$

Or

$$\infty>\bar{\rho}_1(\Omega_m)\geq\sum_{x\in C_{m,k}}\bar{\rho}_1(S_x\cap\Omega_m)$$

car

$$\forall a\neq b,\quad \bar{\rho}_1(S_a\cap S_b)=0.$$

Par conséquent : $\infty>\operatorname{card}(C_{m,k})\cdot\frac{1}{k}$.

Donc pour tout $(m, k)$ card $C_{m,k}$ est fini.

Finalement on en déduit $\rho_1\{x;\ \bar{\rho}_1(S_x)>0\}=0$, et, par le théorème de Fubini $\rho(S)=0$. $\square$

Donc, pour une mesure $\rho$ produit de mesures sur $\mathbb{R}$ ne chargeant pas les points, $\rho(B)=0$.

(ii) Dans le cas général $\rho(B)$ peut bien sûr être non nul, mais montrons que $\rho(B\cap A)=0$.

Le cas où l'une au moins des composantes $\rho_i$ charge les points se ramène au cas où $\rho=\mu\otimes\nu$ avec $\mu=\bigotimes_{i=1}^{k}\delta_{x_i}$ où $\delta_{x_i}$ désigne la mesure de Dirac en un point $x_i$ de $\mathbb{R}$. $(k=1\ldots n)$ et $\nu=\bigotimes_{k+1}^{n}\nu_i$ où les $\nu_i$ sont des mesures $\sigma$-finies $\geq 0$ ne chargeant pas les points.

*Nota.* – Si $k=n$, il faut lire $\rho=\mu=\bigotimes_{i=1}^{n}\delta_{x_i}=\delta_x$.

Dans ce cas, $\rho(A\cap B)\leq\rho(A\cap\tilde{A}^c)=0$ car si $x\in\tilde{A}^c$, alors $G(x)=0$ donc $x\notin A$.

– Si $k<n$, notons $x$ l'élément de $\mathbb{R}^k$ de coordonnées $x_i$ et pour une partie E de $\mathbb{R}^n$, $(E)_x=\{y\in\mathbb{R}^{n-k}(x, y)\in E\}$ la section $x$ de E dans $\mathbb{R}^{n-k}$.

Il suffit de prouver que $\nu(A\cap B)_x=0$.

En fait nous allons montrer que $\nu(A\cap\tilde{A}^c)_x=0$ de la même façon que pour le cas où aucun des $\rho_i$ ne chargeait les points.

$$\begin{aligned}(A\cap\tilde{A}^c)_x&=A_x\cap(\tilde{A}^c)_x\\ &=\bigcup_{\substack{y\in\mathbb{R}^{n-k}\\ G(x,\,y)=0}}[-\infty, y]\quad\text{[Par croissance de } G(x,\,.)].\\ &=\bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}^{n-k}\\ G(x,\,q)=0}}]-\infty, q]\cup C^{(x)}.\end{aligned}$$

avec $C^{(x)}=\{y\in\mathbb{R}^{n-k};\ G(x, y)=0 \text{ et } \forall y'>y\ G(x, y')>0\}$.

Pour tout $y$ de $\mathbb{R}^{n-k}$ t.q. $G(x, q)=0$ on a par définition de G :

$$\nu(]-\infty, y] \cap A_x)=\rho(]-\infty,(x, y)] \cap A)=0 \quad (\rho=\delta_x \otimes \nu).$$

Donc $\Big(\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q}^{n-k} \\ G(x, q)=0}} ]-\infty, q] \cap A_x\Big)$ est de $\nu$-mesure nulle.

Il est facile de voir que $C^{(x)}$ est une partie à variations contradictoires de $\mathbb{R}^{n-k}$. Donc $\nu(C^{(x)})=0$, ce qui achève de montrer, dans le cas général, que $\rho(A \cap \tilde{A}^c)=0$. □

De façon tout à fait symétrique (en faisant jouer à F le rôle de G dans ce qui précède), on montre que $\rho(A^c \cap \tilde{A})=0$.

Nous avons donc construit une modification croissante de $\mathbf{1}_A$.

*b*) Construisons-la maintenant pour une fonction $f$ $\rho$-*p.s. croissante et bornée.*

Par homothétie, nous nous ramenons au cas où $f \in ]-1, 1[$. Écrivons $f$ comme la limite (point par point) d'une suite croissante de fonctions $f_n$ définies comme suit :

([$a$] désigne la partie entière du réel $a$)

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2^n}[2^n f] \\ &= \sum_{k=-2^n}^{2^n} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{k/2^n \leq f<(k+1)/2^n\}} \\ &= -1+\frac{1}{2^n} \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} \mathbf{1}_{A_n^k} \end{aligned}$$

où

$$A_n^k=\left\{\frac{k}{2^n} \leq f\right\}.$$

$f$ $\rho$-p.s. croissante entraîne que pour tout $(n, k)$ $\mathbf{1}_{A_n^k}$ est aussi $\rho$-p.s. croissante.

Soit $\tilde{A}_n^k$ la modification croissante de $A_n^k$ construite ci-dessus.

Posons alors

$$\tilde{f}_n=-1+\frac{1}{2^n} \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} \mathbf{1}_{\tilde{A}_n^k}.$$

Pour tout $n$, $\tilde{f}_n$ est bien sûr une modification, croissante, de $f_n$. Montrons que $\tilde{f}_n$ converge :

1) $\tilde{f}_n \in [-1, 1[$

2) $(\tilde{f}_n)_n$ est une suite croissante : en effet, il suffit de constater que si $A \subset B$, alors $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ (avec la construction faite en *a*)) or

$$A_n^k=A_{n+1}^{2k} \quad \text{et} \quad A_n^k \subset A_{n+1}^{2k-1}$$

d'où

$$\frac{1}{2^{n+1}}(\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n+1}^{2k-1}}+\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n+1}^{2k}})\geqq\frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{\tilde{A}_n^k}$$

et

$$\tilde{f}_{n+1}\geqq\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1}(\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n+1}^{2k-1}}+\mathbf{1}_{\tilde{A}_{n+1}^{2k}})\geqq\frac{1}{2^n}\sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1}\mathbf{1}_{\tilde{A}_n^k}=\tilde{f}_n.$$

Donc $\tilde{f}_n$ converge (point par point) vers une fonction $\tilde{f}$.

Et $\tilde{f}$ est croissante (comme limite d'une suite de fonctions croissantes), c'est une modification de $f$ (comme limite d'une suite de modifications des $f_n$).

De plus $\tilde{f}\in[-1, 1]$.

*c) Cas général :* Soit $f$ une fonction : $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ρ-p.s. croissante. Soit $g=\operatorname{th} f$; $g$ est une fonction ρ-p.s. croissante $\in]-1, 1[$. On peut définir $\tilde{g}$ une modification croissante de $g$; $\tilde{g}\in[-1, 1]$. Définissons $\tilde{f}$ : $\mathbb{R}^n\to[-\infty, +\infty]$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll}\tilde{f}(x)=\operatorname{argth}\tilde{g}(x) & \text{si } \tilde{g}(x)\in]-1, 1[\\ \tilde{f}(x)=-\infty & \text{si } \tilde{g}(x)=-1\\ \tilde{f}(x)=-\infty & \text{si } \tilde{g}(x)=1\end{array}$$

$\tilde{f}$ ainsi définie est une modification, croissante, de $f$. Ceci achève la preuve de la proposition 2.3.1. □

*Remarque.* — La réciproque de la proposition 2.3.1 est plus facile : si une fonction admet une modification croissante, alors elle est ρ-p.s. croissante.

*Preuve.* — Soit $\tilde{f}$ une modification croissante de $f$.

Pour montrer que $\rho^{\otimes 2}\{x\leqq y \text{ et } f(x)>f(y)\}=0$, il suffit de montrer que $\forall q\in\mathbb{Q}$, $\rho^{\otimes 2}\{x\leqq y; f(x)>q>f(y)\}=0$.

$$\begin{aligned}&\rho^{\otimes 2}\{x\leqq y; f(x)>q, f(q)<q\}\\ &=\int\mathbf{1}_{\{f(y)<q\}}\left[\int\mathbf{1}_{\{x\leqq y\}}\mathbf{1}_{\{f(x)>q\}}d\rho(x)\right]d\rho(y)\\ &=\int\mathbf{1}_{\{\tilde{f}(y)<q\}}\left[\int\mathbf{1}_{\{x\leqq y\}}\mathbf{1}_{\{\tilde{f}(x)>q\}}d\rho(x)\right]d\rho(y).\\ &=\rho^{\otimes 2}\{x\leqq y\tilde{f}(x)>q>\tilde{f}(y)\}=\rho^{\otimes 2}(\varnothing)=0.\end{aligned}$$

Maintenant, pour démontrer notre inégalité FKG, l'idéal serait de disposer d'un résultat similaire pour l'attractivité qui serait :

CONJECTURE. — Un hamiltonien ρ-p.s. attractif admet une modification attractive. Un tel résultat permettrait de se ramener au cas où H est attractif et $f$, $g$ sont deux fonctions croissantes partout. Ne disposant pas d'un tel résultat, nous devons passer par une *autre étape technique.*

Pour cela introduisons les notations suivantes :
Soit $\mathscr{C}=\{$parties de $\{1, \ldots, n\} \neq \varnothing$ et $\neq \{1, \ldots, n\}\}$.
Pour $\tau \in \mathscr{C}$ notons $x_\tau=(x_i)_{i \in \tau}$, $\bar{x}_\tau=(x_i)_{i \notin \tau}$.

$$\rho_\tau = \bigotimes_{i \in \tau} \rho_i \qquad \bar{\rho}_\tau = \bigotimes_{i \notin \tau}$$

*Remarque :*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ;\ \mathrm{H}(x \vee y) + \mathrm{H}(x \wedge y) < \mathrm{H}(x) + \mathrm{H}(y)\}$$
$$= \bigcup_{\tau \in \mathscr{C}} \{x, y);\ (x_\tau \geqq y_\tau);\ (\bar{x}_\tau \leqq \bar{y}_\tau)$$
$$\text{et } \mathrm{H}(x_\tau, \bar{y}_\tau) - \mathrm{H}(y_\tau, \bar{y}_\tau) < \mathrm{H}(x_\tau, \bar{x}_\tau) - \mathrm{H}(y_\tau, \bar{x}_\tau)\}$$

Nous en déduisons une caractérisation de l'attractivité p. s. :

LEMME 2.3.3. — H *est* $\rho$-*p.s. attractif ssi* $\forall \tau \in \mathscr{C}$, *pour* $\rho_\tau^{\otimes 2}$-*p.t.* $x_\tau \geqq y_\tau$, $\mathrm{H}(x_\tau, .) - \mathrm{H}(y_\tau, .)$ *est* $\bar{\rho}_\tau$-p.s. *croissante* (*sur* $\mathbb{R}^{n-|\tau|}$).

et

COROLLAIRE 2.3.4. — *Sur* $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$ :
*Si* H *est* $\rho$-*p.s. attractif.*
*Alors pour* $\rho_n$-*p.t.* $x_n$ $\mathrm{H}(., x_n)$ *est* $\bar{\rho}_n$-*p.s. attractif.*

