ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PIERRE BRUGIÈRE

Théorème de limite centrale pour un estimateur non paramétrique de la variance d'un processus de diffusion multidimensionnelle

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, nº 3 (1993), p. 357-389
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_3_357_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 29, n° 3, 1993, p. 357-389. *Probabilités et Statistiques*

Théorème de limite centrale pour un estimateur non paramétrique de la variance d'un processus de diffusion multidimensionnelle

par

Pierre BRUGIÈRE

Université de Paris-Dauphine,
CÉRÉMADE,
place de-Lattre-de-Tassigny,
75775 Paris Cedex 16, France

RÉSUMÉ. — On démontre, dans cet article, un théorème de limite centrale, pour un estimateur non paramétrique de la variance d'un processus de diffusion, dans le cas multidimensionnel. Cet article fait suite aux travaux de D. Florens-Zmirou ([11], [12]), dans le cas unidimensionnel et introduit un nouvel objet probabiliste, qui correspond à la version générale du temps local.

La démonstration est fondée sur un calcul de limite de moments algébriques. L'étude du cas de la dimension $d=2$ fait intervenir des développements asymptotiques (*cf.* Azencott [2] et Ikeda [16]), ainsi que des majorations de densités de transitions de diffusions (*cf.* Friedman [13]). Le cas de la dimension $d \geqq 3$, lui, utilise des approximations trajectorielles (au sens L^2) locales de trajectoires.

ABSTRACT. — We prove here a central limit theorem for an estimator of the variance of a diffusion process in the multidimensional case. The estimator used here is a generalization of the one introduced by D. Florens-Zmirou ([11], [12]) in the one dimensional case. We introduce here a new probabilist tool which corresponds to the general version of local time. The demonstration is based on a calculus of characteristic functions and

Classification A.M.S. : 62.

therefore on a calculus of algebraic moments. The demonstration for the dimension $d=2$, requires short time asymptotics (*cf.* Azencott [1] and Ikeda [16]) and majorations (*cf.* Friedman [13]) for transition densities of diffusion processes. In the $d \geqq 3$ case, local L^2 approximations for paths of the diffusion process are emphasized.

---

0. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'établir un théorème permettant d'étudier le comportement asymptotique d'un estimateur de la variance d'un processus de diffusion sur $\mathbb{R}^d$, lorsque la diffusion est observée en une suite d'instants $\frac{i}{n}$, $0 \leqq i \leqq n$.

L'asymptotique du problème est celle du pas de discrétisation.

On note $X=\{X_s, 0 \leqq s \leqq 1\}$ la diffusion de $\mathbb{R}^d$, solution de l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} dX_s &= b(X_s)\,ds + \sigma(X_s)\,dB_s \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

et on note P^{x_0} la probabilité associée.

L'estimateur de $(\sigma^t \sigma)(x)$ est défini par:

$$S_n(x) = n \frac{\sum_{i=1}^{n-1} 1_{|X_{i/n}-x|<h_n} (X_{(i+1)/n} - X_{i/n})^t (X_{(i+1)/n} - X_{i/n})}{\sum_{i=1}^{n-1} 1_{|X_{i/n}-x|<h_n}}$$

où $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0.

Il s'agit donc d'un estimateur à noyau, dont l'écriture a été introduite pour la première fois en dimension $d=1$ par D. Florens-Zmirou [11].

En dimension $d=1$, la démonstration du théorème de limite centrale pour cet estimateur utilise: des théorèmes asymptotiques pour les semimartingales, dont un théorème de Knight, ainsi qu'une approximation du temps local de la diffusion, traduite par la convergence presque sûre, vers ce temps local, de

$$L_n^X(x) = \frac{N_n^X(x)}{2\,nh_n}$$

où

$$N_n^X(x) = \sum_{i=1}^{n-1} 1_{|X_{i/n} - x| < h_n}$$

et accessoirement des techniques de développement de probabilités de transitions (*cf.* Dacunha-Castelle et Florens-Zmirou [8]).

En dimension $d \geqq 2$, la consistance de l'estimateur a été démontrée par P. Brugière [4] indépendamment de la notion de temps local (qui n'existe plus en dimension $d > 1$), en utilisant des résultats sur le module de continuité de la diffusion.

Pour prouver ici le théorème de limite centrale, concernant $S_n(x_0)$ et valable pour toute diffusion non dégénérée partant de x_0, nous démontrerons d'abord le résultat probabiliste suivant, valable en dimension quelconque: les suites du nombre de visites d'un voisinage de x_0, renormalisées:

$$\frac{N_n^X(x_0)}{E[N_n^X(x_0)]} \quad \text{et} \quad L_n^X(x_0)$$

où

$$L_n^X(x_0) = \frac{N_n^X(x_0)}{nh_n^2 \ln(1/h_n^2)} \text{ dans le cas } d=2.$$

et

$$L_n^X(x_0) = \frac{N_n^X(x_0)}{nh_n^2} \text{ dans le cas } d \geqq 3.$$

convergent en loi.

On note $L^{(d)}(x_0)$ la limite en loi de $L_n^X(x_0)$ et on montrera que:

pour $d=2$, $L^{(2)}(x_0)$ suit une loi exponentielle.

pour $d \geqq 3$, $L^{(d)}(x_0)$ est égale en loi à $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1_{|\sigma(0) W_s^{(d)}| < 1}\, ds$

où $W^{(d)}$ est un brownien standard de $\mathbb{R}^d$.

La suite $L_n^X(x_0)$ est l'objet particulièrement bien adapté à l'étude de l'estimation de la matrice de variance. [$L^{(d)}(x_0)$ n'a pas d'interprétation en dimension $d \geqq 2$ en terme de densité de mesure d'occupation par rapport à la mesure de Lebesgue et on peut montrer aussi la non convergence p.s. de $L_n^X(x_0)$ par un argument simple.]

Ce résultat probabiliste étant établi, on peut démontrer la convergence de

$$\sqrt{\frac{N_n^X(x_0)}{2}}\left((\sigma^t \sigma)^{-1}(x_0) S_n(x_0) - I\right)$$

vers une loi normale.

Comme dans tous les problèmes étudiés dans D. Florens-Zmirou ([11], [12]), le facteur normalisant $\sqrt{\frac{N_n^X(x_0)}{2}}$ est de type aléatoire.

Le théorème de limite centrale pour une normalisation en $\sqrt{E\left[\frac{N_n^X(x_0)}{2}\right]}$ donne comme loi limite un mélange de lois normales, la loi du facteur de mélange étant $L^{(d)}(x_0)$.

Pour démontrer ce théorème, on utilise une idée qui sépare essentiellement les dimensions $d=1$ et $d>1$ puis $d=2$ et $d>2$.

En dimension $d \geqq 2$, lorsque l'on estime $(\sigma^t\sigma)(x_0)$, on peut se restreindre à étudier les seuls passages aux instants:

$$\frac{i}{n} \quad \text{pour} \quad \frac{i}{n} < -\frac{1}{\ln(h_n)} \text{ dans le cas } d=2.$$

$$\frac{i}{n} \quad \text{pour} \quad \frac{i}{n} < h_n^{3/2} \text{ dans le cas } d \geqq 3.$$

Cette différence de coupure nous conduit à poursuivre l'étude par deux méthodes distinctes.

En dimension $d>2$, on utilise une approximation trajectorielle (de type L^2) locale de la diffusion X par le brownien générateur B multiplié par $\sigma(x_0)$, approximation portant sur les passages au voisinage du point x_0 et sur les variations quadratiques au voisinage de ce point.

En dimension $d=2$, ceci ne fonctionne plus, on utilise alors des développements de densités de transitions et des majorations de celles-ci de type classique (*cf.* Friedman [13], Azencott [2]) et l'on fait une étude directe du comportement limite des moments.

On obtient ainsi l'estimation, lorsque l'on part de x_0, de la fonctionnelle $(\sigma^t\sigma)(x_0)$.

Si $x \neq x_0$ on étend le résultat à $S_n(x)$ en utilisant la propriété de markovicité de la diffusion X.

Cette deuxième partie sera développée dans un autre article.

1. HYPOTHÈSES ET NOTATIONS

b et σ sont lipschitziennes et bornées. b est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et σ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

on définit $a=\sigma^t\sigma$.

on suppose b et σ C^∞

on suppose $a(x)$ inversible et la famille $\{a^{-1}(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ bornée.

on note:

$$(\Delta_n X)_{i/n} = X_{(i+1)/n} - X_{i/n}$$
$$Z^{X}_{n,(i/n)}(x) = a^{-1}(x)\,[n\,(\Delta_n X)^t_{i/n}\,(\Delta_n X)_{i/n} - a(x)]$$
$$\mathscr{Z}^{X}_{n,(i/n)}(x) = a^{-1}(x)\,(n\,(\Delta_n X)^t_{i/n}\,(\Delta_n X)_{i/n} - \mathrm{E}\,[n\,(\Delta_n X)^t_{i/n}\,(\Delta_n X)_{i/n}/X_{i/n}])$$
$$1^{X}_{n,s}(x) = 1_{|X_s - x| < h_n}$$
$$N^{X}_{n,t}(x) = \sum_{i=1}^{[nt]-1} 1^{X}_{n,(i/n)}(x)$$

On définit la suite $\alpha_n^{(d)}$ par:

$$\alpha_n^{(1)} = 2\,h_n \qquad \text{pour} \quad d=1$$
$$\alpha_n^{(2)} = h_n^2 \ln\left(\frac{1}{h_n^2}\right) \qquad \text{pour} \quad d=2$$
$$\alpha_n^{(d)} = h_n^2 \qquad \text{pour} \quad d \geqq 3$$

on note:

$$I^{X}_{n,t}(x) = \frac{1}{\alpha_n^{(d)}} \int_0^t 1^{X}_{n,s}(x)\,ds$$
$$L^{X}_{n,t}(x) = \frac{1}{n\,\alpha_n^{(d)}} N^{X}_{n,t}(x)$$
$$M^{X}_{n,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha_n^{(d)}}} \sum_{i=1}^{[nt]-1} 1^{X}_{n,(i/n)}(x)\,Z^{X}_{n,(i/n)}(x)$$

lorsque $t=1$ on omet l'indice t.

De plus:

m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et D_r^d la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r.

$\mathscr{E}$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

$W_s^{(d)}$ est un brownien standard de $\mathbb{R}^d$.

$$\mathrm{E}^{t,z}[\quad] = \mathrm{E}[\quad / X_t = z]$$

$\langle X \rangle_s = \int_0^s a(X_u)\,du$ est le processus croissant de X.

