ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

L. LADELLI

H. SADI

Propriété asymptotique d'un modèle statistique pour une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 4 (1991), p. 519-535

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_4_519_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 4, 1991, p. 519-535. *Probabilités et Statistiques*

Propriété asymptotique d'un modèle statistique pour une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

par

L. LADELLI

C.N.R., I.A.M.I., Via Ampère 56,
20131 Milano, Italie

et

H. SADI

Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris-VI),
Laboratoire de Probabilités,
Tour 56, 3e étage, 4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — I. A. Ibragimov et R. Z. Khasminski ont montré la convergence des expériences statistiques pour une suite i. i. d. de variables aléatoires réelles de densité C^1 par morceaux avec une vitesse de convergence de l'ordre de $1/n$.

Dans ce travail, nous généralisons leurs résultats à une chaîne de Markov récurrente positive à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Nous utilisons dans la démonstration les processus de Hellinger.

Mots clés : Chaîne de Markov, expérience statistique, processus de Hellinger, théorème limite fonctionnel, processus de vraisemblance.

ABSTRACT. — I. A. Ibragimov and R. Z. Khasminski have established the convergence of statistic experiments for an i. i. d. sequence of real random variables which density is piecewise C^1, with a rate $1/n$.

In this work, we generalise their result to a recurrent and positive Markov chain with values in $\mathbb{R}^d$. We use in the proof the Hellinger processes.

Classification A.M.S. : 60 F 17, 60 J 05, 62 F 12, 62 M 05.

Key words : Markov chain, statistic experiment, Hellinger process, functional limit theorem, likelihood process.

1. INTRODUCTION

Dans [1], Ibragimov et Khasminskii ont étudié la convergence des expériences statistiques pour une suite $(X_n^\theta)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires réelles i. i. d. de densité $f_\theta(x)$, supposée C^1 par morceaux. A l'aide de quelques hypothèses supplémentaires, mais qui restent assez faibles, Ibragimov et Khasminskii ont montré la convergence des expériences associées à $(X_n^\theta)_{n \geq 0}$, lorsque ces expériences sont convenablement renormalisées.

Il est remarquable que le fait que $f_\theta(.)$ admettent des sauts augmente la vitesse de convergence puisque le coefficient de renormalisation est $\frac{1}{n}$ et non $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme dans le cas régulier. On notera aussi que si dans le cas régulier les expériences limites obtenues sont gaussiennes, la loi de l'expérience limite s'exprime ici au moyen d'un processus de Poisson.

Dans cet article, nous proposons une généralisation de ces résultats dans deux directions :

– On ne considère plus une suite de variables aléatoires i. i. d. mais une chaîne de Markov récurrente positive.

– L'espace des états $\mathbb{R}$ est remplacé par $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, on remplace l'intervalle $[x_k(\theta), x_{k+1}(\theta)]$ compris entre deux sauts successifs de $f_\theta(x)$ par un domaine $D^\theta \subset \mathbb{R}^d$. On se contentera donc ici d'étudier une chaîne à valeurs dans D^θ.

Le modèle proposé ici inclut le modèle de translation où Y_n est une chaîne de Markov récurrente positive à valeurs dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$, et où P_θ est la loi de la chaîne définie par :

$$Y_n^\theta = Y_n + \theta$$

et aussi le modèle multiplicatif, où sous les mêmes considérations on a :

$$Y_n^\theta = \langle Y_n, \theta \rangle$$

où $\langle x, y \rangle = (x_1 y_1, \ldots, x_d y_d)$ si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$.

Signalons aussi que la démonstration repose sur l'utilisation des processus de Hellinger, technique qui simplifie beaucoup les calculs.

Les hypothèses que l'on fera sont de trois ordres et portent sur :

– la régularité de la dépendance en θ,

– la régularité du domaine D dont le bord ∂D porte les singularités de la loi de la chaîne,

– et enfin, le noyau de transition de la chaîne (ergodicité, homogénéité...).

Le cas où D est non borné nécessite des hypothèses supplémentaires et sera traité séparément en annexe, à la fin de l'article.

2. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

2.1. Dépendance en θ

On se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geqq 0}$ à valeurs dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$.

Soit ψ une application définie sur $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:

$$U \xrightarrow{\psi} D$$
$$(\theta, y) \to \psi(\theta, y).$$

On suppose que ψ est de classe C^3. De plus, pour tout θ fixé, l'application :

$$D^\theta \xrightarrow{\psi_\theta} D$$
$$y \to \psi_\theta(y) = \psi(\theta, y)$$

sera supposée être un difféomorphisme de $D^\theta = \{ y, (\theta, y) \in U \}$ sur D. Si $(Y_n)_{n \geqq 0}$ désigne le processus canonique sur $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, on pose alors :

$$Y_n^\theta = \psi_\theta^{-1}(Y_n).$$

On supposera que $0 \in \Theta$ (ce qui n'est pas vraiment une restriction) et que $\psi(0, y) = y$ de sorte que $\mathscr{L}(Y_n^0) = \mathscr{L}(X_n)$. Si tel n'est pas le cas, on remplacera ψ par $\psi_0^{-1} \circ \psi$ et on remplacera D par D^0. Le point 0 ne joue aucun rôle particulier, on peut prendre à sa place n'importe quel point de référence $\theta_0 \in \Theta$.

