ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ALBERT RAUGI

Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, nº 2 (1992), p. 281-309

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_2_281_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 28, n° 2, 1992, p. 281-309. *Probabilités et Statistiques*

Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact

par

Albert RAUGI

IRMAR, Université de Rennes-I Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit P un opérateur de transition sur un espace métrique compact (E, d) respectant l'espace vectoriel des fonctions continues. Sous des hypothèses classiques d'équicontinuité, nous étudions le comportement asymptotique des itérées de P ainsi que celui de la chaîne de Markov associée à P.

ABSTRACT. — Let P be a non-negative linear operator on the space of continuous functions on a compact metric space (E, d). Under classical equicontinuous hypothesis, we study the asymptotic behavior of the iterates of P and we discuss the behavior of the Markov chain with transition probability P.

0. INTRODUCTION

Le but de cet article est l'étude, sous des hypothèses classiques d'équicontinuité, d'un opérateur de transition P sur un espace métrique compact E.

Classification A.M.S. : 60 B 05, 60 B 10, 60 G 45, 60 J 10, 60 J 50.

Nous appelons $C(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur E, muni de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$.

Lorsque P respecte l'espace vectoriel $C(E)$, nous donnons (paragraphe 2) une description de l'espace de Banach $\mathscr{H}_c$ des *fonctions* P-*harmoniques continues*; c'est-à-dire des solutions continues de l'équation fonctionnelle $Ph=h$. Désignons par $(\Omega, \mathscr{F}, (X_n)_{n \geqq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in E})$ la chaîne de Markov canonique sur E associée à P. Nous mettons en évidence une famille $\mathfrak{B}$ de sous-ensembles compacts γ de E, disjoints, absorbants (c'est-à-dire que $\forall x \in \gamma$, $P(x, \gamma)=1$), telle que toute trajectoire ω d'un sous-ensemble mesurable Ω_0 de Ω, de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$, approche un élément $\gamma(\omega)$ de $\mathfrak{B}$ (c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(X_n(\omega), \gamma(\omega))=0$). Les éléments de $\mathfrak{B}$ jouent en quelque sorte le rôle des « classes ergodiques » dans la théorie classique des chaînes de Markov vérifiant la condition de Doeblin ([3], chap. V, § 5). Muni de la distance de Hausdorff des compacts de E, $\mathfrak{B}$ est un espace métrique compact. Nous construisons alors une famille de probabilités $\{ \mu_x : x \in E \}$ sur les boréliens de $\mathfrak{B}$ (noyau de Poisson sur $\mathfrak{B}$) telle que pour toute fonction P-harmonique continue h, il existe une fonction continue $\hat{h}$ sur $\mathfrak{B}$ vérifiant $\forall x \in E \ h(x) = \int_{\mathfrak{B}} \hat{h}(\gamma) \mu_x(d\gamma)$.

Lorsque pour tout $f \in C(E)$, la famille de fonctions $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} P^k f : n \geqq 0 \right\}$ est équicontinue, la représentation intégrale précédente établit une isométrie de $\mathscr{H}_c$ sur $C(\mathfrak{B})$. Nous décrivons alors les mesures de probabilités P-invariantes et nous donnons le comportement, en moyenne de Cesaro, des suites $(f(X_n))_{n \geqq 0}, f \in C(E)$.

Nous supposons que, pour tout $f \in C(E)$, la famille de fonctions $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} P^k f : n \geqq 0 \right\}$ est équicontinue. Nous abordons (§ 4) l'étude du sous-ensemble fermé $\mathscr{P}_c$ de $C(E)$ constitué par les fonctions propres continues de l'opérateur P associées à des valeurs propres complexes de module 1. Chaque élément γ de $\mathfrak{B}$ est découpé en sous-ensembles compacts disjoints qui jouent un rôle analogue à celui des « classes cycliques » dans la théorie classique des chaînes de Markov vérifiant la condition de Doeblin. Nous munissons l'ensemble $\mathfrak{C}$ des classes cycliques d'une distance δ telle que :

(i) $(\mathfrak{C}, \delta)$ est un espace métrique compact;

(ii) il existe une isométrie τ de $(\mathfrak{C}, \delta)$ vérifiant $\forall c \in \mathfrak{C}$, $\forall x \in c$, $P(x, \tau. c)=1$; autrement dit, P fait passer de la classe cyclique c à la classe cyclique $\tau.c$. Nous notons G le sous-groupe abélien compact du groupe des isométries de $(\mathfrak{C}, \delta)$ engendré par τ. Nous construisons un noyau de Poisson $\{ \rho_x : x \in E \}$ sur $\mathfrak{C}$ tel que pour toute fonction propre h de P, associée à la valeur propre λ de module 1, il existe une fonction continue

$\hat{h}$ sur $\mathfrak{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad h(x) = \int_{\mathfrak{C}} \hat{h}(c)\, \rho_x(dc)$$

et

$$\forall c \in \mathfrak{C}, \quad \forall g \in \mathrm{G}, \qquad \hat{h}(g.c) = \chi(g)\, \hat{h}(c);$$

où χ est le caractère du groupe G tel que $\chi(\tau) = \lambda$.

Nous supposons dorénavant que, pour tout $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E})$, la famille de fonctions $\{\mathrm{P}^n f : n \geqq 0\}$ est équicontinue. Nous décrivons (§ 5) le comportement, en moyennes d'Abel, des suites $(f(\mathrm{X}_n))_{n \geqq 0}$, $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E})$. Nous étudions (§ 6) l'espace $\mathscr{H}_c$ des suites de fonctions continues $(h_n)_{n \geqq 0}$ telles que :

(i) $\forall n \geqq 0$, $\mathrm{P}\, h_{n+1} = h_n$;

(ii) la famille de fonctions $\{h_n : n \geqq 0\}$ est équicontinue.

Si h est une fonction propre continue de P, associée à la valeur propre λ de module 1, on obtient un élément de $\mathscr{H}_c$ en posant : $\forall n \geqq 0$, $h_n = \lambda^{-n} h$. Nous montrons que pour tout élément h de $\mathscr{H}_c$, il existe une fonction continue $\hat{h}$ sur $\mathfrak{C}$ vérifiant : $\forall x \in \mathrm{E}$, $\forall n \geqq 0$, $h_n(x) = \int_{\mathfrak{C}} \hat{h}(\tau^{-n}.c)\, \rho_x(dc)$. L'espace $\mathscr{H}_c$ muni de la norme définie par $\|\mathrm{H}\| = \sup\{\|h_n\|_\infty : n \geqq 0\}$ est un espace de Banach isométrique à $\mathrm{C}(\mathfrak{C})$. L'espace vectoriel engendré par les éléments de $\mathscr{P}_c$, identifié à un sous-ensemble de $\mathscr{H}_c$, est dense dans $\mathscr{H}_c$.

Enfin, à l'aide des résultats précédents, nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons que pour toute fonction continue f sur* E, *la famille de fonctions* $\{\mathrm{P}^n f : n \geqq 0\}$ *soit équicontinue. L'espace* C (E) *se décompose alors en la somme directe de deux sous-espaces fermés* $\mathscr{E}_1$ *et* $\mathscr{E}_2$ *tels que* :

(i) $\mathscr{E}_1$ *est le sous-espace fermé de* C (E) *engendré par les fonctions propres de* P *associées à des valeurs propres de module* 1.

(ii) *pour tout élément f de* $\mathscr{E}_2$, *la suite de fonctions* $(\mathrm{P}^n f)_{n \geqq 0}$ *converge uniformément vers la fonction nulle.*

On améliore ainsi un théorème de M. Rosenblatt ([11]), qui lui-même précisait un résultat de K. de Leeuw et I. Glicksberg ([2]).

Plusieurs articles de B. Jamison portent sur ce sujet (*cf.* [4], [5], [6], [7]). Les techniques utilisées sont surtout celles de la théorie ergodique et de la théorie spectrale de certains opérateurs d'un espace de Hilbert. Dans ce qui suit nous privilégions surtout l'aspect martingale, sans négliger les outils de la théorie ergodique. Ce choix permet de décrire le comportement asymptotique de la chaîne de Markov associée à P; en particulier nous donnons une généralisation des notions classiques de « classes ergodiques » et «classes cycliques». Cette démarche permet aussi de s'affranchir d'une hypothèse d'irréductibilité que les auteurs précédents étaient amenés à faire.

Nous reprenons une idée développée dans [1], où l'on trouvera des exemples d'application. Pour les résultats utilisés concernant la théorie des martingales, nous renvoyons le lecteur non averti à [8].

Nous avons cru bon de commencer l'article par un paragraphe préliminaire dans lequel nous introduisons les définitions, notations et outils indispensables à notre étude.

1. PRÉLIMINAIRES

Soit (E, d) un espace métrique localement compact à base dénombrable. On désigne par $C(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur E, muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit P une probabilité de transition sur E. Pour tout $x \in E$, on considère la mesure potentiel $G(x, .) = \sum_{r \geqq 0} P^r(x, .)$ et on note $\operatorname{Supp} G(x, .)$ son support.

(A) Mesures invariantes

(1.1) Pour toute mesure m, nous notons mP la mesure définie par $\int_E f(x)\, mP(dx) = \int_E Pf(x)\, m(dx)$. Une mesure ν telle que $\nu P = \nu$ est dite P-*invariante*.

(1.2) Soit ν une mesure de probabilité P-invariante. Soit h une fonction borélienne bornée sur E telle que $Ph = h$ ν-p.s. Pour tout entier $r \geqq 1$, nous avons: $P^r(h^2) \geqq (P^r h)^2 = h^2$ ν-p.s. et $\int_E (P^r(h^2) - h^2)(x)\, \nu(dx) = 0$. Par suite, il existe un borélien X_h de E de ν-mesure 1, tel que:

$$\forall u \in X_h, \quad h(.) = h(u) \quad G(u, .)-\text{p.s.}$$

(1.3) DÉFINITION. — Une mesure de probabilité P-invariante ν est dite extrémale si toute mesure positive τ, P-invariante, vérifiant $\tau \leqq \nu$ est nécessairement un multiple de ν.

(1.4) DÉFINITION. — Nous appelons fonction P-harmonique toute fonction borélienne bornée h sur E, à valeurs complexes, vérifiant $Ph = h$.

Nous désignons par $\mathscr{H}$ l'espace de Banach des fonctions P-harmoniques muni de la norme de la convergence uniforme.

(1.5) Soit g une fonction borélienne bornée réelle vérifiant $\mathrm{P}g=g$ $\nu-$p.s. La fonction définie par :

$$f(x)=\limsup_n \frac{g+\mathrm{P}g+\ldots+\mathrm{P}^n g}{n}(x),$$

vérifie $f=g$ $\nu-$p.s. et $\mathrm{P}f\geqq f$. En posant $h=\lim_{n\to\infty}\uparrow \mathrm{P}^n f$, on obtient alors un élément de $\mathscr{H}$ égal ν-p.s. à g.

(1.6) Lemme. — Soit ν une mesure de probabilité P-invariante. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ν est extrémale;

(ii) tout élément de $\mathscr{H}$ est $\nu-$p.s. constant.

Preuve. — (i)$\Rightarrow$(ii) Soit h un élément de $\mathscr{H}$. De (1.2) il résulte que $\mathrm{P}(hf)=h\mathrm{P}f$ $\nu-$p.s., pour toute fonction borélienne bornée f sur E; par suite la mesure $h\nu$ est P-invariante. D'où le résultat.

