

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LAURENT MICLO

**Comportement asymptotique de l'énergie libre
spécifique. Application à l'ergodicité et au recuit
simulé en dimension infinie**

Annales de l'I. H. P., section B, tome 28, n° 2 (1992), p. 195-234

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1992__28_2_195_0

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Comportement asymptotique de l'énergie libre spécifique. Application à l'ergodicité et au recuit simulé en dimension infinie

par

Laurent MICLO

60, rue des Cigognes, 67540 Ostwald, France

RÉSUMÉ. — L'espace des phases que nous considérons est l'espace de dimension infinie $M^{\mathbb{Z}^d}$, où l'ensemble des spins M est fini. Nous allons adapter à cette situation les résultats concernant le comportement asymptotique de l'énergie libre spécifique pour certaines diffusions sur $M^{\mathbb{Z}^d}$, obtenus dans le cas où M était une variété riemannienne, compacte, connexe et orientée. On s'intéressera à certains processus de sauts sur $M^{\mathbb{Z}^d}$, dont les générateurs sont construits à partir d'une famille de potentiels d'interactions (de rang fini et invariante par translation) et d'une évolution de la température. Sous réserve que la probabilité initiale soit invariante par translation, nous prouverons une propriété d'ergodicité de ces processus, quand la température est constante, et des résultats de recuit simulé (relativement à la famille de potentiels d'interactions), pour certains taux de décroissance de la température vers 0 en l'infini. La description de ces taux nous conduit à introduire une constante $c \in [0, \infty]$, généralisation des constantes qui apparaissent dans l'étude des algorithmes de recuit simulé sur des ensembles finis. Nous prouverons que celle-ci est toujours finie si $d = 1$, mais qu'elle est infinie pour le modèle d'Ising plan usuel.

Mots clés : Recuit simulé, énergie libre spécifique, inégalités de Sobolev-logarithmiques.

ABSTRACT. — We consider jumps process on $M^{\mathbb{Z}^d}$ (where M is a finite set) whose generators depend on a shift invariant and finite range family

Classification A.M.S. : 60 K 35.

of interaction potentials and on a evolution of temperature. We prove that the specific free energy multiplied by temperature converges to zero in long time, if the temperature is constant, or is decreasing to zero with certain rates. These facts imply respectively, ergodicity and simulated annealing results, if the initial distribution is shift invariant.

1. PRÉSENTATION DU CADRE ET DES RÉSULTATS OBTENUS

On va adapter les résultats obtenus dans le cas où l'espace des spins était une variété riemannienne compacte, connexe et orientée (*cf.* [5]), au cas où cet espace est un ensemble fini. On prouvera notamment certaines inégalités de Sobolev-logarithmiques (*voir* la section 3) qui joueront un rôle essentiel.

On va s'intéresser à l'évolution de l'énergie libre spécifique associée à certains processus de Markov sur $M^{\mathbb{Z}^d}$ (M étant un ensemble fini), invariants par translation. L'énergie libre spécifique est la limite, quand le cube Λ tend vers \mathbb{Z}^d , de l'entropie de la loi du processus sur M^Λ , en un instant donné, relativement à la probabilité qui serait invariante sur M^Λ , en cet instant, si un état extérieur (*i. e.* un élément de M^Λ) était fixé, divisé par le nombre de sites de Λ . La limite ne dépend pas des conditions extérieures choisies. Si la température associée au processus est constante, il est connu que l'énergie libre spécifique est décroissante. Holley a montré dans [2], toujours sous l'hypothèse d'invariance par translation du processus, en étudiant le comportement de la dérivée temporelle de l'énergie libre spécifique, que toute mesure stationnaire invariante par translation et stationnaire pour le processus devait être une mesure de Gibbs. On va retrouver ce résultat en montrant qu'en fait l'énergie libre spécifique satisfait certaines inégalités différentielles qui impliquent qu'elle tend vers 0 en temps grand, ainsi, en appliquant le principe variationnel pour les mesures invariantes par translation, on obtient le résultat ergodique précédent. Mais l'avantage principal de cette méthode est de pouvoir s'appliquer également si la température n'est pas constante. On obtient des inégalités différentielles qui impliquent que l'énergie libre spécifique multipliée par la température tend vers zéro pour certains taux de décroissance vers zéro de celle-ci. On en déduit un résultat de recuit simulé en dimension infinie, qui généralise ceux donnés par Holley et Stroock pour un ensemble fini (*cf.* [4]). La constante (qui peut être infinie) servant à décrire les bons taux de décroissance de la température apparaît comme

une limite, quand le cube Λ tend vers \mathbb{Z}^d , du sup des constantes qu'on obtiendrait, si on fixait des conditions extérieures au cube Λ . Si la constante précédente est finie (ce qui est toujours le cas si $d=1$), on retrouve des taux de décroissance identiques à ceux obtenus pour des espaces de phases finis. Mais dès $d=2$, la constante obtenue peut être infinie (mais on ne sait pas si cette constante est optimale) et il faut alors prendre des taux de décroissance plus lents.

Une application possible est de pouvoir donner des taux de décroissance de la température pour lesquels le modèle d'Ising usuel tend à aligner tous ses spins. Avec $d=1$, on peut également décrire le comportement, quand la température décroît suffisamment lentement, de modèles simples de longues molécules (en chaque point de \mathbb{Z} , qui représente un groupement d'atomes, on a un nombre fini de rotations possibles, dont les énergies dépendent des groupements voisins, voir aussi [5] pour le modèle de spins continus).

Décrivons maintenant précisément les résultats obtenus.

Soit M un ensemble fini, muni de sa topologie et de sa tribu discrètes, ainsi que d'une probabilité λ chargeant tous les points et d'une probabilité de transition q , réversible par rapport à λ [*i.e.* telle que $\forall x, y \in M$,

$\alpha(x, y) = \lambda(x) q(x, y) = \alpha(y, x)$], vérifiant la condition d'irréductibilité (C) suivante :

$\forall x, y \in M$, il existe une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de M telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $\forall 0 \leq i \leq n-1$, $q(x_i, x_{i+1}) > 0$.

Dans la « pratique », typiquement λ sera la mesure de comptage normalisée et on aura $\forall x \in M$, $q(x, \cdot) = \lambda(\cdot)$.

On considère l'espace des phases $\mathcal{X} = M^{\mathbb{Z}^d}$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, muni de sa topologie produit et de la tribu borélienne associée \mathcal{B} . Introduisons quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cet article :

Pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, l'application $x \in \mathcal{X} \mapsto x_\Lambda \in M^\Lambda$ désignera la projection canonique de \mathcal{X} sur M^Λ . \mathcal{B}_Λ sera l'image réciproque, par cette projection, de la tribu borélienne de M^Λ (muni de la topologie produit). On identifiera les fonctions \mathcal{B}_Λ -mesurables de \mathcal{X} avec les fonctions boréliennes de M^Λ . De même on identifiera les probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\Lambda)$ avec les probabilités sur M^Λ . Si μ est une probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, μ_Λ désignera sa restriction à $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_\Lambda)$. On notera aussi λ_Λ la probabilité produit $\lambda^{\otimes \Lambda}$ sur M^Λ . Pour $x \in M^\Lambda$ et $y \in M^{\Lambda'}$, où Λ et Λ' sont deux sous-ensembles de \mathbb{Z}^d , on conviendra de noter xy l'élément de $M^{\Lambda \cup \Lambda'}$ défini par :

$$\forall k \in \Lambda \cup \Lambda', \quad (xy)_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \in \Lambda, \\ y_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Attention, pour $k \in \Lambda \cap \Lambda'$, les coordonnées de x effacent celles de y .)

La notation $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ signifiera que Λ est un sous-ensemble fini, non vide, de \mathbb{Z}^d , et $|\Lambda|$ désignera son cardinal.

D'autre part, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on notera $S_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ l'opérateur de translation de vecteur k , *i. e.*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \\ (S_k(x))_i = x_{k+i}$$

On suppose \mathcal{X} muni d'une famille \mathcal{J} de potentiels d'interactions $(J_F)_{F \subset\subset \mathbb{Z}^d}$, où pour tout $F \subset\subset \mathbb{Z}^d$, J_F est une fonction \mathcal{B}_F -mesurable.

On supposera que \mathcal{J} est de rang fini, *i. e.* qu'il existe $R \in \mathbb{N}^*$ (le rang de l'interaction) tel que $\text{diam}(F) \geq R$ implique $J_F \equiv 0$, et est invariante par translation :

$$\forall F \subset\subset \mathbb{Z}^d, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ J_{F+k} = J_F \circ S_k$$

Décrivons les processus stochastiques que nous considérons; il s'agira de processus de sauts sur \mathcal{X} qui ne changeront que d'une seule coordonnée à la fois, et dont les taux dépendront de la famille \mathcal{J} et de la température (et donc éventuellement du temps par l'intermédiaire de celle-ci). Plus précisément :

Soit $\beta \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ qui représentera l'évolution de l'inverse de la température.

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on notera $H_k = \sum_{F \in k} J_F$, et pour $y \in M$ et $x \in \mathcal{X}$ on définit $y_k x \in \mathcal{X}$ par

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad (y_k x)_i = \begin{cases} y & \text{si } i=k, \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors, pour $t \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathcal{X}$ et $y \in M$,

$$q_t(x, k, y) = \exp[-\beta_t(H_k(y_k x) - H_k(x))^+] q(x_k, y)$$

puis on définit un opérateur $L_{k,t}$ agissant sur les fonctions réelles Φ définies sur \mathcal{X} , par

$$L_{k,t} \Phi(x) = \sum_{y \in M} (\Phi(y_k x) - \Phi(x)) q_t(x, k, y), \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Soit \mathcal{D} l'ensemble des fonctions réelles sur \mathcal{X} ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées (*i. e.* \mathcal{B}_Λ -mesurables pour un certain $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$).

Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur L_t sur \mathcal{D} par :

$$L_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} L_{k,t}$$

L_t sera le générateur infinitésimal à l'instant t des processus de Markov (éventuellement non homogènes) que nous considérons.

Soit Ω l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathcal{X} , continues à droite et ayant une limite à gauche. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus canonique des coordonnées sur Ω . On pose pour $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ et $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$.

Soit m une probabilité sur \mathcal{X} (qui représentera l'état initial).

On sait qu'il existe une unique probabilité P_m sur (Ω, \mathcal{F}) telle que

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet X_0 \circ P_m = m; \\ \bullet \forall \varphi \in \mathcal{D}, \\ \left(\Phi(X_\cdot) - \Phi(X_0) - \int_0^\cdot L_s \Phi(X_s) ds, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P_m \right) \\ \text{est une martingale.} \end{array} \right.$$

(cf. Holley et Stroock [3], ils ne considèrent que le cas où l'espace des spins est $\{-1, 1\}$, mais leurs résultats se généralisent immédiatement, car on est ici dans le cas simple d'interactions de rang fini).

Les processus auxquels nous nous intéresserons seront les $(X_t)_{t \geq 0}$ sous la loi P_m , pour certaines évolutions de la température (données par la fonction β^{-1}). On notera, pour $t \geq 0$, m_t la loi de X_t .

Nous allons définir l'énergie libre spécifique d'une probabilité sur \mathcal{X} , relativement à la température β_t^{-1} et à la famille \mathcal{F} . Cette notion se révélera être un outil très puissant pour l'étude du comportement asymptotique des m_t (en imposant des conditions sur β). Mais il faut, en préliminaire, introduire les notations suivantes :

Pour $\Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d$ et pour $t \geq 0$, on pose :

$$U_\Lambda = \sum_{F \subset \Lambda} J_F$$

$$g_{\Lambda, t}(\cdot) = \frac{\exp(-\beta_t U_\Lambda(\cdot))}{\sum_{y \in M^\Lambda} \exp(-\beta_t U_\Lambda(y)) \lambda_\Lambda(y)}$$

Soit p une probabilité sur \mathcal{X} .

On définit l'énergie libre, sur Λ , de p par rapport à $g_{\Lambda, t} \lambda_\Lambda$, par :

$$I_{\Lambda, t}(p) = \sum_{y \in M^\Lambda} p_\Lambda(y) \ln \left(\frac{p_\Lambda(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) \lambda_\Lambda(y)$$

où on note encore p_Λ la densité de p_Λ par rapport à λ_Λ (on aura remarqué que λ_Λ est équivalente à la mesure de comptage sur M^Λ , ainsi toute probabilité q sur M^Λ vérifie $q \ll \lambda_\Lambda$).