$p_s(x, y)$ est la densité de transition de la diffusion X.

$$q_s^a(x) = \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}\,(\det[a(0)])^{1/2}} \exp\left(-\frac{{}^t x\,[a(0)]^{-1}\,x}{2s}\right)$$
$$q_s^{(d)}(x) = \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2s}\right)$$

Nous utiliserons les résultats suivants (*cf.* Friedman [13], p. 257):

Il existe des constantes $C_1(d)$ et $C_2(d)$ strictement positives telles que pour tout s dans [0, 1] on ait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

$$p_s(x, y) \leqq C_1(d)\, q_s^{(d)}(C_2(d)(y-x)) \quad (*)$$

$$\left|\frac{\partial p_s}{\partial x}(x, y)\right| \leqq \frac{C_1(d)}{\sqrt{s}}\, q_s^{(d)}(C_2(d)(y-x)) \quad (**)$$

et $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$q_s^a(x) \leqq C_1(d)\, q_s^{(d)}(C_2(d)\, x) \quad (***)$$

$$\left|\frac{d^2 q_s^a}{dx^2}(x)\right| \leqq \frac{C_1(d)}{s}\, q_s^{(d)}(C_2(d)\, x) \quad (****)$$

on utilisera aussi la notation

$$\tilde{1}_{n, s} = \frac{C_1(d)}{C_2(d)} 1_{|B_{s/C_2(d)}| < h_n}$$

Convention. — On omet l'indice d et l'indice X quand il n'y a pas de confusion possible. D'autre part quand on omet (x) cela veut dire que la fonction est calculée en 0.

2. RÉSULTATS PRINCIPAUX

On suppose dans cette partie, en plus des hypothèses faites dans la partie 2, que $nh_n^2 \to +\infty$ et $n\,\alpha_n^{(d)} h_n^2 \to 0$.

On a alors les résultats suivants.

THÉORÈME 1. — *Pour* $d \geqq 2$

$$\sqrt{N_n(x_0)}\,[a^{-1}(x_0)\, S_n(x_0) - I] \xrightarrow{\mathscr{L}(P^{x_0})} \sqrt{2}\,\mathscr{N}$$

où $\mathscr{N} \sim \mathscr{N}(0, I)$.

Ce théorème résulte de la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Pour* $d \geqq 2$

$$(L_n(x_0), M_n(x_0)) \xrightarrow{\mathscr{L}(P^{x_0})} (L^{(d)}(x_0), \sqrt{2 L^{(d)}(x_0)}\,\mathscr{N})$$

où

$$L^{(2)}(x_0) = \frac{\mathscr{E}}{2(\det[a(x_0)])^{1/2}}$$

$$L^{(d)}(x_0) = \int_0^{+\infty} 1_{|\sigma(x_0) W_s^{(d)}| < 1}\, ds \qquad pour \quad d \geqq 3$$

et $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{I})$ *indépendante de* $\mathrm{L}^{(d)}(x_0)$.

3. SIMPLIFICATION DU PROBLÈME

Dans ce qui suit on prend $x^0 = 0$ afin de simplifier les notations et on note P la probabilité P^0.

3.1. Cas de la dimension $d=2$

On va démontrer que l'étude de la loi limite de $(\mathrm{L}_n, \mathrm{M}_n)$ se ramène à celle plus simple de $(\mathrm{L}_n, \mathcal{M}_n)$
où

$$\mathcal{M}_n = \frac{1}{\sqrt{n\,\alpha_n^{(d)}}} \sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,\,(i/n)}\, \mathcal{X}_{n,\,(i/n)}.$$

THÉORÈME 2. — *Sous la condition* $\alpha_n = o\left(\dfrac{1}{nh_n^2}\right)$ *on a,*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\left[\left|(\mathrm{L}_n, \mathrm{M}_n) - (\mathrm{L}_n, \mathcal{M}_n)\right|\right] = 0$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\left[\left|\mathrm{M}_n - \mathcal{M}_n\right|\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\left|\mathrm{M}_n - \mathcal{M}_n\right|\right] \\
&\quad = \mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n\,\alpha_n}} \sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,\,(i/n)}\, a^{-1}(0)\left(\mathrm{E}^{(i/n),\,\mathrm{X}_{i/n}}\left[n\,(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}^t (\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}\right] - a(0)\right)\right|\right]
\end{aligned}$$

La formule d'Itô appliquée à $(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}^t (\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}$ nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{i/n,\,\mathrm{X}_{i/n}}\left[(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}^t (\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}\right] \\
&\quad = \mathrm{E}^{(i/n),\,\mathrm{X}_{(i/n)}}\left[\int_{i/n}^{(i+1)/n} (\mathrm{X}_s - \mathrm{X}_{i/n})^t\, b(\mathrm{X}_s)\, ds + \int_{i/n}^{(i+1)/n} b(\mathrm{X}_s)^t (\mathrm{X}_s - \mathrm{X}_{i/n})\, ds\right] \\
&\qquad + \mathrm{E}^{(i/n),\,\mathrm{X}_{i/n}}\left[\int_{i/n}^{(i+1)/n} a(\mathrm{X}_s)\, ds\right]
\end{aligned}$$

or,

$$\mathrm{E}\left[\left| 1_{n,\,(i/n)} \int_{i/n}^{(i+1)/n} (a(\mathrm{X}_s) - a(0))\, ds\right|\right] \leqq \mathrm{E}\left[1_{n,\,(i/n)}\right] O\left(\frac{h_n}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et,

$$\mathrm{E}\left[\left| 1_{n,\,(i/n)} \int_{i/n}^{(i+1)/n} (\mathrm{X}_s - \mathrm{X}_{i/n})^t\, b(\mathrm{X}_s)\, ds \right|\right] \leqq \mathrm{E}\,[1_{n,\,(i/n)}]\, O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{3/2}\right)$$

Ces majorations jointes à la majoration (*cf.* Lemme 14 de l'annexe)

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n\,\alpha_n}\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,\,(i/n)}\right] = O(1)$$

Montrent alors que

$$\mathrm{E}\,[|\,\mathrm{M}_n - \mathscr{M}_n\,|] = O\,((n\,\alpha_n\,h_n^2)^{1/2} + \sqrt{\alpha_n})$$

ce qui prouve le théorème.

3.2. Cas de la dimension $d \geqq 3$

On va démontrer que $(\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}}, \mathrm{M}_n^{\mathrm{X}})$ a même limite en loi que $(\mathrm{L}_n^{\mathrm{Y}}, \mathrm{M}_n^{\mathrm{Y}})$ où

$$\mathrm{Y}_t = \sigma(0)\,\mathrm{B}_t, \qquad t \in [0, 1]$$
$$\mathrm{Y}_0 = 0$$

Pour cela on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 3.

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\,[|\,(\mathrm{L}_n^{\mathrm{Y}}, \mathrm{M}_n^{\mathrm{Y}}) - (\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}}, \mathrm{M}_n^{\mathrm{X}})\,|] = 0$$

Commençons par démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.

(i) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}\,[|\,1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{X}} - 1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{Y}}\,|] = 0$$

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}\,[|\,\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}} - \mathrm{L}_n^{\mathrm{Y}}\,|] = 0$$

Démonstration. — (i) implique (ii) de façon triviale, montrons (i).

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{E}\,[|\,1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{X}} - 1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{Y}}\,|]$$

est majorée par la somme de trois termes A_n, B_n, C_n,

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=[nh_n 3/2]}^{n-1} \mathrm{E}\,[1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{X}}]$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=[nh_n 3/2]}^{n-1} \mathrm{E}\,[1_{n,\,(i/n)}^{\mathrm{Y}}]$$

$$C_n = \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} E[| 1^X_{n,(i/n)} - 1^Y_{n,(i/n)} |]$$

Montrons d'abord que B_n tend vers zéro. On a,

$$E[1^Y_{n,(i/n)}] = \int_{D_{h_n}} \left(\frac{n}{2\pi i}\right)^{d/2} \frac{1}{(\det[a(0)])^{1/2}} \exp\left[-n \frac{{}^t x [a(0)]^{-1} x}{2i}\right] dx$$
$$= O\left(\left(\frac{nh_n^2}{i}\right)^{d/2}\right)$$

donc

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=[[nh_n^{3/2}]}^{n-1} E[1^Y_{n,(i/n)}] = O\left(\int_{-(1/\sqrt{h_n}}^{+\infty} \frac{1}{s^{d/2}} ds\right)$$

ce qui prouve le résultat pour B_n.

Pour montrer que A_n tend vers 0 on procède comme pour B_n, en utilisant la majoration ($*$).

On obtient de la même façon que,

$$E[1^X_{n,(i/n)}] = O\left(\left(\frac{nh_n^2}{i}\right)^{d/2}\right)$$

donc comme précédemment on voit que A_n tend vers 0.

Il reste à prouver que C_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$E[| 1^X_{n,(i/n)} - 1^Y_{n,(i/n)} |] = P(|X_{i/n}| < h_n, |Y_{i/n}| \geqq h_n) + P(|X_{i/n}| \geqq h_n, |Y_{i/n}| < h_n)$

Pour majorer, $P(|X_{i/n}| < h_n, |Y_{i/n}| > h_n)$, on définit pour tout η et ε éléments de [0, 1].

$$\mathscr{A}(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| < (1-\eta)\varepsilon\}$$
$$\mathscr{B}(\varepsilon, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^d, (1-\eta)\varepsilon \leqq |x| < \varepsilon\}$$

on a alors

$$P(|X_{i/n}| < h_n, |Y_{i/n}| > h_n)$$
$$\leqq P(X_{i/n} \in \mathscr{B}(h_n, \eta)) + P(X_{i/n} \in \mathscr{A}(h_n, \eta), |Y_{i/n}| > h_n)$$

en utilisant ($*$) on obtient,

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} P(X_{i/n} \in \mathscr{B}(h_n, \eta))$$
$$\leqq \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} \int_{\mathscr{B}(h_n, \eta)} \frac{C_1}{(2\pi i/n)^{d/2}} \exp\left[-C_2 \frac{n|x|^2}{2i}\right] dx$$
$$= \int_{\mathscr{B}(1, \eta)} \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} \frac{C_1}{(2\pi i/(nh_n^2))^{d/2}} \exp\left[-C_2 \frac{nh_n^2 |x|^2}{2i}\right] dx$$
$$\leqq C_1 \int_{\mathscr{B}(1, \eta)} \left[\int_0^{+\infty} q_s^{(d)}(C_2 x)\, ds\right] dx = O(\eta^d)$$

Majorons maintenant $P(X_{i/n} \in \mathscr{A}(h_n, \eta), |Y_{i/n}| > h_n)$ pour $\left|\frac{i}{n}\right| < h_n$.