(ii)$\Rightarrow$(i) Soit τ une mesure P-invariante positive telle que $\tau\leqq\nu$. Appelons h la dérivée de Radon-Nikodym de τ par rapport à ν; on choisit une version de h inférieure à 1. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int(\mathrm{P}h-h)^2(x)\,\nu(dx)&=\int(\mathrm{P}h)^2(x)\,\nu(dx)\\&\quad+\int h^2(x)\,\nu(dx)-2\int \mathrm{P}h(x)\,h(x)\,\nu(dx)\\&=\int(\mathrm{P}h)^2(x)\,\nu(dx)-\int h^2(x)\,\nu(dx)\end{aligned}$$

(car la mesure $\tau=h\nu$ est P-invariante)

$$=\int(\mathrm{P}h)^2(x)\,\nu(dx)-\int \mathrm{P}h^2(x)\,\nu(dx).$$

Comme $\mathrm{P}(h^2)\geqq(\mathrm{P}h)^2$, il s'ensuit que l'intégrale considérée est nulle; d'où $\mathrm{P}h=h$ $\nu-$p.s. D'après (1.5), il existe un élément g de $\mathscr{H}$ qui est $\nu-$p.s. égal à h. Sous (ii) les fonctions g et h sont donc ν-p.s. constantes. D'où le résultat. □

(B) Fonctions harmoniques et variables aléatoires invariantes

On désigne par $(\Omega=\mathrm{E}^{\mathbb{N}}, \mathscr{F}=\mathscr{B}(\Omega), (\mathrm{X}_n)_{n\geqq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in \mathrm{X}})$ la chaîne de Markov canonique sur E associée à P.

(1.7) Nous appelons θ l'opérateur de décalage sur l'espace produit Ω défini par : $\theta(\omega_0,\ldots,\omega_n,\ldots)=(\omega_1,\ldots,\omega_{n+1},\ldots)$. Nous désignons par $\mathscr{I}=\{\mathrm{A}\in\mathscr{F}:\theta^{-1}(\mathrm{A})=\mathrm{A}\}$ la tribu des boréliens θ-invariants de Ω. Une variable aléatoire Z est $\mathscr{I}$-mesurable si et seulement si $Z \circ \theta = Z$. Deux variables aléatoires θ-invariantes Z et Z' sont dites équivalentes si $\mathbb{P}_x[Z \neq Z'] = 0$, pour tout $x \in E$; nous notons $\mathscr{V}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires θ-invariantes.

Il existe entre $\mathscr{H}$ et $\mathscr{V}$ une correspondance biunivoque classique (*voir* par exemple [8], proposition V.2.4) que nous allons rappeler et préciser.

Pour tout entier naturel n, appelons $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : 0 \leqq k \leqq n\}$. Pour tous éléments x de E et h de $\mathscr{H}$ le processus $\{h(X_n) : n \geqq 0\}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x)$ est une martingale bornée relativement à la filtration $\{\mathscr{F}_n : n \geqq 0\}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x - p.s.$; la classe de la variable aléatoire $\lim_{n \to +\infty} h(X_n)$ nous donne alors un élément Z de $\mathscr{V}$ tel que:

$$\forall x \in E, \quad \forall n \geqq 0, \qquad h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}_x[Z].$$

Réciproquement si $Z \in \mathscr{V}$ et h est la fonction définie par $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$, nous avons (propriété de Markov),

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad h(X_n) = \mathbb{E}_{X_n}[Z] &= \mathbb{E}_x[Z \circ \theta^n \mid \mathscr{F}_n] \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.}, \\ &= \mathbb{E}_x[Z \mid \mathscr{F}_n] \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s. (invariance de Z)}; \end{aligned}$$

il s'ensuit d'une part que h appartient à $\mathscr{H}$ et d'autre part (théorie des martingales) que $\lim_{n \to +\infty} h(X_n)$ et Z appartiennent à la même classe de $\mathscr{V}$.

Cette correspondance permet de munir $\mathscr{H}$ d'une structure de C*-algèbre. Si h_1 et h_2 sont deux fonctions harmoniques, on définit leur produit $h_1 * h_2$ par:

$$h_1 * h_2(x) = \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} (h_1(X_n) h_2(X_n))] = \lim_{n \to +\infty} P^n(h_1 h_2)(x).$$

Via cette correspondance, le lemme (1.6) se traduit de la façon suivante:

(1.8) COROLLAIRE. — *Soit* ν *une mesure de probabilité* P-*invariante. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) ν *est extrémale*;

(ii) *le système dynamique* $(\Omega, \mathscr{F}, \theta, \mathbb{P}_\nu)$ *est ergodique* (*c'est-à-dire que la tribu* $\mathscr{I}$ *est* $\mathbb{P}_\nu - p.s.$ *triviale*).

Dans la suite le résultat élémentaire suivant jouera un rôle important.

(1.9) PROPOSITION. — *Soit* h *un élément de* $\mathscr{H}$, *pour tout entier* $r \geqq 1$ *et tout* $x \in E$, *nous avons*,

$$\sum_{n \geqq 0} \mathbb{E}_x\left[\int_E [h(y) - h(X_n)]^2 P^r(X_n, dy)\right] < +\infty.$$

Preuve. — Il suffit de voir que:

$$\mathbb{E}_x\left[\int_E [h(y)-h(X_n)]^2\, P^r(X_n, dy)\right]=\mathbb{E}_x[(h(X_{n+r}))^2]-\mathbb{E}_x[(h(X_n))^2].$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. □

(C) Fonctions harmoniques pour la chaîne espace-temps et variables aléatoires asymptotiques

(1.10) Dans cette section nous allons introduire la chaîne espace-temps associée à P. Considérons sur l'espace produit $E \times \mathbb{N}$ la probabilité de transition Q définie par:

$$QF(x, n)=\int F(y, n+1)\, P(x, dy), \qquad (x, n) \in E \times \mathbb{N}.$$

Nous notons $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions Q-harmoniques; c'est-à-dire des fonctions boréliennes bornées H sur $E \times \mathbb{N}$ vérifiant $QH=H$. Si $H \in \mathscr{H}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \geqq 0}$ sur E définie par: $h_n(.)=H(., n)$ est telle que $P h_{n+1}=h_n$, $\forall n \geqq 0$.

(1.11) Pour tout entier $n \geqq 0$, appelons $\mathscr{A}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : k \geqq n\}$. Nous désignons par $\mathscr{A}$ la tribu *asymptotique*; c'est-à-dire la tribu intersection des tribus $\mathscr{A}_n$. La tribu des événements θ-invariants est contenue dans la tribu asymptotique. Une variable aléatoire T est mesurable par rapport à $\mathscr{A}$ si et seulement si pour tout entier naturel n, il existe une variable aléatoire T_n telle que $T=T_n \circ \theta^n$; une telle variable aléatoire sera dite *asymptotique*. Si T est une variable asymptotique, l'expression $T \circ \theta^{-p}$ a un sens pour tout entier $p \geqq 1$, car T ne dépend pas des p premières coordonnées; nous écrirons donc $T_n=T \circ \theta^{-n}$. Deux variables aléatoires asymptotiques T et T′ sont dites équivalentes si

$$\forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{P}_x[T \circ \theta^n \neq T' \circ \theta^n]=0;$$

nous notons $\mathscr{W}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires asymptotiques.

(1.12) Il existe entre $\mathscr{H}$ et $\mathscr{W}$ une correspondance biunivoque classique (*voir* [10], ch. 6 prop. 2.3). Pour tout $(x, p) \in E \times \mathbb{N}$, le processus $(X_n, n+p)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x)$ est une chaîne de Markov sur $E \times \mathbb{N}$ relativement à la filtration $\{\mathscr{F}_n : n \geqq 0\}$, partant du point (x, p). Pour tout $H \in \mathscr{H}$ et pour tout $x \in E$, le processus $H(X_n, n)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x)$ est une martingale bornée relativement à la filtration $\{\mathscr{F}_n : n \geqq 0\}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x$-p.s.; la classe de la variable aléatoire asymptotique

$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(\mathrm{X}_n, n)$ nous donne alors un élément T de $\mathscr{W}$ tel que:

$$\forall (x,p) \in \mathrm{E} \times \mathbb{N}, \quad \forall n \geqq 0, \qquad \mathrm{H}(x,p) = \mathbb{E}_x[\mathrm{H}(\mathrm{X}_n, n+p)] = \mathbb{E}_x[\mathrm{T} \circ \theta^{-p}].$$

Réciproquement si $\mathrm{T} \in \mathscr{W}$ et H est la fonction définie par $\mathrm{H}(x,p) = \mathbb{E}_x[\mathrm{T} \circ \theta^{-p}]$, nous avons (propriété de Markov),

$$\forall (x,p) \in \mathrm{E} \times \mathbb{N},$$
$$\mathrm{H}(\mathrm{X}_n, n+p) = \mathbb{E}_{\mathrm{X}_n}[\mathrm{T} \circ \theta^{-(n+p)}] = \mathbb{E}_x[\mathrm{T} \circ \theta^{-p} \mid \mathscr{F}_n] \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

Il s'ensuit que H appartient à $\mathscr{H}$ et, $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(\mathrm{X}_n, n)$ et T appartiennent à la même classe de $\mathscr{W}$.

Cette correspondance permet de munir $\mathscr{H}$ d'une structure de C*-algèbre. Si H_1 et H_2 sont deux fonctions Q-harmoniques, on définit leur produit $\mathrm{H}_1 * \mathrm{H}_2$ par:

$$\mathrm{H}_1 * \mathrm{H}_2(x,p) = \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} (\mathrm{H}_1(\mathrm{X}_n, n+p)\, \mathrm{H}_2(\mathrm{X}_n, n+p))].$$

(1.13) Pour les fonctions Q-harmoniques nous avons un résultat analogue à la proposition (1.9). En particulier, pour tout élément H de $\mathscr{H}$ et pour tout entier naturel $r \geqq 1$, la suite

$$\left(\int_{\mathrm{E}} (\mathrm{H}(y, r+n) - \mathrm{H}(\mathrm{X}_n, n))^2\, \mathrm{P}^r(\mathrm{X}_n, dy)\right)_{n \geqq 0}$$

converge vers zéro, $\mathbb{P}_x - \text{p.s.}$, $\forall x \in \mathrm{E}$.

(D) Fonctions propres associées à des valeurs propres de module 1

On appelle $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Pour tout élément λ de $\mathbb{U}$, on note $\mathscr{H}_\lambda$ l'espace des fonctions boréliennes bornées f sur X vérifiant $\mathrm{P} f = \lambda f$. On appelle $\mathscr{P}$ la réunion des $\mathscr{H}_\lambda$.

(1.14) Nous allons voir que $\mathscr{P}$ se plonge dans la C*-algèbre $\mathscr{H}$. Si $h \in \mathscr{H}_\lambda$, la fonction $\mathrm{H}(x,n) = \lambda^{-n} h(x)$ appartient à $\mathscr{H}$. Pour tout élément x de E, le processus $\{\lambda^{-n} h(\mathrm{X}_n) : n \geqq 0\}$ converge $\mathbb{P}_x - \text{p.s.}$ et

$$h(x) = \mathbb{E}_x[\lambda^{-n} h(\mathrm{X}_n)] = \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} (\lambda^{-n} h(\mathrm{X}_n))].$$

Notons au passage qu'il résulte que le processus $\{|h(\mathrm{X}_n)| : n \geqq 0\}$ converge aussi $\mathbb{P}_x - \text{p.s.}$, $\forall x \in \mathrm{E}$.