*Preuve du corollaire.* — $\forall \tau \not\ni n$, pour $\rho_\tau^{\otimes 2}$-p.t. $x_\tau \geqq y_\tau$,
$\mathrm{H}(x_\tau, .) - \mathrm{H}(y_\tau, .)$ admet une modification croissante

$$(\text{modulo } \bar{\rho}_\tau = \bigotimes_{\substack{i \notin \tau \\ i \neq n}} \rho_i \otimes \rho_n).$$

$$\Rightarrow \quad \text{pour } \rho_n\text{-p.t. } x_n$$

$\mathrm{H}(x_\tau ., x_n) - \mathrm{H}(y_\tau, ., x_n)$ admet une modification croissante

$$(\text{modulo } \bigotimes_{\substack{i \notin \tau \\ i \neq n}} \rho_i).$$

Donc pour $\rho_n$-p.t. $x_n$, $\forall \tau \not\ni n$, pour $\rho_\tau^{\otimes 2}$-p.t. $x_\tau \geqq y_\tau$

$$\mathrm{H}(x_\tau, ., x_n) - \mathrm{H}(y_\tau, ., x_n)$$

est $\bar{\rho}_{\tau \cup \{n\}}$-p.s. croissante (réciproque de la proposition 2.3.1),
Et d'après la caractérisation du lemme ci-dessus.
Pour $\rho_n$-p.t. $x_n$, $\mathrm{H}(., x_n)$ est $\bar{\rho}_n$-p.s. attractif. □

## 4. Preuve de l'inégalité FKG

Elle s'effectue *par récurrence* sur la dimension *n*:

• $n=1$ : Pour toute mesure de probabilité $d\mu = \frac{e_\mathrm{H}}{\mathrm{Z_H}} d\rho$ sur $\mathbb{R}$, si $f$ et $g$ sont deux fonctions $\rho$-p.s. croissantes sur $\mathbb{R}$, de carré intégrable, on a, par duplication :

$$2\,\mathrm{cov}_{\mathrm{H}}(f, g)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,d\mu(x)\,d\mu(y)\geqq 0$$

car

$$\rho^{\otimes 2}\{(x, y); [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]<0\}=0$$

à cause de l'ordre total sur $\mathbb{R}$.

*Remarque.* – Ici, nous n'avons fait intervenir aucune propriété du hamiltonien. De toute façon, dans un ensemble totalement ordonné, tout hamiltonien est trivialement attractif :

$$\mathrm{H}(x\vee y)+\mathrm{H}(x\wedge y)=\mathrm{H}(x)+\mathrm{H}(y).$$

• *Dans* $\mathbb{R}^n$, $n\geqq 2$ : $f$ et $g$ sont deux fonctions $\rho$-p.s. croissantes, de carré intégrable pour la mesure de probabilité $d\mu=\dfrac{e^{\mathrm{H}}}{Z_{\mathrm{H}}}d\rho$. Soit $x_n^*$ la projection sur la dernière coordonnée.

On utilisera la notation $x=(\bar{x}_n, x_n)$ où $\bar{x}_n=(x_i)_{i=1\,\ldots\,n-1}$ et

$$\bar{\rho}_n=\bigotimes_{i=1}^{n-1}\rho_i.$$

Ici, parce que $\rho$ est une mesure produit et $e^{\mathrm{H}}>0$, on peut exhiber une *version mesurable de* $\mathrm{E}(f\,|\,x_n^*)$ :

Soit $\mathrm{Z}_n : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$x=(\bar{x}_n, x_n)\mapsto\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{\mathrm{H}(\bar{x}_n, x_n)}\,d\bar{\rho}(\bar{x}_n).$$

$\mathrm{Z}_n$ est $\sigma(x_n^*)$-mesurable.

Puisque $\mathrm{Z}_n(x)$ ne dépend que de $x_n$, on le notera aussi $\mathrm{Z}_n(x_n)$.

Soit $e(f) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{1}{\mathrm{Z}_n(x)}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f(\bar{x}_n, x_n)\,e^{\mathrm{H}(\bar{x}_n, x_n)}\,d\bar{\rho}_n(\bar{x}_n).$$

$e(f)$ est $\sigma(x_n^*)$-mesurable et pour toute fonction $\varphi$ de $\mathrm{L}^2(\mu)$ $\sigma(x_n^*)$-mesurable, $\mathrm{E}(\varphi f)=\mathrm{E}(\varphi\, e(f))$.

Donc $e(f)$ est bien une version mesurable de $\mathrm{E}(f\,|\,x_n^*)$.

D'autre part, $e(f)$ induit une fonction $e_n(f) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x_n\mapsto e(f)(\bar{x}_n, x_n)$$

puisque $e(f)(\bar{x}_n, x_n)$ ne dépend pas de $\bar{x}_n$ et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(f\,|\,x_n^*))=\mathrm{E}(e(f))=\mathrm{E}_n(e_n(f)).$$

où $\mathrm{E}_n$ désigne l'espérance sous la mesure image $x_n^*(\mu)$ ($n$-ième marginale de $\mu$).

• Pour montrer que $\underline{\mathrm{cov}_{\mathrm{H}}(f, g) \geqq 0}$, nous supposerons que :

1) $f$ et $g$ sont croissantes (quitte à les remplacer par des modifications).

2) $f$ et $g$ sont bornées. [Le résultat pour $f$, $g \in L^2(\mu)$ s'obtient ensuite par convergence dominée : en effet si $f$ est $\rho$-p.s. croissante alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $(n \wedge f) \vee -n$ est aussi $\rho$-p. s. croissante.]

Montrons d'abord *l'inégalité* $(\mathscr{I}_1)$ :

$$\underline{\mathrm{cov}_{\mathrm{H}}(fg) = \mathrm{E}(fg) - \mathrm{E}f\,\mathrm{E}g \geqq \mathrm{E}[\mathrm{E}(fg \mid x_n^*) - \mathrm{E}(f \mid x_n^*)\,\mathrm{E}(g \mid x_n^*)]}$$

puis nous concluerons en montrant la positivité de la v.a. dont on prend l'espérance dans le membre de droite.

L'inégalité $(\mathscr{I}_1)$ est équivalente à :

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(f \mid x_n^*)\,\mathrm{E}(g \mid x_n^*)) - \mathrm{E}(\mathrm{E}(f \mid x_n^*))\,\mathrm{E}(\mathrm{E}(g \mid x_n^*)) \geqq 0$$

ou encore à

$$\mathrm{E}_n(e_n(f)\,e_n(g)) - \mathrm{E}_n(e_n(f))\,\mathrm{E}_n(e_n(g)) \geqq 0$$

qui n'est autre que l'inégalité FKG dans $\mathbb{R}$, pourvu que les fonctions $e_n(f)$ et $e_n(g)$ soient $\rho_n$-p. s. croissantes.

Montrons-le pour $e_n(f)$ :

Soit $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

• $\underline{\mathrm{Z}_n(u)\,\mathrm{Z}_n(v)\,(e_n(f)(u) - e_n(f)(v)) = \mathrm{Z}_n(v)\,\mathscr{E}(u, v) + \mathscr{C}(u, v)}$

avec

$$\mathscr{E}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\mathrm{H}(\bar{x}_n, u)} (f(\bar{x}_n, u) - f(\bar{x}_n, v))\, d\bar{\rho}_n(\bar{x}_n)$$

et

$$\mathscr{C}(u, v) = \mathrm{Z}_n(v) \int e^{\mathrm{H}(\,.\,, u)} f(\,.\,, v)\, d\bar{\rho}_n - \mathrm{Z}_n(u) \int e^{\mathrm{H}(\,.\,, v)} f(\,.\,, v)\, d\bar{\rho}_n.$$

*Remarque.* – Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\mathrm{H}(\bar{x}_n, u)}\, d\bar{\rho}_n(\bar{x}_n) < \infty$ pour $\rho_n$-p. t. $u$, et $f$ bornée, la différence $\mathscr{E}(u, v)$ est bien définie pour $\rho_n^{\otimes 2}$-p. t. $(u, v)$.

• Et pour $\rho_n^{\otimes 2}$ p. t. $(u, v)$ t. q. $u \geqq v$, $\underline{\mathscr{E}(u, v) \geqq 0}$, car $f$ est croissante. Notons que c'est ici que nous avons besoin d'une modification croissante pour $f$ :

*A priori* l'hypothèse « $f$ p. s. croissante » aurait seulement donné $\bar{\rho}_n^{\otimes 2}\{(\bar{x}_n, \bar{y}_n);\ \bar{x}_n \geqq \bar{y}_n \text{ et } f(\bar{x}_n, u) < f(\bar{y}_n, v)\} = 0$ pour $\rho_n^{\otimes 2}$-p. t. $(u \geqq v)$.

D'autre part,

$$\mathscr{C}(u, v) = \mathrm{Z}_n^2(u)\ \mathrm{cov}\,(e^{\mathrm{H}(\,.\,, u) - \mathrm{H}(\,.\,, v)}, f(\,.\,, v))$$

où la covariance est prise ici pour la loi de probabilité sur $\mathbb{R}^{n-1}$ :

$$d\nu_{(v)} = \frac{1}{\mathrm{Z}_n(v)}\, e^{\mathrm{H}(\,.\,, v)}\, d\bar{\rho}_n.$$

*Remarque.* — Rien ne prouve que $e^{H(.,u)-H(.,v)}$ est dans $L^2(\nu_{(v)})$. En revanche, on peut définir la covariance car $e^{H(.,u)-H(.,v)}$, $f(.\,v)$ et leur produit sont dans $L^1(\nu(v))$ pour $\rho_n^{\otimes 2}$-p. t. $(u, v)$.

Pour faire une récurrence tout à fait rigoureuse il faudrait mettre dans l'hypothèse de récurrence « si $f$ et $g$ sont telles que $fg$, $f$ et $g \in L^1(\mu)$ » au lieu de « si $f$, $g \in L^2(\mu)$ », ce qui ne changerait rien au reste.

Nous allons maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence pour montrer que cette covariance est positive :

— Pour $\rho_n^{\otimes 2}$-p. t. $(u \geqq v)$ $H(.,u)-H(.,v)$ est $\bar{\rho}_n$-p. s. croissant (Caractérisation de l'attractivité dans le lemme 2.3.3).

— $f(.,v)$ est $\bar{\rho}_n$-p. s. croissante (et même partout croissante).

— D'après le corollaire 2.3.4, pour $\rho_n$-p. t. $v$, $H(.,v)$ est $\bar{\rho}_n$-p. s. attractif.

Par conséquent, en appliquant l'inégalité FKG dans $\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$\underline{\mathscr{C}(u, v) \geqq 0} \qquad \text{pour } \rho_n^{\otimes 2}\text{-p. t.} \quad (u \geqq v).$$

Donc, pour $\rho_n^{\otimes 2}$-p. t. $(u \geqq v)$ $e_n(f)(u) - e_n(f)(v) \geqq 0$. De même pour $e_n(g)$.

*L'inégalité* $(\mathscr{I}_1)$ *est démontrée.*

Il reste à montrer que $E(fg \mid x_n^*) - E(f \mid x_n^*) E(g \mid x_n^*) = M_n$ est une v. a. $\geqq 0$.

Comme ci-dessus, on l'identifie à une v. a. sur $\mathbb{R}$ :

$M_n(u) = \operatorname{Cov}(f(.,u), g(.,u))$ sous la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{n-1}$ $d\nu(u)$ définie ci-dessus.