$$P(X_{i/n} \in \mathscr{A}(h_n, \eta), |Y_{i/n}| > h_n) \leqq P(|X_{i/n} - Y_{i/n}| > \eta h_n)$$

or,

$$P(|X_{i/n} - Y_{i/n}| > \eta h_n) \leqq \frac{1}{(\eta h_n)^2} E[|X_{i/n} - Y_{i/n}|^2]$$

et

$$X_{i/n} - Y_{i/n} = \int_0^{i/n} (\sigma(X_s) - \sigma(X_0))\, dB_s + \int_0^{i/n} b(X_s)\, ds$$

donc,

$$E[|X_{i/n} - Y_{i/n}|^2] \leqq 2E\left[\left(\int_0^{i/n} (\sigma(X_s) - \sigma(X_0))\, dB_s\right)^2\right] + 2E\left[\left(\int_0^{i/n} b(X_s)\, ds\right)^2\right]$$
$$= O\left(E\left[\int_0^{i/n} |X_s - X_0|^2\, ds\right]\right) + O\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2\right) = O\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

ainsi

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} P(X_{i/n} \in \mathscr{A}(h_n, \eta), |Y_{i/n}| > h_n)$$
$$\leqq \text{Cte} \frac{1}{nh_n^2} \frac{1}{(\eta h_n)^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} \left(\frac{i}{n}\right)^2 = O\left(\frac{\sqrt{h_n}}{\eta^2}\right)$$

donc finalement,

$$\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} P(|X_{i/n}| < h_n, |Y_{i/n}| > h_n) = O\left(\frac{\sqrt{h_n}}{\eta^2} + \eta^d\right)$$

La majoration de $\frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^{[nh_n^{3/2}]} P(|Y_{i/n}| < h_n, |X_{i/n}| > h_n)$ s'effectue de la même façon, ce qui prouve la proposition 2.

PROPOSITION 3. — *Sous la condition $nh_n^4 \to 0$ on a,*

$$\lim_{n \to +\infty} E[|M_n^X - M_n^Y|] = 0.$$

Démonstration.

$$M_n^X - M_n^Y = \frac{1}{\sqrt{nh_n^2}} \sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)}^X [Z_{n,(i/n)}^X - Z_{n,(i/n)}^Y]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{nh_n^2}} \sum_{i=1}^{n-1} [1_{n,(i/n)}^X - 1_{n,(i/n)}^Y] Z_{n,(i/n)}^Y.$$

Commençons par démontrer le lemme suivant.

LEMME 1.

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}(1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}-1^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})\,\mathrm{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)}\right|\right]$$

converge vers 0 *lorsque n tend vers* $+\infty$

Démonstration. — Considérons la suite des martingales $(\mathrm{S}_{n,j})_{j\in[1,n-1]}$ définies par :

$$\mathrm{S}_{n,j}=\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}(1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}-1^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})\,\mathrm{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)}$$

nous avons,

$$\mathrm{E}[|\mathrm{S}_{n,n-1}|]\leqq\mathrm{E}[|\mathrm{S}_{n,n-1}|^2]^{1/2}$$

et

$$\mathrm{E}[|\mathrm{S}_{n,n-1}|^2]\leqq\mathrm{Cte}\,\mathrm{E}[|\langle\mathrm{S}_n\rangle_{n-1}|]$$

or,

$$\mathrm{E}[|\langle\mathrm{S}_n\rangle_{n-1}|]\leqq\mathrm{Cte}\,\mathrm{E}\left[\frac{1}{nh_n^2}\sum_{i=1}^{n-1}|1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}-1^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)}|\right]$$

qui converge vers 0 d'après la proposition 2.

LEMME 2.

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}(\mathrm{Z}^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}-\mathrm{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})\right|\right]=0$$

Démonstration. — On définit $\mathrm{A}_{n,i}$ et $\mathrm{B}_{n,i}$ par,

$$\mathrm{A}_{n,i}=n(\Delta_n\mathrm{X})^t_{i/n}(\Delta_n\mathrm{X})_{i/n}-n\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n}\,{}^t(\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n})$$

et

$$\mathrm{B}_{n,i}=n\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n}\,{}^t(\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n})-n\,\sigma(0)(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n}\,{}^t(\sigma(0)(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n})$$

alors

$$1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}(\mathrm{Z}^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}-\mathrm{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})=a^{-1}(0)(1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}\mathrm{A}_{n,i}+1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}\mathrm{B}_{n,i})$$

Commençons par démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}1^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)}\mathrm{A}_{n,i}\right|\right]=0$$

$$|\mathrm{A}_{n,i}|\leqq(|\sqrt{n}(\Delta_n\mathrm{X})_{i/n}|+|\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n}|)$$
$$\times|\sqrt{n}(\Delta_n\mathrm{X})_{i/n}-\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n\mathrm{B})_{i/n}|$$

on a,

$$\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,|\sqrt{n}\,(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}|^2] \leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}]$$
$$\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,|\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|^2] \leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}]$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,&|\sqrt{n}\,(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}-\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|^2]\\ &\leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{E}\left[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,n\int_{i/n}^{(i+1)/n}|\mathrm{X}_{i/n}-\mathrm{X}_s|^2\,ds\right]\\ &\quad+\mathrm{Cte}\,\mathrm{E}\left[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,n\left(\int_{i/n}^{(i+1)/n} b(\mathrm{X}_s)\,ds\right)^2\right]=O\left(\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}]\end{aligned}$$

Finalement on obtient,

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,\mathrm{A}_{n,\,i}\right|\right] \leqq \frac{\mathrm{Cte}}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}]\frac{1}{\sqrt{n}}=O(h_n)$$

d'après le lemme 14 de l'annexe,
d'où le résultat

Montrons maintenant que sous la condition $nh_n^4 \to 0$ on a,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,\mathrm{B}_{n,\,i}\right|\right]=0$$

La technique est la même que précédemment.

$$\begin{aligned}|\mathrm{B}_{n,\,i}| \leqq (|\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|+|\sqrt{n}\,\sigma(0)(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|)&\\ \times|\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}-\sqrt{n}\,\sigma(0)(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|&\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{i/n}\,|\sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X}_{i/n})(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}-\sqrt{n}\,\sigma(0)(\Delta_n \mathrm{B})_{i/n}|] \leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{E}[1^{\mathrm{X}}_{1/n}]\,h_n$$

donc finalement,

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{nh_n^2}}\sum_{i=1}^{n-1}1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\,\mathrm{B}_{n,\,i}\right|\right] \leqq \frac{\mathrm{Cte}}{\sqrt{nh_n^2}}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1}1^{\mathrm{X}}_{n,\,(i/n)}\right]h_n=O((nh_n^4)^{1/2})$$

d'après le lemme 14 de l'anexe, d'où le lemme 2, et la proposition 3.

On a donc démontré le théorème 3.

4. CALCUL DES MOMENTS ALGÉBRIQUES

4.1. Étude des moments de L_n.

La démonstration du théorème 1 et de la proposition 1 est fondée sur le calcul des limites des fonctions caractéristiques de $(\mathrm{L}^{\mathrm{X}}_n, \mathscr{M}^{\mathrm{X}}_n)$ et

$(L_n^Y, \mathcal{M}_n^Y)$, donc sur un calcul des moments algébriques de $(L_n^X, \mathcal{M}_n^X)$ et de $(L_n^Y, \mathcal{M}_n^Y)$.

Dans un premier temps nous étudierons la convergence en loi des variables L_n^X et L_n^Y, ce qui permettra de montrer la convergence de leurs moments, après vérification de conditions d'équi-intégrabilité. Le lemme suivant, démontré en annexe, permet de ramener l'étude de la convergence en loi de L_n^X et de L_n^Y à celle plus simple de I_n^X et I_n^Y.

LEMME 3.

(i) $$\lim_{n \to +\infty} E[|I_n^X - L_n^X|] = 0$$

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} E[|I_n^Y - L_n^Y|] = 0.$$

L'étude se fait de façon différente suivant que la dimension est $d=2$ où $d \geqq 3$. Les lemmes techniques communs aux deux démonstrations, figurent en annexe.

CAS DE LA DIMENSION $d=2$. — Dans cette partie $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0 telle que

$$|\ln(\varepsilon_n)| = o(|\ln(h_n)|)$$

on définit, $I_{n, \varepsilon_n} = \dfrac{1}{\alpha_n} \displaystyle\int_0^{\varepsilon_n} 1_{n, s}^X \, ds.$

Les deux lemmes suivants vont permettre de simplifier le problème.

LEMME 4. — *Pour tout x,*

(i) $$\lim_{n \to +\infty} E\left[\frac{1}{\alpha_n} \int_{\varepsilon_n}^1 1_{n, s} \, ds\right] = 0.$$

(ii) *I_n a même limite en loi que* I_{n, ε_n}.

Démonstration. — (i) en utilisant $(*)$ on obtient,

$$\begin{aligned} E\left[\int_{\varepsilon_n}^1 1_{n, s} \, ds\right] &\leqq C_1 \int_{\varepsilon_n}^1 \int_{D_{h_n}} \frac{1}{s} \exp\left(-C_2 \frac{|y|^2}{2s}\right) dy \, ds \\ &\leqq C_1 \int_{\varepsilon_n}^1 \int_{D_{h_n}} \frac{1}{s} \, dy \, ds \\ &= O\left(h_n^2 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)\right) \end{aligned}$$

or, $|\ln(\varepsilon_n)| = o(|\ln(h_n)|)$ ce qui entraîne le résultat.

(ii) est une conséquence directe de (i).

LEMME 5. — *Pour tout* $\beta>0$, *on a*,

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D_1}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\varepsilon_n}\int_{D_{h_n}}\frac{1}{s}\exp\left(-\beta\frac{|y-xh_n|^2}{2s}\right)ds\,dy=\pi$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty}\inf_{x\in D_1}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\varepsilon_n}\int_{D_{h_n}}\frac{1}{s}\exp\left(-\beta\frac{|y-xh_n|^2}{2s}\right)ds\,dy=\pi$$

Démonstration. — On montre simultanément (i) et (ii).

Par le changement de variable $t=\dfrac{\beta|y-xh_n|^2}{s}$, on vérifie que l'intégrale figurant dans le lemme est égale à

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_{D_{h_n}}\int_{\beta(|y-xh_n|^2/\varepsilon_n)}^{+\infty}\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)dy\,dt$$

or on a l'équivalent suivant pour s dans un voisinage de zéro,

$$\int_s^{+\infty}\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)dt\sim-\ln(s)$$

et $\beta\dfrac{|y-xh_n|^2}{\varepsilon_n}=O\left(\dfrac{h_n^2}{\varepsilon_n}\right)$ uniformément en y dans D_{h_n}.
donc l'intégrale à étudier est équivalente à

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_{D_{h_n}}-\ln\left(\beta\frac{|y-xh_n|^2}{\varepsilon_n}\right)dy=\frac{1}{-\ln(h_n^2)}\int_{D_1}-\ln\left(\beta h_n^2\frac{|y-x|^2}{\varepsilon_n}\right)dy$$

cette intégrale converge vers $m(D_1)$ puisque $|\ln(\varepsilon_n)|=o(|\ln(h_n)|)$ et ceci uniformément par rapport à x dans D_1.