Soient $h_1 \in \mathscr{H}_\lambda$ et $h_2 \in \mathscr{H}_\mu$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{U}$. Le produit $\mathrm{H}_1 * \mathrm{H}_2$ des éléments de $\mathscr{H}$ correspondants à h_1 et h_2 s'écrit: $\mathrm{H}_1 * \mathrm{H}_2(x,n) = (\lambda\mu)^{-n} h(x)$; où h est un élément de $\mathscr{H}_{\lambda\mu}$ que nous noterons $h_1 * h_2$.

(E) Hypothèses

(1.15) Dans la suite, nous utiliserons les hypothèses suivantes :

(H0) E est compact et P opère sur C(E);

(H1) E est compact et pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} P^k f : n \geqq 0\right\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans C(E).

(H2) E est compact et pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{P^n f : n \geqq 0\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans C(E).

On montre facilement le lemme suivant :

(1.16) LEMME. — *Sous l'hypothèse* (H0) :

(i) *si* $x \in \operatorname{Supp} P(u, .)$ *et* $y \in \operatorname{Supp} P^r(x, .)$, *alors* $y \in \operatorname{Supp} P^{r+1}(u, .)$;

(ii) *si* $x \in \operatorname{Supp} P(u, .)$ *et* $y \in \operatorname{Supp} G(x, .)$, *alors* $y \in \operatorname{Supp} G(u, .)$.

2. FONCTIONS HARMONIQUES CONTINUES

(A) Fonctions harmoniques continues sous (H0)

On suppose que l'espace E est compact et que P opère sur C(E); c'est-à-dire que $P f \in C(E)$ si $f \in C(E)$. On note $\mathscr{H}_c$ le sous-espace fermé de $\mathscr{H}$ constitué par les éléments continus. On se propose de donner une description de $\mathscr{H}_c$.

(2.1) L'espace $\mathscr{H}_c$ étant séparable, d'après (1.7) et (1.9), il existe un sous-ensemble mesurable Ω_0 de Ω, θ-invariant, de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$, tel que pour tous éléments h de $\mathscr{H}_c$, ω de Ω_0 et r de $\mathbb{N}^*$:

(i) la suite $(h(X_n(\omega)))_{n \geqq 0}$ converge;

(ii) la suite $\left(\int_E [h(x) - h(X_n(\omega))]^2 P^r(X_n(\omega), dx)\right)_{n \geqq 0}$ converge vers zéro.

Soient ω un élément de Ω_0 et $u = \lim_{n \to +\infty} X_{\varphi(n)}(\omega)$ une valeur d'adhérence de la suite $(X_n(\omega))_{n \geqq 0}$. Puisque l'opérateur P respecte C(E), il vient : $\int_E [h(x) - h(u)]^2 P^r(u, dx) = 0$. Autrement dit, tout élément h de $\mathscr{H}_c$ est constant et égal à $h(u)$ sur $\operatorname{Supp} G(u, .)$.

(2.2) *Classes ergodiques.* — Posons :

$$F = \{u \in E : \forall h \in \mathscr{H}_c, \forall x \in \operatorname{Supp} G(u, .), h(x) = h(u)\};$$

F est un sous-ensemble compact de E. Du lemme (1.16), il résulte que F est *absorbant* (c'est-à-dire que $P(u, F) = 1$, $\forall u \in F$). Deux éléments u, v de F sont dits équivalents si $h(u) = h(v)$, $\forall h \in \mathscr{H}_c$. La classe d'équivalence d'un élément de F est un sous-ensemble compact absorbant de F. On désigne par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de ces classes d'équivalences que l'on munit de la distance de Hausdorff des compacts de E; $\mathfrak{B}$ est un espace métrique compact. [Si A est un compact de E, on pose: pour tout $x \in E$, $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ et pour tout $r > 0$, $V_r(A) = \{y : d(y, A) < r\}$. La distance de Hausdorff de deux compacts A et B de E est définie par: $d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\}$.]

(2.3) *Représentation intégrale des fonctions* P-*harmoniques*. — Soit ω un élément de Ω_0. Nous avons vu que toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$ appartiennent à F, mais puisque, pour tout $h \in \mathscr{H}_c$, la suite $(h(X_n(\omega)))_{n \geq 0}$ converge, ces valeurs d'adhérences appartiennent à une même classe de $\mathfrak{B}$. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega_0$, il existe une classe $\sigma(\omega)$ de $\mathfrak{B}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} d(X_n(\omega), \sigma(\omega)) = 0$.

L'application σ de Ω_0 dans $\mathfrak{B}$ ainsi définie, est $\mathscr{F}$-mesurable car l'image réciproque par σ de toute boule fermée B de $\mathfrak{B}$ s'écrit $\{\omega \in \Omega : \limsup_n d(X_n(\omega), K) = 0\}$, où K est le compact $\bigcup_{\gamma \in B} \gamma$ de E. Nous prolongeons σ à tout Ω en lui donnant une valeur dans $\mathfrak{B}$ arbitraire sur le complémentaire de Ω_0, qui est aussi θ-invariant. Nous obtenons ainsi une application $\mathscr{F}$-mesurable σ de Ω dans $\mathfrak{B}$ vérifiant $\sigma \circ \theta = \sigma$. Pour tout $x \in E$, appelons μ_x l'image de la probabilité $\mathbb{P}_x$ par cette application σ. La famille de mesures de probabilités $\{\mu_x\}_{x \in E}$ sur $\mathfrak{B}$ vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\forall \gamma_0 \in \mathfrak{B}$, $\forall x \in \gamma_0$, μ_x est la mesure de Dirac en γ_0;

(ii) $\forall x \in E$, $\int_E \mu_u P(x, du) = \mu_x$.

Pour tout élément h de $\mathscr{H}_c$, notons $\hat{h}(\gamma)$ la valeur de h sur la classe γ de $\mathfrak{B}$, nous avons

$$h(x) = \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} h(X_n)] = \mathbb{E}_x[\hat{h}(\sigma(.))] = \int_{\mathfrak{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma).$$

D'après la construction même de l'espace $\mathfrak{B}$, l'ensemble des fonctions continues $\{\hat{h} : h \in \mathscr{H}_c\}$ sépare les points de $\mathfrak{B}$ et contient les fonctions constantes. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'algèbre engendrée par ces fonctions est dense dans $C(\mathfrak{B})$.

Nous venons de montrer que la correspondance biunivoque définie en (1.7) envoie la sous-algèbre fermée $\mathrm{Alg}(\mathscr{H}_c)$ de $\mathscr{H}$ engendrée par $\mathscr{H}_c$, sur la sous-algèbre $\mathscr{S}\mathscr{V}$ de $\mathscr{V}$ formée par les classes des variables aléatoires invariantes $\{f \circ \sigma : f \in C(\mathfrak{B})\}$. Les normes uniformes de h sur E et $\hat{h}$ sur $\mathfrak{B}$

sont égales; l'application $h \in \mathrm{Alg}(\mathscr{H}_c) \to \hat{h} \in \mathrm{C}(\mathfrak{B})$ est donc une isométrie d'algèbres de Banach.

(2.4) *Remarque.* — Nous disons qu'une suite $(x_n)_{n \geqq 0}$ d'éléments de E converge vers l'élément γ de $\mathfrak{B}$ si la suite $(x_n)_{n \geqq 0}$ a toutes ses valeurs d'adhérence dans γ; c'est-à-dire $d(x_n, \gamma) \to 0$. L'espace $\mathfrak{B}$ apparaît alors comme une frontière de E et la formule

$$(*) \qquad h(x) = \int_{\mathfrak{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma)$$

comme une formule de Poisson. A tout élément h de $\mathscr{H}_c$, nous avons associé une fonction continue $\hat{h}$ sur la frontière $\mathfrak{B}$ de E, qui intégrée par le « noyau de Poisson » μ_x permet de retrouver h.

(B) Fonctions harmoniques continues sous (H1)

On suppose que, pour tout $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E})$, la famille de fonctions $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^k f : n \geqq 0 \right\}$ est équicontinue.

(2.5) Sous l'hypothèse ci-dessus, le produit [au sens de (1.7)] de deux éléments de $\mathscr{H}_c$ est un élément de $\mathscr{H}_c$. En effet si pour un élément f de $\mathrm{C}(\mathrm{E})$, la suite $\{\mathrm{P}^n f\}_{n \geqq 0}$ converge simplement alors en écrivant

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}^n f = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}^k f,$$

on voit que cette limite est nécessairement continue.

Il s'ensuit que la sous-algèbre fermée $\mathrm{Alg}(\mathscr{H}_c)$ de $\mathscr{H}$ engendrée par $\mathscr{H}_c$ n'est autre que $\mathscr{H}_c$. D'où le résultat :

(2.6) THÉORÈME. — *Sous l'hypothèse* (H1), $\mathscr{H}_c$ *est une sous-algèbre de Banach de* $\mathscr{H}$ *isométrique à l'algèbre* $\mathrm{C}(\mathfrak{B})$, *via la formule* $(*)$ *de* (2.4).

(2.7) *Remarque.* — Soit $\gamma_0 \in \mathfrak{B}$. Considérons une suite de fonctions continues sur $\mathfrak{B}$ qui décroît vers l'indicatrice du singleton $\{\gamma_0\}$. La formule $(*)$, montre que la fonction

$$x \to \mu_x(\{\gamma_0\}) = \mathbb{P}_x[\lim_{n \to +\infty} d(\mathrm{X}_n, \gamma_0) = 0],$$

est une limite décroissante de fonctions P-harmoniques continues. On obtient donc une fonction P-harmonique semi-continue supérieurement qui vaut 1 sur la classe ergodique γ_0 et 0 sur les autres classes ergodiques. De plus l'isométrie nous assure que cette fonction est continue si et seulement si la fonction indicatrice du singleton $\{\gamma_0\}$ est continue ou encore si et seulement si γ_0 est un point isolé de $\mathfrak{B}$.

On en déduit que l'espace $\mathscr{H}_c$ est de dimension finie si et seulement si l'ensemble $\mathfrak{B}$ est fini ou encore si et seulement les fonctions $x \to \mu_x(\{\gamma\})$, pour $\gamma \in \mathfrak{B}$, sont continues. Ces fonctions constituent alors une base de $\mathscr{H}_c$.

3. MESURES INVARIANTES ET CONVERGENCE EN MOYENNE DE CESARO DES SUITES $(f(X_n))_{n \geqq 1}, f \in C(E)$

(3.1) Plaçons-nous sous l'hypothèse (H0). De la section (1.2), il résulte que le support de toute mesure de probabilité P-invariante ν est contenu dans le compact absorbant F. Si ν est extrémale, d'après (1.6) les éléments de $\mathscr{H}_c$ sont constants sur le support de ν; la mesure ν est donc nécessairement portée par un seul élément de $\mathfrak{B}$.

Sous l'hypothèse (H1), les mesures P-invariantes sont décrites par la proposition suivante.

(3.2) PROPOSITION. — *On suppose que, pour tout* $f \in C(E)$, *la famille de fonctions* $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} P^k f : n \geqq 0 \right\}$ *est équicontinue.*

Tout compact absorbant γ *de* $\mathfrak{B}$ *porte une unique mesure de probabilité* P-*invariante* ν_γ. *Toute mesure de probabilité* P-*invariante* λ *s'écrit* $\int_{\mathfrak{B}} \nu_\gamma \, \mu_\lambda(d\gamma)$ *où* $\mu_\lambda = \int_E \mu_x \, \lambda(dx)$.