L'énergie libre spécifique de p , relativement à la température β_t^{-1} et à la famille \mathcal{F} , est alors donnée par :

$$I_t(p) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} I_{\Lambda_n, t}(p)$$

où $\Lambda_n = \{ u \in \mathbb{Z}^d / \forall 1 \leq i \leq d, -n \mathbf{R} < u_i \leq n \mathbf{R} \}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le premier résultat que nous démontrerons et qui peut s'interpréter, grâce au principe variationnel [qui affirme qu'une mesure invariante par translation annulant l'énergie libre $I_0(\cdot)$ est une mesure de Gibbs relativement à la famille de potentiels $(\beta_0 J_F)_{F \subset \subset \mathbb{Z}^d}$], et du fait que l'énergie $I_0(\cdot)$ est une fonctionnelle s. c. i. (pour la topologie étroite) sur l'ensemble des mesures invariantes par translation, comme un résultat d'ergodicité pour la diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$. Il nous permet également de retrouver un résultat bien connu (*voir*, par exemple, Holley [2]); toute mesure m invariante par translation et stationnaire pour le processus (X_t) , est une mesure de Gibbs relativement à la famille de potentiels $(\beta_0 J_F)_{F \subset \subset \mathbb{Z}^d}$.

THÉORÈME 1. — *Supposons que β . soit constant.*

Supposons m invariante par translation.

Alors $I_t(m_t)$ ($= I_0(m_t)$) décroît vers 0 quand t tend vers l'infini.

Notons que la décroissance de $I_t(m_t)$ est, à température fixée, un résultat classique (*cf.* [2]), que nous ne redémontrerons pas. D'autre part, le théorème est encore vérifié sans l'hypothèse faite sur m , mais outre le fait que celle-ci facilite légèrement les calculs, elle est, comme nous l'avons vu, surtout nécessaire pour les applications. Précisions également que la démonstration nous fournit en fait des renseignements plus quantitatifs, notamment on peut estimer la vitesse de convergence vers 0 de $I_0(m_t)$.

Pour pouvoir décrire le second résultat, il faut introduire un élément c de $[0, +\infty]$ défini comme suit :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\eta \in \mathcal{X}$, on pose

$$H_{n, \eta} : M^{\Lambda_n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_{\Lambda_n} \mapsto \sum_{F \cap \Lambda_n \neq \emptyset} J_F(x_{\Lambda_n}, \eta)$$

Pour $x, y \in M^{\Lambda_n}$, on définit $\mathcal{C}_{x, y}$ l'ensemble des chemins allant de x à y dans M^{Λ_n} , muni du graphe produit associé à la probabilité de transition q , *i. e.* l'ensemble des familles $\varphi = (x^{(p)})_{0 \leq p \leq N}$ d'éléments de M^{Λ_n} , telles que $x^{(0)} = x$, $x^{(N)} = y$, et pour tout $0 \leq p \leq N - 1$, $x^{(p)}$ et $x^{(p+1)}$ ne diffèrent que d'une coordonnée, disons $k \in \Lambda_n$, et $q(x_k^{(p)}, x_k^{(p+1)}) > 0$.

On définit l'élévation d'un tel chemin φ par

$$e(\varphi) = \sup_{0 \leq p \leq N} H_{n, \eta}(x^{(p)}) - H_{n, \eta}(x) - H_{n, \eta}(y) + \inf_{z \in M^{\Lambda_n}} H_{n, \eta}(z)$$

et on pose

$$c_n = \sup_{\eta \in \mathcal{X}} \left(\sup_{x, y \in M^{\Lambda_n}} \left(\inf_{\varphi \in \mathcal{C}_{x, y}} e(\varphi) \right) \right)$$

puis

$$c = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \infty$$

(On montrera, à la fin de la section 5, que $d=1$ implique $c < \infty$, et que $c = \infty$ pour le modèle d'Ising plan usuel.)

Le second résultat s'énonce alors :

THÉORÈME 2. — *Supposons m invariante par translation.*

Si pour t assez grand, on a $\beta_t^{-1}(t) = \frac{K(t)}{\ln(t)}$, où K est une fonction croissant vers l'infini en l'infini, telle que β_t^{-1} décroisse vers zéro en l'infini, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} I_t(m_t) = 0$$

De plus, si on sait que la constante c définie ci-dessus est finie, il suffit de prendre, pour t assez grand, $\beta_t^{-1} = \frac{K}{\ln(t)}$, avec $K > c$, pour obtenir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} I_t(m_t) = 0$$

Ici aussi l'hypothèse sur m est facultative, mais on déduira de ce théorème, à la section 6, des résultats ayant trait à la convergence de l'algorithme de recuit simulé sur \mathcal{X} qui la nécessiteront. Notons, d'autre part, que comme la démonstration du théorème nous donne en fait des estimées plus précises, il nous serait possible d'obtenir des informations sur la vitesse de convergence de cet algorithme.

L'idée de la démonstration des théorèmes 1 et 2 est très simple, et c'est celle que nous avons déjà utilisée dans le cas où l'espace des spins était une variété riemannienne, compacte, connexe et orientée (ou pour étudier les algorithmes de recuit simulé en temps continu, sur un ensemble fini, sur une variété riemannienne compacte ou sur \mathbb{R}^n). Il s'agit d'obtenir des inégalités différentielles pour $I_t(m_t)$ [ou pour $\beta_t^{-1} I_t(m_t)$].

2. ÉVOLUTION DE L'ÉNERGIE LIBRE RESTREINTE A UNE BOÎTE

Nous allons estimer, pour un $\Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d$ donné, la dérivée de l'application $t \mapsto I_{\Lambda,t}(m_t)$, et c'est en se basant sur cette estimation, ainsi que sur les inégalités de Sobolev-logarithmiques présentées dans la section suivante, que nous obtiendrons des inégalités différentielles différentielles pour les $I_{\Lambda,t}(m_t)$ (cf. les sections 4 et 5). Par passage à la limite, quand Λ croît vers \mathbb{Z}^d , nous en déduirons des majorations pour $I_t(m_t)$. Les théorèmes annoncés en découleront.

Dans toute la suite, nous supposons que m est invariante par translation. L'invariance par translation de la famille \mathcal{S} implique qu'il en est de même pour m_t , quel que soit $t \geq 0$. Mais des résultats classiques nous affirment que si p est une probabilité invariante par translation, alors la limite sup qui définit $I_t(p)$ est en fait une limite (voir, par exemple, le théorème 15.12, p. 314 du livre de Georgii [1]). De plus, on a $I_t(p) < \infty$. En effet, soit $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$. On a $\sum_{x \in M^\Lambda} p_\Lambda \lambda_\Lambda(x) = 1$, d'où

$$\max_{y \in M^\Lambda} p_\Lambda(y) \leq (\min_{x \in M^\Lambda} \lambda_\Lambda(x))^{-1}$$

Soit $a = \min_{x \in M} \lambda(x)$. On a $\min_{x \in M^\Lambda} \lambda_\Lambda(x) = a^{|\Lambda|}$, ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in M^\Lambda} p_\Lambda \ln p_\Lambda(x) &\leq \sum_{x \in M^\Lambda} p_\Lambda \ln (\max_{y \in M^\Lambda} p_\Lambda(y)) \\ &\leq \sum_{x \in M^\Lambda} p_\Lambda \ln a^{-|\Lambda|} \\ &= |\Lambda| \ln (a^{-1}) \end{aligned}$$

D'autre part, il est clair qu'il existe une constante $b > 0$ telle que,

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{x \in M^\Lambda} p_\Lambda |\ln g_{\Lambda, t}(x)| \leq b \beta_t |\Lambda|$$

d'où le résultat annoncé (ainsi la situation est ici plus simple que dans le cas où l'espace des spins était une variété riemannienne, compacte, connexe et orientée; il fallait alors utiliser le calcul de Malliavin pour obtenir ce résultat pour la loi du processus en des temps strictement positifs).

On commence par donner, pour $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $x \in M^\Lambda$ et $t > 0$, une formule de type Fokker-Planck généralisée pour $\frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(x)$.

Soit $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$; on pose

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= \{u \in \mathbb{Z}^d / \exists v \in \Lambda \text{ avec } |u-v| \leq R\} \\ \check{\Lambda} &= \{u \in \Lambda / \forall v \notin \Lambda, |u-v| > R\} \\ \partial\bar{\Lambda} &= \bar{\Lambda} \setminus \check{\Lambda} \\ \partial\check{\Lambda} &= \check{\Lambda} \setminus \bar{\Lambda} \end{aligned}$$

Nous allons prouver la

PROPOSITION 3. — Pour tout $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$, $x \in M^\Lambda$, et $t > 0$, on a $m_{t, \Lambda}(x) > 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(x) \lambda_\Lambda(x) &= \sum_{k \in \bar{\Lambda}} \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k x)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(x)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(x, k, z) g_{\Lambda, t}(x) \lambda_\Lambda(x) \\ &+ \sum_{k \in \partial\bar{\Lambda}} \sum_{y \in M^{\partial\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k yx)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(yx)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) q_t(yx, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(yx) \lambda_{\bar{\Lambda}}(yx) \end{aligned}$$

Démonstration. — On suppose Λ et x fixés comme dans l'énoncé de la proposition.

Définissons la fonction $\Phi \in \mathcal{D}$ par

$$\forall y \in \mathcal{X}, \quad \Phi(y) = 1_{\{y_\Lambda = x\}}$$

on a alors

$$m_{t, \Lambda}(\{x\}) = m_{t, \Lambda}(x) \lambda_\Lambda(x) = E[\Phi(X_t)]$$

ainsi d'après (1), pour $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(x) = E[L_t \Phi(X_t)] \lambda_\Lambda^{-1}(x)$$

Rappelons que pour $y \in \mathcal{X}$,

$$L_t \Phi(y) = \sum_{k \in \Lambda} L_{k, t} \Phi(y)$$

et que pour $k \in \Lambda$,

$$L_{k, t} \Phi(y) = \sum_{z \in \mathbf{M}} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) q_t(y, k, z)$$

Ainsi pour $k \in \check{\Lambda}$, $L_{k, t} \Phi$ est \mathcal{B}_Λ -mesurable,

$$\begin{aligned} E[L_{k, t} \Phi(X_t)] &= \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) q_t(y, k, z) m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}}(y) (q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) &= \exp(-\beta_t (H_k(z_k y) - H_k(y))^+) \\ &\quad \times \frac{\exp(-\beta_t U_\Lambda(y))}{Z_{\Lambda, t}} q(y_k, z) \lambda_k(y_k) \lambda_{\Lambda \setminus \{k\}}(y_{\Lambda \setminus \{k\}}) \end{aligned}$$

[où $Z_{\Lambda, t} = \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \exp(-\beta_t U_\Lambda(y)) \lambda_\Lambda(y)$].

Mais remarquons que $U_\Lambda - H_k$ ne dépend pas de la coordonnée k (car $k \in \check{\Lambda}$), ainsi

$$\begin{aligned} \exp(-\beta_t (H_k(z_k y) - H_k(y))^+) \exp(-\beta_t U_\Lambda(y)) \\ = \exp(-\beta_t (U_\Lambda(z_k y) \vee U_\Lambda(y))) \end{aligned}$$

ce qui montre que $q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y)$ est une expression symétrique en y_k et z [car il en est ainsi pour $q(y_k, z) \lambda_k(y_k)$, par réversibilité de q par rapport à λ].

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) \\
 & \quad \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \\
 &= \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \Phi(y) \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \\
 &= \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k x)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(x)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(x, k, z) g_{\Lambda, t}(x) \lambda_\Lambda(x)
 \end{aligned}$$

(par définition de Φ).

Intéressons nous maintenant au cas où $k \in \check{\delta}\Lambda$. $L_{k, t} \Phi$ est alors $\mathcal{B}_{\bar{\Lambda}}$ -mesurable et

$$E[L_{k, t} \Phi(X_t)] = \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y)$$

Comme précédemment, on peut voir que $q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y)$ est une expression symétrique en y_k et z , d'où

$$\begin{aligned}
 E[L_{k, t} \Phi(X_t)] &= \frac{1}{2} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) \\
 & \quad \times \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\
 &= \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \Phi(y) \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\
 &= \sum_{y \in M^{\check{\delta}\Lambda}} \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k yx)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(yx)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) \\
 & \quad \times q_t(yx, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(yx) \lambda_{\bar{\Lambda}}(yx)
 \end{aligned}$$

(la notation yx est définie dans la section précédente).