2.2. Domaine D

D est une variété à bord bornée de classe C^1 par morceaux, c'est-à-dire : $\partial D = \bigcup_{i=1}^{q} A_i$ où chaque A_i est elle-même une sous-variété à bords de dimension $d-1$ avec $A_i \cap A_j \subset \partial A_i$ pour $i \neq j$ et les surfaces de ∂D et de $\bigcup_{i=1}^{q} \partial A_i$, respectivement de dimension $d-1$ et $d-2$, sont finies.

2.3. Noyau de la chaîne

On suppose que :

(*a*) La variable X_0 admet une densité continue sur D et nulle en dehors de D.

(*b*) La probabilité de transition de $(X_n)_{n \geqq 0}$ s'écrit :

$$P(x, dy) = F(x, y)\, 1_D(y)\, dy$$

avec F de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^d)^2$.

(*c*) On suppose de plus que la chaîne est ergodique, ce qui se produit, par exemple sous l'hypothèse (*b*), dès que $F > 0$ sur $D \times D$. Sa probabilité invariante π admet alors la densité :

$$f(y) = 1_D(y) \int_D F(x, y)\, \pi(dx)$$

3. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Les résultats sont exprimés en termes de convergence en loi des expériences filtrées $\mathscr{E}_n$ (dont on précise ci-dessous la définition) par le biais de la convergence en loi des processus de vraisemblance convenablement renormalisés.

On note par $(\mathscr{F}_n)_{n \geqq 0}$, la filtration engendrée par le processus canonique $(Y_n)_{n \geqq 0}$ sur l'espace canonique $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et par Q_θ la loi de la chaîne $(Y_k^\theta = \psi_\theta^{-1}(X_k))_{k \geqq 0}$.

P_θ^n désignera la probabilité $Q_{\theta/n}$, et si en outre $[nt]$ note la partie entière de nt, on a alors : $\mathscr{E}_n = (\Omega, \mathscr{F}_{[nt]}, P_\theta^n)$.

Par ailleurs, étant donnés deux paramètres ζ et θ nous noterons $Z_\theta^{n,\zeta} = ((Z_\theta^{n,\zeta})_t)_{t \geqq 0}$ le processus densité généralisé de P_ζ^n par rapport à P_θ^n défini de la manière suivante : si l'on pose $Z^{\theta,n}$ (resp. $Z^{\zeta,n}$) comme la densité de P_θ^n (resp. P_ζ^n) par rapport à une mesure qui domine P_θ^n et P_ζ^n, on a alors $Z_\theta^{n,\zeta} = Z^{\zeta,n}/Z^{\theta,n}$ lorsque le dénominateur n'est pas nul et 0 si le dénominateur est nul.

Dans l'expérience limite, le rôle joué par ∂D est remarquable. En fait le domaine D n'intervient que par son bord ∂D lequel porte les singularités de la densité. Si $s \in \partial D$, désignons par $n(s)$ la normale en s à ∂D orientée vers l'extérieur et posons :

$$\varphi_\theta(s) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, s).\theta, n(s) \right\rangle$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$, et

$$\nu^\theta(dt, dx, ds) = f(s)\, 1_{\partial D}(s)\, 1_{]-\infty, \varphi_\theta(s)]}(x)\, 1_{\mathbb{R}_+}(t)\, dt \times dx \times \sigma(ds)$$

où x est un point courant de $\mathbb{R}$ et $\sigma(ds)$ la mesure de surface sur ∂D, et on rappelle que f désigne la densité de la probabilité invariante. La mesure ν^θ est donc une mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \partial D$.

Considérons maintenant les mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \partial D$. On note Ω' l'ensemble de ces mesures et μ la mesure canonique sur Ω'. On munira Ω' de la plus petite filtration $(\mathscr{F}'_t)$ qui rend adaptés les processus $\mu([0, t] \times A)$ où A est un borélien de $\mathbb{R} \times \partial D$. Enfin désignons par P_θ la seule probabilité qui fait de μ une mesure de Poisson d'intensité ν^θ et par $\mathscr{E}$ l'expérience $(\Omega', \mathscr{F}'_t, P_\theta)$.

Ces notations ainsi fixées, on dira que $\mathscr{E}_n$ tend vers $\mathscr{E}$ faiblement fonctionnellement si pour toute partie finie $I \subset \Theta$ et pour tout $\theta \in I$

$$\mathscr{L}((Z_\theta^{n,\zeta})_{\zeta \in I} \mid P_\theta^n) \to \mathscr{L}((Z_\theta^\zeta)_{\zeta \in I} \mid P_\theta)$$

où Z_θ^ζ est défini de la même manière que $Z_\theta^{n,\zeta}$, pour l'expérience $\mathscr{E}$. Cette convergence, qui est la convergence en loi des processus pour la topologie de Skorohod, sera notée par :

$$\mathscr{E}_n \xrightarrow{w-F} \mathscr{E}$$

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* 2.1, 2.2 *et* 2.3, *on a :*

$$\mathscr{E}_n \xrightarrow{w-F} \mathscr{E}$$

Remarque. — Si l'on avait imposé $Y_0 = y$ et $\psi_\theta^{-1}(y) \neq \psi_{\theta'}^{-1}(y)$ pour $\theta \neq \theta'$, il aurait été impossible d'obtenir la convergence des expériences ci-dessus. Mais dans ce cas, le problème statistique est sans intérêt puisqu'on arrive à distinguer les paramètres dès $n = 0$.