Pour toute fonction continue f *sur* E, *la suite de fonctions* $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} P^k f(.) \right\}_{n \geqq 1}$ *converge uniformément sur* E *vers* $\int_{\mathfrak{B}} \nu_\gamma(f) \, \mu_.(d\gamma)$.

Preuve. — Pour tout $f \in C(E)$, posons $M_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k f$. Soit $\varphi(n)$ une suite strictement croissante d'entiers telle que, pour tout $f \in C(E)$, la suite de fonctions $\{M_{\varphi(n)}(f)\}_{n \geqq 1}$ converge uniformément sur E vers une fonction notée h_f. La fonction h_f appartient à $\mathscr{H}_c$ et s'écrit donc $h_f(x) = \int_{\mathfrak{B}} \hat{h}_f(\gamma) \, \mu_x(d\gamma)$. Il est clair que pour tout $\gamma \in \mathfrak{B}$, l'application $f \to \hat{h}_f(\gamma)$ définit une mesure de probabilité P-invariante ν_γ sur E. Si ν est une quelconque mesure de probabilité P-invariante sur E, nous avons:

$$\nu(f) = \nu(M_{\varphi(n)}(f)) = \int_E \int_{\mathfrak{B}} \nu_\gamma(f) \, \mu_x(d\gamma) \, \nu(dx).$$

En restriction à un compact absorbant γ de $\mathfrak{B}$, la suite de fonctions $\{M_{\varphi(n)}(f)\}_{n \geqq 1}$ converge uniformément vers $\nu_\gamma(f)$ et ν_γ est l'unique mesure de probabilité P-invariante portée par le compact absorbant γ.

On en déduit que les fonctions limites h_f ne dépendent pas de la suite $\{\varphi(n)\}_{n \geqq 0}$ choisie. D'où la convergence des moyennes. □

La proposition suivante nous donne alors le comportement en moyenne de Cesaro des suites $(f(X_n))_{n \geqq 1}$, $f \in C(E)$.

(3.3) PROPOSITION. — *On se place sous l'hypothèse* (H1). *Pour toute fonction continue f sur* E, *la suite de variables aléatoires* $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k)\right\}_{n \geqq 1}$ *converge*, $\mathbb{P}_x$ – p. s., $\forall x \in E$, *vers la variable aléatoire* $\nu_{\sigma(.)}(f)$.

Preuve. — Pour $f \in C(E)$, on vérifie aisément que, pour tout $x \in E$, le processus $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{(f(X_k) - P f(X_{k-1}))}{k} : n \geqq 1\right\}$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_x)$; ce processus converge donc, $\mathbb{P}_x$ – p. s. Il s'ensuit (lemme de Kronecker) que la suite de variables aléatoires $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (f(X_k) - P f(X_{k-1}))\right\}_{n \geqq 1}$ converge, $\mathbb{P}_x$ – p. s. $\forall x \in E$, vers zéro.

Considérons le sous-ensemble Ω_0 de Ω de (2.1) et appelons Ω_1 l'ensemble des éléments ω de Ω_0 pour lesquels la convergence précédente a lieu pour tous les éléments f de C(E); l'espace C(E) étant séparable, Ω_1 est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$.

Soient $\omega \in \Omega_1$ et τ_ω une valeur d'adhérence, pour la topologie de la convergence étroite, de la suite de mesures de probabilités $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{X_k(\omega)}\right\}_{n \geqq 1}$. D'après ce qui précède, τ_ω est P-invariante. Puisque $d(X_n(\omega), \sigma(\omega)) \to 0$, pour toute fonction continue f sur E égale à 1 sur $\sigma(\omega)$, nous avons $\tau_\omega(f) = 1$; par suite τ_ω est portée par le compact absorbant $\sigma(\omega)$. On en déduit que $\tau_\omega = \nu_{\sigma(\omega)}$. D'où le résultat. □

4. FONCTIONS PROPRES CONTINUES SOUS (H1)

On note $\mathscr{H}_{\lambda, c}$ le sous-espace de $\mathscr{H}_\lambda$ formé des fonctions continues. On se propose de donner une description des espaces $\mathscr{H}_{\lambda, c}$. La réunion des $\mathscr{H}_{\lambda, c}$ est un fermé de C(E) que nous noterons $\mathscr{P}_c$.

(4.1) D'après les sections (1.13) et (1.14), il existe un sous-ensemble mesurable Ω_1 de Ω, θ-invariant, de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$, $\Omega_1 \subset \Omega_0$ [*cf.* (2.1)], tel que, pour tout $\omega \in \Omega_1$,

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{U}$, $\forall h \in \mathscr{H}_{\lambda, c}$, $\lim_{n \to +\infty} (\lambda^{-n} h(X_n(\omega)))$ existe;

(ii) la suite

$$\left(\int_E [\lambda^{-(n+r)} h(y) - \lambda^{-n} h(X_n(\omega))]^2 P^r(X_n(\omega), dy)\right)_{n \geqq 0}$$

converge vers zéro.

Soit ω un élément de Ω_1 et $u = \lim_{n \to +\infty} X_{\varphi(n)}(\omega)$ une valeur d'adhérence de la suite $(X_n(\omega))_{n \geqq 0}$, il s'ensuit que :

$$\int_E [\lambda^{-r} h(y) - h(u)]^2 P^r(u, dy) = 0.$$

Autrement dit nous avons : $\forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u, .)$, $\lambda^{-r} h(x) = h(u)$.

(4.2) Considérons le sous-ensemble compact D de E défini par :

$$D = \{ u \in E : \forall \lambda \in \mathbb{U}, \forall h \in \mathscr{H}_{\lambda, c}, \forall r \geqq 1, \forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u, .), h(x) = \lambda^r h(u) \}.$$

Ce compact D est contenu dans le compact F du paragraphe 2 et, d'après le lemme (1.16), il est absorbant. Comme D contient toutes les valeurs d'adhérence des suites $\{ (X_n(\omega))_{n \geqq 0} : \omega \in \Omega_1 \}$, tout ce qui a été fait dans le paragraphe 2 peut se faire en remplaçant F par D. Dans la suite, nous supposerons que cette substitution a été faite et donc $D = F$.

(4.3) Soient $h_1 \in \mathscr{H}_{\lambda, c}$ et $h_2 \in \mathscr{H}_{\mu, c}$, avec λ, $\mu \in \mathbb{U}$. Nous avons $h_1 * h_2(x) = \lim_{n \to +\infty} (\lambda\mu)^{-n} P^n(h_1 h_2)(x)$. Pour tout $u \in F$, il vient $h_1 * h_2(u) = h_1(u) h_2(u)$. Autrement dit en restriction à F, le produit de deux éléments de $\mathscr{P}_c$ correspond au produit ordinaire.

(4.4) Lemme. — *Tout élément de $\mathscr{P}_c$ est de module constant sur les fermés absorbants de $\mathfrak{B}$.*

Si h est un élément de $\mathscr{H}_{\lambda, c}$, $\lambda \in \mathbb{U}$, non nul sur un fermé absorbant γ de $\mathfrak{B}$, alors pour tout élément f de $\mathscr{H}_{\lambda, c}$, la fonction $\frac{f}{h}$ est constante sur γ.

Preuve. — Soit $h \in \mathscr{H}_{\lambda, c}$. Nous savons que :

$$(**) \qquad \forall u \in F, \forall r \geqq 1, \forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u, .), h(x) = \lambda^r h(u).$$

Pour tout $u \in F$, la fonction $|h|$ est donc constante sur $\operatorname{Supp} G(u, .)$.

La formule $f(x) = \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} |h(X_n)|]$ définit une fonction P-harmonique continue telle que $\forall u \in F$, $f(u) = |h(u)|$. D'où la première assertion. On peut aussi remarquer que si deux éléments u, v de F appartiennent au même fermé γ de $\mathfrak{B}$, les supports des potentiels correspondants ne peuvent être disjoints à cause de l'unicité de ν_γ.

La seconde assertion se démontre de la même façon. □

(4.5) *Classes cycliques.* — Deux éléments u, v de F sont dits équivalents si $h(u)=h(v)$, $\forall h \in \mathscr{P}_c$. La classe d'équivalence d'un élément u de F est un sous-ensemble compact de F. On désigne par $\mathfrak{C}$ l'ensemble de ces classes d'équivalences que l'on munit de la distance de Hausdorff des compacts de E; $\mathfrak{C}$ est un espace métrique compact. Cette partition de F est obtenue en découpant chaque classe γ de $\mathfrak{B}$.

Soit $\{h_n : n \geqq 0\}$ une suite de fonctions dense dans $\mathscr{P}_c$ pour la norme de la convergence uniforme. On définit une distance δ sur $\mathfrak{C}$, en posant

$$\delta(c, c') = \sum_{k=0} \frac{1}{2^k} \frac{|h_k(c) - h_k(c')|}{\|h_k\|_\infty}.$$

La topologie associée par cette distance est moins fine que celle associée par la distance de Hausdorff. L'espace métrique $(\mathfrak{C}, \delta)$ est encore compact.

(4.6) L'opérateur de transition P induit une isométrie τ sur $(\mathfrak{C}, \delta)$. [En effet si c est un élément de $\mathfrak{C}$, tous les supports $\operatorname{Supp} P(u, .)$, pour $u \in c$, sont contenus dans un unique élément $\tau . c$ de $\mathfrak{C}$. Des relations (**) de (4.4) il résulte que $\delta(\tau . c, \tau . c') = \delta(c, c')$].

Considérons le groupe compact des isométries de $(\mathfrak{C}, \delta)$ et appelons G le sous-groupe fermé engendré par l'isométrie τ. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{B}$, notons $\mathfrak{C}_\gamma$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{C}$ contenus dans γ; ces ensembles $\mathfrak{C}_\gamma$ sont stables par τ.

(4.7) LEMME. — *Le groupe* G *opère transitivement sur chaque* $\mathfrak{C}_\gamma$, $\gamma \in \mathfrak{B}$. *Chaque élément c de* $\mathfrak{C}_\gamma$ *est d'intersection non vide avec le support de* ν_γ.