En regroupant les deux résultants précédents, on donc montré la seconde affirmation de la proposition.

Pour voir que pour tout $t > 0$, $m_{t, \Lambda}(x) > 0$, notons qu'on peut écrire, si Φ est la fonction considérée au début de cette démonstration et si $y \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned}
 L_{k, t} \Phi(y) &= \sum_{z \in M} (\Phi(z_k y) - \Phi(y)) q_t(y, k, z) \\
 &= 1_{\{y_\Lambda = x\}} \sum_{z \in M \setminus \{x_k\}} -1 q_t(y, k, z) + 1_{\{y_\Lambda \neq x\}} \sum_{z \in M} 1_{\{(z_k y)_\Lambda = x\}} q_t(y, k, z)
 \end{aligned}$$

Mais soit $T > 0$ fixé. Il existe une constante $C > 1$ (dépendant de T et de Λ) telle que

$$\forall y \in \mathcal{X}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall k \in \Lambda, \quad \forall z \in M_{y_k}, \\ C^{-1} \leq q_t(y, k, z) \leq C$$

où on a posé, pour $v \in M$, $M_v = \{u \in M \setminus \{v\} / q(v, u) > 0\}$, c'est-à-dire les premiers voisins de v .

On en déduit que pour $t \in [0, T]$,

$$L_{k, t} \Phi(y) \geq -C |M| 1_{\{y_\Lambda = x\}} + C^{-1} \sum_{z \in M_{y_k}} 1_{\{(z_k y)_\Lambda = x\}}$$

d'où

$$E[L_{k, t} \Phi(X_t)] \geq -C |M| m_{\Lambda, t}(x) \lambda_\Lambda^{-1}(x) \\ + C^{-1} \underbrace{P_m(\exists z \in M_{(X_t)_k} \text{ tel que } z_k X_t = x)}_{P_m((X_t)_k \in M_{x_k} \text{ et } (X_t)_{\Lambda \setminus \{k\}} = x_{\Lambda \setminus \{k\}})}$$

puis,

$$\frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(x) = E[L_t \Phi(X_t)] \lambda_\Lambda^{-1}(x) \geq -C |M| \cdot |\Lambda| m_{t, \Lambda}(x) \\ + \lambda_\Lambda^{-1}(x) C^{-1} P_m[\exists k \in \Lambda \text{ tel que } (X_t)_k \in M_{x_k} \text{ et } (X_t)_{\Lambda \setminus \{k\}} = x_{\Lambda \setminus \{k\}}]$$

Soit $x_0 \in M^\Lambda$ tel que $m_{0, \Lambda}(x_0) > 0$. D'après l'inégalité ci-dessus, on a

$$\forall T \geq t \geq 0,$$

$$\frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(x_0) \geq -C |M| \cdot |\Lambda| m_{t, \Lambda}(x_0)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt} (\exp(C |M| \cdot |\Lambda| t) m_{t, \Lambda}(x_0)) \geq 0$$

et on en déduit donc que

$$\forall T \geq t \geq 0, \quad m_{t, \Lambda}(x_0) > 0$$

Considérons maintenant un premier voisin x de x_0 [*i.e.* un élément x de M^Λ qui s'écrit $(z_0)_{k_0} x_0$ pour un certain $k_0 \in \Lambda$ et un certain $z_0 \in M_{(x_0)_{k_0}}$]. Alors,

$$\forall T \geq t > 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\exp(C |M| \cdot |\Lambda| t) m_{t, \Lambda}(x)) \\ \geq \lambda_\Lambda^{-1}(x) C^{-1} \exp(C |M| \cdot |\Lambda| t) P_m \\ [\exists k \in \Lambda \text{ tel que } (X_t)_k \in M_{x_k} \text{ et } (X_t)_{\Lambda \setminus \{k\}} = x_{\Lambda \setminus \{k\}}] \\ \geq \lambda_\Lambda^{-1}(x) C^{-1} \exp(C |M| \cdot |\Lambda| t) P_m((X_t)_\Lambda = x_0) \\ = C^{-1} \exp(C |M| \cdot |\Lambda| t) \lambda_\Lambda^{-1}(x) \lambda_\Lambda(x_0) m_{t, \Lambda}(x_0) > 0$$

Il s'ensuit que pour tout t tel que $T \geq t > 0$, on a

$$m_{t, \Lambda}(x) > 0$$

On considère alors les premiers voisins des premiers voisins de x_0 , et ainsi de suite. De proche en proche, on finit par obtenir [grâce à la condition (C)],

$$\forall t > 0 \text{ (et } t \leq T), \quad \forall x \in M^\Lambda, \quad m_{t, \Lambda}(x) > 0$$

T pouvant être choisi arbitrairement grand, le premier résultat de la proposition est démontré. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier l'évolution de l'énergie libre restreinte à une boîte :

PROPOSITION 4 :

$$\forall T > 0, \quad \exists \hat{C}(T) > 0 \text{ tel que } \forall \Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d, \quad t \in [0, T],$$

$$\begin{aligned} \frac{dI_{t, \Lambda}(m_t)}{dt} &= \frac{d\beta_t}{dt} \int_{M^\Lambda} U_\Lambda(m_{t, \Lambda} - g_{\Lambda, t}) d\lambda_\Lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) + R_{\Lambda, t} \end{aligned}$$

où $R_{\Lambda, t} \leq |\partial\Lambda| \hat{C}(T)$.

Démonstration. — Soient $t \geq 0$ et $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ fixés. On a, du fait que $m_{t, \Lambda} > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dI_{t, \Lambda}(m_t)}{dt} &= - \sum_{y \in M^\Lambda} \frac{d}{dt} \ln g_{\Lambda, t}(y) m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ &\quad + \sum_{y \in M^\Lambda} \frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) + \sum_{y \in M^\Lambda} \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \frac{d}{dt} m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) \end{aligned}$$

Mais le premier terme du membre de droite vaut

$$\begin{aligned} \sum_{y \in M^\Lambda} \frac{d}{dt} [\beta_t U_\Lambda(y) + \ln (\sum_{z \in M^\Lambda} \exp(-\beta_t U_\Lambda(z)) \lambda_\Lambda(z))] m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ = \frac{d\beta_t}{dt} \sum_{y \in M^\Lambda} U_\Lambda(y) m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) - \frac{d\beta_t}{dt} \sum_{y \in M^\Lambda} U_\Lambda(y) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ = \frac{d\beta_t}{dt} \int_{M^\Lambda} U_\Lambda(m_{t, \Lambda} - g_{\Lambda, t}) d\lambda_\Lambda \end{aligned}$$

Quand au second terme, il est nul car il s'écrit aussi

$$\frac{d}{dt} \sum_{y \in M^\Lambda} m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y)$$

Reste le troisième terme qui vaut, d'après la proposition 3,

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \sum_{k \in \Lambda} \sum_{y \in M^\Lambda} \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \\
 & \times \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \\
 & \quad + \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \\
 & \times \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y)
 \end{aligned}$$

Par symétrie de $q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y)$ en y_k et z le premier terme de l'expression précédente vaut

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) \\
 & \quad \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y)
 \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il nous reste donc à majorer le dernier terme de (*). On utilise pour cela un calcul présenté par Holley dans [2].

Par symétrie en y_k et z de $q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y)$, ce terme vaut

$$\begin{aligned}
 (**) \quad & -\frac{1}{2} \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) \\
 & \quad \times \left(\frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(z_k y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} - \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\
 & \quad = \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \\
 & \quad \times \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{g_{\Lambda, t}} - \ln \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{g_{\Lambda, t}} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\
 & = \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \ln \left(\frac{g_{\Lambda, t}(y)}{g_{\Lambda, t}(z_k y)} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\
 & \quad + \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in M^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in M} \frac{m_{t, \bar{\Lambda}}(y)}{g_{\bar{\Lambda}, t}} \ln \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) q_t(y, k, z) g_{\bar{\Lambda}, t}(y) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y)
 \end{aligned}$$

Mais si on pose $A = 2 \sum_{F \ni 0} \|J_F\|_\infty$, on a, par invariance par translation des potentiels,

$$\begin{aligned}
 \forall t \geq 0, \quad \forall y \in M^{\bar{\Lambda}}, \quad \forall z \in M \quad \text{et} \quad \forall k \in \check{\delta}\Lambda, \\
 \left| \ln \frac{g_{\Lambda, t}(y)}{g_{\Lambda, t}(z_k y)} \right| \leq \beta_t A
 \end{aligned}$$

et ainsi, puisque $q_t(y, k, z) \leq 1$, le premier terme de l'expression (***) est borné par

$$|\check{\delta}\Lambda| \cdot |\mathbf{M}| \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} m_{t, \bar{\Lambda}}(y) \beta_t \mathbf{A} \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) = \beta_t \mathbf{A} |\check{\delta}\Lambda| \cdot |\mathbf{M}|$$

Quand au second terme, il s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \bar{\Lambda}}(y) \ln \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) q_t(y, k, z) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\ & \leq \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \bar{\Lambda}}(y) \ln^+ \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) q_t(y, k, z) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\ & \quad \text{[où on a posé } \ln^+(\cdot) = \max(\ln(\cdot), 0)\text{]} \\ & \leq \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^{\bar{\Lambda}}} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \bar{\Lambda}}(y) \ln^+ \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) \lambda_{\bar{\Lambda}}(y) \\ & = \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \Lambda}(y) \ln^+ \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) \lambda_\Lambda(y) \\ & \quad \left[\text{car } y \mapsto \frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \text{ est } \mathcal{B}_\Lambda\text{-mesurable} \right] \\ & = \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} \frac{m_{t, \Lambda}(y)}{m_{\Lambda, t}(z_k y)} \ln^+ \left(\frac{m_{t, \Lambda}(z_k y)}{m_{t, \Lambda}(y)} \right) m_{t, \Lambda}(z_k y) \lambda_\Lambda(y) \end{aligned}$$

Mais $\forall x > 0, x \ln^+(x^{-1}) \leq e^{-1}$, il s'ensuit donc que l'expression ci-dessus est majorée par

$$\begin{aligned} & e^{-1} \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \Lambda}(z_k y) \frac{\lambda_\Lambda(y)}{\lambda_\Lambda(z_k y)} \lambda_\Lambda(z_k y) \\ & \leq e^{-1} \mathbf{B} \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbf{M}} m_{t, \Lambda}(z_k y) \lambda_\Lambda(z_k y) \\ & \quad \left[\text{où } \mathbf{B} = \sup_{a, b \in \mathbf{M}} \frac{\lambda(a)}{\lambda(b)} \right] \\ & = e^{-1} \mathbf{B} |\mathbf{M}| \sum_{k \in \check{\delta}\Lambda} \sum_{y \in \mathbf{M}^\Lambda} m_{t, \Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) = e^{-1} \mathbf{B} |\mathbf{M}| \cdot |\check{\delta}\Lambda| \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé avec

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{T}) = e^{-1} \mathbf{B} |\mathbf{M}| + \mathbf{A} |\mathbf{M}| \sup_{0 \leq t \leq \mathbf{T}} \beta_t \quad \square$$

On va réécrire la proposition 4 sous une autre forme. Commençons par introduire les spécifications associées à la famille $\beta_t \mathcal{J}$:

Pour $t \geq 0, \Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d, \eta \in \mathcal{X}$ et $x_\Lambda \in \mathbf{M}^\Lambda$, on pose

$$\mathbf{G}_{\Lambda, t, \eta}(x_\Lambda) = \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda, t, \eta}} \exp \left(-\beta_t \sum_{\mathbf{F} \cap \Lambda \neq \emptyset} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(x_\Lambda \eta) \right)$$

où,

$$Z_{\Lambda, t, \eta} = \int_{M^\Lambda} \exp \left(-\beta_t \sum_{F \cap \Lambda \neq \emptyset} J_F(y_\Lambda \eta) \right) d\lambda_\Lambda(y_\Lambda).$$

On a alors,

PROPOSITION 5. — Pour tout $T > 0$, il existe une constante $\tilde{C}(T) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \forall \Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \eta \in \mathcal{X}, \\ \frac{dI_{\Lambda, t}(m_t)}{dt} &= \frac{d\beta_t}{dt} \int_{M^\Lambda} U_\Lambda(m_{t, \Lambda} - g_{\Lambda, t}) d\lambda_\Lambda \\ & - \sum_{k \in \Lambda} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(z_k y) - \sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(y) \right)^2 \\ & \quad \times q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) + \tilde{R}_{\Lambda, t} \end{aligned}$$

où,

$$\tilde{R}_{\Lambda, t} \leq |\partial \Lambda| \tilde{C}(T)$$

Démonstration. — Commençons par nous intéresser aux $k \in \tilde{\Lambda}$. Remarquons que l'expression

$$q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y)$$

est alors symétrique en y_k et z , ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y) - \ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y) - \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) \right) q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ & = - \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y) - \ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) \right) \\ & \quad \times \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ & = - \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} (\ln m_{t, \Lambda}(z_k y) - \ln m_{t, \Lambda}(y)) m_{t, \Lambda}(y) q_t(y \eta, k, z) \lambda_\Lambda(y) \\ & \quad - \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \ln \left(\frac{G_{\Lambda, t, \eta}(y)}{G_{\Lambda, t, \eta}(z_k y)} \right) m_{t, \Lambda}(y) q_t(y \eta, k, z) \lambda_\Lambda(y) \end{aligned}$$

Mais pour $k \in \tilde{\Lambda}$ et $y \in M^\Lambda$, on a

$$\frac{G_{\Lambda, t, \eta}(y)}{G_{\Lambda, t, \eta}(z_k y)} = \frac{g_{\Lambda, t}(y)}{g_{\Lambda, t}(z_k y)}$$

et $q_t(y, \eta, k, z)$ ne dépend pas de η [en effet, pour un $k \in \mathbb{Z}^d$ et un $z \in \mathbb{M}$ fixés, $q_t(x, k, z)$ ne dépend que des coordonnées de x qui sont dans $\{\overline{k}\}$].