Par ailleurs si $f = 0$ sur ∂D (ce qui équivaut à F nul sur ∂D), le résultat est encore vrai mais sans intérêt dans ce cas. Cela signifie qu'on est dans le cas régulier. Il faut alors remplacer la normalisation en $\frac{1}{n}$ par celle en $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $1/2 \leqq \alpha < 1$ et les expériences $\left(\Omega, \mathscr{F}_{[nt]}, Q\frac{\theta}{n^\alpha}\right)$ convergent dans ce cas vers une expérience limite gaussienne.

4. DÉMONSTRATION

Comme le processus de Hellinger associé à l'expérience limite est ici déterministe et continu, le résultat annoncé sera démontré si l'on prouve la convergence simple des processus de Hellinger. Rappelons à cette fin quelques notations :

$\mathscr{A}$ est l'ensemble des familles $\alpha=(\alpha^{\theta})_{\theta\in\Theta}$ avec $\alpha^{\theta}\geqq 0$ et tel que si $I_{\alpha}=\{\theta, \alpha^{\theta}>0\}$ on ait $\sum_{\theta\in I_{\alpha}}\alpha^{\theta}=1$ et I_{α} de cardinal fini.

Notons par $H(\alpha)_0^n$ les intégrales de Hellinger associées à $\alpha\in\mathscr{A}$ et pour l'expérience $\mathscr{E}_n$, au temps $t=0$, par $H(\alpha)_0$ les intégrales correspondantes pour l'expérience $\mathscr{E}$. Enfin, $h(\alpha)_t^n$ désigne le processus de Hellinger associé à l'expérience $\mathscr{E}_n$ et $h(\alpha)_t$ celui associé à $\mathscr{E}$.

Le théorème sera alors démontré lorsqu'on aura montré que :

(I) $H(\alpha)_0^n \to H(\alpha)_0$, $\forall\alpha\in\mathscr{A}$

(II) $h(\alpha)_t^n \xrightarrow{P_{\theta}^n} h(\alpha)_t$, $\forall t\geqq 0$, $\forall\theta\in I_{\alpha}$, $\forall\alpha\in\mathscr{A}$,

4.1. Démonstration de (I)

$\forall\theta\in I_{\alpha}$ (à l'avenir on notera I à la place de I_{α}) on a :

$$H(\alpha)_0^n=E_{\theta/n}[\prod_{\zeta\in I}(Z_{\theta}^{n,\zeta})_0^{\alpha^{\zeta}}]$$

Or, si G est la densité de Y_0,

$$Z_{\theta,0}^{n,\zeta}=\frac{G(\psi(\zeta/n, Y_0))\times|J_{\zeta/n}(Y_0)|}{G(\psi(\theta/n, Y_0))\times|J_{\theta/n}(Y_0)|}$$

où $J_{\zeta/n}(.)$ désigne le jacobien de l'application $y\to\psi_{\zeta/n}(y)$. D'où, si l'on pose $M_n=\bigcap_{\zeta\in I}D^{\zeta/n}$

$$H(\alpha)_0^n=\int_{M_n}G(\psi(\theta/n, y))\prod_{\zeta\in I}\left[\frac{G(\psi(\zeta/n, y))\times|J_{\zeta/n}(y)|}{G(\psi(\theta/n, y))\times|J_{\theta/n}(y)|}\right]^{\alpha^{\zeta}}|J_{\theta/n}(y)|\,dy$$

Mais comme $\sum_{\zeta\in I}\alpha^{\zeta}=1$,

$$H(\alpha)_0^n=\int_{M_n}\prod_{\zeta\in I}[G(\psi(\zeta/n, y))\times|J_{\zeta/n}(y)|]^{\alpha^{\zeta}}\,dy$$

Par ailleurs pour tout $\zeta\in I_{\alpha}$, on a $Z_{\theta,0}^{\zeta}=1$ et donc $H(\alpha)_0=1$. Il nous faut donc montrer que $H(\alpha)_0^n\to 1$. Comme 1_{M_n} tend vers 1_D, que $\prod_{\zeta\in I}[G(\psi(\zeta/n, y))\times|J_{\zeta/n}(y)|]^{\alpha^{\zeta}}$ est continue sur un domaine borné et qu'elle tend vers G, le théorème de convergence dominée donne alors le résultat.

Pour montrer (II), nous aurons besoin des expressions explicites des processus de Hellinger $h(\alpha)_t^n$ et de $h(\alpha)_t$.

4.2. Calcul de $h(\alpha)_t^n$ et de $h(\alpha)_t$

Soit Q une mesure qui domine les P_θ, $\theta \in I$, et Z^θ le processus densité de P_θ par rapport à Q. Lorsque la partie martingale du processus densité Z_t^θ est nulle, la formule donnant l'expression du processus de Hellinger se simplifie. Si on note $Z_t = (Z_t^\theta)_{\theta \in I}$, on obtient :

$$h(\alpha)_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^I} [\sum_{\theta \in I} \alpha^\theta (1 + x^\theta / Z_{s-}^\theta) - \prod_{\theta \in I} (1 + x^\theta / Z_{s-}^\theta)^{\alpha^\theta}] \nu(ds, dx)$$

sur $\Gamma(\alpha) = \bigcap_{\theta \in I} \{Z_-^\theta > 0\}$, et défini arbitrairement ailleurs et ν^Z la mesure de Lévy de Z. Dans le cas particulier qui est le nôtre, nous allons calculer $h(\alpha)_t$ en utilisant la formule de Girsanov pour les mesures de Poisson laquelle nous permet de calculer les processus densité. Pour une introduction aux processus de Hellinger, on pourra se rapporter au livre de Jacod et Shiryaev [4]. Les critères de convergence utilisés ici sont tirés de Jacod ([2], [3]).