Preuve. — Pour tout élément c de $\mathfrak{C}_\gamma$, nous savons que l'adhérence de la réunion des $\tau^n . c$, $n \geqq 0$, qui est un fermé absorbant de γ, contient nécessairement le support de l'unique mesure de probabilité P-invariante ν_γ portée par γ. Soit c_0 un élément de $\mathfrak{C}_\gamma$ d'intersection non vide avec le support de ν_γ; il existe une suite d'entiers $\{\psi(n)\}$ telles que $\tau^{\psi(n)} . c \to c_0$. Soit g une valeur d'adhérence dans G de la suite $\{\tau^{\psi(n)}\}$; il vient $c = g . c_0$. D'où le résultat. □

(4.8) *Description des fonctions propres en restriction à une classe ergodique.* — Fixons un élément γ de $\mathfrak{B}$ et *travaillons en restriction à* γ. D'après le lemme (4.4), chacun des espaces $\mathscr{H}_{\lambda, c}$ est, soit réduit à zéro, soit de dimension 1. Posons $\mathbb{V}_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{U} : \mathscr{H}_{\lambda, c} \neq 0\}$. Choisissons un élément u_γ de γ, pour chaque $\lambda \in \mathbb{V}_\gamma$, appelons φ_λ^γ l'unique élément de $\mathscr{H}_{\lambda, c}$ vérifiant $\varphi_\lambda^\gamma(u_\gamma) = 1$. Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{V}_\gamma$: si $\lambda\mu \in \mathbb{V}_\gamma$, nous avons $\varphi_\lambda^\gamma \varphi_\mu^\gamma = \varphi_{\lambda\mu}^\gamma$; sinon la restriction de $\varphi_\lambda^\gamma \varphi_\mu^\gamma$ à γ coïncide avec celle de l'élément $\varphi_\lambda^\gamma * \varphi_\mu^\gamma$ de $\mathscr{H}_{\lambda\mu}$ qui est nécessairement non continu et que nous noterons $\varphi_{\lambda\mu}^\gamma$. Nous appelons H le groupe de fonctions propres ainsi obtenu. Puisque $P(\varphi_\lambda^\gamma \varphi_\mu^\gamma) = \lambda\mu \varphi_\lambda^\gamma \varphi_\mu^\gamma$ sur H, il s'ensuit que les fonctions φ_λ^γ sont orthogonales dans l'espace de Hilbert séparable $\mathbb{L}^2(\gamma, \nu_\gamma)$. On en déduit que H est dénombrable. Sous (H2), le produit, au sens de (1.7), de deux éléments de $\mathscr{P}_c$ appartient encore à $\mathscr{P}_c$; $\mathbb{V}_\gamma$ est alors un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Soit c_0 un élément fixé de $\mathfrak{C}_\gamma$. Appelons Γ le stabilisateur de c_0 dans G. L'espace $\mathfrak{C}_\gamma$ s'identifie au groupe quotient G/Γ. Pour tout $\lambda \in \mathbb{V}_\gamma$, l'élément φ_λ^γ de H s'identifie à un caractère χ_λ de G/Γ tel que $\varphi_\lambda^\gamma(g.c_0)=\chi_\lambda(g)\,\varphi_\lambda^\gamma(c_0)$ et $\chi_\lambda(\tau)=\lambda$. Le groupe H s'identifie alors au groupe dual de G/Γ. [Désignons par dg la mesure de Haar normalisée du groupe compact abélien G/Γ. Pour tout caractère χ, non identiquement égal à 1, nous avons $\int_G \chi(g)\,dg=0$; d'où l'on déduit que deux caractères distincts sont orthogonaux dans $\mathbb{L}^2(G/\Gamma, dg)$. D'autre part, les caractères $\{\chi_\lambda : \lambda \in \mathbb{V}_\gamma\}$ séparant les points de G/Γ, l'algèbre engendrée par ces fonctions est dense dans $C(G/\Gamma)$. Il est alors clair que tout caractère χ de G/Γ appartient au groupe engendré par les caractères χ_λ, $\lambda \in \mathbb{V}_\gamma$.]

En résumé, $\mathfrak{C}_\gamma$ s'identifie à un groupe compact et, en restriction à γ, tout élément de $\mathscr{P}_c$ s'identifie à un multiple d'un caractère de ce groupe compact.

(4.9) *Représentation intégrale des fonctions propres.* — Puisque tout semi-groupe compact d'un groupe topologique est un groupe compact, il existe une suite $(\psi(n))_{n\geqq 0}$ d'entiers naturels tels que $\tau^{\psi(n)} \to e$, élément neutre de G. Reprenons les notations de (4.1). Pour tous $h \in \mathscr{P}_c$ et $\omega \in \Omega_1$, la suite de variables aléatoires $(h(X_{\psi(n)}))_{n\geqq 0}$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s., $\forall x \in E$. Il s'ensuit que pour tout $\omega \in \Omega_1$, les valeurs d'adhérence de la suite $(X_{\psi(n)}(\omega))_{n\geqq 0}$ appartiennent à une même classe « cyclique » $\xi(\omega)$ de $\mathfrak{C}$ contenue dans la classe « ergodique » $\sigma(\omega)$ de $\mathfrak{B}$. Par prolongement trivial à tout Ω, on définit ainsi une application mesurable ξ de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans $(\mathfrak{C}, \delta)$ telle que : $\xi\circ\theta=\tau\circ\xi$ $\mathbb{P}_x$-p.s., $\forall x \in E$.

Pour tout $x \in E$, appelons ρ_x l'image de $\mathbb{P}_x$ par l'application ξ. La famille de probabilités $\{\rho_x : x \in E\}$ sur $\mathfrak{C}$, jouit des propriétés suivantes :

(i) *pour tout* $c_0 \in \mathfrak{C}$ *et tout* $x \in c_0$, ρ_x *est la mesure de Dirac en* c_0;

(ii) *pour tout* $x \in E$, $\int_E \rho_u\, P(x, du)=\tau(\rho_x)$.

Pour tout élément h de $\mathscr{P}_c$, notons $\hat{h}(c)$ la valeur de h sur la classe cyclique c de $\mathfrak{C}$; nous avons

$$h(x)=\mathbb{E}_x[\lim_{n\to+\infty} h(X_{\psi(n)})]=\mathbb{E}_x[\hat{h}\circ\xi]=\int_{\mathfrak{C}} \hat{h}(c)\,\rho_x(dc).$$

La fonction $\hat{h}$ possède la propriété suivante :

$$\forall c \in \mathfrak{C},\quad \hat{h}(\tau.c)=\chi(\tau)\,\hat{h}(c);$$

pour un certain caractère χ du groupe G.

L'ensemble $\mathbb{V}=\{\lambda\in\mathbb{U}:\mathscr{H}_{\lambda,c}\neq 0\}=\bigcup_{\gamma\in\mathfrak{B}}\mathbb{V}_\gamma$ est dénombrable, car le dual du groupe abélien compact G est dénombrable. [Les caractères de G sont orthogonaux dans $\mathbb{L}^2(G, dg)$].

5. CONVERGENCE EN MOYENNES D'ABEL, SOUS (H2), DES SUITES $(f(X_n))_{n\geqq 1}$, $f\in C(E)$

On suppose que pour tout $f\in E$, la famille de fonctions $\{P^n f: n\geqq 0\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans C(E).

(5.1) PROPOSITION. — *Pour tout élément f de* C(E) *et tout* $\lambda\in\mathbb{U}$, *la suite de fonctions* $(M_n^\lambda(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}P^k f)_{n\geqq 1}$ *converge uniformément sur* E *vers* $\int_{\mathfrak{C}}\nu_{\gamma(c)}(f\,\overline{\varphi_\lambda^{\gamma(c)}})\,\varphi_\lambda^{\gamma(c)}(c)\,\rho_x(dc)$; *où* $\gamma(c)$ *désigne la classe ergodique qui contient la classe cyclique* c.

Preuve. — Soit $(\varphi(n))_{n\geqq 0}$ une suite d'entiers telle que la suite de fonctions $(M_{\varphi(n)}^\lambda(f))_{n\geqq 0}$, converge uniformément pour tout élément f de C(E) vers une fonction notée h_f. La fonction h_f appartient nécessairement à $\mathscr{H}_{\lambda,c}$ et s'écrit donc $\int_{\mathfrak{C}}\hat{h}_f(c)\,\rho_x(dc)$; où $\hat{h}_f$ est une fonction continue sur $\mathfrak{C}$ telle que $\forall c\in\mathfrak{C}$, $\hat{h}_f(\tau.c)=\lambda\hat{h}_f(c)$.

Pour tout élément h de $\mathscr{H}_{\lambda,c}$ nous avons, sur F,

$$M_{\varphi(n)}(f\bar{h})=\bar{h}M_{\varphi(n)}^\lambda(f);$$

et par suite (proposition (3.2)), $\forall x\in F$, $\bar{h}(x)\,h_f(x)=\int_{\mathfrak{B}}\nu_\gamma(f\bar{h})\,\mu_x(d\gamma)$. Pour tous éléments $\gamma\in\mathfrak{B}$, $c\in\mathfrak{C}_\gamma$ et $x\in c$, tels que $h(x)\neq 0$, il vient alors

$$\hat{h}_f(c)=h_f(x)=\nu_\gamma(f\bar{h})(\bar{h}(x))^{-1};$$

ou encore avec les notations de (4.8), $\hat{h}_f(c)=\nu_\gamma(f\,\overline{\varphi_\lambda^\gamma})\,\varphi_\lambda^\gamma$.

La fonction limite h_f ne dépend donc pas de la suite $(\varphi(n))_{n\geqq 0}$; d'où le résultat. □

(5.2) PROPOSITION. — *Pour toute fonction continue f sur* E, *la suite de variables aléatoires* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}f(X_k)\right)_{n\geqq 1}$ *converge*, $\mathbb{P}_x$ — p.s., $\forall x\in E$, *vers la variable aléatoire* $\nu_{\sigma(.)}(f\,\overline{\varphi_\lambda^{\sigma(.)}})\,\varphi_\lambda^{\sigma(.)}(\xi(.))$.

Preuve. — En reprenant l'argument utilisé en (3.3), on montre qu'il existe un sous-ensemble mesurable Ω_2 de Ω, de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 $\forall x\in E$, tel que pour tout $\omega \in \Omega_2$, toute valeur d'adhérence vague τ_ω de la suite de mesures $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} \varepsilon_{X_k(\omega)} \right\}_{n \geq 0}$ est une mesure $(\lambda^{-1} P)$-invariante, portée par $\sigma(\omega)$. D'après la proposition (5.1), nous avons alors $\tau_\omega(f) = \nu_{\sigma(\omega)}(f \overline{\varphi_\lambda^{\sigma(\omega)}}) \tau_\omega(\varphi_\lambda^{\sigma(\omega)})$. Or, pour tout $h \in \mathscr{H}_{\lambda, c}$ et tout $x \in E$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} h(X_k) = \lim_{n \to +\infty} \lambda^{-n} h(X_n) = \lim_{n \to +\infty} h(X_{\psi(n)}) = h(\xi) \quad \mathbb{P}_x - \text{p. s.}$$

D'où le résultat. □

6. FONCTIONS HARMONIQUES POUR LA CHAÎNE ESPACE-TEMPS ET DÉCOMPOSITION SPECTRALE SOUS (H2)

On suppose que pour tout $f \in C(E)$, la famille de fonctions $\{P^n f : n \geq 0\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans $C(E)$. On note $\mathscr{H}_c$ l'espace des fonctions Q-harmoniques bornées H telles que la famille de fonctions $\{h_n = H(., n) : n \geq 0\}$ soit équicontinue [*voir* (1.10)]. En posant, pour $n < 0$, $h_n = P^{-n} h_0$, on obtient une famille de fonctions équicontinue, indexée par $\mathbb{Z}$.

On désigne par $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{Z})$ l'espace des suites à valeurs complexes, indexées par $\mathbb{Z}$, muni de la norme uniforme. On appelle ∂ l'opérateur de décalage; si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ alors $\partial u = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

(6.1) Proposition. — *Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{Z})$ tel que l'orbite sous ∂ soit relativement compacte (on dit que u est une suite presque périodique). Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *la suite u est la suite nulle;*

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{U}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k} u_k = 0.$

Preuve. — Ce résultat est classique. Nous rappelons brièvement les idées de démonstration.

Appelons X l'adhérence dans $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{Z})$ de l'orbite de la suite u sous ∂. X est un espace compact et ∂ est une isométrie de X. Nous notons K le sous-groupe abélien compact du groupe des isométries de X engendré par ∂. Si f désigne l'application qui à la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de X associe u_0, il vient: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = f(\partial^n . u)$.

Désignons par m_K la mesure de Haar normalisée de K et par $\hat{K}$ le groupe des caractères de K. Le groupe $\hat{K}$ est dénombrable et tout élément h de $\mathbb{L}^2(K, m_K)$ s'écrit comme somme de sa série de Fourier (*cf.* par exemple

[12]):

$$h(.)=\sum_{\chi\in\hat{K}}\hat{h}(\chi)\chi^{-1}(.)\qquad\text{avec}\quad\hat{h}(\chi)=\int_K h(g)\chi(g)m_K(dg).$$

D'autre part, la suite de mesure de probabilités $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{\partial^k}\right)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers la mesure de Haar m_K de K. La condition (ii) de la proposition implique alors que la transformée de Fourier de la fonction $g\to f(g.u)$ est la fonction nulle.