Posons

$$\tilde{p}_s(x,y)=\frac{1}{2\pi s(\det[a(0)])^{1/2}}\exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{2s}\right)$$

où $d(.,.)$ est la distance géodésique pour la métrique riemannienne a^{-1} sur $\mathbb{R}^2$ (*cf.* Molchanov [17]). On a le lemme suivant :

LEMME 6. — *Il existe une suite* $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* 0 *telle que*
Pour tout x *et tout* y *appartenant à* D_{h_n} *et pour tout* s *tel que* $|s|<\varepsilon_n$ *on a*,

$$|p_s(x,y)-\tilde{p}_s(x,y)|<\eta_n\tilde{p}_s(x,y)$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser les développements asymptotiques de la densité de transition d'une diffusion obtenus par Azencott [2]. Ces résultats sont établis pour une diffusion $(X_t)_{t\in[0,1]}$, homogène ou non, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. Les conditions imposées sur les coefficients

de la diffusion sont les suivantes :
– $a=(a_{i,j})$ et $b=(b_i)$ sont C^∞ sur $[0, 1]\times U$.
– a est inversible sur $[0, 1]\times U$.

LEMME 7. – *Pour tout entier k on a,*

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to+\infty}\ \sup_{\substack{x\in D_1\\ t\in[0,\,1-\varepsilon_n]}} E^{t,\,h_n x}\left[\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right)^k\right] = k!\left(\frac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}\right)^k$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{n\to+\infty}\ \inf_{\substack{x\in D_1\\ t\in[0,\,1-\varepsilon_n]}} E^{t,\,h_n x}\left[\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right)^k\right] = k!\left(\frac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}\right)^k$$

Démonstration. – Commençons par démontrer le résultat pour $k=1$.

$$E^{t,\,h_n x}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right] = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\varepsilon_n}\int_{D_{h_n}} p_s(h_n x, y)\,ds\,dy$$

dont l'étude d'après le lemme 6 se ramène à celle de

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\varepsilon_n}\int_{D_{h_n}} \tilde{p}_s(h_n x, y)\,ds\,dy$$

qu'on peut encadrer à partir d'un certain rang par les intégrales définies pour $i=1, 2$ par

$$\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\varepsilon_n}\int_{D_{h_n}} \frac{1}{2\pi s(\det[a(0)])^{1/2}}\exp\left(-\beta_i\frac{|y-h_n x|^2}{2s}\right)ds\,dy$$

où

$$\beta_1=\frac{2}{\lambda_{\min} a(0)} \quad\text{et}\quad \beta_2=\frac{1}{2\lambda_{\max} a(0)}$$

puisque pour n suffisamment grand on va avoir

$$\forall x,\ y\in D_{h_n},\quad \frac{1}{2\lambda_{\max} a(0)}|y-x|^2 \leqq d(x, y) \leqq \frac{2}{\lambda_{\min} a(0)}|y-x|^2$$

et ceci par propriété élémentaire de la distance géodésique.

Ces intégrales ont d'après le lemme 5 même limite uniformément en x sur D_1 cette limite étant égale à $\dfrac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}$ ce qui prouve le cas $k=1$.

Montrons maintenant le résultat pour k quelconque.

On peut écrire $E^{t,h_n x}\left[\left(\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right)^k\right]$ sous la forme.

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_1}\,ds_1\int_{s_1}^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_2}\,ds_2\dots\int_{s_{k-1}}^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_k}\,ds_k\right]$$

qu'on encadre par

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+(\varepsilon_n/k)} 1_{n,s_1}\,ds_1\int_{s_1}^{s_1+(\varepsilon_n/k)} 1_{n,s_2}\,ds_2\dots\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+(\varepsilon_n/k)} 1_{n,s_k}\,ds_k\right]$$

et par

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_1}\,ds_1\int_{s_1}^{s_1+\varepsilon_n} 1_{n,s_2}\,ds_2\dots\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+\varepsilon_n} 1_{n,s_k}\,ds_k\right].$$

On peut écrire

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_1}\,ds_1\int_{s_1}^{s_1+\varepsilon_n} 1_{n,s_2}\,ds_2\dots\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+\varepsilon_n} 1_{n,s_k}\,ds_k\right]$$

sous la forme

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s_1}E^{s_1,X_{s_1}}\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{s_1}^{s_1+\varepsilon_n} 1_{n,s_2}\dots E^{s_{k-1},X_{s_{k-1}}}\left[\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+\varepsilon_n} 1_{n,s_k}\,ds_k\right]ds_{k-1}\right]\dots ds_1\right]$$

Pour tout l dans $[2, k]$:

$$1_{n,s_{l-1}}E^{s_{l-1},X_{s_{l-1}}}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_{s_{l-1}}^{s_{l-1}+\varepsilon_n} 1_{n,s_l}\,ds_l\right]$$

est encadré par

$$1_{n,s_{l-1}}\sup_{\substack{x\in D_1\\ t\in[0,1-\varepsilon_n]}}E^{t,h_n x}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right]$$

et

$$1_{n s_{l-1}}\inf_{\substack{x\in D_1\\ t\in[0,1-\varepsilon_n]}}E^{t,h_n x}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n,s}\,ds\right]$$

donc

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k}E^{t,h_n x}\left[\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{s_1}E^{s_1,X_{s_1}}\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{s_1}^{s_1+\varepsilon_n} 1_{n,s_2}\dots E^{s_{k-1},X_{s_{k-1}}}\left[\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+\varepsilon_n} 1_{n,s_k}\,ds_k\right]ds_{k-1}\right]\dots ds_1\right]$$

est encadré par

$$k! \prod_{l \in [1, k]} \left(\sup_{\substack{x \in D_1 \\ t \in [0, 1-\varepsilon_n]}} E^{t, h_n x}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n, s}\, ds\right]\right)$$

et

$$k! \prod_{l \in [1, k]} \left(\inf_{\substack{x \in D_1 \\ t \in [0, 1-\varepsilon_n]}} E^{t, h_n x}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_t^{t+\varepsilon_n} 1_{n, s}\, ds\right]\right)$$

qui convergent d'après l'étude du cas $k=1$ tous les deux vers

$$k!\left(\frac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}\right)^k$$

Le raisonnement est le même pour

$$\frac{k!}{(\alpha_n)^k} E^{t, h_n x}\left[\int_t^{t+(\varepsilon_n/k)} 1_{n, s_1} E^{s_1, X_{s_1}}\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{s_1}^{s_1+(\varepsilon_n/k)} 1_{n, s_2} \ldots E^{s_{k-1}, X_{s_{k-1}}}\left[\int_{s_{k-1}}^{s_{k-1}+(\varepsilon_n/k)} 1_{n, s_k}\, ds_k\right] ds_{k-1}\right] \ldots ds_1\right]$$

Finalement on a donc convergence vers $k!\left(\frac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}\right)^k$ ceci achève la démonstration du lemme 7.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Pour* $d=2$,

(i) $L_n^X(0)$ *converge en loi vers* $L^{(2)}(0)$ *de loi exponentielle d'espérance* $\frac{1}{2(\det[a(0)])^{1/2}}$.

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} E[(L_n^X(0))^k] = E[(L^{(2)}(0))^k].$$

Démonstration. — (i) Il suffit d'après les lemmes 3 et 4 de prouver le résultat pour I_{n, ε_n}.

$$E[(I_{n, \varepsilon_n})^k] = \frac{k!}{\alpha_n^k} E\left[\int_0^{\varepsilon_n} 1_{n, s_1}\, ds_1 \int_{s_1}^{\varepsilon_n} 1_{n, s_2}\, ds_2 \ldots \int_{s_{k-1}}^{\varepsilon_n} 1_{n, s_k}\, ds_k\right]$$

en conditionnant et en utilisant le lemme 14 de l'annexe, on obtient :

$$E[(I_{n, \varepsilon_n})^k] \leqq k!\left(E\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_0^1 \tilde{1}_{n, s}\right]\right)^k \leqq k!\, C^k$$

où C est une constante strictement positive et $\tilde{1}_{n,s}$ est la variable aléatoire qu'on a défini dans la partie 2 par :

$$\tilde{1}_{n,s} = \frac{C_1}{C_2} 1_{|B(s/C_2)| < h_n}$$

Cette démonstration jointe au lemme 7 démontre (i).

Démontrons maintenant (ii)

$$E[(L_n)^k] = \frac{1}{(n\alpha_n)^k} \sum_{k_1=1}^{k} \sum_{\substack{i_l \in [1, n-1] \\ i_l < i_{l+1},\, l \in [1, k_1]}} E\left[\prod_{l=1}^{k_1} 1_{n, (i_l/n)}\right]$$

se majore d'après le lemme 15 de l'annexe par

$$\leqq \frac{\text{Cte}}{(n\alpha_n)^k} \sum_{k_1=1}^{k} \sum_{\substack{i_l \in [1, n-1] \\ i_l < i_{l+1},\, l \in [1, k_1]}} \left(\prod_{l=1}^{k_1} \left[\left(\frac{nh_n^2}{i_{l+1} - i_l - 1}\right) \wedge 1\right]\right)$$

$$\leqq \text{Cte}\left(\frac{1}{n\alpha_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{nh_n^2}{i}\right) \wedge 1\right]\right)^k$$

or,

$$\frac{1}{n\alpha_n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(\frac{nh_n^2}{i}\right) \wedge 1\right] = \frac{1}{n\alpha_n} \left(\sum_{i=1}^{[nh_n^2]} 1 + \sum_{i=[nh_n^2]}^{n-1} \frac{nh_n^2}{i}\right)$$

$$\leqq \frac{\text{Cte}}{n\alpha_n} \left(nh_n^2 + nh_n^2 \ln\left(\frac{1}{h_n^2}\right)\right) = O(1)$$

ce qui prouve la condition d'équi-intégrabilité et donc (ii).

CAS DE LA DIMENSION $d \geqq 3$.

THÉORÈME 5. — *En dimension* $d \geqq 3$,

(i) L_n^Y *converge en loi vers* $L^{(d)}(0)$ *égale en loi à* $\int_0^{+\infty} 1_{|\sigma(0) W_s^{(d)}| < 1}\, ds$

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} E[(L_n^Y)^k] = E[(L^{(d)}(0))^k].$$

Démonstration. — Démonstration de (i).

D'après le lemme 3, I_n^Y et L_n^Y ont même limite en loi.