4.2.1. Lemme. — *Une version $h(\alpha)_t$ est donnée par :*

$$h(\alpha)_t = t \int_{\partial D} [(\sum_{\theta \in I} \alpha^\theta \varphi_\theta(s)) - \wedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s)] f(s) \sigma(ds)$$

où $\sigma(ds)$ désigne la mesure de surface de ∂D.

Preuve. — On a facilement une mesure ν qui domine les ν^θ en posant :

$$\nu(dt, dx, ds) = f(s) 1_{\partial D}(s) 1_{]-\infty, A]}(x) 1_{\mathbb{R}_+}(t) dt \times dx \times \sigma(ds)$$

où $A = \sup_{\theta \in I} \varphi_\theta(s)$, il s'ensuit que :

$$\nu^\theta = U^\theta . \nu$$

avec $U^\theta(t, x, s) = 1_{\partial D}(s) 1_{]-\infty, \varphi_\theta(s)]}(x) 1_{\mathbb{R}_+}(t)$. Comme $|U^\theta - 1|$ est ν-intégrable sur tout intervalle $[0, t]$. Le théorème de Girsanov pour les mesures de Poisson dit alors que si Q est la probabilité qui fait de μ la mesure de Poisson d'intensité ν, la densité $Z^\theta = \dfrac{dP_\theta}{dQ}$ est obtenue par la formule :

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R} \times \partial D} Z_{r-}^\theta (U^\theta(r, x, s) - 1)(\mu - \nu)(dr, dx, ds)$$

Il apparaît sur cette formule que la partie martingale continue de Z est nulle. Une version du processus de Hellinger est donc donné par :

$$h(\alpha)_t=\int_0^t\int_{\partial D}\int_{\mathbb{R}}[(\sum_{\theta\in I}\alpha^\theta U^\theta(r,x,s))-\prod_{\theta\in I}(U^\theta(r,x,s))^{\alpha^\theta}]f(s)\,dr\,\sigma(ds)\,dx$$

Comme on a $\sum_{\zeta\in I}\alpha^\zeta=1$, on obtient la formule de l'énoncé.

4.2.2. LEMME. — *Le processus $h(\alpha)_t^n$ est donné par :*

$$h(\alpha)_t^n=\sum_{0\leqq i\leqq[nt]}\left\{1-\int_{D_n}\prod_{\theta\in I}[F(\psi_{\theta/n}(Y_i),\psi_{\theta/n}(y))\,|\,J_{\theta/n}(y)\,|\,]^{\alpha^\theta}dy\right\}$$

où $D_n=\bigcap_{\theta\in I}D^{\theta/n}$.

Preuve. — On remarque d'abord que $h(\alpha)_t^n=h(\alpha)_{nt}^1$ si l'on pose $\alpha^{\theta/n}=\alpha_n^\theta$. Cette remarque ramène la démonstration au cas $n=1$. Pour calculer le processus de Hellinger, il sera commode de l'exprimer comme la somme de ses sauts qui interviennent ici à des temps entiers. A cette fin, exprimons aussi simplement que possible les processus densité qui interviennent dans nos calculs.

Les hypothèses d'absolue continuité faites sur la loi initiale et le noyau de transition font que la mesure de Lebesgue normalisée par une fonction $g>0$ d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^d$ donne une loi qui domine toutes les marginales de P_θ. Plus préciment, la loi $\bigotimes_{i=0}^{+\infty} g(y_1)\,dy_i$ fait du processus canonique une suite de variables i. i. d. La densité Z^θ de P^θ par rapport à cette loi vaut donc :

$$Z_q^\theta=\frac{J_\theta(Y_0)}{g(Y_0)}G(\psi(\theta,Y_i))\prod_{1\leqq i\leqq q}\frac{F(\psi(\theta,Y_{i-1}),\psi(\theta,Y_i))\,|\,J_\theta(Y_i)\,|}{g(Y_i)}$$

De nouveau on remarque sur cette formule que la partie martingale continue du processus densité est nulle. Par ailleurs la mesure de Lévy ν^Z est donnée par :

$$\nu^Z(\{q\}\times A)=Q(Z_q-Z_{q-1}\in A\setminus\{0\}\,|\,F_q),\qquad \forall A\in\mathbb{R}^I$$

La même formule que celle appliquée dans la preuve du lemme précédent donne alors, vue la structure multiplicative des Z_q et le fait que $\sum\alpha^\theta=1$:

$$\Delta h^1(\alpha)_i=1-\int_{D_1}\prod_{\theta\in I}[F(\psi(\theta,Y_{i-1}),\psi(\theta,y))\,|\,J_\theta(y)\,|\,]^{\alpha^\theta}dy$$

Il en découle alors la formule de l'énoncé.

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de $h(\alpha)_t^n$ vers $h(\alpha)_t$ sous P_θ^n, $\forall\,\theta\in I$.