— Pour $\rho_n$-p. t. $u$, $f(.,u)$, $g(.,u)$ sont $\rho_n$-p. s.-croissantes.

$$H(.,u) \text{ est } \rho_n\text{-p. s. attractif.}$$

L'inégalité FKG dans $\mathbb{R}^{n-1}$ s'applique à nouveau.

Donc $M_n(u) \geqq 0$ pour $\rho_n$-p. t. $u$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.1. □

## 5. Exemples et remarques

*Exemples.* — Cette inégalité FKG redonne les inégalités classiques :

1) Sur $\{-1, 1\}$ en prenant $\rho_i = \delta_{-1} + \delta_1$ pour tout $i$.

2) Sur $\mathbb{R}^n$ ou tout sous-ensemble produit de $\mathbb{R}^n$ en prenant une mesure portée par ce sous-ensemble.

Par rapport à Simon [9], où H est prise quadratique, et à Bakry-Michel [10], où H est $C^2$ à dérivées bornées, nous nous sommes affranchis de toute hypothèse de régularité concernant H.

*Remarques.* — *a*) L'inégalité FKG est bien évidemment *conservée par projection* :

Soit $\bar{x}_n^*$ la projection : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ sur les $(n-1)$ premières coordonnées.

Soient H un hamiltonien ρ-p. s. attractif et $f$, $g$ deux fonctions $\bar{\rho}_n$-p. s. croissantes $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ telles que $f \circ \bar{x}_n^*$ et $g \circ \bar{x}_n^*$ sont de carré $\mu_H$-intégrable.

Soit $\bar{\mu}_H^{(n)}$ la mesure image de $\mu_H$ par $\bar{x}_n^*$.

$f \circ \bar{x}_n^*$ et $g \circ \bar{x}_n^*$ sont ρ-p. s. croissantes et par conséquent

$$\operatorname{cov}_{\mu_H}(f \circ \bar{x}_n^*, g \circ \bar{x}_n^*) \geqq 0$$

ou de façon équivalente

$$\operatorname{Cov}_{\bar{\mu}_H^{(n)}}(f, g) \geqq 0.$$

Il est donc naturel de se demander si la mesure $\bar{\mu}_H(n)$ est aussi attractive *i.e.* si le hamiltonien $\bar{H}_n = \log \dfrac{d\bar{\mu}_H^{(n)}}{d\bar{\rho}_n} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ est $\bar{\rho}_n$-p. s. attractif.

La réponse est oui :

Considérons le cas où H est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à dérivées croisées positives, pour simplifier :

$$d\bar{\mu}_H^{(n)}(\bar{x}_n) = \left[\frac{1}{Z_H}\int_{\mathbb{R}} e^{H(\bar{x}_n, x_n)}\, d\rho_n(x_n)\right] d\bar{\rho}_n(\bar{x}_n).$$

donc

$$\bar{H}_n(\bar{x}_n) = \log\left[\frac{1}{Z_H}\int_{\mathbb{R}} e^{H(\bar{x}_n, x_n)}\, d\rho_n(x_n)\right]$$

et pour $i \neq j$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j}\bar{H}_n(\bar{x}_n) = E_{H(\bar{x}_n, .)}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_n, .)\right) + \operatorname{cov}_{H(\bar{x}_n, .)}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x}_n, .), \frac{\partial H}{\partial x_j}(\bar{x}_n, .)\right)$$

le premier terme de la somme est l'espérance d'une variable positive, le deuxième terme est la covariance sous une mesure associée à un hamiltonien attractif de deux fonctions croissantes. Par conséquent $\bar{H}_n$ est attractif.

*b*) *Problème de la réciproque.* — La remarque *a*) amène aussi à se demander s'il existe une réciproque de l'inégalité FKG:

Si $\forall f$ et $g$ croissantes $\operatorname{cov}_H(f, g) \geqq 0$ alors H attractif?

C'est le cas sur $\{-1, 1\}^2$ : tous les hamiltoniens sont ici de la forme $H(\omega) = J\,\omega_1\,\omega_2 + h_1\,\omega_1 + h_2\,\omega_2 + a$.

Il est facile de voir que $\operatorname{cov}_H(\omega_1^*, \omega_2^*) \geqq 0 \Leftrightarrow J \geqq 0$.

Cependant, cette réciproque n'est plus vraie en général.

Le contre-exemple le plus immédiat s'obtient à partir d'une propriété par ailleurs remarquable établie par L. Pitt [12].

Pour les variables gaussiennes, l'inégalité FKG est satisfaite si et seulement si les corrélations sont positives. Or il n'est pas difficile de construire une matrice de densité Q (définie positive) à coefficients hors-diagonale non tous négatifs ($-x^t Q x$ non attractif!) mais telle que la matrice des covariances $Q^{-1}$ soit néanmoins à termes tous positifs (et donc l'inégalité FKG soit satisfaite d'après [12]). Cette équivalence $\operatorname{cov}(X_i, X_j) \geqq 0$, $\forall i, j \Leftrightarrow \forall f, g$ croissantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ $\operatorname{cov}(f(X), g(X)) \geqq 0$ (ASS) n'est pas valable dans le cas général : cette remarque est faite dans [15]. Cet article, antérieur à l'établissement de l'inégalité FKG contient d'ailleurs de nombreux résultats et remarques concernant les variables associées (propriété ASS).

Il serait intéressant de trouver une condition nécessaire et suffisante en dehors du cas gaussien, en particulier dans le cas discret ou tout au moins d'étendre la condition suffisante.

## III. LES INÉGALITÉS GKS DANS $\mathbb{R}^n$

Ici l'espace mesuré sera $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \rho)$ où $\rho$ est $\sigma$-finie, $\geqq 0$ et non identiquement nulle.

L'objet de ce paragraphe, qui est le centre de notre article, est de généraliser les inégalités GKS données par Simon dans [9] et de clarifier les hypothèses sous lesquelles ces inégalités s'appliquent.

Nous devons d'abord faire des *hypothèses supplémentaires* sur la mesure $\rho$ :

Pour $i=1\ldots n$ : Soit $\tau_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto \tau_i x \qquad \text{avec} \quad (\tau_i x)_i = -x_i$$
$$\text{et} \quad (\tau_i x)_j = x_j, \qquad \forall j \neq i.$$

$\tau_i$ est la réflexion par rapport à l'hyperplan $\{x_i = 0\}$.

*Hypothèse* $(\mathscr{H}_1)$

$\forall i = 1\ldots n$, $\rho$ est invariante par la réflexion $\tau_i$.

*Hypothèse* $(\mathscr{H}_2)$

$\forall i = 1\ldots n$, $\rho\{x_i = 0\} = 0$ ($\rho$ ne charge pas les hyperplans $\{x_i = 0\}$).

Dans tout ce paragraphe, nous supposons que $\rho$ satisfait les deux hypothèses $(\mathscr{H}_1)$ et $(\mathscr{H}_2)$. Les inégalités GKS reposent essentiellement sur la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en $2^n$ quadrants :

## 1. Décomposition de $\mathbb{R}^n$ en quadrants

*Notations.* – $\mathscr{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i = 0\}$.

– Pour généraliser le quadrant du plan, nous nommerons quadrant toute partie connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C}$.

– $\tilde{\rho}$ désignera la restriction de la mesure $(2^n \rho)$ au quadrant positif $]0, +\infty[^n$, muni de sa tribu borélienne,

$$\mathscr{B}_{]0, +\infty[^n}$$

– Par commodité on continuera à noter $\rho$ la restriction de $\rho$ à $(\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C}})$.

La décomposition en quadrants est la suivante :

L'application

$$\underline{\Psi} : \quad (\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C}}, d\rho) \to (]0, +\infty[^n \times \Omega, \mathscr{B}_{]0, +\infty[^n} \otimes \mathscr{P}(\Omega), d\tilde{\rho} \otimes d\omega)$$

$$x \mapsto (\tilde{x}, \omega) \quad \text{où} \quad \left. \begin{aligned} \tilde{x}_i &= |x_i| \\ \text{et} \quad \omega_i &= \operatorname{sgn}(x_i) \end{aligned} \right\} \quad \forall i = 1 \ldots n$$

est une bijection bimesurable et la mesure image de $d\rho$ par $\Psi$ est $d\tilde{\rho} \otimes d\omega$.

Dans la suite, on identifiera ces deux espaces mesurés et l'on écrira $\underline{x = (\tilde{x}, \omega)}$.

Grâce à cette identification et à la décomposition en chaos de Walsh (*voir* § 1), toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n - \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ s'écrit (de façon unique) :

$$\underline{f(x) = \sum_{A \in \mathscr{P}} f_A(\tilde{x})\, \omega_A} \quad (\text{Rappel } \mathscr{P} = \mathscr{P}(\{1, \ldots, n\}))$$

où, pour tout $A \in \mathscr{P}$, $f_A$ est une fonction mesurable :

$$\underline{(]0, +\infty[^n, \mathscr{B}_{]0, +\infty[^n}) \to \mathbb{R}}$$

de plus on a :

$$\forall \tilde{x} \in ]0, +\infty[^n, \quad f_A(\tilde{x}) = \int_\Omega \omega_A f(\omega \tilde{x})\, d\omega.$$

Nous adaptons à $\mathbb{R}^n$ la définition d'une fonction GKS du paragraphe 1 :

DÉFINITION 1.1. – Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite GKS $\rho$-p.s. si dans son développement en chaos de Walsh (ci-dessus) les fonctions $f_A$ sont $\geqq 0$ $\tilde{\rho}$-p.s.

*Remarques.* – 1) Pour être tout à fait rigoureux, il aurait fallu écrire dans la définition : « si dans le développement de sa restriction à $\mathbb{R}^n - \mathscr{C}$ ».

Mais dorénavant, puisque $\rho(\mathscr{C})=0$, nous identifierons une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et sa restriction à $\mathbb{R}^n-\mathscr{C}$.

2) Autrement dit, $f$ est GKS $\rho$-p.s. si pour $\tilde{\rho}$-p.t. $\tilde{x}$, la fonction $f(\tilde{x}, .) : \Omega \to \mathbb{R}$ est GKS au sens donné au paragraphe 1.

*Exemples.* – 1. Dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \rho)$, $f$ est GKS $\rho$-p.s. si ses parties paires et impaires sont $\geqq 0$ $\rho-$p.s.

2. Dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \rho)$ toutes les fonctions polynômes à coefficients positifs sont GKS $\rho$-p.s.

## 2. Inégalité GKS1

THÉORÈME. – *Soit* H *un hamiltonien sur* $\mathbb{R}^n$, *pour la mesure* $\rho$ *et* $f$ *une fonction de* $L^1(\mu_H)$.

*Si* H *et* $f$ *sont GKS* $\rho$-*p.s. Alors* $E_H(f) \geqq 0$.

*Preuve.* – Montrons-le pour une fonction du type $x \mapsto \omega_A f_A(\tilde{x})$. Le résultat général en découlera par linéarité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f e^{H} d\rho = \int_{\mathbb{R}^n-\mathscr{C}} f e^{H} d\rho = \int_{]0,+\infty[^n} f_A(\tilde{x}) \left[\int_{\Omega} \omega_A e^{H(\tilde{x},\omega)} d\omega\right] d\tilde{\rho}(\tilde{x}).$$

Pour $\tilde{\rho}$-p.t. $\tilde{x}$, $H(\tilde{x}, .)$ est GKS dans $\Omega$.