On obtient donc, en remplaçant $G_{\Lambda, t, \eta}$ par $g_{\Lambda, t}$ dans le calcul précédent, que pour $k \in \tilde{\Lambda}$

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbb{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbb{M}} & \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y) - \ln \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) \right) \\ & \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y) - \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y) \right) q_t(y, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ & = \sum_{y \in \mathbb{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbb{M}} \left(\ln \frac{m_{t, \Lambda}}{g_{\Lambda, t}}(z_k y) - \ln \frac{m_{t, \Lambda}}{g_{\Lambda, t}}(y) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{m_{t, \Lambda}}{g_{\Lambda, t}}(z_k y) - \frac{m_{t, \Lambda}}{g_{\Lambda, t}}(y) \right) q_t(y, k, z) g_{\Lambda, t}(y) \lambda_\Lambda(y) \end{aligned}$$

D'autre part, on a, pour tous les nombres positifs a, b ,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq \frac{1}{2}(a - b)(\ln a - \ln b)$$

(ce résultat simple est prouvé dans la démonstration du lemme 7 de la section suivante).

Ainsi, en appliquant ceci avec $a = \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(z_k y)$ et $b = \frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}(y)$, il est clair, d'après la proposition 4, que pour tout $\eta \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\Lambda, t}(m_t)}{dt} &= \frac{d\beta_t}{dt} \int_{\mathbb{M}^\Lambda} U_\Lambda(m_{t, \Lambda} - g_{\Lambda, t}) d\lambda_\Lambda \\ & \quad - \sum_{k \in \tilde{\Lambda}} \sum_{y \in \mathbb{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbb{M}} \left(\sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(z_k y) - \sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(y) \right)^2 \\ & \quad \times q_t(y, \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) + R_{\Lambda, t} \end{aligned}$$

où,

$$R_{\Lambda, t} \leq |\tilde{\partial}\Lambda| \hat{C}(T)$$

Pour terminer la démonstration de la proposition 5, il suffit donc de borner l'expression

$$\left| \sum_{y \in \mathbb{M}^\Lambda} \sum_{z \in \mathbb{M}} \left(\sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(z_k y) - \sqrt{\frac{m_{t, \Lambda}}{G_{\Lambda, t, \eta}}}(y) \right)^2 q_t(y, \eta, k, z) G_{\Lambda, t, \eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \right|$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $k \in \tilde{\partial}\Lambda$, par une constante $K(T)$ ne dépendant que de $T > 0$. En effet, le résultat annoncé en découlera avec

$$\tilde{R}_{\Lambda, t} = R_{\Lambda, t} + K(T) |\tilde{\partial}\Lambda|$$

Soit $k \in \Lambda$ fixé.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}}(z_k y) - \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}}(y) \right)^2 q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda,t,\eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \right| \\ & \leq \left| \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}(z_k y) + \frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}(y) \right) q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda,t,\eta}(y) \lambda_\Lambda(y) \right| \\ & = \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} m_{t,\Lambda}(y) q_t(y \eta, k, z) \lambda_\Lambda(y) \\ & \quad + \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}(z_k y) G_{\Lambda,t,\eta}(y) q_t(y \eta, k, z) \lambda_\Lambda(y) \\ & \leq \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} m_{t,\Lambda}(y) \lambda_\Lambda(y) \\ & \quad + \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \frac{G_{\Lambda,t,\eta}(y)}{G_{\Lambda,t,\eta}(z_k y)} \frac{\lambda_\Lambda(y)}{\lambda_\Lambda(z_k y)} m_{t,\Lambda}(z_k y) \lambda_\Lambda(z_k y) \leq |M| (1 + A \exp(B \beta_t)) \end{aligned}$$

où,

$$A = \sup_{m, n \in M} \frac{\lambda(m)}{\lambda(n)}$$

$$B = 2 \sum_{F \ni 0} \|J_F\|_\infty$$

ce qui est le type de borne que l'on cherchait à obtenir. \square

3. INÉGALITÉS DE SOBOLEV-LOGARITHMIQUES

Comme dans le cas où l'espace des spins était une variété compacte (traité dans [5]), les inégalités démontrées dans cette section sont importantes. Elles nous permettront de minorer l'expression

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{y \in M^\Lambda} \sum_{z \in M} \left(\sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}}(z_k y) - \sqrt{\frac{m_{t,\Lambda}}{G_{\Lambda,t,\eta}}}(y) \right)^2 q_t(y \eta, k, z) G_{\Lambda,t,\eta}(y) \lambda_\Lambda(y)$$

qui est apparue dans la proposition 5.

Commençons par énoncer quelques définitions générales.

On appellera graphe, un couple (N, α) , où N est un ensemble fini, et où α est une application de $N \times N$ dans \mathbb{R}_+ (cependant les valeurs de α sur la diagonale ne joueront aucun rôle). Si μ est une probabilité sur N , on dira que μ satisfait des inégalités de Sobolev-logarithmiques (en abrégé I.S.L.) relativement au graphe (N, α) , s'il existe une constante $a > 0$ telle

que

$$\forall f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ \int f^2 \ln f^2 d\mu \leq a \int |\nabla_\alpha f|^2 d\mu + \int f^2 d\mu \ln \left[\int f^2 d\mu \right]$$

où pour tout $x \in \mathbf{N}$, on a posé

$$|\nabla_\alpha f|(x) = \sqrt{\sum_{y \in \mathbf{N}} \alpha(x, y) (f(y) - f(x))^2}$$

Le nombre a sera dit un coefficient admissible pour les I.S.L. satisfaites par μ .

Une propriété remarquable des I.S.L. est leur comportement par passage au produit tensoriel; si (\mathbf{N}_1, α_1) et (\mathbf{N}_2, α_2) sont deux graphes munis respectivement des probabilités μ_1 et μ_2 , qui satisfont des I.S.L. avec pour coefficients admissibles a_1 et a_2 , alors $\mu_1 \otimes \mu_2$ satisfait des I.S.L. relativement au graphe produit $(\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$, un coefficient admissible étant $a_1 \vee a_2$, où l'application $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ est définie par

$$\forall x_1, y_1 \in \mathbf{N}_1, \quad \forall x_2, y_2 \in \mathbf{N}_2, \\ \alpha_1 \otimes \alpha_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} \alpha_1(x_1, y_1), & \text{si } x_2 = y_2 \text{ et } x_1 \neq y_1 \\ \alpha_2(x_2, y_2), & \text{si } x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \neq y_2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet,

$$\int f^2 \ln f^2 d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int d\mu_2(y) \int f^2(x, y) \ln f^2(x, y) d\mu_1(x) \\ \leq \int d\mu_2(y) a_1 \int \sum_{x' \in \mathbf{N}_1} \alpha_1(x, x') (f(x', y) - f(x, y))^2 d\mu_1(x) \\ + \int d\mu_2(y) \int f^2(x, y) d\mu_1(x) \ln \left[\int f^2(x, y) d\mu_1(x) \right]$$

On s'intéresse à ce dernier terme, qui s'écrit aussi, si on pose $F(y) = \left(\int f^2(x, y) d\mu_1(x) \right)^{1/2}$,

$$\int d\mu_2(y) F^2(y) \ln F^2(y) \leq a_2 \int \sum_{y' \in \mathbf{N}_2} \alpha_2(y, y') (F(y') - F(y))^2 d\mu_2(y) \\ + \underbrace{\int F^2(y) d\mu_2(y) \ln \int F^2(y) d\mu_2(y)}_{\int f^2 d\mu_1 \otimes \mu_2 \ln \int f^2 d\mu_1 \otimes \mu_2}$$

Mais on a

$$|F(y') - F(y)| \leq \left(\int (f(x, y') - f(x, y))^2 d\mu_1(x) \right)^{1/2}$$

d'où

$$\int \sum_{y' \in N_2} \alpha_2(y, y') (F(y') - F(y))^2 d\mu_2(y) \leq \int \sum_{y' \in N_2} \alpha_2(y, y') (f(x, y') - f(x, y))^2 d\mu_1(x) \otimes d\mu_2(y)$$

et le résultat annoncé.

Cette propriété se généralise immédiatement au cas où on dispose de n graphes, un coefficient admissible pour le produit tensoriel des mesures étant alors le sup des coefficients admissibles pour les probabilités initiales.

Rappelons également un résultat dû à Holley et Stroock [4].

Soit N un ensemble fini, muni d'une probabilité μ chargeant tous les points, et d'une probabilité de transition $p(\cdot, \cdot)$, réversible par rapport à μ . On suppose que p satisfait la propriété d'irréductibilité suivante :

$\forall x, y \in N$, il existe un chemin, pour le graphe (N, p) , reliant x à y [*i.e.* une famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de N , telle que $x_0 = x, x_n = y$, et $\forall 0 \leq i \leq n-1, p(x_i, x_{i+1}) > 0$].

Soit U une fonction définie sur N . On associe à (N, p) et à U une constante $c(N, U)$ de la manière suivante :

Pour $x, y \in N$, soit $\mathcal{C}_{x,y}$ l'ensemble des chemins allant de x à y [pour le graphe (N, p)]. On définit l'élévation de $\varphi = (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}_{x,y}$ par

$$e(\varphi) = \sup_{0 \leq i \leq n} U(x_i) - U(x) - U(y) + \inf_{z \in N} U(z)$$

puis, on pose,

$$c(N, U) = \sup_{x, y \in N} (\inf_{\varphi \in \mathcal{C}_{x,y}} e(\varphi)).$$

Pour $\beta > 0$, on définit la probabilité

$$\mu_\beta(\cdot) = \frac{1}{Z_\beta} \exp(-\beta U(\cdot)) \mu(\cdot)$$

où Z_β est la constante de normalisation.

On pose également

$$\alpha_\beta: N \times N \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto \exp(-\beta(U(y) - U(x))^+) p(x, y)$$

Alors pour tout $\beta > 0$, la probabilité μ_β satisfait des I.S.L. relativement au graphe (N, α_β) . De plus, si on note $a_\beta(N, U)$ le plus petit coefficient admissible pour celles-ci alors

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln a_\beta(N, U) \leq c(N, U)$$

[cf. le théorème 3.21 de [4], dont les hypothèses sont ici bien vérifiées, car, comme me l'a fait remarquer Stroock, on peut montrer que μ satisfait des I.S.L., en utilisant la compacité de la boule unité de $L^2(N, \mu)$ (qui est de dimension finie) et la condition d'irréductibilité pour p].

Revenons à notre contexte.