Afin d'établir cette convergence, nous découpons $h(\alpha)_t^n$ en deux morceaux :

$$\sum_{0 \leqq i \leqq [nt]} a_i^n + \sum_{0 \leqq i \leqq [nt]} b_i^n$$

soit, en tenant compte de ce que $1 = \int_{D} F(Y_i, y)\, dy$:

$$a_i^n = \int_{D \setminus D_n} F(Y_i, y)\, dy - \int_{D_n \setminus D} F(Y_i, y)\, dy$$

et

$$b_i^n = \int_{D_n} \{ F(Y_i, y) - \prod_{\theta \in I} [F(\psi_{\theta/n}(Y_i), \psi_{\theta/n}(y)) \, | J_{\theta/n}(y) |]^{\alpha^\theta} \}\, dy$$

Introduisons une notation qui nous permettra d'exprimer les résultats intermédiaires que nous énoncerons dans les lemmes ci-dessous : soit $v_n(\omega, s, \ldots)$ une fonction définie sur $\Omega \times \partial D \times \ldots$, on écrit que $v_n = o_u(1/n)$ pour exprimer que

$$\lim_n \big(\sup_{(\omega, s, \ldots)} v_n(\omega, s, \ldots) \times n \big) \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

4.2.3. Lemme. — *On a :*

$$a_i^n = \frac{1}{n} \int_{\partial D} F(Y_i, s) \big(\wedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s) \big)\, \sigma(ds) + o_u(1/n)$$

Preuve. — Les deux termes de la somme exprimant a_i^n se calculant de la même manière, nous ne traiterons ici que le premier terme :

$$\int_{D \setminus D_n} F(Y_i, y)\, dy$$

Notons par ∂D_+ la partie du bord de D qui est à l'extérieur de D_n.

Pour évaluer l'intégrale ci-dessus, nous donnons une expression approchée de la mesure de Lebesgue de $D \setminus D_n$. Posons :

$$\gamma = \sup_{\theta \in I} \sup_{y \in D} \sup_{\zeta \in B(0, \varepsilon)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta, y) . \theta \right\|$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé.

Notons $A = \bigcup_{i=1}^{q} \partial A_i$ (*cf.* 2.2), A^{ε_n} un ε_n-voisinage de A dans R^d où $\varepsilon_n = 2\gamma/n$. Notons également par C_n l'intersection de ce voisinage avec D et par B_n le complémentaire de $A^{2\varepsilon_n}$ dans ∂D_+.

Pour $s \in B_n$, désignons par $x_n(s)$ le premier point d'intersection de la normale en s à ∂D, lorsqu'on se dirige vers l'intérieur de D, avec D_n et par $\beta_n(s)$ la longueur du segment $[s, x_n(s)]$.

Remarquons que lorsque $s \in B_n$, pour n assez grand, uniformément en s, les segments $[s, x_n(s)]$ sont deux à deux disjoints.

Par ailleurs, comme $2\varepsilon_n = \sup\{d(s, B_n), s \in A\} \to 0$, et que la surface $(d-2)$ dimensionnelle de A est finie, on en déduit que :

$$\int_{\partial D_+ \setminus B_n} \sigma(ds) \to 0$$

L'ensemble $D \setminus D_n$ est obtenu en prenant l'union des deux parties suivante : la première est $\bigcup_{s \in B_n} [s, x_n(s)]$ et la seconde est le complémentaire dans $D \setminus D_n$ de cette première partie. Cette seconde partie est contenue dans C_n dont le volume de l'ordre de :

$$\frac{1}{n^2} = o(1/n)$$

Par ailleurs, comme F est de classe C^1, ses dérivées sont bornées sur $D \times D$, on a donc que la première partie de a_i^n vaut :

$$\int_{B_n} F(Y_i, s) \beta_n(s) \sigma(ds) + o_u(1/n)$$

On évalue $\beta_n(s)$: on définit $\beta_{n,\theta}(s)$ et $x_{n,\theta}(s)$ en remplaçant dans la définition de $\beta_n(s)$ et de $x_n(s)$, D_n par D_n^θ. On alors :

$$\beta_n(s) = \bigvee_{\theta \in I} \beta_{n,\theta}(s)$$

Rappelons que $n(s)$ est le secteur unitaire normal à ∂D en $s \in \partial D \setminus \partial A$ et orienté vers l'extérieur de D.

Posons $s_n^\theta = \psi_{\theta/n}^{-1}(s)$. On a alors :

$$\beta_{n,\theta}(s) = -\langle ss_n^\theta, n(s) \rangle + \langle x_n^\theta s_n^\theta, n(s) \rangle$$

Mais

$$\langle x_n^\theta s_n^\theta, n(s) \rangle = o_u(1/n), \qquad \forall s \in B_n$$

et

$$ss_n^\theta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, s) \,.\, \theta/n + o_u(1/n),$$

soit en définitive :

$$\beta_n(s) = \bigvee_{\theta \in I} \beta_{n,\theta}(s) = -\frac{1}{n} \bigwedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s) + o_u(1/n)$$

On peut donc conclure que :

$$\int_{D \setminus D_n} F(Y_i, y)\, dy = -\frac{1}{n}\int_{\partial D_+} F(Y_i, s)\,(\bigwedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds) + o_u(1/n)$$

En faisant un calcul analogue pour l'autre partie de a^n on trouve finalement :

$$a_i^n = -\frac{1}{n}\int_{\partial D_+} F(Y_i, s)\,(\bigwedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds) - \frac{1}{n}\int_{\partial D_-} F(Y_i, s)\,(\bigwedge_{\theta \in I} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds) + o_u(1/n)$$

où ∂D_- désigne le complémentaire de ∂D_+ dans ∂D, ce qui est le résultat annoncé dans le lemme.

Passons maintenant au calcul des b_i^n.