L'inégalité GKS1 dans $\Omega$ donne donc $\int_{\Omega} \omega_A e^{H(\tilde{x},\omega)} d\omega \geqq 0$ pour $\tilde{\rho}$-p.t. $\tilde{x}$.

Par hypothèse, $f_A \geqq 0$ $\tilde{\rho}$-p.s. D'où le résultat annoncé. □

L'inégalité GKS2 s'obtient moins directement à partir de l'inégalité GKS2 dans $\Omega$. Elle fait de plus appel à l'inégalité FKG montrée au paragraphe 2.

## 3. Inégalité GKS2 dans $\mathbb{R}^n$

Nous aurons besoin d'une *hypothèse supplémentaire* sur la mesure $\rho$, pour pouvoir utiliser FKG, en plus des hypothèses $(\mathscr{H}_1)$ et $(\mathscr{H}_2)$.

*Hypothèse* $(\mathscr{H}_3)$ : $\rho$ est une *mesure produit* : $\rho = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i$ où $\rho_i$ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

*Remarque.* – Pour clarifier la situation remplaçons les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$, $(\mathscr{H}_3)$ par une hypothèse équivalente :

$(\mathscr{H}_{1\,2\,3})$ : $\rho = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho_i$, où $\forall i$, $\rho_i$ est une mesure $\sigma$-finie, $\geqq 0$, invariante par la symétrie $x \mapsto -x$, ne chargeant pas $\{0\}$.

Nous aurons aussi besoin *d'autres définitions* :

DÉFINITION 3.1. — Un hamiltonien H sera dit $\partial$GKS $\rho$-p. s. si pour tout $A \in \mathscr{P}$, $H_A$ est une fonction $\tilde{\rho}$-p. s. croissante sur $]0, +\infty[^n$ ou, autrement dit, si pour $\rho^{\otimes 2}$-p. t. $\tilde{x} \geqq \tilde{y}$, $[H(\tilde{x}, .) - H(\tilde{y}, .)]$ est GKS sur $\Omega$.

DÉFINITION 3.2. — Un hamiltonien H sera dit $\partial^2$-GKS si pour tout $A \in \mathscr{P}$, $H_A$ est $\tilde{\rho}$-p. s. attractif ou autrement dit si pour $\rho^{\otimes 2}$-p. t. $(\tilde{x}, \tilde{y})$ $[H(\tilde{x} \vee \tilde{y}, .) + H(\tilde{x} \wedge \tilde{y}, .) - H\tilde{x}, f.) - H(\tilde{y}, .)]$ est GKS sur $\Omega$.

*Remarque.* — Dans le cas où H est de classe $C^2$ sur un ouvert contenant le support de $\rho$ on a :

$$H \text{ est } \partial\text{GKS } \rho\text{-p. s.} \quad \text{ssi } \forall i = 1 \dots n \ \frac{\partial H}{\partial x_i} \text{ est GKS } \rho\text{-p. s.}$$

et

$$H \text{ est } \partial^2 \text{GKS } \rho\text{-p. s.} \quad \text{ssi } \forall i \neq j \ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \text{ est GKS } \rho\text{-p. s.}$$

ce qui explique nos dénominations.

Nous pouvons maintenant énoncer l'inégalité GKS 2 :

THÉORÈME 3.3. — *Sous l'hypothèse* $(\mathscr{H}_{1\,2\,3})$ *sur* $\rho$, *soient* H *un hamiltonien à la fois GKS,* $\partial$*GKS et* $\partial^2$ *GKS* $\rho$-*p. s. et* $f$, $g$ *deux fonctions de* $L^2(\mu_H)$, *à la fois GKS et* $\partial$*GKS* $\rho$-*p. s. Alors, sous la mesure de probabilité associée à* H, $f$ *et* $g$ *sont positivement corrélées :* $E_H(fg) - E_H f\, E_H g \geqq 0$.

Avant de démontrer cette inégalité, donnons quelques exemples :

*a) Exemples et remarques.* — 1. Soit P *un polynôme* sur $\mathbb{R}^n$ tel que $e^P \in L^1(\rho)$ (P hamiltonien pour $\rho$); soient $f$ et $g$ deux polynômes de $L^2(\mu_P)$. Si P, $f$, $g$ sont à coefficients positifs ou nuls.

Sous les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ sur $\rho$, GKS 1 s'applique : $E_P(f) \geqq 0$.

Sous l'hypothèse $(\mathscr{H}_{1\,2\,3})$, GKS 2 s'applique : $E_P(fg) - E_P(f)\, E_P(g) \geqq 0$.

2. Dans 1, on peut remplacer les variables $x_i$ par des fonctions $\varphi_i(x_i)$ réelles, *impaires et croissantes* sans changer le caractère GKS et $\partial$GKS de $f$ et $g$ :

*i. e.* : soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto \varphi(x) \qquad \text{avec} \quad (\varphi(x))_i = \psi_i(x_i) \text{ impaire, croissante.}$$

Si $f$ est GKS et $\partial$GKS alors $f \circ \varphi$ *est GKS et* $\partial$*GKS*.

Si, de plus, les changements de variables $\varphi_i$ *sont convexes* sur $]0, +\infty[$, alors la propriété $\partial^2$ GKS est conservée :

$$H\ \partial^2 \text{GKS} \Rightarrow \underline{H \circ \varphi\ \partial^2 \text{GKS}}.$$

En particulier, on retrouve les inégalités données par Simon [9] en prenant les hypothèses suivantes :

— $\rho$ vérifie $(\mathscr{H}_{1\,2\,3})$

— H est un polynôme du *second degré* à coefficients positifs ou nuls.

– $f = F \circ \varphi$, $g = G \circ \psi$ avec F et G 2 polynômes à coefficients positifs et $\varphi$, $\psi$ 2 changements de variables impairs et croissants coordonnée par coordonnée (comme ci-dessus).

*Remarque.* – Pour notre inégalité GKS1, plus générale, nous n'avons pas besoin que $\rho$ soit une mesure produit. Seule l'invariance par les réflexions nous est nécessaire.

3. On retrouve les inégalités d'origine sur $\{-1, 1\}^n$ en prenant $\rho = \bigotimes_{i=1}^{n} (\delta_{-1} + \delta_1)$.

On peut aussi prendre comme espace de phases, à la place de $\{-1, 1\}$, $\{-2p-1, -2p+1, \ldots, -1, 1, \ldots, 2p-1, 2p+1\}$ (approximation classique des spins demi-entiers), mais pas $\{-2p, -2p+2, \ldots, 0, \ldots, 2p-2, 2p\}$ (spins entiers) car la mesure correspondante charge $\{0\}$ et l'identification $x = (\tilde{x}, \omega)$ n'est plus possible.

Seule l'inégalité FKG reste valable sur $\{-2p, \ldots, 0, \ldots, 2p\}^n$.

4. *Remarque.* – Comme nous l'avions noté pour l'inégalité FKG (§ 2.5), ces inégalités GKS sont elles aussi *conservées par projection* :

Désignons par $\bar{x}_n^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection sur les $(n-1)$ premières coordonnées.

Soient H un hamiltonien GKS, $\partial$GKS, $\partial^2$GKS $\rho$-p.s. et $f$, $g$ deux fonctions : $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ GKS et $\partial$GKS $\rho_n$-p.s.

Alors $f \circ \bar{x}_n^*$ et $g \circ \bar{x}_n^*$ sont GKS et $\partial$GKS $\rho$-p.s.

Donc $\operatorname{cov}_H(f \circ \bar{x}_n^*, g \circ \bar{x}_n^*) \geqq 0$ ou de façon équivalente, si $\bar{\mu}_H^{(n)}$ désigne la mesure image $\bar{x}_n^* (\mu_H)$ et

$$\bar{H}_n = \log \frac{d\bar{\mu}_H^{(n)}}{d\bar{\rho}_n},$$

alors

$$\operatorname{cov}_{\bar{H}_n}(f, g) \geqq 0.$$

Mais ici la propriété *GKS, $\partial$GKS, $\partial^2$GKS du hamiltonien n'est pas stable par projection* (contrairement à la propriété d'attractivité : *voir* § 2.5) : voici un contre-exemple dû à Sophie Maille :

Soit $\{-1, 1\}^5$ muni de la mesure uniforme $d\omega$.

Soit H : $\{-1, 1\}^5 \to \mathbb{R}$

$$(\omega_i)_{i=1 \ldots 5} \to J \sum_{i<5} \omega_i \omega_5, \qquad J > 0.$$

$\bar{H}_5(\omega_1, \ldots, \omega_4) = \log \int e^{H(\omega)} d\omega_5$ n'est pas GKS pour toutes les valeurs de J :

Par exemple :

$$\int \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 e^{\bar{H}_5(\omega_1, \ldots, \omega_4)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4$$

$$= \log \frac{\operatorname{ch} 4J}{\operatorname{ch}^4 2J} < 0 \quad \text{pour J assez grand}$$

(ce qui implique, d'après l'inégalité GKS1 sur $\{-1, 1\}$ que $\bar{H}_5$ *n'est pas GKS*.

En particulier, nous en déduisons que « H GKS » n'est pas une condition nécessaire pour que : « $\forall f, g$ GKS on ait $E_H f \geqq 0$ et $\operatorname{cov}_H(f, g) \geqq 0$ ».

*b) Preuve du théorème* 3.3. — Nous procédons comme pour la démonstration de l'inégalité FKG mais en conditionnant ici par $\tilde{x}$ :

Soit

$$\tilde{x}^* : \quad \mathbb{R}^n \setminus \mathscr{C} \to ]0, +\infty[^n \qquad x = (\tilde{x}, \omega) \mapsto \tilde{x}$$

Posons

$$\tilde{Z} : \quad ]0, +\infty[^n \to \mathbb{R} \qquad \tilde{x} \mapsto \frac{1}{Z_H} \int e^{H(\tilde{x}, \omega)} d\omega$$

et, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \rho)$

$$\tilde{e}(f) : \quad ]0, +\infty[^n \to \mathbb{R} \qquad \tilde{x} \mapsto \frac{1}{\tilde{Z}(\tilde{x}) Z_H} \int f(\tilde{x}, \omega) e^{H(\tilde{x}, \omega)} d\omega.$$

Alors $e(f) : \mathbb{R}^n - \mathscr{C} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tilde{e}(f)(\tilde{x})$$

définit une *version mesurable de* $E(f \mid \tilde{x}^*)$.

Maintenant montrons que, pour $f$ et $g$ satisfaisant aux hypothèses on a :

$$\underline{E_H(fg) - E_H f E_H g \geqq E_H[E(fg \mid \tilde{x}^*) - E(f \mid \tilde{x}^*) E(g \mid \tilde{x}^*)] \quad (\mathscr{I}_1)}$$

Puis nous concluerons en montrant que $E(fg \mid \tilde{x}^*) - E(f \mid \tilde{x}^*) E(g \mid \tilde{x}^*)$ est p. s. $\geqq 0$

$$(\mathscr{I}_1) \quad \text{équivaut à } E(\tilde{e}(f) \tilde{e}(g)) - E(\tilde{e}(f)) E(\tilde{e}(g)) \geqq 0 \quad (\mathscr{I}_2)$$

l'espérance étant prise sous la loi de $\tilde{x}^*$ *i. e.* la mesure $\tilde{Z} d\tilde{\rho}$.