Pour $t \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, soit $a(p, t)$ la plus petite constante telle que :

$$\forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \forall f: M^{\Lambda_p} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & \int_{M^{\Lambda_p}} f^2 \ln(f^2) G_{\Lambda_p, t, \eta} d\lambda_{\Lambda_p} \\ & \leq a(p, t) \int_{M^{\Lambda_p}} \sum_{k \in \Lambda_p} \sum_{z \in M} (f(z_k y) - f(y))^2 q_t(y, \eta, k, z) G_{\Lambda_p, t, \eta}(y) d\lambda_{\Lambda_p}(y) \\ & \quad + \int_{M^{\Lambda_p}} f^2 G_{\Lambda_p, t, \eta} d\lambda_{\Lambda_p} \ln \left[\int_{M^{\Lambda_p}} f^2 G_{\Lambda_p, t, \eta} d\lambda_{\Lambda_p} \right] \end{aligned}$$

Il est facile de se rendre compte, à l'aide du résultat que nous venons de rappeler [en prenant $N = M^{\Lambda_p}$, $\mu = \lambda_{\Lambda_p}$ et en considérant la probabilité de transition r définie, à une constante multiplicative près, par

$$r(x_{\Lambda_p}, y_{\Lambda_p}) = \begin{cases} q(x_i, y_i), & \text{s'il existe } i \in \Lambda_p \text{ tel que } x_i \neq y_i, \text{ et } \forall j \in \Lambda_p \setminus \{i\}, x_j = y_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

que $a(p, t) < \infty$ (car $G_{\Lambda_p, t, \eta}$ ne dépend que des coordonnées de η qui sont dans $\partial\Lambda_p$ et $|M^{\partial\Lambda_p}| < \infty$, et que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_t} \ln a(p, t) \leq \sup_{\eta \in \mathcal{X}} c(M^{\Lambda_p}, \sum_{F \cap \Lambda_p \neq \emptyset} J_F(\cdot, \eta)) = c_p$$

où c_p est le nombre introduit à la section 1, avant l'énoncé du théorème 2.

A l'aide du premier rappel, nous allons démontrer la

PROPOSITION 6. — Il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que

$$\forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \forall p, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall g: M^{\Lambda_n, p} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$\begin{aligned} & \int g^2 \ln g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n} d\lambda_{\Lambda_n, p} \\ & \leq (a(p, t) \vee B) \int \sum_{k \in \Lambda_n, p} \sum_{z \in M} (g(z_k y) - g(y))^2 q_t(y, \eta, k, z) \\ & \quad \times G_{\Lambda_n, p, t, n}(y) d\lambda_{\Lambda_n, p}(y) + A n^d p^{d-1} \beta_t \int g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n} d\lambda_{\Lambda_n, p} \\ & \quad + \int g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n} d\lambda_{\Lambda_n, p} \ln \left[\int g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n} d\lambda_{\Lambda_n, p} \right] \end{aligned}$$

où le cube $\Lambda_{n,p}$ est défini par

$$\Lambda_{n,p} = \{ u \in \mathbb{Z}^d / \forall 1 \leq j \leq d, -npR < u_j \leq (np+n-1)R \}$$

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle du résultat équivalent que nous avons montré dans le cas où l'espace des spins était une variété compacte. Notamment, on commence par quadriller $\Lambda_{n,p}$ en

$$\Lambda_{n,p} = \bigsqcup_{i \in \{1, \dots, n\}^d} \Lambda_{n,p}^{(i)} \sqcup \mathbb{R}_{n,p}$$

où les $(\Lambda_{n,p}^{(i)})_{i \in \{1, \dots, n\}^d}$ forment une famille de translatés disjoints de $\Lambda_{n,p}$, inclus dans $\Lambda_{n,p}$, et deux à deux hors de portée d'interactions [plus précisément, on prend

$$\Lambda_{n,p}^{(i)} = \{ u \in \mathbb{Z}^d / \forall 1 \leq j \leq d, -npR + (2p+1)(i_j-1)R < u_j \leq -(np+1)R + (2p+1)i_jR \}.$$

On posera également $T_{n,p} = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}^d} \Lambda_{n,p}^{(i)}$ et on supposera dans la suite que $\eta \in \mathcal{X}$ et $t \geq 0$ sont fixés.

On introduit les probabilités suivantes :

$dG_{\Lambda_{n,p},t,n}$ désignera la probabilité $G_{\Lambda_{n,p},t,n}$ $d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$.

$dG_{n,p}$ sera la restriction de $dG_{\Lambda_{n,p},t,n}$ à la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{n,p}}$, on la considèrera donc aussi comme une probabilité sur $M^{\mathbb{R}_{n,p}}$.

$dG_{n,p} \cdot$ sera une version de la probabilité conditionnelle à l'événement $x_{\mathbb{R}_{n,p}} = \cdot$ (*i.e.* on conditionne par rapport à la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{n,p}}$), sous la loi $dG_{\Lambda_{n,p},t,n}$.

[Ainsi $dG_{\Lambda_{n,p},t,n}(x_{\Lambda_{n,p}}) = dG_{n,p}(x_{\mathbb{R}_{n,p}}) dG_{n,p,x_{\mathbb{R}_{n,p}}}(x_{T_{n,p}})$.]

En conditionnant par rapport à la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_{n,p}}$ et en utilisant le premier rappel, du fait que les coordonnées dans différents $\Lambda_{n,p}^{(i)}$ sont indépendantes et que la restriction de $dG_{n,p} \cdot$ à un $M^{\Lambda_{n,p}^{(i)}}$ peut s'écrire sous la forme $dG_{\Lambda_{n,p}^{(i)},t,y}$ (où $y \in \mathcal{X}$ est tel que $y_{\mathbb{R}_{n,p}} = \cdot$ et $y_{\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{R}_{n,p}} = \eta_{\mathbb{Z}^d \setminus \mathbb{R}_{n,p}}$), on obtient :

$$\int g^2 \ln g^2 G_{\Lambda_{n,p},t,n} d\lambda_{\Lambda_{n,p}} \leq a(p,t) \int_{M^{\mathbb{R}_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{\mathbb{R}_{n,p}}) \\ \times \int_{M^{T_{n,p}}} \sum_{k \in T_{n,p}} \sum_{z \in M} (g(z_k x_{\mathbb{R}_{n,p}} x_{T_{n,p}}) - g(x_{\mathbb{R}_{n,p}} x_{T_{n,p}}))^2 \\ \times q_t(x_{\Lambda_{n,p}} \eta, k, z) dG_{n,p,x_{\mathbb{R}_{n,p}}}(x_{T_{n,p}}) \\ + \int_{M^{\mathbb{R}_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{\mathbb{R}_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{n,p,x_{\mathbb{R}_{n,p}}} \ln \left[\int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{n,p,x_{\mathbb{R}_{n,p}}} \right]$$

Supposons, dans un premier temps, que

$$\int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{\Lambda_{n,p},t,n} = 1.$$

Posons $r = g^2 G_{\Lambda_{n,p,t,n}}$ (qui est donc une fonction sur $M^{\Lambda_{n,p}}$), et notons dr la probabilité $r d\lambda_{\Lambda_{n,p}}$ associée (elle dépend, en fait, de n, p, t , et η).

Ainsi g^2 est la densité $\frac{dr}{dG_{\Lambda_{n,p,t,n}}}$.

Mais notons $dr_{n,p}$ la restriction de dr à la tribu $\mathcal{B}_{R_{n,p}}$. Il est facile de voir que $\int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}}$ est alors la densité $\frac{dr_{n,p}}{dG_{n,p}}(x_{R_{n,p}})$.

Notons, tout naturellement, $r_{n,p} = \frac{dr_{n,p}}{d\lambda_{R_{n,p}}}$, et $G_{n,p} = \frac{dG_{n,p}}{d\lambda_{R_{n,p}}}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{M^{R_{n,p}}} dG_{n,p}(x_{R_{n,p}}) \int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \ln \left[\int_{M^{T_{n,p}}} g^2 dG_{n,p,x_{R_{n,p}}} \right] \\ = \int_{M^{R_{n,p}}} \ln \left(\frac{dr_{n,p}}{dG_{n,p}} \right) dr_{n,p} \\ = \int_{M^{R_{n,p}}} r_{n,p} \ln(r_{n,p}) d\lambda_{R_{n,p}} - \int_{M^{R_{n,p}}} \ln(G_{n,p}) dr_{n,p} \end{aligned}$$

On va s'intéresser au premier terme de cette dernière expression. Soit $B/2$ un coefficient admissible pour les I.S.L. satisfaites par λ , relativement au graphe (M, q) . D'après la propriété rappelée au début de cette section, $B/2$ est aussi un coefficient admissible pour les I.S.L. vérifiées par les λ_{Λ} , ceci $\forall \Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{M^{R_{n,p}}} r_{n,p} \ln(r_{n,p}) d\lambda_{R_{n,p}} \\ \leq \frac{B}{2} \int_{M^{R_{n,p}}} \sum_{k \in R_{n,p}} \sum_{z \in M} (\sqrt{r_{n,p}(z_k y)} - \sqrt{r_{n,p}(y)})^2 q(y_k, z) d\lambda_{R_{n,p}} \end{aligned}$$

Cependant,

$$\forall y \in M^{R_{n,p}}, \quad r_{n,p}(y) = \int r(y x_{T_{n,p}}) d\lambda_{T_{n,p}}(x_{T_{n,p}})$$

ainsi, d'après l'inégalité triangulaire pour la norme $L^2(\lambda_{T_{n,p}})$, appliquée aux fonctions $\sqrt{r(z_k y \cdot)}$ et $\sqrt{r(y \cdot)}$, on a

$$(\sqrt{r_{n,p}(z_k y)} - \sqrt{r_{n,p}(y)})^2 \leq \int (\sqrt{r(z_k y x_{T_{n,p}})} - \sqrt{r(y x_{T_{n,p}})})^2 d\lambda_{T_{n,p}}(x_{T_{n,p}})$$

d'où,

$$\begin{aligned} & \int_{M^{\mathbb{R}_{n,p}}} r_{n,p} \ln(r_{n,p}) d\lambda_{\mathbb{R}_{n,p}} \\ & \leq \frac{B}{2} \int_{M^{\Lambda_{n,p}}} \sum_{k \in \mathbb{R}_{n,p}} \sum_{z \in M} (\sqrt{r(z_k x)} - \sqrt{r(x)})^2 q(x_k, z) d\lambda_{\Lambda_{n,p}}(x) \\ & = \frac{B}{2} \int_{M^{\Lambda_{n,p}}} \sum_{k \in \mathbb{R}_{n,p}} \sum_{z \in M} (\sqrt{g^2 G_{\Lambda_{n,p,t,n}}(z_k x)} - \sqrt{g^2 G_{\Lambda_{n,p,t,n}}(x)})^2 \\ & \qquad \qquad \qquad \times q(x_k, z) d\lambda_{\Lambda_{n,p}}(x) \end{aligned}$$

Pour pouvoir continuer, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 7. - Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des réels strictement positifs, alors

$$(\sqrt{f_1 g_1} - \sqrt{f_2 g_2})^2 \leq (\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 \inf(g_1, g_2) + |\ln g_1 - \ln g_2| (f_1 g_1 + f_2 g_2)$$

Démonstration. - Pour démontrer ceci on peut supposer, par symétrie du résultat, que $g_1 \geq g_2$.