4.2.4. LEMME. – *On a :*

$$b_i^n = \int_{\partial D} \left\{ \sum_{\theta \in I} \frac{\alpha^\theta}{n} F(Y_i, s)\, \varphi_\theta(s) \right\} \sigma(ds) + o_u(1/\mathrm{n})$$

Preuve. – Pour évaluer l'intégrale

$$b_i^n = \int_{D_n} \{ F(Y_i, y) - \prod_{\theta \in I} [F(\psi_{\theta/n}(Y_i), \psi_{\theta/n}(y))\, |J_{\theta/n}(y)|]^{\alpha^\theta} \}\, dy$$

faisons un développement limité à l'ordre 1 de l'intégrand. On obtient la somme des deux termes suivants :

$$U = \sum_{\theta \in I} \frac{\alpha^\theta}{n}\left(F'_x(Y_i, y)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, Y_i).\theta \right)$$

$$V = \sum_{\theta \in I} \frac{\alpha^\theta}{n}\left(F'_y(Y_i, y)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, y).\theta + F(Y_i, y)\frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta(y)_{|\theta=0}.\theta \right)$$

Comme F est de classe C^2 et ψ de classe C^3, que D est borné, le reste de ce développement limité est un $o_u(1/n)$.

Comme le volume de $D \Delta D_n$ est de l'ordre de $1/n$, on peut remplacer dans l'intégrale $\int_{D_n} U\, dy$ le domaine d'intégration par D en ne faisant qu'une erreur de l'ordre d'un $o_u(1/n)$. On obtient finalement :

$$\sum_{\theta \in I} \frac{\alpha^\theta}{n}\int_D F'_x(Y_i, y)\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, Y_i).\theta\, dy = \sum_{\theta \in I} \frac{\alpha^\theta}{n}\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \int F(Y_i, y)\, dy \right\}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(0, Y_i).\theta = 0$$

Passons maintenant à l'autre morceau :

$$\int_{D_n}\left\{\sum_{\theta\in I}\frac{\alpha^\theta}{n}\left(F'_y(Y_i, y)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(0,y).\theta+F(Y_i, y)\frac{\partial}{\partial\theta}J_\theta(y)_{|\theta=0}.\theta\right)dy\right.$$

Comme $\psi(0, y)=y$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}J_\theta(y)_{|\theta=0}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial\theta\,\partial y_j}(0, y)$$

• D'où il vient :

$$\mathrm{div}_y\left\{F(Y_i, y)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(0, y).\theta\right\}$$
$$=F'_y(Y_i, y)\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(0, y).\theta+F(Y_i, y)\frac{\partial}{\partial\theta}J_\theta(y)_{|\theta=0}.\theta$$

De même que précédemment on peut remplacer le domaine d'intégration D_n par D en ne faisant qu'une erreur de l'ordre de $o_u(1/n)$. Puis en appliquant le théorème de Stokes, on obtient :

$$\int_{\partial D}\left\{\sum_{\theta\in I}\frac{\alpha^\theta}{n}F(Y_i, s)\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(0, s).\theta, n(s)\right\rangle\right\}\sigma(ds)$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Appliquons maintenant le théorème ergodique à $h(\alpha)^n_t$. Comme :

$$h(\alpha)^n_t=\sum_{i=0}^{[nt]}(a^n_i+b^n_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{[nt]}\int_{\partial D}F(Y_i, s)$$
$$\times[\sum_{\zeta\in I}\alpha^\zeta(\varphi_\theta(s)-\bigwedge_{\zeta\in I}\varphi_\zeta(s))]\,\sigma(ds)+o_u(1/n)$$

on trouve que :

$$h(\alpha)^n_t\overset{P^n_0}{\to}t\int_D\pi(dy)\int_{\partial D}[\sum_{\zeta\in I}\alpha^\zeta\varphi_\zeta(s)-\bigwedge_{\zeta\in I}\varphi_\zeta(s)]\,F(y, s)\,\sigma(ds)$$

On a donc aussi :

$$h(\alpha)^n_t\overset{P^n_0}{\to}t\int_D\pi(dy)\int_{\partial D}[\sum_{\zeta\in I}\alpha^\zeta\varphi_\zeta(s)-\bigwedge_{\zeta\in I}\varphi_\zeta(s)]\,F(y, s)\,\sigma(ds)$$

A. ANNEXE

Cas non borné

Pour le cas non borné, un certain nombre d'hypothèses supplémentaires nous seront nécessaires dans les calculs sur a_i^n et b_i^n.

Le cas où ∂D est borné se traite facilement et avec une seule hypothèse supplémentaire qui est de pouvoir permuter le signe somme avec l'opérateur de dérivation partiel en x de $F(x, y)$.

La démonstration de la convergence de $H(\alpha)_0^n$ ne pose pas de problèmes. Il suffit d'étudier séparément les intégrales sur $D \cap B(0, N)$ et sur $D \cap B(0, N)^c$.

La convergence $h(\alpha)_t^n \to h(\alpha)_t$ est plus compliquée à démontrer et on utilisera un procédé diagonal qui reliera le rayon N de la boule $B(0, N)$ et l'indice n.

Voici les hypothèses supplémentaires.