Or I_n^Y a même loi que $\int_0^{1/h_n^2} 1_{|\sigma(0) W_s^{(d)}| < 1}\, ds$, donc I_n^Y converge en loi vers $\int_0^{+\infty} 1_{|\sigma(0) W_s^{(d)}| < 1}\, ds$, ce qui prouve (i).

La démonstration de (ii) se démontre comme dans le cas de la dimension 2 par vérification de conditions d'équi-intégrabilité qui s'effectuent de la même façon puisqu'on a les mêmes majorations pour

$$E\left[\prod_{l=1}^{k_1} 1^{Y}_{n,(i_l/n)}\right]$$

4.2. Étude des moments algébriques de (L_n, M_n)

Soient k, k_1, l, l_1 des entiers tels que $k_1 \leqq k$ et $l_1 \leqq l$ on définit alors:

$$R(k, k_1, k_1+l_1) = \left\{ (r_1, r_2, \ldots, r_{k_1+l_1}) \in \mathbb{N}^{k_1+l_1} \Big/ \sum_{i=1}^{k_1+l_1} 1_{r_i \neq 0} = k_1, \sum_{i=1}^{k_1+l_1} r_i = k \right\}$$

$$S(l, l_1, l_1+k_1) = \mathrm{Card}\{\varphi : [1, l] \to [1, l] / [1, l_1] \subset \varphi([1, l]) \subset [1, l_1+k_1]\}$$

on adopte la convention suivant laquelle $[1, 0]$ est l'ensemble vide.

LEMME 8. — (i) *Soient k, l des entiers, $k>0$ on a,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)} \mathscr{X}_{n,(i/n)}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)}\right)^l = \sum_{k_1=1}^{k} \sum_{l_1=0}^{l} \sum_{r \in R(k, k_1, k_1+l_1)} \frac{k!}{r_1!\, r_2! \ldots r_{k_1+l_1}!} S(l, l_1, l_1+k_1) \times \sum_{\substack{i_l \in [1, n-1] \\ i_l < i_{l+1} \\ l \in [1, k_1+l_1]}} \left(\prod_{l=1}^{k_1+l_1} 1_{n,(i_l/n)} (\mathscr{X}_{i_l/n})^{r_l}\right)$$

(ii) *Soit l un entier on a,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)}\right)^l = \sum_{l_1=1}^{l} S(l, l_1, l_1) \sum_{\substack{i_l \in [1, n-1] \\ i_l < i_{l+1} \\ l \in [1, l_1]}} \left(\prod_{l=1}^{l_1} 1_{n,(i_l/n)}\right)$$

Démonstration. — (i) les termes du produit sont de la forme

$$\prod_{l=1}^{k_1+l_1} 1_{n,(i_l/n)} (\mathscr{X}_{i_l/n})^{r_l}$$

où

$$i_l < i_{l+1} \sum_{i=1}^{k_1+l_1} r_i = k \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{k_1+l_1} 1_{r_i \neq 0} = k_1$$

le nombre de façons d'obtenir $\prod_{l=1}^{k_1+l_1} 1_{n,(i_l/n)} (\mathscr{Z}_{i_l/n})^{r_l}$ en développant le produit

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)} \mathscr{Z}_{n,(i/n)}\right)^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)}\right)^l$$

étant égal à $\dfrac{k!}{r_1!\,r_2!\ldots r_{k_1+l_1}!} \mathrm{S}(l, l_1, l_1+k_1)$

(ii) est trivial.

PROPOSITION 4. — *Soit $r \in \mathrm{R}(k, k_1, k_1+l_1)$ si l'un au moins des r_i n'appartient pas à $\{0, 2\}$ ou si $l_1 < l$ alors,*

(i) *Pour $d \geqq 3$ on a,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}} \sum_{\substack{i_q \in [1, n-1] \\ i_{q+1} > i_q \\ q \in [1, k_1+l_1]}} \left| \mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{n,(i_q/n)}^{\mathrm{Y}} (\mathscr{Z}_{i_q/n}^{\mathrm{Y}})^{r_q}\right]\right| = 0$$

(ii) *Pour $d=2$ on a,*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(n\alpha_n)^{(k/2)+l}} \sum_{\substack{i_q \in [1, n-1] \\ i_{q+1} > i_q \\ q \in [1, k_1+l_1]}} \left| \mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{n,(i_q/n)}^{\mathrm{X}} (\mathscr{Z}_{i_q/n}^{\mathrm{X}})^{r_q}\right]\right| = 0$$

Nous allons démontrer la proposition à l'aide des lemmes suivants:

LEMME 9. — *Soient $i<j$ deux entiers, soit r un entier.*

(i) *Pour $d \geqq 3$, $\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left| \mathrm{E}[(\mathscr{Z}_{n,(i/n)}^{\mathrm{Y}})^r 1_{n,(j/n)}^{\mathrm{Y}} / \mathrm{Y}_{i/n} = y] \right|$ est majoré par:*

a) Cte *si $j=i+1$*

b) $\dfrac{\text{Cte}}{j-i-1}\left[1 \wedge \left(\dfrac{nh_n^2}{j-i-1}\right)^{d/2}\right]$ *si $j>i+1$ et $r=1$*

c) Cte $\left[\left(\dfrac{nh_n^2}{j-i-1}\right)^{d/2} \wedge 1\right]$ *si $j>i+1$ et $r \neq 1$*

(ii) *Pour $d=2$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \mathrm{E}[(\mathscr{Z}_{n,(i/n)}^{\mathrm{X}})^r 1_{n,(j/n)}^{\mathrm{X}} / \mathrm{X}_{i/n} = x] \right|$ est majoré par:*

a) Cte *si $j=i+1$*

b) $\dfrac{\text{Cte}}{\sqrt{j-i-1}}\left[1 \wedge \left(\dfrac{nh_n^2}{j-i-1}\right)\right]$ *si $j>i+1$ et $r=1$*

c) $\mathrm{Cte}\left(\left(\frac{nh_n^2}{j-i-1}\right)\wedge 1\right)$ *si* $j>i+1$ *et* $r\neq 1$

Démonstration. — Supposons $j>i+1$ *et* $r=1$ nous avons,

$$|\mathrm{E}[\mathscr{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)}1^{\mathrm{Y}}_{n,(j/n)}/\mathrm{Y}_{i/n}=y_i]|$$
$$=\left|\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(a^{-1}(0)w^t w-\mathrm{I})\int_{\mathrm{D}_{h_n}} q^a_{(j-i-1)/n}\left(y_j-y_i-\frac{w}{\sqrt{n}}\right)dw\,dy_j\right|$$

en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(a^{-1}(0)w^t w-\mathrm{I})\,dw$ est nulle nous obtenons,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(a^{-1}(0)w^t w-\mathrm{I})\right.$$
$$\left.\times\int_{\mathrm{D}_{h_n}}\left[q^a_{(j-i-1)/n}\left(y_j-y_i-\frac{w}{\sqrt{n}}\right)-q^a_{(j-i-1)/n}(y_j-y_i)\right]dw\,dy_j\right|$$

en utilisant (∗∗∗∗) et le fait que $\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(a^{-1}(0)w^t w-\mathrm{I})\,w\,dw$ est nulle nous obtenons une majoration par,

$$\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(\mathrm{Cte}\,|w|^2+1)\frac{|w|^2}{n}$$
$$\times\int_{\mathrm{D}_{h_n}}\mathrm{C}_1\frac{n}{j-i-1}q_{(j-i-1)/n}\left(\mathrm{C}_2\left(y_j-y_i-\theta\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\right)dw\,dy_j$$

or d'une part,

$$\int_{\mathrm{D}_{h_n}}\mathrm{C}_1\frac{n}{j-i-1}q_{(j-i-1)/n}\left(\mathrm{C}_2\left(y_j-y_i-\theta\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\right)dy_j$$
$$\leqq\int_{\mathrm{D}_{h_n}}\mathrm{C}_1\frac{n}{j-i-1}q_{(j-i-1)/n}(\mathrm{C}_2 y_j)\,dy_j$$
$$=O(\mathrm{E}[1^{\mathrm{B}}_{n,(j-i-1/n)}])\frac{n}{j-i-1}$$
$$=O\left(\frac{n}{j-i-1}\left[1\wedge\left(\frac{nh_n^2}{j-i-1}\right)^{d/2}\right]\right)$$

d'après le lemme 14 de l'annexe;
et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(\mathrm{Cte}\,|w|^2+1)\frac{|w|^2}{n}dw=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

on a donc une majoration par, $\frac{\mathrm{Cte}}{j-i-1}\left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{j-i-1}\right)^{d/2}\right]$.

Supposons $j>i+1$ et $r\neq 1$ nous avons,

$$\begin{aligned}|\mathrm{E}[(\mathscr{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})^r 1^{\mathrm{Y}}_{n,(j/n)}/\mathrm{Y}_{i/n}=y_i]| \\ \leqq \int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(\mathrm{Cte}\,|w|^2+1)^r \int_{\mathrm{D}_{h_n}} q^a_{(j-i-1)/n}\left(y_j-y_i-\frac{w}{\sqrt{n}}\right) dw\, dy_j\end{aligned}$$

or d'une part,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{D}_{h_n}} q^a_{(j-i-1)/n}\left(y_j+y_i-\frac{w}{\sqrt{n}}\right) dy_j \\ = O(\mathrm{E}[1^{\mathrm{B}}_{n,(j-i-1)/n}]) \\ = O\left(1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{j-i-1}\right)^{d/2}\right)\end{aligned}$$

d'après le lemme 14 de l'annexe; et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d} q_1^a(w)(\mathrm{Cte}\,|w|^2+1)\, dw = \mathrm{O}(1)$$

ce qui prouve le résultat.

Supposons $j=i+1$ nous avons,

$$|\mathrm{E}[(\mathscr{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)})^r 1^{\mathrm{Y}}_{n,(i+1)/n}/\mathrm{Y}_{i/n}=y_i]| \leqq \mathrm{E}[|\mathscr{Z}^{\mathrm{Y}}_{n,(i/n)}|^r/\mathrm{Y}_{i/n}=y_i]$$

d'où le résultat.

Ceci conclut la démonstration de (i) du lemme.

Montrons maintenant (ii).