On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{f_1 g_1} - \sqrt{f_2 g_2})^2 &= ((\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}) \sqrt{g_2} - \sqrt{f_1} (\sqrt{g_2} - \sqrt{g_1}))^2 \\ &\leq 2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 g_2 + 2f_1 (\sqrt{g_2} - \sqrt{g_1})^2 \end{aligned}$$

Mais remarquons que $(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})^2 \leq 1/2 (\ln g_1 - \ln g_2) (g_1 - g_2)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \ln g_1 - \ln g_2 &= \int_0^1 \frac{g_1 - g_2}{g_2 + t(g_1 - g_2)} dt \\ &\geq (g_1 - g_2) \frac{1}{\int_0^1 g_2 + t(g_1 - g_2) dt} \end{aligned}$$

(par l'inégalité de Jensen)

$$= 2 \frac{g_1 - g_2}{g_1 + g_2}$$

et il s'en suit que

$$(\ln g_1 - \ln g_2) (g_1 - g_2) \geq 2 (\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & (\sqrt{f_1 g_1} - \sqrt{f_2 g_2})^2 \\ & \leq 2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 g_2 + f_1 (g_1 - g_2) |\ln g_1 - \ln g_2| \\ & \leq 2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 \inf(g_1, g_2) + f_1 g_1 |\ln g_1 - \ln g_2| \\ & \leq 2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2 \inf(g_1, g_2) + |\ln g_1 - \ln g_2| (f_1 g_1 + f_2 g_2) \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. \square

On applique ce lemme avec

$$\begin{aligned} f_1 &= g^2(z_k x), & g_1 &= G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x) \\ f_2 &= g^2(x), & g_2 &= G_{\Lambda_n, p, t, n}(x) \end{aligned}$$

Remarquons qu'alors,

$$\begin{aligned} \inf(g_1, g_2) &= G_{\Lambda_n, p, t, n}(x) \exp(-\beta_t (H_k(z_k x \eta) - H_k(x \eta))^+) \\ &\quad (= G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x) \exp(-\beta_t (H_k(x \eta) - H_k(z_k x \eta))^+)) \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{M}^{\Lambda_n, p}} \sum_{z \in \mathbb{M}} (\sqrt{g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x)} - \sqrt{g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(x)})^2 q(x_k, z) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{M}^{\Lambda_n, p}} \sum_{z \in \mathbb{M}} (g(z_k x) - g(x))^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(x) q_t(x \eta, k, z) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{M}^{\Lambda_n, p}} \sum_{z \in \mathbb{M}} \left| \ln \frac{G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x)}{G_{\Lambda_n, p, t, n}(x)} \right| \\ &\quad \times (g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x) + g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(x)) q(x_k, z) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) \end{aligned}$$

Mais il existe une constante $A_1 > 0$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $t \geq 0$, $\eta \in \mathcal{X}$, $x \in \mathbb{M}^{\Lambda_n, p}$, et $z \in \mathbb{M}$, on ait

$$\left| \ln \frac{G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x)}{G_{\Lambda_n, p, t, n}(x)} \right| \leq A_1 \beta_t.$$

D'autre part, soit

$$Q = \sup_{a, b \in \mathbb{M}} q(a, b).$$

On a alors montré que

$$\begin{aligned} \int p_{n, p} \ln p_{n, p} d\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n, p} &\leq B \int_{\mathbb{M}^{\Lambda_n, p}} \sum_{k \in \mathbb{R}_n, p} \sum_{z \in \mathbb{M}} g(z_k x) - g(x))^2 \\ &\quad \times G_{\Lambda_n, p, t, n}(x) q_t(x \eta, k, z) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) \\ &\quad + \frac{B}{2} A_1 Q \beta_t \int_{\mathbb{M}^{\Lambda_n, p}} \sum_{k \in \mathbb{R}_n, p} \sum_{z \in \mathbb{M}} (g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x) \\ &\quad \quad \quad + g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(x)) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) \end{aligned}$$

cependant,

$$\begin{aligned} \int g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(x) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(x) &= 1 \\ \int g^2 G_{\Lambda_n, p, t, n}(z_k x) d\mathcal{L}_{\Lambda_n, p}(z_k x) &= 1 \end{aligned}$$

ainsi, si on pose

$$\chi = \sup_{a, b \in M} \frac{\lambda(a)}{\lambda(b)}$$

on voit que la dernière intégrale apparaissant dans l'inégalité précédente est majorée par

$$\frac{B}{2} A_1 Q |M| (1 + \chi) |R_{n,p}| \beta_t$$

Il est également clair qu'il existe une constante $A_2 > 0$ telle que

$$\left| \int_{M^{R_{n,p}}} \ln G_{n,p} dr_{n,p} \right| \leq A_2 \beta_t |R_{n,p}|$$

puis qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \left(\frac{B}{2} A_1 Q |M| (1 + \chi) + A_2 \right) |R_{n,p}| \leq A n^d p^{d-1}$$

On obtient alors, en regroupant les résultats précédents,

$$\int g^2 \ln g^2 G_{\Lambda_{n,p,t,n}} d\lambda_{\Lambda_{n,p}} \leq (a(p, t) \vee B) \int_{M^{\Lambda_{n,p}}} \sum_{k \in \Lambda_{n,p}} \sum_{z \in M} (g(z_k x) - g(x))^2 \times G_{\Lambda_{n,p,t,n}}(x) q_t(x, \eta, k, z) d\lambda_{\Lambda_{n,p}}(x) + A n^d p^{d-1} \beta_t$$

ceci sous l'hypothèse que

$$\int g^2 G_{\Lambda_{n,p,t,n}} d\lambda_{\Lambda_{n,p}} = 1$$

Le résultat annoncé pour un g général en découle alors par homogénéité. \square

4. CAS OÙ LA TEMPÉRATURE EST CONSTANTE

On se propose, dans cette section, de démontrer le théorème 1, conformément à la méthode décrite au début de la section 2.

Remarquons que nous pouvons supposer, puisque la température est constante, que $\forall t \geq 0, \beta_t = 1$, quitte à remplacer \mathcal{J} par $\beta_0 \mathcal{J}$. D'autre part, I_t , les $I_{\Lambda,t}$, les $g_{\Lambda,t}$ et les $G_{\Lambda,t,\eta}$ ne dépendant plus, dans cette section, de t , on le fera plus apparaître dans les indices.

On commence par prouver que l'application $t \mapsto I_{\Lambda_n, p}(m_t)$ satisfait une certaine inégalité différentielle.

PROPOSITION 8. — *On a,*

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall T > 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\frac{dI_{\Lambda_n, p}(m_t)}{dt} \leq |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| C_p(T) - A_p [I_{\Lambda_n, p}(m_t) - A n^d p^{d-1}]$$

où $A > 0$ est une constante,

$C_p(T) > 0$ est un nombre dépendant que de $T > 0$ et de $p \in \mathbb{N}^*$,

$A_p > 0$ est un nombre ne dépendant que de $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. — Il est clair, en appliquant la proposition 6 avec $g = \sqrt{\frac{m_{t, \Lambda_n, p}}{G_{\Lambda_n, p, \eta}}}$, que si A, B et $a(p, t)$ sont les constantes qui apparaissent dans la proposition 6, et si pour $T > 0, \check{C}(T) > 0$ est la constante apparaissant dans la proposition 5, alors

$$\forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\frac{dI_{\Lambda_n, p}(m_t)}{dt} \leq -(a(p, t) \vee B)^{-1}$$

$$\times \left[\int \ln \left(\frac{m_{t, \Lambda_n, p}}{G_{\Lambda_n, p, \eta}} \right) m_{t, \Lambda_n, p} d\Lambda_{\Lambda_n, p} - A n^d p^{d-1} \right] + |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| \check{C}(T)$$

Cependant $\ln(G_{\Lambda_n, p, \eta})$ et $\ln(g_{\Lambda_n, p})$ ne diffèrent, au plus, que d'un terme de la forme $K |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}|$ (où $K > 0$ est une constante indépendante de η et de n, p), d'où le résultat annoncé, en posant

$$C_p(T) = \check{C}(T) + A_p K$$

$$A_p = (a(p, t) \vee B)^{-1}$$

qui est un nombre indépendant de t , car $a(p, t)$ ne dépend du temps que par l'interpédiaire de la température β_t^{-1} , qui est supposée ici normalisée à 1. \square

Le résultat précédent va nous permettre d'obtenir une majoration de $I_{\Lambda_n, p}(m_t)$, grâce à un lemme classique, présenté ci-dessous, sur les inégalités différentielles. Nous énonçons ce résultat sous une forme plus générale que celle dont nous avons réellement besoin ici, car nous le réutiliserons dans la section suivante.

LEMME 9. — *Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue, satisfaisant, p. s. pour $t \geq 0$, l'inégalité suivante :*

$$f'_t \leq a_t - b_t f_t$$

où $a, b: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions localement intégrables.

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$f_t \leq f_0 \exp\left(-\int_0^t b_s ds\right) + \exp\left(-\int_0^t b_s ds\right) \int_0^t a_s \exp\left(\int_0^s b_u du\right) ds$$

Démonstration. – Il suffit de considérer la fonction

$$g_t = \exp\left(\int_0^t b_s ds\right) f_t \quad \square$$

Il découle de l'application de ce lemme avec $f_t = I_{\Lambda_n, p}(m_t)$, que

$$\begin{aligned} \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall T > 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ I_{\Lambda_n, p}(m_t) \leq I_{\Lambda_n, p}(m) \exp(-A_p t) \\ + \exp(-A_p t) \int_0^t (A_p A n^d p^{d-1} + |\check{\partial} \Lambda_{\Lambda_n, p}| C_p(T)) \exp(A_p s) ds \\ \leq I_{\Lambda_n, p}(m) \exp(-A_p t) + A n^d p^{d-1} + A_p^{-1} |\check{\partial} \Lambda_{\Lambda_n, p}| C_p(T) \end{aligned}$$

Mais on a, d'une part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_{n, p}|} I_{\Lambda_{n, p}}(m) &= I(m) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_{n, p}|} I_{\Lambda_{n, p}}(m_t) &= I(m_t) \end{aligned}$$

qui, rappelons-le, sont bien des quantités finies. D'autre part, il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_{n, p}|} (A n^d p^{d-1} + A_p^{-1} |\check{\partial} \Lambda_{\Lambda_n, p}| C(T)) = A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

Ainsi, en divisant l'inégalité précédente par $|\Lambda_{n, p}|$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on s'aperçoit que

$$I(m_t) \leq I(m) \exp(-A_p t) + A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

Mais T n'apparaît plus dans cette inégalité, qui est donc satisfaite pour tout $t \geq 0$. On peut alors faire tendre t vers l'infini, pour obtenir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} I(m_t) \leq A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d}$$

Ceci étant vérifié pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} I(m_t) \leq 0$$

Cependant, une application de l'inégalité de Jensen nous montre que $I(\cdot)$ est une fonctionnelle positive sur les probabilités sur \mathcal{X} , d'où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(m_t) = 0$$

ce qui termine le démonstration du théorème 1.

5. CAS OÙ LA TEMPÉRATURE DÉCROÎT VERS 0 EN L'INFINI

Le but de cette section est de démontrer le théorème 2. On prouvera également qu'en dimension 1 (*i.e.* $d=1$), la constance c qui apparaît dans ce résultat est finie, mais, par contre, qu'elle est infinie pour le modèle d'Ising plan usuel.

La démonstration du théorème 2 est similaire à celle de la section précédente. Notamment, on a l'équivalent suivant de la proposition 8.

Soient A, B , et, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 0$, $a(p, t)$ les constantes qui apparaissent dans la proposition 6.

On pose

$$A_p(t) = (a(p, t) \vee B)^{-1}$$

PROPOSITION 10. — *Supposons que pour $t \geq t_0 \geq 0$, β soit croissant.*

Il existe une constante $L > 0$ et, pour $T > 0$ et $p \in \mathbb{N}^$, un nombre $C_p(T) > 0$, tels que*

$$\begin{aligned} \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall T > 0, \quad \forall t_0 \leq t \leq T, \\ \frac{d\beta_t^{-1} I_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t)}{dt} \leq L |\Lambda_{n,p}| \beta_t^{-1} \frac{d\beta_t}{dt} \\ - A_p(t) [\beta_t^{-1} I_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t) - A n^d p^{d-1}] + |\partial \Lambda_{\Lambda_{n,p}}| C_p(T) \end{aligned}$$

Démonstration. — Commençons par rappeler que $I_{\Lambda_{n,p,t}}(\cdot)$ est une fonctionnelle positive sur les probabilités sur \mathcal{X} , et que par hypothèse, on a pour $t \geq t_0$, $\frac{d\beta_t^{-1}}{dt} \leq 0$. Ainsi,

$$\forall t \geq t_0, \\ \frac{d\beta_t^{-1} I_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t)}{dt} = \frac{d\beta_t^{-1}}{dt} I_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t) + \beta_t^{-1} \frac{dI_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t)}{dt} \leq \beta_t^{-1} \frac{dI_{\Lambda_{n,p,t}}(m_t)}{dt}$$

D'autre part, soit pour $T > 0$, $\tilde{C}(T) > 0$ la constante qui apparaît dans la proposition 5. On applique la proposition 6 avec

$$g = \sqrt{\frac{m_t, \Lambda_{n,p}}{G_{\Lambda_{n,p,t}, \eta}}}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{dI_{\Lambda_n, p, t}(m_t)}{dt} \leq \frac{d\beta_t}{dt} \int_{M^{\Lambda_n, p}} U_{\Lambda_n, p}(m_{t, \Lambda_n, p} - g_{\Lambda_n, p, t}) d\Lambda_{\Lambda_n, p} \\ - A_p(t) \left[\int_{M^{\Lambda_n, p}} \ln \left(\frac{m_{t, \Lambda_n, p}}{G_{\Lambda_n, p, t, \eta}} \right) m_{t, \Lambda_n, p} d\Lambda_{\Lambda_n, p} - A n^d p^{d-1} \beta_t \right] \\ + |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| \check{C}(T) \end{aligned}$$

Cependant, il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|U_{\Lambda_n, p}\|_{\infty} \leq L |\Lambda_n, p|$$

et $\ln(G_{\Lambda_n, p, \eta})$ et $\ln(g_{\Lambda_n, p})$ ne diffèrent, au plus, que d'un terme de la forme $K |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| \beta_t$ (où K est une constante indépendante de $t \geq 0$, de $\eta \in \mathcal{X}$ et de $n, p \in \mathbb{N}^*$).