A1. Dépendance en θ

La croissance en y des dérivées de ψ par rapport à θ doit être contrôlée pour θ proche de 0. On suppose qu'il existe $\delta > 0$, $r \geqq 0$, et $K \geqq 0$ tels que :

$$\sup_{\theta \in B(0, \delta)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, y) \right\| \leqq K(1 + \|y\|)^r.$$

$$\sup_{\theta \in B(0, \delta)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial^2 \theta}(\theta, y) \right\| \leqq K(1 + \|y\|)^r.$$

A2. Domaine D

D est une variété à bord de classe C^1, de courbure minorée au sens suivant : $\exists c > 0$, $\exists a > 0$ tels que $\forall s \in \partial D$ et $\forall s' \in \partial D \cap B(s, a)$ la courbure en s' d'une courbe contenue dans ∂D et un plan orthogonal à ∂D en s est minorée par c. Cette hypothèse sert à éviter que des normales à ∂D en deux points de ∂D proches l'un de l'autre ne se coupent trop près de ∂D. On supposera également que la mesure de surface de $\partial D \cap B(0, N)$ est de l'ordre de N^{d-1}.

En fait, même dans le cas non borné, D peut admettre des singularités qui ne sont pas trop compliquées (*voir* la remarque 1 qui suit la démonstration ci-dessous).

A3. Noyau de la chaîne

(a) $\exists\, \mathrm{K}>0$, $\exists\, p>2r+d$ tels que :

$$\sup_x \mathrm{F}(x, y) \leqq \frac{\mathrm{K}}{(1+\|y\|)^p}, \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{D}$$

$$\sup_x \|\mathrm{F}'_x(x, y)\| \leqq g(y)$$

avec g Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^d$

$$\sup_x \|\mathrm{F}'_y(x, y)\| \leqq \frac{\mathrm{K}}{(1+\|y\|)^p}$$

(b) Si $g_\theta(x, y) = \mathrm{F}(\psi_\theta(x), \psi_\theta(y))\, |\mathrm{J}_\theta(y)|\, 1_\mathrm{D}(y)$ [ceci représente le noyau de transition de la chaîne (X_θ^n)], on suppose l'existence de $\delta>0$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in \mathrm{D}} \sup_{\theta \in \mathrm{B}(0, \delta)} \left\| \frac{\partial g_\theta}{\partial \theta}(x, y) \right\| dy < +\infty$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in \mathrm{D}} \sup_{\theta \in \mathrm{B}(0, \delta)} \left\| \frac{\partial^2 g_\theta}{\partial^2 \theta}(x, y) \right\| dy < +\infty$$

A4. Théorème

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* A1, A2 *et* A3, *on a, en utilisant les notations de* 3, *la convergence des expériences :*

$$\mathscr{E}_n \overset{w-\mathrm{F}}{\rightarrow} \mathscr{E}$$

Démonstration. — La démonstration dans le cas non borné présentant beaucoup de similitude avec le cas borné, nous n'écrirons que les points délicats. Nous nous contenterons de faire dans le détail la démonstration donnant l'expression des a_i^n comme une intégrale sur le bord du domaine. Le cas où $\partial\mathrm{D}$ admet des singularités est traité dans la remarque qui suit cette démonstration.

A5. Lemme

LEMME. — *Sous les hypothèses* A1, A2 *et* A3 *on a :*

$$a_i^n = \frac{1}{n} \int_{\partial \mathrm{D}} [-\bigwedge_{\theta \in \mathrm{I}} \varphi_\theta(s)\, \mathrm{F}(\mathrm{Y}_i, s)]\, \sigma(ds) + o_u(1/n)$$

Preuve. — L'idée de la démonstration est de regarder séparément ce qui se passe à l'intérieur d'une boule $B(O, N)$ et de montrer que les intégrales à l'extérieur de cette boule sont négligeables. Mais comme chacune d'elle intervient comme terme d'une somme qui comprend n termes, il faut veiller à ce que la contribution en dehors de chaque boule soit un $o_u(1/n)$. On utilisera donc un procédé diagonal. Soit une suite de nombre réels positifs N_n tels que $\frac{(1+N_n)^{2r}}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$. On notera N_n par N dans la suite. Pour évaluer le volume de $D^N \setminus D_n^N = (D \setminus D_n) \cap B(0, N)$, posons pour $s \in \partial D$, $s_n = \psi_{\theta/n}^{-1}(s)$. Fixons $\theta \in I$ et notons $\beta_n^\theta(s)$ la longueur du segment $[s, x_n]$, où x_n est le premier point d'intersection de la normale en s à ∂D (orientée vers le demi-espace contenant s_n) avec $\partial D^{\theta/n}$.

$$\beta_n^\theta(s) = -\langle ss_n, n(s) \rangle + \langle x_n s_n, n(s) \rangle$$

Alors grâce à l'hypothèse faite sur la courbure de ∂D et le choix de N et n on a : $\langle x_n s_n, n(s) \rangle = o_u(1/n)$, puisque ce terme est de l'ordre $\left(\frac{(1+N_n)^r}{n}\right)^2$.

Mais :

$$ss_n = \psi_{\theta/n}(s) - \psi_0(s) = \frac{\partial}{\partial\theta} \psi(0, s) . \theta/n + o_u(1/n).$$

Le reste est bien un $o_u(1/n)$ car $\left\| \frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \psi(\zeta, s) \right\| \leqq K(1+N))^r$ pour ζ petit et $s \in B(0, N)$, ce qui est le cas puisque $\zeta \in [0, \theta/n]$. Donc

$$\beta_n^\theta(s) = -\left\langle \frac{\partial}{\partial\theta} \psi(0, s) . \theta/n, n(s) \right\rangle + o_u(1/n) = -\frac{1}{n} \varphi_\theta(s) + o_u(1/n)$$

Auparavant nous allons aussi approcher $F(Y_i, y)$ pour $y \in [s, x_n]$: $\| F(Y_i, y) - F(Y_i, s) \|$ est de l'ordre de $\frac{K}{(1+\|s\|)^p}(1+\|s\|)^{2r}\frac{1}{n}$.