Posons, $\varphi(x)=a^{-1}(0)\,\mathrm{E}[n(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}\,{}^t(\Delta_n \mathrm{X})_{i/n}/\mathrm{X}_{i/n}=x]$

Supposons $j>i+1$ et $r=1$ nous avons,

$$\begin{aligned}|\mathrm{E}\,|\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)} 1^{\mathrm{X}}_{n,(j/n)}/\mathrm{X}_{i/n}=x_i]| \\ = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^{d/2}} p_{1/n}\left(x_i, x_i+\frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)\, w^t w-\varphi(x_i)]\right. \\ \left.\times \int_{\mathrm{D}_{h_n}} p_{(j-i-1)/n}\left(x_i+\frac{w}{\sqrt{n}}, x_j\right) dw\, dx_j\right|\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^{d/2}} p_{1/n}\left(x_i, x_i + \frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)\, w^t w - \varphi(x_i)]\, dw$ est nulle nous obtenons,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^{d/2}} p_{1/n}\left(x_i, x_i + \frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)\, w^t w - \varphi(x_i)] \right.$$
$$\left. \times \int_{\mathrm{D}_{h_n}} \left[p_{(j-i-1)/n}\left(x_i + \frac{w}{\sqrt{n}}, x_j\right) - p_{(j-i-1)/n}(x_i, x_j) \right] dw\, dx_j \right|$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^{d/2}} p_{1/n}\left(x_i, x_i + \frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)\, w^t w - \varphi(x_i)] \right.$$
$$\left. \times \int_{\mathrm{D}_{h_n}} \frac{\partial p}{\partial y^{(j-i-1)/n}}\left(x_i + \theta \frac{w}{\sqrt{n}}, x_j\right) \frac{w}{\sqrt{n}}\, dw\, dx_j \right|$$

en utilisant (**), on obtient une majoration par

$$\mathrm{Cte} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^{d/2}} p_{1/n}\left(x_i, x_i + \frac{w}{\sqrt{n}}\right)[|w|^2 + 1]$$
$$\times \int_{\mathrm{D}_{h_n}} \mathrm{C}_1 \sqrt{\frac{n}{j-i-1}}\, q_{(j-i-1)/n}\left(\mathrm{C}_2\left(x_j - x_i - \frac{\theta w}{\sqrt{n}}\right)\right) \frac{|w|}{\sqrt{n}}\, dw\, dx_j$$

qui de la même façon que précédemment se majore par

$$\sqrt{\frac{\mathrm{Cte}}{j-i-1}} \left[1 \wedge \left(\frac{n h_n^2}{j-i-1} \right) \right]$$

les autres cas sont simples à démontrer, ce qui conclut la démonstration de (ii).

LEMME 10. — *Soient* $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_m < n$, $i_{m+1} = +\infty$ $i_0 = 0$. *Soient* $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{N}$ $r_0 = 0$.

(i) *Pour* $d \geqq 3$,

$$\left| \mathrm{E}\left[\prod_{l=1}^{m} 1^{\mathrm{Y}}_{n, (i_l/n)} (\mathscr{X}^{\mathrm{Y}}_{i_l/n})^{r_l} \right] \right|$$
$$\leqq \mathrm{Cte} \left(\prod_{\substack{l \in [0, m] \\ i_{l+1} > i_l + 1 \\ r_l = 1}} \frac{\mathrm{Cte}}{i_{l+1} - i_l - 1} \left[1 \wedge \left(\frac{n h_n^2}{i_{l+1} - i_l - 1} \right)^{d/2} \right] \right)$$
$$\times \left(\prod_{\substack{l \in [0, m-1] \\ i_l + 1 > i_l + 1 \\ r_l \neq 1}} \left[1 \wedge \left(\frac{n h_n^2}{i_{l+1} - i_l - 1} \right)^{d/2} \right] \right)$$

(ii) *Pour $d=2$,*

$$\left|\mathrm{E}\left[\prod_{l=1}^{m} 1_{n,\,(i_l/n)}^{\mathrm{X}}(\mathscr{Z}_{i_l/n}^{\mathrm{X}})^{r_l}\right]\right|$$

$$\leqq \mathrm{Cte}\left(\prod_{\substack{l\in[0,\,m]\\ i_{l+1}>i_l+1\\ r_l=1}} \frac{\mathrm{Cte}}{\sqrt{i_{l+1}-i_l-1}}\left[1\wedge\left(\frac{nh_n^2}{i_{l+1}-i_l-1}\right)\right]\right)$$

$$\times\left(\prod_{\substack{l\in[0,\,m-1]\\ i_l+1>i_l+1\\ r_l\neq 1}}\left[1\wedge\left(\frac{nh_n^2}{i_{l+1}-i_l-1}\right)\right]\right)$$

Démonstration. — Démontrons (i). On étudie le cas $m\geqq 2$ et $r_m\neq 1$, les autres sont triviaux.

$$\left|\mathrm{E}\left[\prod_{l=1}^{m} 1_{n,\,(i_l/n)}^{\mathrm{X}}(\mathscr{Z}_{i_l/n}^{\mathrm{X}})^{r_l}\right]\right|$$

$$\leqq \mathrm{E}\left[\left|\left(\prod_{l=1}^{m-2} 1_{n,\,(i_l/n)}^{\mathrm{X}}(\mathscr{Z}_{i_l/n}^{\mathrm{X}})^{r_l}\right)1_{n,\,(i_m-1)/n}^{\mathrm{X}}\right|\right.$$

$$\left.\times\left|\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{(i_m-1)/n}^{\mathrm{X}})^{r_m-1}\,1_{n,\,(i_m/n)}^{\mathrm{X}}/\mathrm{X}_{(i_m-1)/n}\right]\right|\right]$$

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{i_m/n}^{\mathrm{X}})^{r_m}/\mathrm{X}_{i_m/n}=x\right]\right|\leqq \mathrm{E}\left[\left|\left(\prod_{l=1}^{m-2} 1_{n,\,(i_l/n)}^{\mathrm{X}}(\mathscr{Z}_{i_l/n}^{\mathrm{X}})^{r_l}\right)1_{n,\,(i_m-1)/n)}^{\mathrm{X}}\right|\right]$$

$$\times\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{(i_m-1)/n}^{\mathrm{X}})^{r_m-1}\,1_{n,\,(i_m/n)}^{\mathrm{X}}/\mathrm{X}_{(i_m-1)/n}=x\right]\right|$$

$$\left|\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{i_m/n}^{\mathrm{X}})^{r_m}/\mathrm{X}_{i_m/n}=x\right]\right|$$

donc par récurrence

$$\leqq \mathrm{E}\left[1_{n,\,(i_1/n)}^{\mathrm{X}}\right]\left(\prod_{l=1}^{m-1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{i_l/n}^{\mathrm{X}})^{r_l}\,1_{n,\,((i_l+1)/n)}^{\mathrm{X}}/\mathrm{X}_{i_l/n}=x\right]\right|\right)$$

$$\times\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\mathrm{E}\left[(\mathscr{Z}_{i_m/n}^{\mathrm{X}})^{r_m}/\mathrm{X}_{i_m/n}=x\right]\right|$$

d'où la démonstration de (i) d'après le lemme précédent.

La démonstration de (ii) est analogue.

LEMME 11. — *Soit $r\in\mathrm{R}(k,\,k_1,\,k_1+l_1)$ on a :*

$$k_1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k_1+l_1} 1_{r_i=1}\leqq\frac{k}{2}$$

il y a égalité si et seulement si, pour tout i, $r_i \in \{0, 2\}$, *dans ce cas k est pair et* $k_1 = \frac{k}{2}$.

Démonstration.

$$k_1 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k_1+l_1} 1_{r_i=j} \qquad \text{et} \qquad k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k_1+l_1} j\, 1_{r_i=j}$$

donc

$$\frac{k}{2} - k_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1+l_1} 1_{r_i=1} = \sum_{j=3}^{k} \sum_{i=1}^{k_1+l_1} \left(\frac{j}{2} - 1\right) 1_{r_i=j}$$

ce qui permet de conclure.

Démonstration de la proposition 4. — Démontrons (i).

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}} \sum_{\substack{i_q \in [1, n-1] \\ i_{q+1} > i_q \\ q \in [1, k_1+l_1]}} \mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k_1+l_1} 1^{\mathrm{Y}}_{n, (i_q/n)} (\mathscr{Z}^{\mathrm{Y}}_{i_q/n})^{r_q} \right] \right| \\
&\leqq \frac{\mathrm{Cte}}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}} \sum_{\substack{i_q \in [1, n-1] \\ i_{q+1} > i_q + 1 \\ l \in [1, k_1+l_1]}} \left(\prod_{\substack{q \in [0, k_1+l_1] \\ r_q = 1}} \frac{\mathrm{Cte}}{i_{q+1} - i_q - 1} \left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{i_{q+1} - i_q - 1} \right)^{d/2} \right] \right) \\
&\qquad \times \left(\prod_{\substack{q \in [0, k_1+l_1-1] \\ r_q \neq 1}} \left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{i_{q+1} - i_q - 1} \right)^{d/2} \right] \right) \\
&\leqq \frac{\mathrm{Cte}}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}} \sum_{\substack{i_q \in [1, n-1] \\ q \in [1, k_1+l_1] \\ i_{q+1} > i_q + 1}} \left(\prod_{\substack{q \in [0, k_1+l_1] \\ r_q = 1}} \frac{\mathrm{Cte}}{i_q} \left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{i_q} \right)^{d/2} \right] \right) \\
&\qquad \left(\prod_{\substack{q \in [0, k_1+l_1-1] \\ r_q \neq 1}} \left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{i_q} \right)^{d/2} \right] \right)
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{j} \right)^{d/2} \right]
&= \sum_{j=1}^{[nh_n^2]} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{[nh_n^2]} \frac{1}{j} \left(\frac{nh_n^2}{j} \right)^{d/2} \\
&= O(\ln(nh_n^2))
\end{aligned}$$

et,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[1 \wedge \left(\frac{nh_n^2}{j}\right)^{d/2}\right] = O(nh_n^2)$$

on a donc une majoration en

$$\frac{1}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}}(\ln(nh_n^2))^{\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{\{i_{q+1}>i_q+1,\, r_q=1\}}}\,(nh_n^2)^{\sum_{l=1}^{k_1+l_1} 1_{\{i_{q+1}>i_q+1,\, r_q\neq 1\}}}$$

$$\leqq \frac{1}{(nh_n^2)^{(k/2)+l}}\ln(nh_n^2))^{\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q=1}}\,(nh_n^2)^{\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q\neq 1}}$$

$$\leqq \frac{1}{(nh_n^2)^{l-l_1}}\left[\left(\frac{\ln(nh_n^2)}{\sqrt{nh_n^2}}\right)^{\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q=1}}\right]\left[(nh_n^2)^{k_1-(k/2)-(1/2)\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q=1}}\right]$$

la limite est donc nulle.

Démontrons maintenant (ii).