D'où le résultat annoncé, en regroupant les observations précédentes, et en posant

$$C_p(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} (\check{C}(T) \beta_t^{-1} + K A_p(t)) \quad \square$$

On supposera dans la suite que pour $t \geq t_0 \geq 0$, β_t est croissante.

On applique le lemme 10 avec $f_t = \beta_t^{-1} I_{\Lambda_n, p, t}(m_t)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall \eta \in \mathcal{X}, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall T > t_0, \quad \forall t \in [t_0, T], \\ \beta_t^{-1} I_{\Lambda_n, p, t}(m_t) \leq \beta_{t_0}^{-1} I_{\Lambda_n, p, t_0}(m_{t_0}) \exp \left(- \int_{t_0}^t A_p(s) ds \right) \\ + \exp \left(- \int_{t_0}^t A_p(s) ds \right) \int_{t_0}^t \left(L \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} |\Lambda_n, p| \right. \\ \left. + A n^d p^{d-1} A_p(s) + |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| C_p(T) \right) \exp \left(\int_{t_0}^s A_p(u) du \right) ds \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n, p|} I_{\Lambda_n, p, t_0}(m_{t_0}) &= I_{t_0}(m_{t_0}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n, p|} I_{\Lambda_n, p, t}(m_t) &= I_t(m_t) \end{aligned}$$

qui sont des quantités finies, et, d'autre part, il est clair que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n, p|} \left(L \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} |\Lambda_n, p| + A n^d p^{d-1} A_p(s) + |\check{\delta}\Lambda_{\Lambda_n, p}| C_p(T) \right) \\ = L \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} + A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} A_p(s) \end{aligned}$$

Ainsi, en divisant l'inégalité précédente par $|\Lambda_{n,p}|$, et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on s'aperçoit que

$$\beta_t^{-1} I_t(m_t) \leq \beta_{t_0} I_{t_0}(m_{t_0}) \exp\left(-\int_{t_0}^t A_p(s) ds\right) + \exp\left(-\int_{t_0}^t A_p(s) ds\right) \times \int_{t_0}^t \left(L \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} + A \frac{p^{d-1}}{(2p+1)^d R^d} A_p(s) \right) \exp\left(\int_{t_0}^s A_p(u) du\right) ds$$

Mais T n'apparaît plus dans cette inégalité. Elle est donc satisfaite pour tout $t \geq t_0$.

Nous allons montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} I_t(m_t) = 0$ sous l'hypothèse suivante sur β

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une suite d'entiers non nuls } (p_n)_{n \geq 0} \\ \text{croissante vers l'infini telle que} \\ \forall n \geq 0, \\ \int_{t_0}^{\infty} A_{p_n}(t) dt = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A_{p_n}(t)} \frac{d\beta_t}{dt} \beta_t^{-1} = 0 \end{array} \right.$$

[On aura remarqué que $A_p(t)$ ne dépend de t que par l'intermédiaire de β_t].

Puis nous vérifions que les conditions données dans le théorème 2 impliquent (H), ce qui en terminera la démonstration.

Supposons donc (H) satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_0}^t \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds = 0$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit $t_1 \geq t_0$ tel que

$$\forall t \geq t_1, \quad \frac{1}{A_{p_n}(t)} \frac{d\beta_t}{dt} \beta_t^{-1} \leq \varepsilon$$

alors

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_1}^t \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds \\ & \leq \varepsilon \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_1}^t A_{p_n}(s) \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds \\ & = \varepsilon \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \left[\exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) \right]_{t_1}^t \leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\int_{t_0}^{\infty} A_{p_n}(t) dt = \infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_0}^t \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds = 0$$

d'où,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_0}^t \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds \leq \varepsilon$$

il en découle, ε pouvant être choisi arbitrairement petit, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) \int_{t_0}^t \frac{d\beta_s}{ds} \beta_s^{-1} \exp\left(\int_{t_0}^s A_{p_n}(u) du\right) ds = 0$$

Mais on sait aussi que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{t_0}(m_{t_0}) \exp\left(-\int_{t_0}^t A_{p_n}(s) ds\right) = 0$$

d'où,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} I_t(m_t) \leq A \frac{p_n^{d-1}}{(2p_n+1)^d R^d}$$

Il nous reste à faire tendre p_n vers l'infini pour obtenir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} I_t(m_t) \leq 0$$

i. e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} I_t(m_t) = 0$$

Montrons maintenant que les hypothèses du théorème 2 impliquent (H).

Commençons par remarquer que d'après la discussion précédant la proposition 6, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} \ln(A_p(t))^{-1} \leq c_p$$

Intéressons-nous au cas où $c < \infty$:

On suppose que pour $t \geq t_0 > 1$, on a

$$\beta_t^{-1} = \frac{K}{\ln(t)}, \quad \text{avec } K > c$$

Soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers, croissante vers l'infini, telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{p_n} = c$$

et telle que

$$\forall n \geq 0, \quad c_{p_n} < K$$

Cette dernière hypothèse implique, d'après le rappel fait ci-dessus sur le comportement asymptotique de $A_{p_n}(t)$, qu'il existe $0 < \gamma_n < 1$ tel que pour t assez grand on ait

$$A_{p_n}(t) \geq t^{-\gamma_n}$$

Il en découle aisément que (H) est vérifiée avec la suite $(p_n)_{n \geq 0}$.

Supposons maintenant que $c = \infty$, mais ce qui suit est également valable si $c < \infty$.

On suppose que pour $t \geq t_0 > 1$ on a

$$\beta_t^{-1} = \frac{K(t)}{\ln(t)}$$

où $K(\cdot)$ est une fonction croissante en l'infini vers l'infini, telle que β_t^{-1} décroisse vers 0 en l'infini.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Vu le comportement asymptotique de $A_p(t)$, on a pour t suffisamment grand

$$A_p(t) \geq \exp(-(c_p + 1)\beta_t)$$

Cependant, pour t assez grand, on a également que $K(t) \geq c_p + 2$. Il en découle que pour t suffisamment grand on a

$$A_p(t) \geq t^{-((c_p + 1)/(c_p + 2))}$$

ce qui nous permet déjà de voir que

$$\int_0^\infty A_p(t) dt = \infty$$

D'autre part, pour tout $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_t}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\ln(t)}{K(t)} \right) \\ &= \frac{1}{K(t)} \frac{1}{t} - \frac{1}{K(t)^2} \ln(t) \frac{d}{dt} K(t) \\ &\leq \frac{1}{K(t)} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

On en déduit, vu l'inégalité vérifiée ci-dessus par $A_p(t)$, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A_p(t)} \beta_t^{-1} \frac{d\beta_t}{dt} = 0$$

ce qui conclut.

Pour terminer cette section, nous allons montrer qu'en dimension 1, on a toujours $c < \infty$, mais que dès la dimension 2 on peut avoir $c = \infty$.

Commençons par prouver le premier de ces résultats, dont la démonstration est identique à celle du résultat analogue que nous avons donné dans [5].

PROPOSITION 11. — Soit $L = \sum_{F \ni 0} \|J_F\|_\infty$.

Si $d = 1$, on a $c \leq 2L(2R - 1)$.

Démonstration. — Soit $\eta \in \mathcal{X}$ fixé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$V_n: M^{\{1, \dots, n\}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{F \cap \{1, \dots, n\} \neq \emptyset} J_F(x \eta)$$

(rappelons que la notation $x \eta$ est définie dans la première section.)

Posons également, pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$V_{i,n}: M^{\{1, \dots, i\}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{F \cap \{1, \dots, i\} \neq \emptyset \\ F \cap \{i+1, \dots, n\} = \emptyset}} J_F(x \eta)$$

$$\tilde{V}_{i,n}: M^{\{i+1, \dots, n\}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{\substack{F \cap \{i+1, \dots, i\} \neq \emptyset \\ F \cap \{1, \dots, i\} = \emptyset}} J_F(x \eta)$$

Soit $z \in M^{\{1, \dots, n\}}$ minimisant V_n . Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que pour tout $x \in M^{\{1, \dots, n\}}$, il existe un chemin [pour le graphe produit $(M^{\{1, \dots, n\}}, q^{\otimes n})$] $\varphi = (\varphi_i)_{0 \leq i \leq p}$, reliant x à z , et tel que $\forall 0 \leq i \leq p$,

$$V_n(\varphi_i) - V_n(x) \leq 2L(2R - 1)$$

[En effet, il est facile de voir que le sup sur $x, y \in N$ qui apparaît dans la définition de $c(N, U)$ (donnée au début la troisième section) est notamment atteint pour un couple (x, y) avec y minimum de U .]

Remarquons que si $n = 1$, tout chemin vérifie :

$$\sup_{0 \leq i \leq p} V_1(\varphi_i) - V_1(\varphi_0) \leq 2L$$

Pour $n > 1$, on définit le chemin φ de la manière suivante :

On commence par changer la première coordonnée de x (i.e. x_1) en la première coordonnée de z (i.e. z_1) en utilisant un chemin pour le graphe (M, q) qui va de x_1 à z_1 . On arrive ainsi à $z_1 x_{\{2, \dots, n\}}$. Puis on modifie de la même manière la seconde coordonnée de $z_1 x_{\{2, \dots, n\}}$ en celle de z , pour arriver en $z_{\{1, 2\}} x_{\{3, \dots, n\}}$, et ainsi de suite, en continuant à aller de la gauche vers la droite. A chaque étape on change donc une coordonnée de x en la coordonnée correspondante de z , en ne modifiant que cette

coordonnée. D'après le cas $n=1$, en considérant le chemin qui relie $z_{\{1, \dots, i-1\}} x_{\{i, \dots, n\}}$ à $z_{\{1, \dots, i\}} x_{\{i+1, \dots, n\}}$, on s'aperçoit qu'il suffit de vérifier que $\forall 2 \leq i \leq n$,

$$V_n(z_{\{1, \dots, i-1\}} x_{\{i, \dots, n\}}) - V_n(x) \leq 4L(R-1)$$

Nous allons démontrer ceci par l'absurde :

Supposons qu'il existe $2 \leq i \leq n$ tel que

$$V_n(z_{\{1, \dots, i-1\}} x_{\{i, \dots, n\}}) - V_n(x) > 4L(R-1)$$

Il est clair d'une part que

$$V_n(z_{\{1, \dots, i-1\}} x_{\{i, \dots, n\}}) \leq V_{i-1,n}(z_{\{1, \dots, i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(x_{\{i, \dots, n\}}) + L(R-1)$$

et d'autre part que

$$V_n(x) \geq V_{i-1,n}(x_{\{1, \dots, i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(x_{\{i, \dots, n\}}) - L(R-1)$$

ce qui implique, vu l'hypothèse faite ci-dessus, que

$$V_{i-1,n}(z_{\{1, \dots, i-1\}}) - V_{i-1,n}(x_{\{1, \dots, i-1\}}) > 2L(R-1)$$

d'où,

$$\begin{aligned} V_n(x_{\{1, \dots, i-1\}} z_{\{i, \dots, n\}}) &\leq V_{i-1,n}(x_{\{1, \dots, i-1\}}) + \tilde{V}_{i-1,n}(z_{\{i, \dots, n\}}) + L(R-1) \\ &< V_{i-1,n}(z_{\{1, \dots, i-1\}}) - 2L(R-1) + \tilde{V}_{i-1,n}(z_{\{i, \dots, n\}}) + L(R-1) \\ &\leq V_n(z) \end{aligned}$$

i. e.

$$V_n(x_{\{1, \dots, i-1\}} z_{\{i, \dots, n\}}) < V_n(z)$$

ce qui contredit la définition de z . \square

Montrons maintenant qu'en dimension 2 on peut avoir $c = \infty$ (et en fait tout ce qui suit se généralise facilement pour toute dimension $d \geq 2$).