D'où le résultat. □

(6.2) Proposition. — *Soit* H *un élément de* $\mathscr{K}_c$. *Pour tout entier relatif* p *la fonction* $h_p=\mathrm{H}(.,p)$ *est constante sur les classes cycliques.*

Preuve. — Soient $\mathrm{H}\in\mathscr{K}_c$, $\gamma\in\mathfrak{B}$ et $p\in\mathbb{Z}$. D'après (5.1), la suite de fonctions $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}\mathrm{P}^k h_p$ converge uniformément sur γ vers $\nu_\gamma(h_p\overline{\varphi_\lambda^\gamma})\varphi_\lambda^\gamma$. On en déduit que pour tout élément f de $\mathbb{L}^2(\mathrm{E},\nu_\gamma)$, orthogonal au sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{L}^2(\mathrm{E},\nu_\gamma)$ engendré par les fonctions $\{\varphi_\lambda^\gamma:\lambda\in\mathbb{V}_\gamma\}$, nous avons: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\lambda^{-k}\nu_\gamma(\mathrm{P}^k h_p\bar{f})=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{U}$.

Pour tout entier $n\geq 0$, nous avons $\mathrm{P}^n h_p=h_{p-n}$. Comme l'opérateur P est une contraction de C(E) et la famille de fonctions $\{h_n:n\in\mathbb{Z}\}$ est équicontinue, on voit facilement que la suite $(\nu_\gamma(h_{p-n}\bar{f}))_{n\in\mathbb{Z}}$ est presque périodique. D'après la proposition (6.1), cette suite est donc nulle. On a donc montré que, dans $\mathbb{L}^2(\mathrm{E},\nu_\gamma)$,

$$h_p=\sum_{\lambda\in\mathbb{V}_\gamma}\nu_\gamma(h_p\bar{\varphi}_\lambda^\gamma)\varphi_\lambda^\gamma,\qquad\forall p\in\mathbb{Z}.$$

On en déduit que les fonctions h_p, $p\in\mathbb{Z}$, sont constantes sur $c\cap\operatorname{Supp}\nu_\gamma$, pour tout $c\in\mathfrak{C}_\gamma$.

Soient c un élément de $\mathfrak{C}_\gamma$ et x un élément de c. Puisque l'adhérence de la réunion des Supp $\mathrm{P}^n(x,.)$, $n\geq 0$, contient le support de ν_γ, il existe une suite d'entiers $\{\varphi(n)\}_{n\geq 0}$ et des éléments $u_{\varphi(n)}$ de $\operatorname{Supp}\mathrm{P}^{\varphi(n)}(x,.)$ tels que $u_{\varphi(n)}\to u\in\operatorname{Supp}\nu_\gamma$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\tau^{\varphi(n)}\to g\in\mathrm{G}$ et donc $u\in g.c\cap\operatorname{Supp}\nu_\gamma$. Soit $y\in c\cap\operatorname{Supp}\nu_\gamma$ et pour tout entier $n\geq 0$, soit $v_{\varphi(n)}$ un élément de $\operatorname{Supp}\mathrm{P}^{\varphi(n)}(y,.)\subset\tau^{\varphi(n)}.c$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $v_{\varphi(n)}\to v\in g.c\cap\operatorname{Supp}\nu_\gamma$.

D'après (1.13) nous avons:

$$\forall u\in\mathrm{F},\quad\forall x\in\operatorname{Supp}\mathrm{P}(u,.),\quad\forall m\in\mathbb{N},\qquad\mathrm{H}(x,m+1)=\mathrm{H}(u,m).$$

Il s'ensuit que, pour tout entier p,

$$\mathrm{H}(x,p)=\mathrm{H}(u_{\varphi(n)},p+\varphi(n))\qquad\text{et}\qquad\mathrm{H}(y,p)=\mathrm{H}(v_{\varphi(n)},p+\varphi(n)).$$

De la propriété d'équicontinuité, il résulte alors que :

$$\mathrm{H}(x,p) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(u, p+\varphi(n)) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(v, p+\varphi(n)) = \mathrm{H}(y,p).$$

D'où le résultat. □

(6.3) *Représentation intégrale des fonctions de* $\mathscr{K}_c$. — Pour tout élément H de $\mathscr{K}_c$, notons $\hat{\mathrm{H}}(c)$ la valeur de $\mathrm{H}(.,0)$ sur la classe cyclique c de $\mathfrak{C}$; nous avons $\forall x \in c$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}(x,p) = \hat{\mathrm{H}}(\tau^{-p}.c)$.

Avec les notations de (4.9), il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(x,p) &= \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(\mathrm{X}_{\psi(n)}, p+\psi(n))] \\
&= \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} \mathrm{H}(\xi, p+\psi(n))] \quad \text{(équicontinuité)} \\
&= \mathbb{E}_x[\lim_{n \to +\infty} \hat{\mathrm{H}}(\tau^{-\psi(n)}\tau^{-p}.\xi(.))] \\
&= \mathbb{E}_x[\hat{\mathrm{H}}(\tau^{-p}.\xi(.))] \quad (\text{car } \tau^{\psi(n)} \to e) \\
&= \int_{\mathfrak{C}} \hat{\mathrm{H}}(\tau^{-p}.c)\, \rho_x(dc).
\end{aligned}$$

Cette formule établit une isométrie d'algèbre de Banach entre $\mathrm{C}(\mathfrak{C})$ et $\mathscr{K}_c$.

Considérons l'ensemble des fonctions h de $\mathrm{C}(\mathfrak{C})$ pour lesquelles il existe un caractère χ du groupe G tel que $\forall c \in \mathfrak{C}$, $\forall g \in \mathrm{G}$, $h(g.c) = \chi(g)h(c)$. D'après (4.9) et la construction même de l'espace $\mathfrak{C}$, ces fonctions séparent les points de $\mathfrak{C}$. L'algèbre engendrée par ces fonctions est donc dense dans $\mathrm{C}(\mathfrak{C})$. On en déduit que :

(6.4) *Corollaire. — L'espace vectoriel engendré par les éléments de* $\mathscr{P}_c$, *plongés dans* $\mathscr{K}_c$ (cf. (1.14)), *est dense dans* $\mathscr{K}_c$.

(6.5) *Remarque.* — Soit $c_0 \in \mathfrak{C}$. En posant

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad h_p(x) = \rho_x(\tau^{-p}.c_0) = \mathbb{P}_x[\lim_{n \to +\infty} d(\mathrm{X}_{\psi(n)}, \tau^{-p}.c_0) = 0],$$

on obtient une suite de fonctions semi-continues supérieurement, vérifiant $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}h_{p+1} = h_p$. De plus, pour tout entier p, la fonction h_p vaut 1 sur $\tau^{-p}.c_0$ et 0 sur toute autre classe cyclique. Cette suite appartient à $\mathscr{K}_c$ si et seulement si c_0 est un point isolé de $\mathfrak{C}$.

Soit c_0 un point isolé de $\mathfrak{C}$ contenu dans une classe ergodique γ. Il existe alors un plus petit entier naturel d tel que $\tau^d.c_0 = c_0$. La classe ergodique γ contient alors exactement d classes cycliques. La suite de fonctions $(h_p(x) = \rho_x(\tau^{-p}.c_0))_{p \in \mathbb{Z}}$, est un élément de $\mathscr{K}_c$ vérifiant $\forall p \in \mathbb{Z}$, $h_{p+d} = h_p$. Le sous-groupe $\mathbb{V}_\gamma$ est constitué des racines d-ième de l'unité. Pour toute racine d-ième de l'unité λ, la fonction $h(x) = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda^k h_k$, appartient à $\mathscr{H}_{\lambda,c}$.

(6.6) *Décomposition spectrale de* P. — Soit $\{\psi(n)\}$ une suite d'entiers telle que :

(i) pour toute fonction f de C(E) et tout entier $p \geqq 0$, la suite de fonctions $(P^{\psi(n)-p} f)_{n \geqq 0}$ converge uniformément sur E;

(ii) $\tau^{\psi(n)} \to e$, où e désigne l'élément neutre de G.

La limite de la suite $(P^{\psi(n)-p} f)_{n \geqq 0}$, notée $H_f(.,p)$ définit un élément H_f de $\mathscr{H}_c$; elle s'écrit donc (*cf.* (6.3)):

$$H_f(x,p) = \int_{\mathfrak{C}} \hat{H}_f(\tau^{-p}.c)\, \rho_x(dc).$$

Posons, pour $f \in C(E)$,

$$\Pi f = \lim_{n \to +\infty} P^{\psi(n)} f = H_f(.,0) = \int_{\mathfrak{C}} \hat{H}_f(c)\, \rho_x(dc).$$

Nous avons $P^{\psi(n)} \Pi f(x) = \int_{\mathfrak{C}} \hat{H}_f(\tau^{\psi(n)}.c)\, \rho_x(dc)$, qui converge vers Πf. L'opérateur Π est donc un projecteur de C(E) et pour tout élément f de C(E), la suite de fonctions $(P^{\psi(n)}(f - \Pi f))_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers zéro. L'opérateur P étant une contraction de C(E), on en déduit que la suite de fonctions $(P^n(f - \Pi f))_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers zéro.

Appelons $\mathscr{E}_1$ l'image de Π et $\mathscr{E}_2$ l'espace des éléments f de C(E) tels que la suite $(P^n f)_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers zéro. Nous avons vu (corollaire (6.4)) que $\mathscr{E}_1$ est aussi le sous-espace vectoriel fermé de C(E) engendré par les fonctions propres de P, associées à des valeurs propres de modules 1, et nous avons montré que $C(E) = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$.

(6.7) *Remarque.* — Soit $f \in C(E)$. D'après (4.8) et (6.4), nous avons, dans $\mathbb{L}^2(E, \nu_\gamma)$,

$$\Pi f = \sum_{\lambda \in \mathbb{V}_\gamma} \nu_\gamma(\Pi f\, \overline{\varphi_\lambda^\gamma})\, \varphi_\lambda^\gamma.$$

De l'égalité $P^{\psi(n)}(f \varphi_\lambda^\gamma) = \lambda^{\psi(n)} P^{\psi(n)}(f)\, \varphi_\lambda^\gamma$, il résulte que $\Pi(f \varphi_\lambda^\gamma) = (\Pi f)\, \varphi_\lambda^\gamma$. D'autre part,

$$\nu(\Pi f) = \lim_{n \to +\infty} \nu(P^{\psi(n)} f) = \nu(f).$$

D'où $\Pi f = \sum_{\lambda \in \mathbb{V}_\gamma} \nu_\gamma(f \overline{\varphi_\lambda^\gamma})\, \varphi_\lambda^\gamma$.

Supposons que $\mathfrak{C}$ soit fini, ce qui équivaut à dire que le projecteur Π est de rang fini. Désignons par $\{\gamma_i : i \in I = \{1, \ldots, N\}\}$ les classes ergodiques. Pour chaque classe ergodique γ_i, $i \in I$, nous appelons d_i le nombre de classes cycliques contenues dans γ_i et nous notons c_i l'une d'entre elles.