De sorte que l'on a :

$$\int_{D^N \setminus D_n^N} F(Y_i, y)\, dy = -\frac{1}{n} \int_{\partial D_+ \cap B(0, N)} F(Y_i, s) (\underset{\theta \in I}{\wedge} \varphi_\theta(s))\, \sigma(ds) + o_u(1/n)$$

Où l'on note, comme précédemment, par ∂D_+ la frontière de D extérieure à D_n. Pour l'autre partie, à savoir :

$$\int_{D_n^N \setminus D^N} \prod_{\theta \in I} [F(\psi_{\theta/n}(Y_i), (\psi_{\theta/n}(y)) | J_{\theta/n}(y) |]^{\alpha^\theta}\, dy$$

on trouve :

$$-\frac{1}{n}\int_{\partial D_+ \cap B(0,N)} F(Y_i, s)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds)+o_u(1/\mathrm{n}),$$

où ∂D_- désigne la partie de la frontière intérieure à D_n. Soit donc en définitive, en regroupant les deux parties :

$$-\frac{1}{n}\int_{\partial D \cap B(0,N)} F(Y_i, s)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds)+o_u(1/n)$$

A l'extérieur de la boule $B(0, N)$, la décroissance de $F(Y_i, y)$ en y entraîne que :

$$\int_{B(0,N)\cap D} F(Y_i, y)\,dy \leqq \frac{K}{(p-d)(1+N)^{p-d}} \leqq \frac{K}{(p-d)(1+N)^{2r+\varepsilon}} = o_u(1/n)$$

puisqu'on a supposé que $p>2r+d$, ce terme est bien un $o_u(1/n)$ si on prend $N=n^{1/(2r+\varepsilon/2)}$. Ceci établit presque le résultat annoncé, pour l'instant on a montré que :

$$a_i^n = -\frac{1}{n}\int_{\partial D \cap B(0,N)} F(Y_i, s)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(s))\,\sigma(ds)+o_u(1/n)$$

Pour terminer, il reste à remplacer le domaine d'intégration $\partial D \cap B(0, N)$ par ∂D tout entier. Ce faisant, on ne modifie l'intégrale que d'un $o_u(1/n)$ puisque :

$$\left|F(Y_i, y)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(y))\right| \leqq K\frac{1}{(1+\|y\|)^p}(1+\|y\|)^r \leqq K\frac{1}{(1+\|y\|)^{p-r}}$$

on a :

$$\int_{\partial D \cap B(0,N)^c} \left|F(Y_i, y)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(y))\right|\sigma(dy)$$

$$\leqq \int_N^{+\infty} \frac{K}{(1+\rho)^{p-r}}\rho^{d-1}\,d\rho = \frac{K'}{(1+N)^{r+1}}$$

Si on multiplie ce résultat par $1/n$, on obtient bien un $o_u(1/n)$. Ceci nous permet de conclure que :

$$a_i^n = -\frac{1}{n}\int_{\partial D} F(Y_i, s)(\underset{\theta\in I}{\wedge} \varphi_\theta(s)\,\sigma(ds)+o_u(1/n)$$

A6. Remarque

Remarque. — 1. Dans le cas où ∂D est seulement C^1 par morceaux, nous pouvons généraliser la démonstration au cas où la surface $d-2$

dimensionnelle de $\partial A \cap B(0, N)$ est de l'ordre de N^{d-2}. On enferme comme dans le cas borné les singularités ∂A dans un tube de rayon $\frac{\gamma}{n}$, et sur ce tube C_n on montre que l'intégrale que l'on cherche à évaluer est un $o_u(1/n)$, en effet, on a :

$$\int_{C_n} F(Y_i, y)\, dy \leqq \frac{1}{n^2} \int_{\partial A \cap B(0, N)} \frac{1}{(1 + \|y\|)^p} (1 + \|y\|)^{2r}\, dy$$
$$\leqq \frac{1}{n^2} \int_0^N \frac{1}{(1+\rho)^p} (1+\rho)^{2r} (1+\rho)^{d-2}\, d\rho \leqq \frac{C}{n^2} = o_u(1/n)$$

où l'on a désigné par C une constante positive.

2. Les hypothèses 3 (*b*) servent uniquement dans les calculs sur les b_i^n. Elles permettent de négliger notamment les restes qui interviennent dans les développements limités.

RÉFÉRENCES

[1] I. A. Ibragimov et R. Z. Khasminski, *Statistical Estimation : Asymptotic Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1981.

[2] J. Jacod, Filtered Statistical Models and Hellinger Processes, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **32**, 1989, p. 3-45.

[3] J. Jacod, Co'vergence of Filtered Statistical Models and Hellinger Processes, *Stoch. Proc. Appl.*, vol. **32**, 1989, p. 47-68.

[4] J. Jacod et A. N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[5] L. Le Cam, *Asymptotic Methods in Statistical Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1986.

[6] G. G. Roussas, *Contiguity of probability measures: Some Applications in Statistics*, Cambridge University Press, 1972.

[7] H. Strasser, *Mathematical Theory of Statistics*, De Gruyter, Amsterdam, 1985.

(*Manuscrit reçu le* 18 *mai* 1990;
révisé le 25 *mars* 1991.)