La méthode est la même que précédemment, il suffit cette fois de remarquer que,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i}}\left[1 \wedge \frac{nh_n^2}{i}\right] = O(\sqrt{nh_n^2})$$

et

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[1 \wedge \frac{nh_n^2}{i}\right] = O(n\,\alpha_n)$$

ce qui permet, comme pour (i), de conclure puisqu'on a alors une majoration par,

$$\leqq \frac{1}{(n\,\alpha_n)^{l-l_1}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{-\ln(h_n^2)}}\right)^{\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q=1}}\right]\left[(n\,\alpha_n)^{k_1-(k/2)-(1/2)\sum_{q=1}^{k_1+l_1} 1_{r_q=1}}\right]$$

LEMME 12. — *Soient $k, l \in \mathbb{N}$*

Pour tout $(r_1, r_2, \ldots, r_{k+l})$ tels que les $r_i \in \{0, 2\}$ et $\sum_{l=1}^{k+1} r_q = 2k$ on a,

(i) *Pour $d \geqq 3$,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(nh_n^2)^{k+l}}\sum_{\substack{i_q\in[1,n]\\ i_{q+1}>i_q+1\\ q\in[1,k+l]}} \mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k+l} 1^{\mathrm{Y}}_{n,(i_q/n)}(\mathscr{L}^{\mathrm{Y}}_{i_q/n})^{r_q}\right] = \frac{2^k}{(k+l)!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(d)}(0))^{k+l}]\,\mathrm{I}$$

(ii) *Pour* $d=2$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n\alpha_n)^{k+l}}\sum_{\substack{i_q\in[1,n]\\ i_{q+1}>i_q+1\\ q\in[1,k+l]}}\mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k+l}1^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)}(\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{i_q/n})^{r_q}\right]=\frac{2^k}{(k+l)!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(2)}(0))^{k+l}]\,\mathrm{I}$$

Démonstration. — Nous démontrerons ici seulement (ii), la démonstration de (i) étant analogue. On écrit

$$\mathrm{E}\left[\sum_{q=1}^{k+l}1^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)}(\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{(i_q/n)})^{r_q}\right]$$

sous forme d'espérances conditionnelles successives. Considérons le terme

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[(\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{i_q/n})^{r_q}1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}/\mathrm{X}_{i_q/n}=x_q]\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{n^{d/2}}p_{1/n}\left(x_q,x_q+\frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)w^t w-\varphi(x_q)]^{r_q}\\
&\qquad\times\int_{\mathrm{D}_{h_n}}p_{(i_{q+1}-i_q-1)/n}\left(x_q+\frac{w}{\sqrt{n}},x_{q+1}\right)dw\,dx_{q+1}\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{n^{d/2}}p_{1/n}\left(x_q,x_q+\frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)w^t w-\varphi(x_q)]^{r_q}\\
&\qquad\qquad\times\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q+(w/\sqrt{n})}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]\,dw\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui employé pour démontrer le lemme 9 et fondé sur l'inégalité (✱✱) montre alors que

$$\begin{aligned}&|\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q+(w/\sqrt{n})}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]-\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q}[1^{\mathrm{X}}_{n,(i_q+1)/n}]|\\
&\qquad\leqq\mathrm{Cte}\frac{|w|}{\sqrt{i_{q+1}-i_q-1}}\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]\end{aligned}$$

Dans le calcul des limites des sommes de Riemann des moments, le terme:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{n^{d/2}}p_{1/n}\left(x_q,x_q+\frac{w}{\sqrt{n}}\right)\\
&\qquad\times[a^{-1}(0)w^t w-\varphi(x_q)]^{r_q}\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q+(w/\sqrt{n})}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]\,dw\end{aligned}$$

peut donc être remplacé (le $|w|$ étant « petit » et le $\sqrt{i_{q+1}-i_q-1}$ étant « grand ») par le terme

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{n^{d/2}}p_{1/n}\left(x_q,x_q+\frac{w}{\sqrt{n}}\right)[a^{-1}(0)w^t w-\varphi(x_q)]^{r_q}\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]\,dw\\
&\qquad=\mathrm{E}^{(i_q/n),\,x_q}[(\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)})^{r_q}]\,\mathrm{E}^{(i_q+1)/n,\,x_q}[1^{\mathrm{X}}_{n,((i_q+1)/n)}]\end{aligned}$$

le terme $\mathrm{E}^{(i_q/n),\,x_q}[(\mathscr{Z}^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)})^{r_q}]$ lui est équivalent à $\mathrm{E}[(\mathrm{W}_1^t\mathrm{W}_1-\mathrm{I})^{r_q}]$ (où W est un mouvement brownien d dimensionnel) lorsque n tend vers $+\infty$ et ceci uniformément par rapport à $x_p\in\mathrm{D}_{h_n}$.

Ceci prouve que,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n\alpha_n)^{k+l}}\sum_{\substack{i_q\in[1,n]\\ i_{q+1}>i_q+1\\ q\in[1,k+l]}}\mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k+l}1^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)}(\mathscr{X}^{\mathrm{X}}_{i_q/n})^{r_q}\right]$$

$$=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n\alpha_n)^{k+l}}\sum_{\substack{i_q\in[1,n]\\ i_{q+1}>i_q+1\\ q\in[1,k+l]}}\mathrm{E}\left[\prod_{q=1}^{k+l}1^{\mathrm{X}}_{n,(i_q/n)}\right]\right)\prod_{q=1}^{k+1}\mathrm{E}[(\mathrm{W}_1^t\mathrm{W}_1-\mathrm{I})^{r_q}]$$

$$=\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{\mathrm{X}}_n)^{k+l}]}{(k+l)!}\right)\prod_{q=1}^{k+l}\mathrm{E}[(\mathrm{W}_1^t\mathrm{W}_1-\mathrm{I})^{r_q}]$$

d'où le résultat d'après les théorèmes 4 et 5.

PROPOSITION 5. — *Pour tout k, l*

pour $d=2$

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[(\mathscr{M}^{\mathrm{X}}_n)^{2k+1}(\mathrm{L}^{\mathrm{X}}_n)^l]=0$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[(\mathscr{M}^{\mathrm{X}}_n)^{2k}(\mathrm{L}^{\mathrm{X}}_n)^l]=\frac{(2k)!}{k!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(2)}(0))^{k+1}]$$

pour $d\geqq 3$

(iii) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[(\mathscr{M}^{\mathrm{Y}}_n)^{2k+1}(\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}_n)^l]=0$$

(iv) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[(\mathscr{M}^{\mathrm{Y}}_n)^{2k}(\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}_n)^l]=\frac{(2k)!}{k!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(d)}(0))^{k+l}]$$

Démonstration. — (i) résulte de la proposition 4 et du lemme 8. Démontrons (ii)

$$\mathrm{S}(m_2, m_2, m_1+m_2)=m_1!\ \text{donc}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[(\mathscr{M}^{\mathrm{X}}_n)^{2k}(\mathrm{L}^{\mathrm{X}}_n)^l]=\sum_{\substack{r\in\mathrm{R}(2k,k,k+l)\\ r_i\in\{0,2\}}}\frac{(2k)!}{2^k}l!\,2^k\frac{\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(2)}(0))^{k+l}]}{(k+l)!}$$

or $\operatorname{card}\{r\in\mathrm{R}(2k,k,k+l)/r_i\in\{0,2\}\}=\mathrm{C}^k_{k+l}$

ce qui donne comme limite $\dfrac{(2k)!}{k!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(2)}(0))^{k+l}]$ et démontre (ii).

(iii) et (iv) se démontrent de manière identique.

Démonstration de la proposition 1. — La proposition 5 permet d'écrire pour $d=2$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}[\exp(i(t\mathcal{M}_n^{\mathrm{X}}+s\,\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}}))]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-t^2)^k}{(2k)!}\,\frac{(is)^l}{l!}\,\frac{(2k)!}{k!}\mathrm{E}[(\mathrm{L}^{(2)}(0))^{k+l}]$$

$$=\mathrm{E}[\exp(-t^2\,\mathrm{L}^{(2)}(0)+is\,\mathrm{L}^{(2)}(0))]$$

$$=\mathrm{E}[\exp(it\sqrt{2\,\mathrm{L}^{(2)}(0)}\,\mathcal{N}+is\,\mathrm{L}^{(2)}(0))]$$

Le calcul pour $(\mathcal{M}_n^{\mathrm{Y}},\ \mathrm{L}_n^{\mathrm{Y}})$ est le même.

On a donc démontré la proposition 1 et donc le théorème 1.

5. ANNEXE

LEMME 13.

(i) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[|\mathrm{I}_n^{\mathrm{X}}-\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}}|]=0$$

(ii) $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}[|\mathrm{I}_n^{\mathrm{Y}}-\mathrm{L}_n^{\mathrm{Y}}|]=0$$

Démonstration. — (i) Majorons $\mathrm{E}\left[\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}(1_{n,s}^{\mathrm{X}}-1_{n,(i/n)}^{\mathrm{X}})\,ds\right|\right]$.

Pour cela on procède comme dans la proposition 2 dont on reprend les notations. On écrit,

$$\mathrm{E}[|1_{n,s}^{\mathrm{X}}-1_{n,(i/n)}^{\mathrm{X}}|]=\mathrm{P}(|\mathrm{X}_s|<h_n,\ |\mathrm{X}_{i/n}|>h_n)+\mathrm{P}(|\mathrm{X}_s|>h_n,\ |\mathrm{X}_{i/n}|<h_n)$$

on majore $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_{i/n}|<h_n,\ |\mathrm{X}_s|>h_n)$ par,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{B}(h_n,\ \eta))+\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta),\ |\mathrm{X}_s|>h_n)$$

or,

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{B}(h_n,\ \eta))\,ds=O(\eta^d)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}&\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta),\ |\mathrm{X}_s|>h_n)\\ &\leqq\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta))\,\mathrm{P}(|\mathrm{X}_s-\mathrm{X}_{i/n}|>\eta\,h_n/\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta))\\ &=o(\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta)))\end{aligned}$$

car

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X}_s-\mathrm{X}_{i/n}|>\eta\,h_n/\mathrm{X}_{i/n}\in\mathcal{A}(h_n,\ \eta))=O\left(\frac{1}{n\,\eta^2\,h_n^2}\right)\qquad\text{si}\quad\frac{i}{n}\leqq s\leqq\frac{i+1}{n}$$

donc

$$\frac{1}{\alpha_n}\sum_{i-1}^{n-1}\int_{i/n}^{(i+1)/n} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{i/n}\in\mathscr{A}(h_n,\eta),\ |\mathrm{X}_s|>h_n)=o(1)$$

L'étude de $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_{i/n}|>h_n,\ |\mathrm{X}_s|<h_n)$ se fait de la même façon, donc finalement

$$\mathrm{E}[|\mathrm{I}_n^{\mathrm{X}}-\mathrm{L}_n^{\mathrm{X}}|]=O(\eta^d)+o(1)$$

d'où le résultat.