On voit facilement que:

$$\Pi f = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{d_i - 1} \nu_{\gamma_i}(f \bar{\varphi}_{ij}) \varphi_{ij};$$

où $\varphi_{ij}(x) = \mathbb{P}_x[\lim_{n \to +\infty} d(X_{nd_i}, \tau^j . c_i) = 0]$.

7. EXEMPLES D'APPLICATIONS

(A) Opérateurs de Doeblin-Fortet [9]

(7.1) Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante et nulle en zéro. Pour $f \in C(E)$, posons:

$$|f|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|; \qquad m_\Phi(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\Phi(d(x, y))};$$

$$\|f\| = |f|_\infty + m_\Phi(f) \qquad \text{et} \qquad L_\Phi = \{ f \in C(E) : \|f\| < \infty \}.$$

Nous avons les propriétés suivantes:

(i) $(L_\Phi, \| \ \|)$ est un espace de Banach;

(ii) tout sous-ensemble borné de L_Φ est relativement compact dans $C(E)$;

(iii) si la suite $(f_n)_{n \geqq 0}$ de fonctions de L_Φ converge uniformément vers f avec $\sup \{ m_\Phi(f_n) : n \geqq 0 \} < +\infty$, alors f appartient à L_Φ.

Nous supposons que P est un opérateur borné de L_Φ et qu'il existe un entier $m \geqq 1$ et des réels $\rho \in [0, 1[$, $C > 0$ tels que:

$$(1) \qquad \forall f \in L_\Phi, \ \|P^m f\| \leqq \rho \|f\| + C |f|_\infty.$$

(7.2) THÉORÈME. — *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, l'espace* L_Φ *se décompose en la somme directe de deux sous espaces fermés* $\mathscr{W}_1$ *et* $\mathscr{W}_2$ *tels que*:

(i) $\mathscr{W}_i$ *est le sous-espace de* L_Φ, *de dimension finie, engendré par les fonctions propres continues de* P *associées à des valeurs propres de module* 1.

(ii) *La restriction de* P *au sous-espace* $\mathscr{W}_2$ *est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à* 1.

Preuve. — A partir des inégalités (1), on montre par récurrence que:

(2) $\forall f \in L_\Phi, \forall q \in \mathbb{N}, \forall r \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$\|P^{qm+r} f\| \leqq \rho^q \|P^r f\| + C \sum_{i=1}^{q} |P^{m(q-i)+r} f|_\infty.$$

D'où l'on déduit l'inégalité

(3) $\sup\{\|P^n f\| : n \geqq 0\} \leqq \sup\{\|P^r\| : 0 \leqq r \leqq m-1\} \|f\| + \dfrac{C}{1-\rho} |f|_\infty$;

qui montre que la famille de fonctions $\{P^n f : n \geqq 0, f \in L_\Phi, \|f\| = 1\}$ est relativement compacte dans C(E).

Si l'espace L_Φ est dense dans C(E), ce qui est le cas pour $\Phi(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, alors P vérifie l'hypothèse (H2). Nous reprenons alors les notations de (6.6).

Pour tout $f \in C(E)$, $\Pi(f)$ est la limite uniforme de la suite $(P^{\psi(n)} f)_{n \geqq 0}$. De l'inégalité (3) et de la propriété (iii), il résulte que le projecteur Π opère sur L_Φ et l'image de la boule unité de L_Φ par Π est relativement compacte dans C(E). Le sous-espace $\mathscr{W}_1 = \Pi(L_\Phi) = \Pi(L_\varphi \cap \mathscr{E}_1) = \mathscr{E}_1 \cap L_\Phi$ de C(E) est donc localement compact et par suite de dimension finie.

Pour tout $f \in \mathscr{E}_2$, la suite de fonctions $(P^n f)_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle. De plus, d'après l'argument précédent de relative compacité, la convergence de la suite de fonction $\left(P^n\left(\dfrac{f}{\|f\|}\right)\right)_{n \geqq 0}$ vers la fonction nulle est uniforme sur $\mathscr{W}_2 = \mathscr{E}_2 \cap L_\Phi$. Des inégalités (2), on déduit alors facilement que la suite $\sup\left\{\dfrac{\|P^n f\|}{\|f\|} : f \in \mathscr{W}_2\right\}$ converge vers zéro; ce qui établit que P, restreint à $\mathscr{W}_2$, est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Si l'espace L_Φ n'est pas dense dans C(E), puisque $\sup\{\|P^n f\| : n \geqq 0\} < +\infty$ pour tout élément f de L_Φ, il est clair que l'on récupère des éléments de L_Φ comme limite uniforme de suites de fonctions du type $P^{\varphi(n)} f$ ou $\{M^\lambda_{\varphi(n)}(f)\}_{n \geqq 0}$, pour $f \in L_\Phi$ et $\lambda \in \mathbb{U}$. Il est alors facile de voir que tout ce qui a été fait dans les sections précédentes pour P opérant sur C(E) s'applique à P opérant sur L_Φ. Par des arguments identiques aux précédents, on obtient alors le résultat voulu. □

(7.3) *Remarque.* — Remplaçons dans ce qui précède l'hypothèse (1), qui conduit à (2), par l'hypothèse moins contraignante suivante: « Il existe une série positive convergente $\Sigma \alpha_n$ telle que, pour tout entier $n \geqq 0$ et tout $f \in L_\Phi$, on ait

$$\|P^n f\| \leqq \|f\| + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |P^{n-i} f|_\infty \text{ ».}$$

Alors les arguments précédents montrent que l'espace L_Φ se décompose en la somme directe de deux sous-espaces fermés $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$ tels que:

(i) $\mathscr{W}_1$ est le sous-espace de L_Φ, de dimension finie, engendré par les fonctions propres continues de P associées à des valeurs propres de module 1.

(ii) la suite $\left(\sup\left\{\frac{|\mathrm{P}^n f|_\infty}{\|f\|} : f \in \mathscr{W}_2\right\}\right)_{n \geqq 0}$ converge vers zéro.

(B) Exemple 2

(7.4) Nous reprenons l'exemple d'opérateur de transition étudié dans [1]. Soient $\mathrm{E}=[0, 1]$ et u une fonction borélienne positive sur E telle que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $u\left(\frac{x}{2}\right)+u\left(\frac{x+1}{2}\right)=1$. On considère l'opérateur de transition défini par

$$\mathrm{P} f(x)=u\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right)+u\left(\frac{x+1}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad (x \in [0, 1]).$$

Lorsque u est continue, nous savons ([1]) que la chaîne ne possède qu'un nombre fini de classes ergodiques et cycliques. Si la fonction u appartient à L_Φ, pour une fonction Φ vérifiant la condition $\sum_{n \geqq 1} \Phi(2^{-n}) < +\infty$, l'espace L_Φ est (*cf.* [1]) la somme directe de sous-espace fermé $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$ ayant les propriétés de la remarque précédente.

En fait nous pouvons renforcer ce résultat de la façon suivante:

(7.5) THÉORÈME. – *Lorsque u appartient à L_Φ, pour une fonction Φ vérifiant la condition plus forte $\sum_{n \geqq 1} \sum_{k \geqq n} \Phi(2^{-k}) < +\infty$, la série de terme général $|\mathrm{P}^n f|_\infty$ est convergente pour toute fonction f de $\mathscr{W}_2$.*

Preuve. – Pour tout élément f de C(E) et tout réel t de [0, 1], nous posons:

$$v(f, t)=\sup\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \leqq t\}; \quad m(f, t)=\int_0^t v(f, u) \frac{du}{u}$$

et

$$\|f\|=|f|_\infty+m(f, 1).$$

On désigne par L l'espace de Banach des fonctions continues telles que $\|f\|<+\infty$.

Il est facile de voir que tout sous-ensemble borné de L est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme. [On notera que de la croissance de la fonction $v(f, .)$ il résulte que $\forall x \in [0, 1]$, $v(f, x)|\ln x| \leqq m(f, 1)$.] Si la suite $(f_n)_{n \geqq 0}$ de fonctions de L converge uniformément vers f avec $\sup\{m(f_n, 1) : n \geqq 0\}<+\infty$, alors f appartient à L. En outre, si $\int f(x)\, \nu(dx)=0$ pour une quelconque mesure de probabilité ν, nous avons $|f|_\infty \leqq 2m(f, 1)$. [Cette inégalité résulte des relations élémentaires suivantes:

$$\forall x \in [0, 1], f(x) \leqq \int (f(x)-f(y))\, \nu(dy) \leqq v(f, 1)$$

et

$$\forall t \in [0, 1],\ v(f, 1) \leqq \left(\frac{1}{t}+1\right) v(f, t).]$$

Cela dit, pour tout $i \in \{0, 1\}$ appelons S_i la transformation de [0, 1] définie par $S_i x = \frac{x+i}{2}$. Pour toute fonction $f \in C(E)$ et tout entier naturel n, nous avons

$$P^n f(x) - P^n f(y) = \sum_{i=(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n} T(i; x, y);$$

avec

$$T(i; x, y) = f(S_{i_n} \ldots S_{i_1} x)\, u(S_{i_n} \ldots S_{i_1} x) \ldots u(S_{i_1} x) - f(S_{i_n} \ldots S_{i_1} y)\, u(S_{i_n} \ldots S_{i_1} y) \ldots u(S_{i_1} y).$$

En écrivant,

$$\begin{aligned} T(i; x, y) = {} & (f(S_{i_n} \ldots S_{i_1} x) - f(S_{i_n} \ldots S_{i_1} y))\, u(S_{i_n} \ldots S_{i_1} x) \ldots u(S_{i_1} x) \\ & + \sum_{k=1}^{n} f(S_{i_n} \ldots S_{i_1} y)\, u(S_{i_n} \ldots S_{i_1} y) \ldots u(S_{i_{k+1}} \ldots S_{i_1} y) \\ & \times [u(S_{i_k} \ldots S_{i_1} x) - u(S_{i_k} \ldots S_{i_1} y)]\, u(S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_1} x) \ldots u(S_{i_1} x), \end{aligned}$$

on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} |P^n f(x) - P^n f(y)| \leqq {} & v\left(f, \frac{|x-y|}{2^n}\right) \\ & + \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in \{0, 1\}^k} P^{n-k} f(S_{i_k} \ldots S_{i_1} y)\, [u(S_{i_k} \ldots S_{i_1} x) - u(S_{i_k} \ldots S_{i_1} y)] \right. \\ & \left. \times\, u(S_{i_{k-1}} \ldots S_{i_1} x) \ldots u(S_{i_1} x) \right|. \end{aligned}$$

D'où

$$v(P^n f, t) \leqq v\left(f, \frac{t}{2^n}\right) + 2 \sum_{k=1}^{n} v\left(u, \frac{t}{2^k}\right) |P^{n-k} f|_\infty.$$

Par intégration on obtient

$$m(P^n f, t) \leqq m\left(f, \frac{t}{2^n}\right) + 2 \sum_{k=1}^{n} m\left(u, \frac{t}{2^k}\right) |P^{n-k} f|_\infty. \tag{3}$$

Posons

$$\Lambda = \left\{ f \in \mathrm{L} : \sum_{n \geqq 1} m\left(f, \frac{1}{2^n}\right) < +\infty \right\}.$$

Supposons que la fonction u appartienne à Λ. Les inégalités précédentes montrent que

$$\| \mathrm{P}^n f \| \leqq \| f \| + 2 \sum_{i=1}^{n} m\left(u, \frac{1}{2^i}\right) | \mathrm{P}^{n-i} f |_\infty.$$

La remarque (7.3) s'applique donc. La suite

$$\left(\sup \left\{ \frac{| \mathrm{P}^n f |_\infty}{\| f \|} : f \in \mathscr{W}_2 \right\} \right)_{n \geqq 0}$$

converge vers zéro et il existe un entier $r \geqq 1$ tel que

$$\eta = \sup \left\{ \frac{| \mathrm{P}^r f |_\infty}{\| f \|} : f \in \mathscr{W}_2 \right\} < \frac{1}{6 \sum_{n \geqq 1} m\left(u, \frac{1}{2^n}\right)}.$$

L'inégalité (3), pour $n = 1$, montre que l'opérateur P opère aussi sur Λ. Pour tout f de $\Lambda \cap \mathscr{W}_2$, nous avons alors :

$$\| \mathrm{P}^{n+r} f \| \leqq 3\, m(\mathrm{P}^{n+r} f, 1) \leqq 3\, m\left(\mathrm{P}^r f, \frac{1}{2^n}\right) + 6\eta \sum_{i=1}^{n} m\left(u, \frac{1}{2^i}\right) \| \mathrm{P}^{n-i} f \|.$$

[On a utilisé le fait que $| \mathrm{P}^{r+n-i} f |_\infty \leqq \eta \| \mathrm{P}^{n-i} f \|$].