$(\mathscr{I}_2)$ n'est autre qu'une inégalité FKG sur $(\mathbb{R}^n, \tilde{\rho})$ pourvu que l'on vérifie :

1) $\tilde{e}(f)$ et $\tilde{e}(g)$ $\tilde{\rho}$-p. s. croissantes.

2) $\log \tilde{Z}$ $\tilde{\rho}$-p. s. attractif.

1. Montrons-le pour $\tilde{e}(f)$ :

$$\tilde{e}(f)(\tilde{x})-\tilde{e}(f)(\tilde{y})=\underline{\mathscr{E}(\tilde{x},\tilde{y})+\frac{\tilde{Z}(\tilde{y})}{\tilde{Z}(\tilde{x})}\mathscr{C}(\tilde{x},\tilde{y})}$$

avec

$$\mathscr{E}(\tilde{x},\tilde{y})=E_{H(\tilde{x},\,.)}(f(\tilde{x},\,.)-f(\tilde{y},\,.))$$

et

$$\mathscr{C}(\tilde{x},\tilde{y})=\operatorname{cov}_{H(\tilde{y},\,.)}(f(\tilde{y},\,.),\,e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{y},\,.)})$$

*Nota.* — ici $E_{h(.)}(\varphi(.))$ désigne l'espérance de $\varphi$ sous la mesure de probabilité $\frac{1}{Z_h}e^{h(\omega)}d\omega$ sur $\Omega$.

— H est GKS $\rho$-p.s. $s$ donc pour $\tilde{\rho}$-p.t. $\tilde{x}$, $H(\tilde{x},\,.)$ *est GKS sur* $\Omega$.

— $f$ est $\partial$GKS $\rho$-p.s. donc pour $\tilde{\rho}^{\otimes 2}$-p.t. $(\tilde{x}\geqq\tilde{y})$, $[f(\tilde{x},\,.)-f(\tilde{y},\,.)]$ est GKS sur $\Omega$ donc, en appliquant *l'inégalité GKS*1 *sur* $\Omega$, on a : pour $\rho^{\otimes 2}$-p.t. $(\tilde{x}\geqq\tilde{y})$, $\underline{\mathscr{E}(\tilde{x},\tilde{y})\geqq 0.}$

D'autre part, H est $\partial$GKS $\rho$-p.s. donc : pour $\rho^{\otimes 2}$-p.t. $(\tilde{x}\geqq\tilde{y})$ $[H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{y},\,.)]$ et par conséquent $e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{y},\,.)}$ sont GKS sur $\Omega$ et l'on peut appliquer *GKS*2 *sur* $\Omega$ : $\mathscr{C}(\tilde{x},\tilde{y})\geqq 0$, donc $e(f)$ *est* $\rho$-*p. s. croissante*.

2. Vérifions que $\log\tilde{Z}$ est $\tilde{\rho}$-p.s. attractif :

Pour cela, étudions le signe de $R(\tilde{x},\tilde{y})=\tilde{Z}(\tilde{x}\vee\tilde{y})\tilde{Z}(\tilde{x}\wedge\tilde{y})-\tilde{Z}(\tilde{x})\tilde{Z}(\tilde{y})$ ou de

$$\frac{R(\tilde{x},\tilde{y})}{\tilde{Z}(\tilde{y})\tilde{Z}(\tilde{x}\wedge\tilde{y})}=E_{H(\tilde{x},\,.)}(e^{H(\tilde{x}\vee\tilde{y},\,.)-H(\tilde{y},\,.)})-E_{H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}(e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)})$$

ou encore, en ajoutant et en soustrayant $E_{H(\tilde{y},\,.)}(e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)})$ :

$$=\underline{\mathscr{M}(\tilde{x},\tilde{y})+\mathscr{L}(\tilde{x},\tilde{y})}$$

où

$$\mathscr{M}(\tilde{x},\tilde{y})=E_{H(\tilde{y},\,.)}(e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}[e^{H(\tilde{x}\vee\tilde{y},\,.)+H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)-H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{y},\,.)}-1])$$

et

$$\mathscr{L}(\tilde{x},\tilde{y})=[E_{H(\tilde{x},\,.)}-E_{H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}](e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}).$$

• Pour $\underline{\rho^{\otimes 2}\text{-p. t. }(\tilde{x},\tilde{y})}$ on a :

— comme H est $\partial$GKS, $e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}$ GKS sur $\Omega$.

— comme H est $\partial^2$GKS, $[e^{H(\tilde{x}\wedge\tilde{y})+H(\tilde{x}\wedge\tilde{y})-H(\tilde{x})-H(\tilde{y})}-1]$ GKS sur $\Omega$ (*cf.* remarque 1, § 1.2.) donc $\mathscr{M}(\tilde{x},\tilde{y})\geqq 0$.

— de plus, H $\partial$GKS entraîne que pour tout $A\in\mathscr{P}$, $H_A(\tilde{y})\geqq H_A(\tilde{x}\wedge\tilde{y})$ (définition de $\partial$GKS).

Or, pour une fonction GKS (ici $e^{H(\tilde{x},\,.)-H(\tilde{x}\wedge\tilde{y},\,.)}$), sa moyenne est une fonction croissante des coefficients $(H_A)_{A\in\mathscr{P}}$ : ceci est une conséquence de l'inégalité GKS 2 sur $\Omega$ (*cf.* la remarque du § 1.3) donc $\mathscr{L}(\tilde{x},\tilde{y})\geqq 0$.

Finalement, pour $\tilde{\rho}^{\otimes 2}$-p. t. $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $R(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqq 0$ *i.e.* $\log \tilde{Z}$ est un hamiltonien $\tilde{\rho}$-p. s. attractif.

L'inégalité $(\mathscr{I}_1)$ est établie.

Il reste à vérifier que $\tilde{e}(fg) - \tilde{e}(f)\tilde{e}(g)$ est une fonction $\tilde{\rho}$-p. s. $\geqq 0$.

Or $\tilde{e}(fg)(\tilde{x}) - \tilde{e}(f)(\tilde{x})\tilde{e}(g)(\tilde{x})$

$$= E_{H(\tilde{x},\,.)}(f(\tilde{x},\,.)\,g(\tilde{x},\,.)) - E_{H(\tilde{x},\,.)}(f(\tilde{x},\,.))\,E_{H(\tilde{x},\,.)}(g(\tilde{x},\,.)) \geqq 0$$

pour $\tilde{\rho}$-p. t. $\tilde{x}$ en vertu de l'inégalité GKS2 sur $\Omega$.

Ceci achève la preuve de l'inégalité GKS2 dans $\mathbb{R}^n$. □

## IV. L'INÉGALITE GHS

Contrairement aux inégalités GKS et FKS où apparaît dans les hypothèses une structure assez générale (croissance et attractivité, décomposition en chaos de Walsh), l'inégalité GHS fait appel à des hypothèses très particulières.

Rappelons d'abord l'inégalité initiale, due à *Griffiths, Hurst et Sherman* [4] :

THÉORÈME 4.0. — *Sur* $\Omega = \{-1, 1\}^n$, *on considère le hamiltonien* $H(\omega) = \sum_{i<j} J_{ij}\omega_i\omega_i + \sum_i h_i\omega_i$ (*interactions de paires avec champ extérieur*) *et la mesure de probabilité associée* $d\mu_H = \dfrac{e^H}{Z_H}\, d\omega$.

*Si pour tout* $(i \neq j)$ $J_{ij} \geqq 0$ *et pour tout* $i$, $h_i \geqq 0$, *alors la corrélation triple de trois spins quelconques est négative : pour tout* $(i, j, k)$,

$$C(i, j, k) = E_H[(\omega_i^* - E\,\omega_i^*)(\omega_j^* - E\,\omega_j^*)(\omega_k^* - E\,\omega_k^*)] \leqq 0.$$

*Remarque.* — $C(i, j, k) \leqq 0$ équivaut à $\dfrac{\partial^2 E_H(\omega_i^*)}{\partial h_j\, \partial h_k} \leqq 0$.

En particulier, si le champ est uniforme $(\forall\, i\, h_i = h)$, alors pour tout $k$, la fonction $h \mapsto E_H(\omega_k^*)$ est concave. Cette propriété est d'une grande importance pour étudier le comportement de la magnétisation à la limite thermodynamique : $m(h) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} E_H(\omega_i^*)$. Lebowitz [5] a donné une preuve simplifiée de cette inégalité en utilisant les inégalités GKS et FKG ainsi qu'un changement de variable dû à Percus (déjà mentionné au § 1.3). Ce même changement de variable permet aussi de montrer une inégalité GHS dans $\mathbb{R}^n$ (*voir* par exemple [8]).

R. S. Ellis et C. M. Newman ont ensuite généralisé cette inégalité [13] et aussi donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait lieu avec un hamiltonien quadratique. Ici nous étendons légèrement les conclusions que cette même condition permet d'obtenir concernant les corrélations de fonctions des spins. Énonçons d'abord notre résultat avant de revenir sur son intérêt.

## 1. Cadre et notations

Nous restons sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \rho)$ avec une mesure de probabilité $d\mu_H = \dfrac{e^H}{Z_H} d\rho$ en faisant les hypothèses : $\rho$ reste une mesure produit. De plus, elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et le logarithme de sa densité vérifie une propriété de parité et de convexité que nous allons préciser. Le hamiltonien H est la somme d'une partie quadratique et d'une partie linéaire à coefficients tous positifs.

*Plus précisément :*

$(\mathscr{H}'_1)$ $$d\rho_{(x)} = \prod_{i=1}^{n} e^{P_i(x_i)} dx_i$$

avec pour tout $i$, $P_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ et telle que sur $]0, +\infty[\ \dfrac{\partial^3 P_i}{\partial x^3} \leqq 0.$

$(\mathscr{H}'_2)$ $$H(x) = \sum_{i<j} J_{ij} x_i x_j + \sum_i h_i x_i \qquad \text{avec} \quad H_{ij} \geqq 0, \quad h_i \geqq 0.$$

Ajoutons l'hypothèse « technique » :

$(\mathscr{H}'_3)$ $e^H \in L^1(\rho)$ pour assurer l'existence de $\mu_H$.

*Notation* — Pour une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ notons $u_i$ la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto u(x_i) \end{aligned}$$

## 2.

THÉORÈME 4.2 (Inégalité GHS). — *Sous les hypothèses* $(\mathscr{H}'_1)$ $(\mathscr{H}'_2)$ $(\mathscr{H}'_3)$ *concernant la mesure de probabilité* $\mu_H$.

*Si $u$, $v$, $w$ sont trois fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires, croissantes et concaves sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout triplet $(i, j, k)$ tel que $u_i$, $u_j$, $u_k \in L^3(\mu_H)$ la corrélation triple de ces trois fonctions est négative :*

$$E_H[(u_i - E\,u_i)(u_j - E\,u_j)(u_k - E\,u_k)] \leqq 0.$$

*Commentaires.* — 1. Ceci généralise l'inégalité de [8] ou [9] où pour tout $i$, $P_i$ est un polynôme :

$$P_i(x) = -a_i x^4 + b_i x^2 : a_i < 0 \qquad \text{et} \qquad u = v = w = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$$

2. Dans l'article [13] évoqué ci-dessus, la condition sur la mesure est un peu plus faible : $p_i(x) = -\int_0^x V(t)\,dt$ où V est une fonction paire convexe (éventuellement $+\infty$). Les hypothèses de régularité imposées ici ($\mathscr{C}^3$) facilitent la preuve mais pourraient être aisément relaxées.