(ii) se ramène à (i) en prenant $\sigma(x)=\sigma(0)$ et $b(x)=0$.

LEMME 14. — *Pour tout s de* [0, 1]

(i) $$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ t\in[0,1-s]}} \mathrm{E}^{t,x}[1_{n,s+t}^{\mathrm{X}}]\leqq \mathrm{E}[\tilde{1}_{n,s}]$$

(ii) $$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ t\in[0,1-s]}} \mathrm{E}^{t,x}[1_{n,s+t}^{\mathrm{Y}}]\leqq \mathrm{E}[\tilde{1}_{n,s}]$$

(iii) $$\mathrm{E}[\tilde{1}_{n,s}]=O\left(\left(\frac{h_n^2}{s}\right)^{d/2}\wedge 1\right)$$

(iv) $$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} 1_{n,(i/n)}^{\mathrm{X}}\right]=O(n\alpha_n)$$

Démonstrations. — Démontrons (i)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{t,x}[1_{s+t}^{\mathrm{X}}]&=\int_{\mathrm{D}_{h_n}} p_s(x,y)\,dy\\ &\leqq\int_{\mathrm{D}_{h_n}} \mathrm{C}_1\frac{1}{2\pi s}\exp\left(-\mathrm{C}_2\frac{|y-x|^2}{2s}\right)dy \text{ d'après } (*)\end{aligned}$$

or,

$$\int_{\mathrm{D}_{h_n}} \mathrm{C}_1\frac{1}{2\pi s}\exp\left(-\mathrm{C}_2\frac{|y-x|^2}{2s}\right)dy=\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}\mathrm{E}[1_{|\mathrm{B}_{s/\mathrm{C}_2}+x|<h_n}]$$

et d'après le lemme d'Andersen (*cf.* Ibragimov [15]) on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}\mathrm{E}[1_{|\mathrm{B}_{s/\mathrm{C}_2}+x|<h_n}]\leqq\frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2}\mathrm{E}[1_{|\mathrm{B}_{s/\mathrm{C}_2}|<h_n}]$$

d'où la démonstration de (i) et donc de (ii) puisqu'on a les mêmes majorations des probabilités de transitions.

Montrons maintenant (iii)

$$\begin{aligned}
&\frac{C_1}{C_2}E[1_{|B_{s/C_2}|<h_n}]\\
&=\frac{C_1}{C_2}E[1_{|B_1|<\sqrt{C_2 h_n^2/s}}]\\
&=\frac{C_1}{C_2}\int_{D}\sqrt{C_2 h_n^2/s}\,\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx\\
&=O\left(\left(\frac{h_n^2}{s}\right)^{d/2}\wedge 1\right)
\end{aligned}$$

d'où (iii).

(iv) résulte directement de (i) et (iii).

LEMME 15. — *Soient* $i_0<i_1<i_2<\ldots<i_m\in\mathbb{N}$.
Alors pour tout x *dans* $\mathbb{R}^d$,

$$\text{(i)}\qquad E^{(i_0/n),x}[1^Y_{n,(i_1/n)}1^Y_{n,(i_2/n)}\ldots 1^Y_{n,(i_m/n)}]\leqq\prod_{l=1}^{m}E[\tilde{1}_{n,(i_l-i_{l-1}/n)}]$$

et

$$\text{(ii)}\qquad E^{(i_0/n),x}[1^X_{n,(i_1/n)}1^X_{n,(i_2/n)}\ldots 1^X_{n,(i_1/n)}]\leqq\prod_{l=1}^{m}E[\tilde{1}_{n,(i_l-i_{l-1})/n}]$$

Démonstration. — Démontrons (i) on a,

$$\begin{aligned}
&E^{(i_0/n),x}[1^Y_{n,(i_1/n)}1^Y_{n,(i_2/n)}\ldots 1^Y_{n,(i_m/n)}]\\
&\qquad=E^{(i_0/n),x}[1^Y_{n,(i_1/n)}1^Y_{n,(i_2/n)}\ldots 1^Y_{n,(i_{m-1}/n)}E[1^Y_{n,(i_m/n)}\,|\,Y_{i_{m-1}/n}]]
\end{aligned}$$

or d'après le lemme 14

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d}E[1^Y_{n,(i_m/n)}\,|\,Y_{(i_{m-1})/n}=z]\leqq E[\tilde{1}_{n,(i_m-i_{m-1})/n}]$$

donc

$$\begin{aligned}
&E^{(i_0/n),x}[1^Y_{n,(i_1/n)}1^Y_{n,(i_2/n)}\ldots 1^Y_{n,(i_m/n)}]\\
&\qquad\leqq E^{(i_0/n),x}[1^Y_{n,(i_1/n)}1^Y_{n,(i_2/n)}\ldots 1^Y_{n,(i_{m-1}/n)}]E[\tilde{1}_{n,(i_m-i_{m-1}/n)}]
\end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

Pour (ii) la démonstration est analogue, elle se fait aussi en conditionnant et en utilisant le lemme 14, qui permet d'écrire

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d}E[1^X_{n,(i_m/n)}\,|\,X_{i_{m-1}/n}=z]\leqq E[\tilde{1}_{i_m-i_{m-1}/n}]$$

Remarque. — Dans le calcul des moments algébriques, le cas de la dimension $d=1$ se traite de la même façon que le cas de la dimension

$d=2$. Le lemme 9 s'écrit dans le cas de la dimension $d=1$.

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \left| \mathrm{E}\left[(\mathscr{L}^{\mathrm{X}}_{n,(i/n)})^r 1^{\mathrm{X}}_{n,(j/n)} / \mathrm{X}_{i/n} = x\right] \right|$$

est majoré par :

a) Cte si $j=i+1$.

b) $\dfrac{\text{Cte}}{\sqrt{j-i-1}}\left[1 \wedge \sqrt{\dfrac{nh_n^2}{j-i-1}}\right]$ si $j>i+1$ et $r=1$.

c) $\text{Cte}\left[\sqrt{\dfrac{nh_n^2}{j-i-1}} \wedge 1\right]$ si $j>i+1$ et $r \neq 1$.

La démonstration de la proposition 4 est aussi valide dans le cas de la dimension $d=1$ puisque

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}}\left[1 \wedge \sqrt{\frac{nh_n^2}{j}}\right] &= \sum_{j=1}^{[nh_n^2]} \frac{1}{\sqrt{j}} + \sum_{j=[nh_n^2]+1}^{n-1} \frac{\sqrt{nh_n^2}}{j^{3/2}} \\ &= O(\sqrt{nh_n^2})\end{aligned}$$

et que $\dfrac{\sqrt{nh_n^2}}{\sqrt{nh_n}} \to 0$

La condition obtenue dans la démonstration du lemme 1 qui permet de raisonner avec la variable centrée $\mathscr{M}^{\mathrm{X}}_n$ au lieu de $\mathrm{M}^{\mathrm{X}}_n$ n'est pas non plus spécifique à la dimension $d=2$ et s'écrit en dimension $d=1 : nh_n^3 \to 0$. On retrouve donc par la méthode des moments le théorème de limite centrale démontré par D. Florens [11] dans le cas de la dimension $d=1$.

RÉFÉRENCES

[1] D. ALDOUS, *Probability Approximations Via the Poisson Clumping Heuristic*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] R. AZENCOTT, Densités des diffusions en temps petits développements asymptotiques, *Lectures Notes in Math.*, vol. **1059**, 1983.

[3] G. BEN AROUS, Géométrie de la Courbe Brownienne Plane, *Séminaire Bourbaki*, vol. **730**, 1990.

[4] P. BRUGIÈRE, Estimation de la variance d'un processus de diffusion dans le cas multidimensionnel, *C.R. Acad. Sci.*, T. **312**, Série I, 13, 1991, p. 999-1005.

[5] P. BRUGIÈRE, Théorème de limite centrale pour un estimateur de la variance d'un processus de diffusion dans le plan, *C.R. Acad. Sci. Paris*, T. **313**, Séries I, 8, 1991, p. 533-536.

[6] P. Brugière, Théorème de limite centrale pour un estimateur de la variance d'un processus de diffusion dans le cas multidimensionnel, *C.R. Acad. Sci. Paris*, T. **313**, Séries I, 1991, p. 943-947.
[7] Z. Ciesielski and S. J. Taylor, First Passage Times for Brownian Motion in Space and the Exact Hausdorff Measure of the Sample Path., *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **103**, 1962, p. 434-450.
[8] D. Dacunha-Castelle and D. Florens-Zmirou, Estimation of the Coefficient of a Diffusion from Discrete Observations, *Stochastics*, vol. **19**, 1986, p. 263-284.
[9] G. Dohnal, On Estimating the Diffusion Coefficient, *J. Appl. Prob.*, vol. **24**, 1987, p. 105-114.
[10] R. Durrett, *Brownian Motions and Martingales in Analysis*, Wadsworth, Belmont C.A., 1984.
[11] D. Florens-Zmirou, Estimation de la variance d'un processus de diffusion à partir d'une observation discrétisée, *C.R. Acad. Sci. Paris*, T. **309**, 1989, p. 195-200.
[12] D. Florens-Zmirou, On Estimating the Variance of a Diffusion Process, *J. of Applied Probability*, Preprint 90-06, Univ. Orsay, 1991.
[13] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
[14] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Vol. **1**, Academic Press, New York, 1975.
[15] I. A. Ibragimov and R. Z. Hasḿinski, *Statistical Estimation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981.
[16] N. Ikeda, Probabilistic Methods in the Study of Asymptotics, *Lectures notes in Mathematics*, vol. **1427**, p. 195-325.
[17] A. Molchanov, Diffusions et géométrie riemannienne, *Russian Math. Survey*, 1975, pp. 1-63.
[18] D. Ray, Sojourn Times of Diffusion Processes, *Illinois J. of Math.*, vol. **7**, 1963, p. 425-493.
[19] D. Ray, Sojourn Times and the Exact Hausdorff Measure of the Sample Path for Planar Brownian Motion, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **106**, 1963, p. 436-444.
[20] S. J. Taylor, The Exact Hausdorff Measure of the Sample Path for Planar Brownian Motion, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, vol. **60**, 1964, p. 253-258.
[21] S. J. Taylor, The Measure Theory of Random Fractals, *Math. Proc. of the Cambridge Ph. Soc.*, 1986, p. 383-406.
[22] M. Wschebor, Surfaces aléatoires, mesures géométriques des ensembles de niveaux, *Lectures Notes in Mathematics*, vol. **1147**, Springer-Verlag, 1985.
[23] M. Wschebor, Personnal Communication, 1990.

(*Manuscrit reçu le* 16 *décembre* 1991;
révisé le 31 *août* 1992.)