On considère le modèle d'Ising plan usuel, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} M &= \{+1, -1\} \\ \lambda &= \frac{1}{2}(\delta_{+1} + \delta_{-1}) \\ \forall x, y \in M, \quad q(x, y) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et on munit \mathcal{X} de la famille suivante de potentiels d'interactions aux plus proches voisins :

$$\begin{aligned} J_F(x, y) &= \frac{1}{2}(-x \cdot y + 1), \quad \text{si } F = \{u, v\} \text{ avec } |u - v| = 1 \\ J_F &\equiv 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Cette famille tend donc à aligner tous les spins dans une même direction.

Alors

PROPOSITION 12. — *Pour le modèle d'Ising défini ci-dessus, on a $c = \infty$.*

Démonstration. — Soit $\tilde{\eta}$ l'élément de \mathcal{X} défini par

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}, \quad \tilde{\eta}_{(i, j)} = (-1)^{i+j}$$

il s'agit donc d'un damier

$$\begin{array}{ccccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & +1 & -1 & +1 & \dots \\ \dots & -1 & +1 & -1 & \dots \\ \dots & +1 & -1 & +1 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$\Lambda_n = \{ (i, j) \in \mathbb{Z}^2 / -n < i \leq n \text{ et } -n < j \leq n \}$$

et

$$\begin{aligned} V_n: & \quad M^{\Lambda_n} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto & \quad \sum_{F \cap \Lambda_n \neq \emptyset} J_F(x \tilde{\eta}) \end{aligned}$$

On notera aussi 1 (respectivement -1) l'élément de \mathcal{X} dont toutes les coordonnées sont égales à 1 (respectivement -1).

Nous allons montrer que la quantité d'énergie à fournir pour passer de 1_{Λ_n} à $(-1)_{\Lambda_n}$, quand la condition extérieure est fixée à $\tilde{\eta}$, tend vers l'infini quand Λ_n tend vers \mathbb{Z}^2 .

Plus précisément, soit $\varphi = (\varphi_i)_{0 \leq i \leq p}$ un chemin quelconque pour le graphe produit $(M^{\Lambda_n}, q^{\otimes \Lambda_n})$, reliant 1_{Λ_n} à $(-1)_{\Lambda_n}$. Nous allons prouver que 1_{Λ_n} et $(-1)_{\Lambda_n}$ sont des minimums globaux de V_n , et qu'il existe au moins un $0 < i_0 < p$ tel que

$$V_n(\varphi_{i_0}) - V_n(1_{\Lambda_n}) \geq 2(n-1)$$

mais l'élévation de φ vérifie

$$e(\varphi) \geq V_n(\varphi_{i_0}) - V_n(1_{\Lambda_n}) + \inf_{z \in M^{\Lambda_n}} V_n(z) - V_n(-1_{\Lambda_n})$$

d'où,

$$c_n \geq 2(n-1)$$

puis,

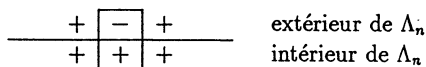
$$c = \infty$$

Commençons donc par montrer que 1_{Λ_n} est un minimum global de V_n [il sera alors facile d'en déduire, en effectuant la symétrie par rapport à la droite $x = 1/2$ et en échangeant les 1 et les -1 (remarquer que $\tilde{\eta}$ est

invariant par la composition de ces deux opérations), que $(-1)_{\Lambda_n}$ est également un minimum global].

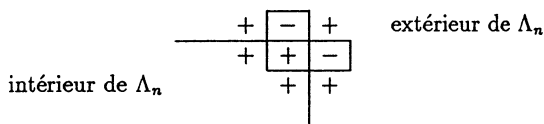
Notons que les seuls termes qui contribuent à l'énergie $V_n(1_{\Lambda_n})$ correspondent à l'une des situations suivantes (à une symétrie ou une rotation près) :

- Soit



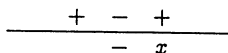
(un rectangle de couplage représente une interaction qui ajoute la valeur 1 à l'énergie).

- Soit



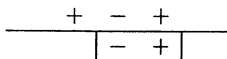
Ainsi, si z est un élément de M^{Λ_n} tel que $V_n(1_{\Lambda_n}) > V_n(z)$, nécessairement, en un endroit de la frontière de Λ_n , il doit satisfaire à l'une des situations suivantes (à une symétrie ou une rotation près), qui enlève l'un (ou deux) des termes non nuls à l'énergie $V_n(1_{\Lambda_n})$:

- Soit

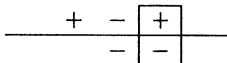


Mais suivant la valeur de x , on crée un nouveau terme d'énergie non nul dans la somme $V_n(z)$, terme qui était nul dans la somme $V_n(1_{\Lambda_n})$;

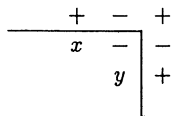
- si $x = +1$



- si $x = -1$

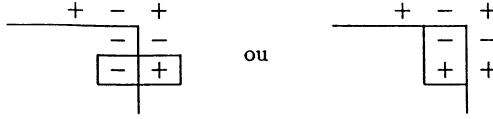


- Soit

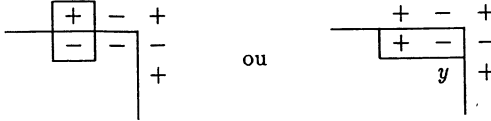


Mais selon les valeurs de x, y , on ajoute également deux termes non nuls dans la somme $V_n(z)$;

– selon la valeur de y



– selon la valeur de x



Dans les deux cas on aboutit donc à la contradiction $V_n(1_{\Lambda_n}) \leq V_n(z)$.
Prouvons maintenant le second fait que nous avons annoncé.

Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\check{\Lambda}_n = \{ u \in \Lambda_n / \forall v \notin \Lambda_n, |u - v| > 1 \}$$

$$\check{\delta}\Lambda_n = \Lambda_n \setminus \check{\Lambda}_n$$

On décompose V_n en $V_n^{(1)} + V_n^{(2)}$, où

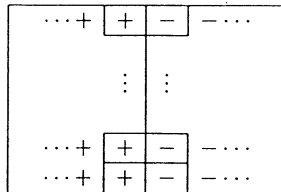
$$V_n^{(2)} = \sum_{F \in \check{\Lambda}_n} J_F$$

La démonstration précédente, qui prouve que 1_{Λ_n} est un minimum global de V_n , montre également que 1_{Λ_n} est un minimum global de $V_n^{(1)}$ (considérée comme une fonction sur M^{Λ_n}).

D'autre part, du fait que le graphe $(M^{\Lambda_n}, q^{\otimes \Lambda_n})$ ne permet qu'un changement de coordonnée à la fois, il existe un $0 < i_0 < p$ tel que $(\varphi_{i_0})_{\check{\Lambda}_n}$ ait autant de coordonnées prenant la valeur 1 que -1 . Mais alors,

$$V_n^{(2)}(\varphi_{i_0}) \geq 2(n-1)$$

En effet, il est facile de se rendre compte que l'infimum de $V_n^{(2)}$ sur les configurations de $\check{\Lambda}_n$ qui ont autant de 1 que de -1 est atteint pour la configuration suivante (à une symétrie ou une rotation près) :



D'autre part,

$$V_n^{(1)}(\varphi_{i_0}) \geq V_n^{(1)}(1_{\Lambda_n}) = V_n(1_{\Lambda_n})$$

d'où le résultat annoncé. \square

6. APPLICATION AU RECUIT SIMULÉ

On va énoncer quelques conséquences du théorème 2, ayant trait à la convergence de l'algorithme de recuit simulé sur \mathcal{X} . Les démonstrations de ces résultats sont rigoureusement identiques à celles présentées à ce sujet dans [5], et sont toujours élémentaires, nous ne les reproduirons pas.

On supposera dans la suite que la condition suivante est vérifiée :

$$(H_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet m \text{ est invariante par translation} \\ \bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^{-1} = 0 \\ \bullet \lim_{t \rightarrow \infty} \beta t^{-1} I_t(m_t) = 0 \end{array} \right.$$

On pose $U = \sum_{F \ni 0} \frac{J_F}{|F|}$ (qui est l'énergie spécifique au site 0), et on définit l'énergie spécifique d'une configuration $x \in \mathcal{X}$, par :

$$H(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{k \in \Lambda_{n-1}} U(S_k(x))$$

(Rappelons que S_k est la translation de k , et notons que d'après le théorème ergodique multidimensionnel, H est p. s. une limite sous p , si p est une probabilité sur \mathcal{X} invariante par translation.)

Remarquons que H est borné (en effet, si on pose $L = \|U\|_\infty$, H est à valeurs dans $[-L, L]$) et n'est pas continu sur \mathcal{X} (à moins d'être constant), mais est mesurable par rapport à la tribu de queue $\bigcap_{\Lambda \subset \subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}_{\Lambda^{\text{compl}}}$.

Soit $H_0 = \inf_{x \in \mathcal{X}} H(x)$.

Le résultat suivant nous fournit une manière d'évaluer H_0 , et implique la convergence de l'algorithme de recuit simulé, sous l'hypothèse (H_1) .

PROPOSITION 13. — *Supposons (H_1) vérifiée.*

Alors $m_t(U) = m_t(H) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} H_0$.

Sa démonstration repose, en fait, essentiellement sur le

LEMME 14. — *Si on définit, pour $\varepsilon > 0$,*

$$B_\varepsilon = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{|\Lambda_n|} \ln \left[\int_{\mathcal{M}^{\Lambda_n}} \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \sum_{F \subset \Lambda_n} J_F \right) d\lambda_{\Lambda_n} \right],$$

alors on a : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_\varepsilon = -H_0$

Une conséquence importante de la proposition 13 est le résultat suivant :

COROLLAIRE 15. — Supposons (H_1) vérifiée.

Soit $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{X} / H(x) = H_0\}$.

Soit η un élément de l'adhérence [pour la topologie de la convergence étroite sur $\mathcal{M}(\mathcal{X})$] des m_t , quand $t \rightarrow \infty$.

Alors $\eta(\mathcal{N}) = 1$ [ce qui montre a posteriori que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, car $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ est compact pour la topologie étroite].

Dans certains cas, on peut obtenir des résultats plus précis :

Supposons, outre l'hypothèse (H_1) , que la relation suivante soit vérifiée :

$$(H_2) \quad \inf_{x \in M^{\Lambda_1}} U(x) = H_0$$

[on a évidemment toujours $\inf_{x \in M^{\Lambda_1}} U(x) \leq H_0$].

Soient

$$N = \{x \in M^{\Lambda_1} / U(x) = \inf U = H_0\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{x \in \mathcal{X} / \forall k \in \mathbb{Z}^d, (S_k(x))_{\Lambda_1} \in N\} (\subset \mathcal{N})$$

Remarquons que si N peut être relativement facile à déterminer, $\tilde{\mathcal{N}}$ peut l'être beaucoup moins (il se peut que les éléments de $\tilde{\mathcal{N}}$ n'aient aucune propriété de périodicité).

On a alors, si η est comme dans le corollaire 16,

$$\eta(\tilde{\mathcal{N}}) = 1$$

i.e. η est portée non seulement par les éléments d'énergie spécifique minimale, mais par ceux d'énergie totale minimale, où l'énergie totale est la fonction

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (U(S_k(\cdot)) - H_0) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Ce résultat découle immédiatement de l'invariance par translation de η .

Notons que le modèle d'Ising traditionnel (en dimension d quelconque) satisfait l'hypothèse (H_2) .

RÉFÉRENCES

- [1] H.-O. GEORGII, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, Walter de Gruyter, 1988.
- [2] R. HOLLEY, Free Energy in a Markovian Model of a Lattice Spin System, *C.M.P.*, vol. 23, 1971, p. 87-99.
- [3] R. HOLLEY et D. STROOCK, A Martingale Approach to Infinite Systems of Interacting Processes, *Ann. Prob.*, vol. 4, 1976, p. 195-228.

- [4] R. HOLLEY et D. STROOCK, Annealing via Sobolev Inequalities, *C.M.P.*, vol. **115**, 1988, p. 553-569.
- [5] L. MICLO, Recuit simulé relativement à une famille de potentiels d'interactions, de rang fini et invariante par translation, *Preprint*, 1991, soumis à *Probability Theory and Related Fields*.

*(Manuscrit reçu le 29 janvier 1991;
corrigé le 9 juillet 1991.)*