En sommant pour n allant de 1 à N, il vient

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}+r} \| \mathrm{P}^n f \| \leqq 3 \sum_{n \geqq 1} m\left(\mathrm{P}^r f, \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{n=0}^{r} \| \mathrm{P}^n f \| + 6\eta \sum_{n \geqq 1} m\left(u, \frac{1}{2^n}\right) \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \| \mathrm{P}^n f \|.$$

Il s'ensuit que, pour tout entier N,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \| \mathrm{P}^n f \| \leqq \frac{1}{1-\rho} \left(3 \sum_{n \geqq 1} m\left(\mathrm{P}^r f, \frac{1}{2^n}\right) + \sum_{n=0}^{r} \| \mathrm{P}^n f \| \right);$$

avec $\rho = 6\eta \left[\sum_{n \geqq 1} m\left(u, \frac{1}{2^n}\right) \right] < 1$. D'où $\sum_{n \geqq 0} \| \mathrm{P}^n f \| < +\infty$.

La seconde assertion du théorème se déduit de ce qui précède en remarquant que l'on a :

(i) $m(\Phi, 1) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \geqq 1} \Phi(2^{-n}) < +\infty$;

(ii) $\sum_{n \geqq 1} m\left(\Phi, \frac{1}{2^n}\right) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n \geqq 1} \sum_{k \geqq n} \Phi(2^{-k}) < +\infty$. □

(C) Exemple 3

(7.6) Proposition. — *Supposons que, pour tout* $f \in \mathrm{C}(\mathrm{E})$, *la famille de fonctions* $\{\mathrm{P}^n f : n \geqq 0\}$ *soit équicontinue. Soient* ν *une mesure de probabilité* P-*invariante*, μ *un nombre complexe de module* 1 *et* h *une fonction continue sur* E.

La famille de fonctions $\left\{\sum_{k=0}^{n} \mu^k h(\mathrm{X}_k) : n \geqq 0\right\}$ *est bornée dans* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\nu)$ *si et seulement s'il existe un élément* ξ *de* $\mathbb{L}^2(\mathrm{E}, \nu)$ *tel que, pour* $\mathrm{P}(x, dy)\,\nu(dx)$*-presque tout* $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $h(x) = \xi(x) - \mu\xi(y)$.

Preuve. — Supposons que pour $\mathrm{P}(x, dy)\,\nu(dx)$-presque tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $h(x) = \xi(x) - \mu\xi(y)$. Nous avons alors $\forall k \geqq 0$, $h(\mathrm{X}_k) = \xi(\mathrm{X}_k) - \mu\xi(\mathrm{X}_{k+1})$ $\mathbb{P}_\nu$ – p. s. et par suite,

$$\forall n \geqq 0, \quad \left\| \sum_{k=0}^{n} \mu^k h(\mathrm{X}_k) \right\|_2 \leqq \| \xi(\mathrm{X}_0) - \mu^{n+1} \xi(\mathrm{X}_{n+1}) \|_2 \leqq 2 \| \xi \|_2.$$

Pour montrer la réciproque, on peut supposer [proposition (3.2)] que la mesure de probabilité P-invariante ν est extrémale; autrement dit $\nu = \nu_\gamma$ pour une certaine classe ergodique γ.

Cela dit, soit h un élément de C(E) tel que la suite de v. a. $\left\{\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \mu^k h(\mathrm{X}_k) : n \geqq 0\right\}$ soit bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_{\nu_\gamma})$. La décomposition spectrale obtenue en (6.6), nous permet d'écrire, dans $\mathbb{L}^2(\mathrm{E}, \nu_\gamma)$,

$$h = \sum_{\lambda \in \mathbb{V}_\gamma} \nu_\gamma(h \bar{\varphi}_\lambda^\gamma)\, \varphi_\lambda^\gamma + g, \text{ avec } g \in \mathscr{E}_2.$$

La suite de v. a. $\{\mathrm{U}_n : n \geqq 0\}$ est *a fortiori* bornée dans $\mathbb{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_{\nu_\gamma})$. Si $\mu \in \mathbb{V}_\gamma$, d'après la proposition (3.2), nous devons avoir $\nu_\gamma(h \bar{\varphi}_\mu^\gamma) = 0$.

Posons $\xi_1(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{W}} (1 - \mu\lambda)^{-1} \nu_\gamma(h \bar{\varphi}_\lambda^\gamma)\, \varphi_\lambda^\gamma$; où $\mathbb{W} = \mathbb{V}_\gamma - \{\mu\}$ ou $\mathbb{V}_\gamma$ suivant que μ appartient ou non à $\mathbb{V}_\gamma$. On vérifie que pour $\mathrm{P}(x, dy)\,\nu(dx)$-presque tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\sum_{\lambda \in \mathbb{W}} \nu_\gamma(h \bar{\varphi}_\lambda^\gamma)\, \varphi_\lambda^\gamma = \xi_1(x) - \mu\xi_1(y)$.

Il s'ensuit que la suite de v.a. $\left\{\sum_{k=0}^{n} \mu^k g(X_k) : n \geqq 0\right\}$ est aussi bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_{\nu_\gamma})$.

La suite de fonctions $\left(g_n = \sum_{k=0}^{n} \mu^k P^k g\right)_{n \geqq 0}$ est alors bornée dans $\mathbb{L}^2(E, \nu_\gamma)$. Il existe donc une sous-suite de la suite $(g_n)_{n \geqq 0}$ qui converge faiblement vers une fonction $\xi \in \mathbb{L}^2(E, \nu)$. De l'égalité, $(I - \mu P) g_n = g - \mu^{n+1} P^{n+1} g$, et du fait que la suite $(P^n g)_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers zéro, il résulte que $g = (I - \mu P) \xi_2$. Nous avons alors:

$$\sum_{k=0}^{n} \mu^k g(X_k) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k [\xi_2(X_k) - \mu (P \xi_2 X_k)]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mu^{k+1} [\xi_2(X_{k+1}) - P \xi_2(X_k)] + \xi_2(X_0) - \mu^{n+1} \xi_2(X_{n+1}).$$

Le premier terme du second membre est une somme d'accroissements de martingales. Le carré de sa norme dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\nu)$, qui est égale à la somme des carrés des normes, vaut $n[\nu(|\xi_2|^2) - \nu((P|\xi_2|)^2)]$.

On a donc nécessairement $\nu(|\xi_2|^2) - \nu((P|\xi_2|)^2) = 0$. Comme

$$\nu(|\xi_2|^2 - P|\xi_2|)^2) = \int_E \int_E |\xi_2(y) - P\xi_2(x)|^2 P(x, dy)\, \nu(dx),$$

il vient, pour $P(x, dy)\,\nu(dx)$-presque tout $(x, y) \in E^2$, $\xi_2(y) = P\xi_2(x)$ et par suite $g(x) = (I - \mu P)\xi_2(x) = \xi_2(x) - \mu \xi_2(y)$.

D'où le résultat avec $\xi = \xi_1 + \xi_2$. □

Lorsque P vérifie les conditions (7.1), toute fonction h de L_Φ s'écrit, en restriction à γ,

$$h = \sum_{\lambda \in \mathbb{V}} \nu_\gamma(h \bar{\varphi}_\lambda^\gamma) \varphi_\lambda^\gamma + (I - \mu P) G_\mu g;$$

où $\mathbb{V}$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, $g \in \mathscr{W}_2$ et $G_\mu g = \sum_{k \geqq 0} \mu^k P^k g$.

On en déduit que:

(7.7) Proposition. – *Supposons que* P *vérifie les hypothèses de* (7.1). *Soient* ν *une mesure de probabilité* P-*invariante*, μ *un nombre complexe de module* 1 *et h une fonction de* L_Φ.

La famille de fonctions $\left\{\sum_{k=0}^{n} \mu^k h(X_k) : n \geqq 0\right\}$ *est bornée dans* $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}_\nu)$ *si et seulement s'il existe un élément* ξ *de* L_Φ *tel que* $h(x) = \xi(x) - \mu\xi(y)$ *pour tous* $x \in \operatorname{Supp} \nu$ *et* $y \in \operatorname{Supp} P(x, .)$.

(D) Exemple 4

Supposons que P vérifie l'hypothèse (H2). Pour $\alpha \in]0, 1[$, posons $T = \alpha P + (1 - \alpha) I$; où I est l'opérateur identité.

L'opérateur T vérifie encore l'hypothèse (H2). Les opérateurs P et T ont les mêmes fonctions harmoniques et donc les mêmes classes ergodiques. Par contre T n'a plus de fonctions propres continues, associées à des valeurs propres de modules 1 autres que 1. Il n'y a donc plus de classes cycliques pour T. Pour tout $f \in C(E)$, la suite de fonctions $(T^n f)_{n \geqq 0}$ converge uniformément vers Πf; où Π désigne le projecteur sur l'espace vectoriel fermé engendré par les fonctions P-harmoniques continues.

RÉFÉRENCES

[1] J.-P. CONZE et A. RAUGI, Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, *Bull. Soc. math. France.*, vol. **118**, 1990, p. 273-310.

[2] K. DE LEEUW et I. GLICKSBERG, Applications of almost periodic compactifications, *Acta Math.*, vol. **105**, 1961, p. 63-67.

[3] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, John Wiley, New York, 1953.

[4] B. JAMISON, Asymptotic behavior of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. **9**, 1964, p. 203-214.

[5] B. JAMISON, Ergodic Decompositions Induced by Certain Markov Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **117**, 1965, p. 451-468.

[6] B. JAMISON, *Irreducible Markov operators on C(S)*, ..., 1970, p. 366-370.

[7] B. JAMISON et R. SINE, Irreducible Almost Periodic Markov Operators, *J. Math. Mech.*, vol. **18**, n° 11, 1969, p. 1043-1057.

[8] J. NEVEU, *Bases Mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, 1964.

[9] F. NORMAN, *Markov Processes and Learning Models*, New York, Academic Press, vol. **84**, 1972.

[10] D. REVUZ, *Markov chains*, North Holland Pub. Comp., 1975.

[11] M. ROSENBLATT, Equicontinuous Markov Operators, *Teor. Verojatnost. i Primenen*, vol. **9**, 1964, p. 205-222.

[12] W. RUDIN, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience publishers, John Wiley and sons, New York-London, 1967.

(*Manuscrit reçu le* 8 *mars* 1991;
corrigé le 1^{er} *octobre* 1991.)