Par rapport à l'article d'Ellis et Newman, il est évident que nous n'apportons rien de plus en ce qui concerne leur élégante condition nécessaire mais nous pensons que l'intérêt de notre inégalité repose sur deux points :

*a*) Nous étendons la négativité des moments centrés d'ordre trois à des variables non linéaires des spins (sous-linéaires). Par changement de variable, cela donne une inégalité GHS pour une interaction non quadratique [mais néanmoins très particulière : $H_{(x)} = \sum J_{ij} v_i(x_i) v_j(x_j)$ où $(v_i)_{i=1\,\ldots\,n}$ sont des fonctions croissantes, impaires et convexes sur $\mathbb{R}_+$].

*b*) Notre preuve diffère des précédentes en faisant intervenir une seule duplication ($\mathbb{R}^{2N}$ au lieu de $\mathbb{R}^{4N}$) et en utilisant les inégalités FKG et GKS.

## 3.

*Preuve.* — Elle comprend 4 étapes :

(1) Duplication : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

(2) Changement de variable de Percus $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$

(3) Décomposition en quadrants : $\mathbb{R}^{2n} \simeq ]-\infty, 0[^n \times \Omega \times ]0, +\infty[^n \times \Omega$.

(4) Nous intégrons d'abord sur $\Omega \times \Omega$, puis nous appliquons l'inégalité FKG sur $]-\infty, 0]^n \times ]0, +\infty[^n$ grâce aux inégalités GKS.

(1) A partir des fonctions *u*. *v*, *w*, définissons trois fonctions de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$U_{(x,y)} = u(x_i) - u(y_i); \qquad V(x, y) = v(x_j) - v(y_j)$$

et

$$W(x, y) = w(x_k) + w(y_k).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $C_{ijk}$ s'écrit sous la forme d'une covariance sous $\mu_H \otimes \mu_H$ :

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} E_{\mu_H \otimes \mu_H} [UV(W - E_{\mu_H \otimes \mu_H}(W))].$$

(2) Effectuons le *changement de variable* A :

$$\begin{gathered} \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \\ (x, y) \mapsto A(x, y) = (X, Y) \\ \text{où } \begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases} \end{gathered}$$

A est bijective : soient $\mathscr{U}=\mathrm{U}\circ\mathrm{A}^{-1}$, $\mathscr{V}=\mathrm{V}\circ\mathrm{A}^{-1}$, $\mathscr{W}=\mathrm{W}\circ\mathrm{A}^{-1}$ et $\nu$ la loi image et $\mu_{\mathrm{H}}\otimes\mu_{\mathrm{H}}$ par cet automorphisme on a :

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\,\mathrm{E}_\nu(\mathscr{U}\mathscr{V}(\mathscr{W}-\mathrm{E}_\nu\mathscr{W})).$$

Soit F la densité de $\nu$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$\mathrm{F}=\frac{1}{\mathrm{Z}}\exp\left\{\sum_{l=1}^{n}\mathscr{P}_l+\mathscr{H}\right\}$$

où

$$\mathscr{P}_l(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\mathrm{P}_l\left(\frac{\mathrm{X}_l+\mathrm{Y}_l}{2}\right)+\mathrm{P}_l\left(\frac{\mathrm{Y}_l-\mathrm{X}_l}{2}\right)$$

et

$$\mathscr{H}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\mathrm{J}_{ij}(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j+\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_j)+\sum_{i=1}^{n}h_i\mathrm{Y}_i$$

$\mathscr{H}$ est attractif sur $\mathbb{R}^{2n}$ et pour tout $l$, $\dfrac{\partial^2\mathscr{P}_l}{\partial\mathrm{X}_l\,\partial\mathrm{Y}_l}\geqq 0$ sur le quart d'espace $\{\mathrm{X}_l\leqq 0,\ \mathrm{Y}_l\geqq 0\}$. En effet :

$$\frac{\partial^2\mathscr{P}_l}{\partial\mathrm{X}_l\,\partial\mathrm{Y}_l}(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\frac{1}{4}\left[\mathrm{P}''\left(\frac{\mathrm{X}_l+\mathrm{Y}_l}{2}\right)-\mathrm{P}''\left(\frac{\mathrm{Y}_l-\mathrm{X}_l}{2}\right)\right]$$

si

$$\mathrm{X}_l\leqq 0\quad\text{et}\quad \mathrm{Y}_l\geqq 0,\qquad \mathrm{Y}_l+\mathrm{X}_l\leqq \mathrm{Y}_l-\mathrm{X}_l$$

comme P″ est paire et décroissante, on a

$$\mathrm{P}''\left(\frac{\mathrm{X}_l+\mathrm{Y}_l}{2}\right)-\mathrm{P}''\left(\frac{\mathrm{Y}_l-\mathrm{X}_l}{2}\right)=\mathrm{P}''\left(\frac{|\mathrm{X}_l+\mathrm{Y}_l|}{2}\right)-\mathrm{P}''\left(\frac{\mathrm{Y}_l-\mathrm{X}_l}{2}\right)\geqq 0.$$

Nous observons donc que le *hamiltonien* $\sum_{l=1}^{n}\mathscr{P}_l+\mathscr{H}$ *est attractif* sur le *quadrant* $\{\mathrm{X}_k<0,\ \mathrm{Y}_k>0,\ k=1,\ldots,n\}$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$.

(3) Nous allons nous ramener à une *covariance sur le quadrant ci-dessus* grâce à la transformation bijective :

$$\mathrm{T}\left\{\begin{array}{l}(\mathbb{R}^n-\mathscr{C})^2\to\,]-\infty,0[^n\times\Omega\times]0,+\infty[^n\times\Omega=\mathrm{E}\\ \qquad(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mapsto(\tilde{\mathrm{X}},\bar{\omega},\tilde{\mathrm{Y}},\omega)\end{array}\right.$$

où pour tout $l$, $\tilde{\mathrm{X}}_l=-|\mathrm{X}_l|$, $\tilde{\mathrm{Y}}_l=|\mathrm{Y}_l|$, $\bar{\omega}_l=-\operatorname{sgn}(\mathrm{X}_l)$, $\omega_l=\operatorname{sgn}\mathrm{Y}_l$. Pour tout $l$, soit $\tau_l^{\mathrm{X}}$ (resp. $\tau_l^{\mathrm{Y}}$) la réflexion de $\mathbb{R}^{2n}$ par rapport à l'hyperplan $\{\mathrm{X}_l=0\}$ (resp. $\{\mathrm{Y}_l=0\}$).

$$\mathscr{U}\circ\tau_i^{\mathrm{X}}=-\mathscr{U}$$

alors que $\mathscr{U}$ est invariante par toutes les autres réflexions. Donc

$$\mathscr{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \bar{\omega}_i \, \mathscr{U}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}}) \quad \text{pour tout } (\mathrm{X}, \mathrm{Y}).$$

De même,

$$\mathscr{V}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \bar{\omega}_j \, \mathscr{V}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}})$$

et

$$\mathscr{W}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \omega_k \, \mathscr{W}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}})$$

($i$, $j$, $k$ sont les trois indices *fixés* dans l'énoncé du théorème). Pour les différentes projections suivantes, rappelons les notations :

$$\omega^*, \quad \bar{\omega}^*, \quad \omega_l^*, \quad \bar{\omega}_l^*, \quad \tilde{\mathrm{X}}^*, \quad \tilde{\mathrm{Y}}^*,$$

qui, à un élément de $\mathrm{E} : e = (\tilde{\mathrm{X}}, \bar{\omega}, \tilde{\mathrm{Y}}, \omega)$ associent respectivement :

$$\omega, \quad \bar{\omega}, \quad \omega_l, \quad \bar{\omega}_l, \quad \tilde{\mathrm{X}}, \quad \tilde{\mathrm{Y}}.$$

Soit $\eta$ *la mesure image de* $\nu$ *par* T (probabilité sur E).

La mesure image de la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^{2n}$ par T est à une constante près $d\tilde{\mathrm{X}}\, d\tilde{\mathrm{Y}}\, d\bar{\omega}\, d\omega$ où $d\tilde{\mathrm{X}}\, d\tilde{\mathrm{Y}}$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $]-\infty, 0[^n \times ]0, +\infty[^n = \tilde{\mathrm{E}}$ et $d\bar{\omega}\, d\omega$ la mesure uniforme sur $\Omega \times \Omega$.

Par conséquent,

$$\underline{d\eta(\tilde{\mathrm{X}}, \bar{\omega}, \tilde{\mathrm{Y}}, \omega) = \frac{1}{\mathrm{Z}} e^{\tilde{\mathscr{H}} + \sum_{l=1}^{n} \tilde{\mathscr{P}}_l}\, d\tilde{\mathrm{X}}\, d\tilde{\mathrm{Y}}\, d\bar{\omega}\, d\omega.}$$

avec

$$\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}}, \bar{\omega}, \omega) = \mathscr{H}(\bar{\omega}\tilde{\mathrm{X}}, \omega\tilde{\mathrm{Y}})$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{l<m} \mathrm{J}_{lm} (\bar{\omega}_l \bar{\omega}_m \tilde{\mathrm{X}}_l \tilde{\mathrm{X}}_m + \omega_l \omega_m \tilde{\mathrm{Y}}_l \tilde{\mathrm{Y}}_m) + \sum_{l=1}^{n} h_l \omega_l$$

et

$$\tilde{\mathscr{P}}_l(\tilde{\mathrm{X}}, \bar{\omega}, \tilde{\mathrm{Y}}, \omega) = \mathscr{P}_l(\bar{\omega}\tilde{\mathrm{X}}, \omega\tilde{\mathrm{Y}})$$

et Z une constante idoine.

D'autre part, soit $\tilde{\mathscr{U}} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$

$$e \mapsto \mathscr{U}(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}})$$

et $\tilde{\mathscr{V}}$ et $\tilde{\mathscr{W}}$ définies de la même façon.

Nous pouvons maintenant exprimer $\mathrm{C}_{ijk}$ comme une covariance sur E :

$$\underline{\mathrm{C}_{ijk} = \frac{1}{2} \mathrm{E}_\eta [\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^* \, \tilde{\mathscr{U}} \tilde{\mathscr{V}} (\omega_k^* \tilde{\mathscr{W}} - \mathrm{E}_\eta (\omega_k^* \tilde{\mathscr{W}})]}$$

Puis nous *conditionnons par* $\tilde{\mathrm{X}}$, $\tilde{\mathrm{Y}}$ :

$\tilde{\mathscr{U}}$, $\tilde{\mathscr{V}}$, $\tilde{\mathscr{W}}$ sont $\sigma(\tilde{\mathrm{X}}^*, \tilde{\mathrm{Y}}^*)$-mesurables et il n'est pas difficile de voir (sur le hamiltonien) que, *conditionnellement à* $(\tilde{\mathrm{X}}^*, \tilde{\mathrm{Y}}^*)$, $\bar{\omega}^*$ *et* $\omega^*$ *sont indépendantes.*

D'où

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\,E_\eta[E(\bar\omega_i^*\,\bar\omega_j^*\,|\,\tilde X^*,\,\tilde Y^*)\,\tilde{\mathscr U}\,\tilde{\mathscr V}\,(E(\omega_k^*\,|\,\tilde X^*,\,\tilde Y^*)\,\tilde{\mathscr W}-E_\eta(\omega_k^*\,\tilde{\mathscr W}))].$$

Soit $\tilde\eta$ la loi du couple $(\tilde X^*, \tilde Y^*)$ sous $\eta$ : c'est une mesure de probabilité sur $\tilde E=]-\infty.\,0[^n\times]0,\,+\infty[^n$ :

$$d\tilde\eta(\tilde X,\,\tilde Y)=\left(\frac{1}{Z'}\int_{\Omega\times\Omega}e^{\tilde{\mathscr H}+\sum_l\tilde{\mathscr P}_l}\,d\bar\omega\,d\omega\right)d\tilde X\,d\tilde Y=\tilde Z'(\tilde X,\,\tilde Y)\,d\tilde X\,d\tilde Y.$$

Remarquons que $\tilde{\mathscr P}_l$ *est* $\sigma(\tilde X^*, \tilde Y^*)$*-mesurable* : en effet

$$\forall l,\quad \mathscr P_l(X,\;Y)=P_l\left(\frac{X_l+Y_l}{2}\right)+P_l\left(\frac{Y_l-X_l}{2}\right)$$

est invariante par toute réflection $\tau_m^X$ ou $\tau_m^Y$ en raison de la parité des $P_l$.

Donc

$$\mathscr P_l(X,\,Y)=\mathscr P_l(\tilde X,\,\tilde Y)$$

et

$$\tilde{\mathscr P}_l(\tilde X,\,\bar\omega,\,\tilde Y,\,\omega)=\mathscr P_l(\bar\omega\tilde X,\,\omega\tilde Y)=\mathscr P_l(\tilde X,\,\tilde Y)$$

d'où, la densité de $\tilde\eta$ :

$$\tilde Z'(\tilde X,\,\tilde Y)=\frac{e^{\sum_l\mathscr P_l(\tilde X,\,\tilde Y)}}{Z'}\int_{\Omega\times\Omega}e^{\tilde{\mathscr H}}\,d\bar\omega\,d\omega=\frac{e^{\sum_l\mathscr P_l(\tilde X,\,\tilde Y)}}{Z'}\,z(\tilde X,\,\tilde Y)\tag{3.1}$$

Pour une fonction $f: E\to\mathbb R$.

Soit

$$\tilde e(f)(\tilde X,\,\tilde Y)=\frac{e^{\sum_l\mathscr P_l(\tilde X,\,\tilde Y)}}{Z'\,\tilde Z'(\tilde X,\,\tilde Y)}\int_{\Omega\times\Omega}f e^{\tilde{\mathscr H}}\,d\bar\omega\,d\omega.$$

Alors, la fonction $e(f): E\to\mathbb R$

$$(\tilde X,\,\bar\omega,\,\tilde Y,\,\omega)\mapsto\tilde e(f)(\tilde X,\,\tilde Y)$$

définit une version mesurable de $E(f\,|\,\tilde X^*,\,\tilde Y^*)$.

En continuant de noter $\tilde{\mathscr U}$ la fonction $\tilde E\to\mathbb R$

$$(\tilde X,\,\tilde Y)\mapsto\tilde{\mathscr U}(\tilde X,\,\bar\omega,\,\tilde Y,\,\omega)$$

ainsi que pour $\tilde{\mathscr V}$, $\tilde{\mathscr W}$, nous obtenons :

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\,E_{\tilde\eta}[\tilde e(\bar\omega_i^*\,\bar\omega_j^*)\,\tilde{\mathscr U}\,\tilde{\mathscr V}\,(\tilde e(\omega_k^*)\,\tilde{\mathscr W}-E(\tilde e(\omega_k^*)\,\tilde{\mathscr W}))]$$

$C_{ijk}$ est une covariance sur le quadrant $\tilde{E} = ]-\infty, 0[^n \times ]0, +\infty[^n$ de $\mathbb{R}^{2n}$, sous la mesure $\tilde{\eta}$ :

$$\boxed{C_{ijk} = \frac{1}{2} \operatorname{cov}_{\tilde{\eta}}(\varphi, \psi)}$$

avec $\varphi = \tilde{e}(\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^*) \tilde{\mathscr{U}} \tilde{\mathscr{V}}$ et $\Psi = \tilde{e}(\omega_k^*) \tilde{\mathscr{W}}$.

(4) Pour appliquer l'*inégalité FKG* du paragraphe 2, nous allons vérifier que

(*a*) $\varphi$ et $\psi$ sont respectivement *décroissante* et *croissante* sur $\tilde{E}$.

(*b*) $\log \tilde{Z}'$ *est attractif* sur $\tilde{E}$.

Montrons (*a*) : $\tilde{\mathscr{U}}$ et $\tilde{\mathscr{V}}$ sont $\leqq 0$, *croissantes sur* $\tilde{E}$. $(a_1)$

En effet, $\tilde{\mathscr{U}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = u\left(\frac{\tilde{X}_i + \tilde{Y}_i}{2}\right) - u\left(\frac{\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i}{2}\right) \leqq 0$ puisque $X_i \leqq 0$ et $u$ croissante.

Comme, de plus, $u$ est supposée concave sur $]0, +\infty[$, $u$ est presque partout dérivable pour la mesure de Lebesgue, ainsi que $\tilde{\mathscr{U}}$ et

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{U}}}{\partial \tilde{X}_i} = \frac{1}{2}\left[u'\left(\frac{\tilde{X}_i + \tilde{Y}_i}{2}\right) + u'\left(\frac{\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i}{2}\right)\right] \geqq 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathscr{U}}}{\partial \tilde{Y}_i} = \frac{1}{2}\left[u'\left(\frac{\tilde{X}_i + \tilde{Y}_i}{2}\right) - u'\left(\frac{\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[u'\left(\frac{|\tilde{X}_i + \tilde{Y}_i|}{2}\right) - u'\left(\frac{\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i}{2}\right)\right] \geqq 0$$

puisque $\tilde{Y}_i - \tilde{X}_i \geqq |\tilde{X}_i + \tilde{Y}_i| \geqq 0$ et $u'$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$. $u$ est nécessairement continue; comme toutes les autres dérivées partielles (définies p. p.) sont nulles, $\tilde{\mathscr{U}}$ est croissante sur son domaine $\{\tilde{X}_k < 0, \tilde{Y}_k > 0\}$.

De même $\tilde{\mathscr{V}}$ est $\leqq 0$, croissante.

De la même façon, en utilisant l'imparité, la croissance et la concavité sur $\mathbb{R}_+$ de $w$, on vérifie que $\tilde{\mathscr{W}}$ est $\geqq 0$ croissante sur le même domaine $(a_2)$.

Montrons maintenant que la fonction $\tilde{e}(\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^*)$ *est* $\geqq 0$, *décroissante*

$$\tilde{e}(\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^*)(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{z(\tilde{X}, \tilde{Y})} \int_{\Omega \times \Omega} \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j e^{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \bar{\omega}, \tilde{Y}, \omega)} d\bar{\omega}\, d\omega.$$

$$= \underline{E_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \cdot, \cdot, \tilde{Y}, \cdot)}(\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^*)}$$

où

- $z(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \int_{\Omega \times \Omega} e^{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \bar{\omega}, \tilde{Y}, \omega)} d\bar{\omega}\, d\omega.$
- $E_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \cdot, \cdot, \tilde{Y}, \cdot)}$ désigne l'espérance sous la mesure sur $\Omega \times \Omega$ :

$$\frac{1}{z(\tilde{X}, \tilde{Y})} e^{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \bar{\omega}, \tilde{Y}, \omega)} d\bar{\omega}\, d\omega$$

• et $\bar{\omega}_i^*$, $\bar{\omega}_j^*$ continuent de désigner les projections coordonnées, mais ici : $\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ pour tout $l$,

$$\frac{\partial\tilde{e}(\bar{\omega}_i^*\,\bar{\omega}_j^*)}{\partial\tilde{X}_l}=\frac{1}{z(\tilde{X},\tilde{Y})}\int_{\Omega\times\Omega}\bar{\omega}_i\,\bar{\omega}_j\,\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{X}_l}\,E^{\tilde{\mathscr{H}}}\,d\bar{\omega}\,d\omega$$

$$-\frac{1}{z^2(\tilde{X},\tilde{Y})}\int\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{X}_l}\,e^{\tilde{\mathscr{H}}}\,d\bar{\omega}\,d\omega\int\bar{\omega}_i\,\bar{\omega}_j\,e^{\tilde{\mathscr{H}}}\,d\bar{\omega}\,d\omega$$

$$=\operatorname{cov}_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\,.\,,\tilde{Y},\,.\,)}\left(\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{X}}(\tilde{X},\,.\,,\tilde{Y},\,.\,),\ \bar{\omega}_j^*\,\bar{\omega}_j^*\right)$$

or

$$\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{X}_l}(\tilde{X},\bar{\omega},\tilde{Y},\omega)=\frac{1}{2}\sum_{m\neq l}J_{ml}\,\tilde{X}_m\,\bar{\omega}_m\,\bar{\omega}_l$$

comme $\forall\, m\,\tilde{X}_m<0$, $-\dfrac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{X}_l}$ est GKS sur $\Omega\times\Omega$.

De même.

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{Y}_l}\,e(\omega_k^*)=\operatorname{cov}_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\,.\,,\tilde{Y},\,.\,)}\left(\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{Y}_l}(\tilde{X},\,.\,,\tilde{Y},\,.\,),\ \omega_k^*\right)$$

et

$$\underline{\frac{\partial\tilde{\mathscr{H}}}{\partial\tilde{Y}_l}(\tilde{X},\bar{\omega},\tilde{Y},\omega)}=\frac{1}{2}\sum_{m\neq l}M_{ml}\,\tilde{Y}_m\,\omega_m\,\omega_l+h_l\ \text{est}\ \underline{\text{GKS sur }\Omega\times\Omega}.$$

$$\underline{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\,.\,,\tilde{Y},\,.\,)}:\quad(\bar{\omega},\omega)\mapsto\frac{1}{2}\sum_{l<m}J_{lm}(\tilde{X}_l\,\tilde{X}_m\,\bar{\omega}_l\,\bar{\omega}_m+\tilde{Y}_l\,\tilde{Y}_m\,\omega_l\,\omega_m)+\sum_l h_l\,\tilde{Y}_l$$

est GKS sur $\Omega\times\Omega$ (pour tout $(\tilde{X},\tilde{Y})\in\tilde{E}$)

Nous pouvons donc appliquer l'inégalité GKS2 sur $\Omega\times\Omega$, qui donne, pour tout $l$ :

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_l}\,e(\bar{\omega}_i^*\,\bar{\omega}_j^*)\leqq 0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial}{\partial\tilde{Y}_l}\,e(\omega_k^*)\geqq 0$$

d'autre part, on obtient de la même façon :

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{Y}_l}\,e(\bar{\omega}_i^*\,\bar{\omega}_j^*)=0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial}{\partial\tilde{X}_l}\,e(\omega_k^*)=0$$

à cause de l'indépendance de $\omega^*$ et $\bar{\omega}^*$ sachant $\tilde{X}^*$, $\tilde{Y}^*$. De plus, l'inégalité GKS1 donne :

$$e(\bar{\omega}_i^*\,\bar{\omega}_j^*)\geqq 0\qquad\text{et}\qquad e(\omega_k^*)\geqq 0.$$

Donc

$$\left.\begin{array}{r}e(\bar{\omega}_i^*\,\bar{\omega}_j^*)\ \textit{est une fonction}\ \geqq 0\ \textit{décroissante sur}\ \tilde{E}\\ \textit{et}\ e(\omega_k^*)\ \textit{est une fonction}\ \geqq 0\ \textit{croissante.}\end{array}\right\}\qquad(a_3)$$

De $(a_1)$, $(a_2)$ et $(a_3)$ nous déduisons que

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \tilde{\mathscr{V}}\tilde{\mathscr{V}}\, e(\bar{\omega}_i^* \bar{\omega}_j^*) \text{ est } \geqq 0, \textit{ décroissante} \\ \text{et } \psi = \tilde{\mathscr{W}}\, e(\omega_k^*) \text{ est } \geqq 0, \textit{ croissante} \end{array}\right\} \qquad (a)$$

$(b)$ $\underline{\log \tilde{Z}'(\tilde{X}, \tilde{Y})} = -\log Z' + \sum_i \mathscr{P}_i(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \log z(\tilde{X}, \tilde{Y})$ d'après (3.1).

Nous avons déjà remarqué, à la fin de (2), que pour tout $(l, m)$, $\dfrac{\partial^2 \mathscr{P}_m}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{Y}_l} \geqq 0$ sur le cadran $\tilde{E}$.

Comme toutes les autres dérivées croisées sont nulles, il suffit maintenant de montrer que $\log z(\tilde{X}, \tilde{Y})$ *est attractif sur* $\tilde{E}$ :

$$z(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \int_{\Omega \times \Omega} e^{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, \bar{\omega}, \tilde{Y}, \omega)}\, d\bar{\omega}\, d\omega$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{X}_m} \log z(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\, .,\, \tilde{Y},\, .)}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_m}(\tilde{X}, ., \tilde{Y}, .)\right)$$

et

$$\underline{\frac{\partial^2}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{X}_m} \log z(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\, .\, \tilde{Y},\, .)}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{X}_m}(\tilde{X}, ., \tilde{Y}, .)\right)\Bigg)}$$

$$\underline{+ \operatorname{cov}_{\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X},\, .,\, \tilde{Y},\, .)}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_m}, \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_l}\right)}.$$

$\dfrac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}^2}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{X}_m} = \dfrac{1}{2} J_{ml}\, \bar{\omega}_m\, \bar{\omega}_l$ est une fonction GKS sur $\Omega \times \Omega$ de même $-\dfrac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_l}$ et $-\dfrac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_m}$ sont GKS.

L'inégalité GKS1 donne donc :

$$\underline{E_{\tilde{\mathscr{H}}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{X}_m}\right) \geqq 0}$$

et l'inégalité GKS2 :

$$\underline{\operatorname{cov}_{\tilde{\mathscr{H}}}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_l}, \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_m}\right) \geqq 0.}$$

donc

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{X}_l \partial \tilde{X}_m} \log z(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geqq 0.$$

De la même façon,

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{Y}_m \partial \tilde{Y}_l} \ln z(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E_{\tilde{\mathscr{H}}}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_m \partial \tilde{Y}_l}\right) + \operatorname{cov}_{\tilde{\mathscr{H}}}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_m}, \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_l}\right)$$

les fonctions $\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_m \partial \tilde{Y}_l}(\tilde{X}, .\tilde{Y}, .), \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_m}, \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_l}$ sont GKS sur $\Omega \times \Omega$.

Donc $\underline{\frac{\partial^2}{\partial \tilde{Y}_m \partial \tilde{Y}_l} \log z \geqq 0}$.

Les autres dérivées croisées

$$\underline{\frac{\partial^2}{\partial \tilde{X}_m \partial \tilde{Y}_l} \log z \text{ sont nulles :}}$$

en effet

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathscr{H}}}{\partial X_m \partial \tilde{Y}_l} = 0$$

et $\frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{X}_m}, \frac{\partial \tilde{\mathscr{H}}}{\partial \tilde{Y}_l}$ sont respectivement $\sigma(\bar{\omega}^*)$ et $\sigma(\omega^*)$-mesurables donc indépendantes, sous la mesure associée au hamiltonien $\tilde{\mathscr{H}}(\tilde{X}, ., \tilde{Y}, .)$. Ceci achève de montrer que $\log z(\tilde{X}, \tilde{Y})$ est attractif.

Nous pouvons donc appliquer l'inégalité FKG à la mesure

$$\tilde{Z}'(\tilde{X}, \tilde{Y})\, d\tilde{X}\, d\tilde{Y} \quad \text{sur } \tilde{E}, \mathscr{B}_{\tilde{E}}$$

et aux fonctions respectivement décroissante et croissante $\varphi$ et $\psi$.

Finalement $C_{ijk} = \frac{1}{2} \operatorname{cov}(\varphi, \psi) \leqq 0$.

## 4.

*Remarques et exemples.* – (1) Avec les mêmes hypothèses mais des champs $h_i$ tous $\leqq 0$ au lieu d'être tous $\geqq 0$, on obtient l'inégalité opposée. Il suffit pour cela de faire le changement de variable : $x \to -x$; on est ainsi ramené aux hypothèses initiales.

(2) Contrairement aux inégalités GKS et FKG données précédemment, l'inégalité GHS sur $\{-1, 1\}^n$ n'est pas un cas particulier de l'inégalité GHS sur $\mathbb{R}^n$.

Ceci est dû au fait que la preuve ci-dessus n'est valable que pour une mesure produit invariante (à une constante près) par transformation linéaire $\begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases}$ (ici la mesure de Lebesgue). Pour obtenir l'inégalité GHS sur $\{-1, 1\}^n$, on peut néanmoins, à partir de l'inégalité GHS sur $\mathbb{R}^n$, faire dégénérer la mesure de probabilité vers la mesure du théorème 4.0 :

Prenons pour tout $l$ et $K \in \mathbb{N}^*$

$$P_l^{(K)}(x) = -K(x^2 - 1)^2$$

et

$$d\mu^{(K)}(x)=\frac{e^{H(x)}}{Z^{(K)}}\prod_{l=1}^{n} e^{P_l(x_l)}\,dx_l.$$
$$\Big(H(x)=\sum_{l<m} J_{lm}x_l x_m+\sum_l h_l x_l\Big)$$

$x\mapsto(x^2-1)^2$ atteint son minimum en $x=1$ et $x=1$ et, quand K tend vers $\infty$, $\mu^{(K)}$ converge en loi vers $\mu$ absolument continue par rapport à la mesure $(\delta_{-1}+\delta_1)^{\otimes n}$ sur $\mathbb{R}^n$, de densité $\frac{e^H}{Z}$.

Donc, en passant à la limite dans les inégalités GHS pour $\mu^{(K)}$, on obtient l'inégalité GHS sur $\Omega$.

(3) L'inégalité GHS donnée dans [8] correspond au cas où pour tout $i$, $P_i$ est un polynôme de forme :

$$P_i(x)=-a_i x^4-b_i x^2 \quad \text{avec } a_i<0, \qquad b_i \text{ quelconque} \in\mathbb{R}.$$

En particulier, sur $\mathbb{R}$, pour une fonction $u$ impaire, croissante et concave sur $]0, +\infty[$ (par exemple $u=\tanh$), sous la mesure de probabilité $d\mu=\frac{1}{Z}e^{-ax^4-bx+hx}\,dx$ $h\geqq 0$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, $E((u-Eu)^3)\leqq 0$. De même, les polynômes $P_i(x)=-a_{2k}x^{2k}-a_{2k-2}x^{2k-2}\dots-a_4x^4-bx^2$ vérifient les hypothèses si $\forall j\in[2, k]$, $a_{2j}\geqq 0$.

## CONCLUSION

Parmi ces inégalités, seule l'inégalité FKG possède des hypothèses stables par projection $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$ (*voir* remarque des § 2.5 et 3.3). Ceci en fait sans doute l'inégalité la plus achevée et la plus satisfaisante.

Les inégalités GKS font aussi apparaître une structure assez générale (décomposition en chaos de Walsh) mais nous aurions aimé pousser leur généralisation en cherchant des hypothèses plus larges sur le hamiltonien, préservées par projection. Nous n'y sommes pas parvenus.

En ce qui concerne l'inégalité GHS, malgré une légère généralisation, elle continue de s'appliquer à des hypothèses très particulières et reste à nos yeux assez miraculeuse. Enfin, la condition nécessaire établie dans [13] montre qu'il s'agit essentiellement d'une propriété des mesures sur $\mathbb{R}$.

### REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier le professeur D. Bakry pour lui avoir fourni, lors de discussions, les idées qui ont abouti à cet article ainsi que pour ses nombreux conseils et pour ses encouragements.

# RÉFÉRENCES

[1] R. B. GRIFFITHS, Correlations in Ising Ferromagnets I, II, *J. of Math. Phys.*, vol. **8**, 1967, p. 478-483; p. 484-489.

[2] D. G. KELLY et S. SHERMAN, General Griffiths' Inequalities on Correlations in Ising Ferromagnets, *J. Math. Phys.*, vol. **9**, 1968, p. 466-484.

[3] C. FORTUIN, P. KASTELYN et J. GINIBRE, Correlation Inequalities on some Partially Ordered Sets, *Comm. in Math. Phys.*, vol. **22**, 1971, p. 89-103.

[4] R. B. GRIFFITHS, C. A. HURST et S. SHERMAN, Concavity of Magnetization of an Ising Ferromagnet in a Positive External Field, *J. Math. Phys.*, vol. **11**, 1970, p. 790-795.

[5] J. L. LEBOWITZ, GHS and other Inequalities, *Comm. Math. Phys.*, vol. **35**, 1974, p. 87-92.

[6] R. S. ELLIS, *Entropy and large Deviations in Statistical Mechanics*, Springer-Verlag.

[7] H. O. GEORGII, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, de Gruyter studies in mathematics.

[8] J. GLIMM et A. JAFF, *Quantum Physics: a Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, 1981.

[9] B. SIMON, B, *The* $P(\phi)_2$ *Euclidian* (*Quantum*) *Field Theory*, Princeton Series, in Physics, 1974.

[10] D. BAKRY et D. MICHEL, *Sur les inégalités FKG*, Preprint.

[11] I. HERBST et L. PITT, Diffusion Equation Technique in Stochastic Monotonicity and Positive Correlations, *Prob. Th. Rel. Fields*, vol. **87**, 1991, p. 275-312.

[12] L. D. PITT, Positively Correlated Normal Variables are Associated, *Ann. of Prob.*, vol. **10**, 1982, p. 496-499.

[13] R. S. ELLIS et C. M. NEWMAN, Necessary and Sufficient Conditions for the GHS Inequality with Applications to Analysis and Probability, *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, p. 237.

[14] M. L. EATON, *Lectures on Topics in Probability Inequalities*, CWI Tract. Centrum voor Wiskunde in Informatica, 1987.

[15] J. D. ESARY, F. PROSCHAN et D. W. WALKUP, Association of Random Variables with Applications, *Ann. Math. Stat.*, vol. **38**, 1967, p. 1466-1474.

(*Manuscrit reçu le* 9 *mars* 1992.)