ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. FRANCHI

Théorème des résidus asymptotique pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, nº 4 (1991), p. 445-462
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_4_445_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 4, 1991, p. 445-462. *Probabilités et Statistiques*

Théorème des résidus asymptotique pour le mouvement brownien sur une surface riemannienne compacte

par

J. FRANCHI

Laboratoire de Probabilités,
Université Paris-VI, Tour 56, 3ᵉ étage,
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

RÉSUMÉ. — Soient M une surface riemannienne compacte de volume S, X son mouvement brownien, ω une 1-forme fermée sur M privée de n points; alors l'intégrale de Stratonovitch $\frac{1}{t}\int_0^t \omega(X_s)$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $c\pi/S$, où c est la somme des résidus de ω.

ABSTRACT. — Let M be a Riemannian compact surface of volume S, X its Brownian motion, ω a closed 1-form on $M \setminus \{n \text{ points}\}$; then the Stratonovitch integral $\frac{1}{t}\int_0^t \omega(X_s)$ converges in law towards a Cauchy variable of parameter $c\pi/S$, where c is the sum of the residues of ω.

Key words : Brownian motion, Stochastic integral, Limit in law, Differential form, Riemannian surface.

Classification A.M.S. : 60 H 05, 60 F 05, 53 C 65.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de présenter sous une forme aussi géométrique que possible une version simple, générale et autonome du théorème des résidus stochastique asymptotique, dont la première version est le théorème 1.1 de [14].

Dans ce théorème 1.1, Pitman et Yor donnent le comportement asymptotique de certaines intégrales d'Itô $\int_0^t f(Z_s)\, dZ_s$ du mouvement brownien plan; cependant que le théorème proposé ici traite le cas général de l'intégrale d'une 1-forme différentielle fermée sur une surface générique, le choix de la compacité offrant l'avantage d'éviter la difficulté liée dans le plan au rôle particulier joué par l'infini; il est en outre formulé en termes d'intégrales de Stratonovitch, qui imposent à la forme d'être de classe C^2, mais qui sont les plus naturelles sur une variété (*voir* [5]).

Le théorème des résidus asymptotique généralise l'étude asymptotique des nombres de tours, qui a été initiée par Spitzer [15], puis développée par Manabe [9], Messulam et Yor [11], Lyons et McKean [7], Le Gall et Yor [6], Pitman et Yor ([13], [14]), etc.

Le souci d'appliquer ce genre d'étude à certains objets géométriques est déjà présent chez McKean [10], Manabe ([8], [9]), Lyons et McKean [7].

Une précédente version de ce travail [4] ne traitait que les cas de la sphère et du plan, par une méthode en partie différente.

PLAN DE L'ARTICLE

Le théorème obtenu est énoncé au paragraphe [A.]. On traite en [B.] le cas des formes sans singularité ou exactes, puis on montre dans [C.], en intégrant par parties l'intégrale de Stratonovitch considérée, que son étude est asymptotiquement équivalente à l'étude conjointe des nombres de « petits tours » autour des singularités de la forme considérée.

Ne disposant pas de coordonnées globales, on est conduit à distinguer la contribution de chaque excursion auprès d'une singularité; la clé est alors de constater que l'utilisation de coordonnées conformes permet de se ramener aux excursions du brownien plan dans un disque; on voit ainsi en [D.] que la contribution de chaque excursion dans l'analogue d'un disque a une loi de Cauchy, indépendante des extrémités de cette excursion; ce qui permet de vérifier que, suivant une idée d'Yves Le Jan, les nombres de tours effectués lors des différentes excursions sont indépendants, conditionnellement au nombre de ces excursions.

On estime ensuite en [E.] le nombre de ces excursions jusqu'au temps t par une quantité déterministe, afin de pouvoir appliquer en [F.] l'indépendance de leurs contributions pour obtenir la loi limite cherchée.

Il ne reste plus alors qu'à calculer effectivement en [G.] le paramètre des processus de Cauchy obtenus, ce qui est fait essentiellement par application du théorème ergodique (pour obtenir le temps moyen passé aurpès de chaque singularité) et par rétrécissement des disques entourant les singularités (pour annihiler les fluctuations de la métrique).

Enfin [H.] présente une extension du résultat à certaines formes non fermées près de leurs pôles.

PRINCIPAUX RÉSULTATS UTILISÉS

L'existence de coordonnées locales conformes en dimension 2 [16]; la décomposition de De Rham d'une forme différentielle ([3], § 31, corollaire 1); l'existence d'un noyau de la chaleur continu sur une variété compacte [12]; la polarité des points en dimension 2; le fait que le mouvement brownien sur une variété compacte soit positivement récurrent et donc vérifie le théorème ergodique; la formule d'Itô; la construction faite en ([5], 2), de l'intégrale de Stratonovitch d'une 1-forme le long des trajectoires browniennes sur une variété, et l'expression ([5], 3) de cette intégrale à l'aide de la divergence de la forme; les résultats de ([1], II) sur les temps de visite à deux compacts disjoints : existence de mesure invariante, et intégrabilité de ces temps.

A. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Soit M une variété riemannienne connexe compacte de classe C^∞ et de dimension 2; Notons dl^2 sa métrique, Δ son opérateur de Laplace-Beltrami, m sa probabilité invariante, S sa surface et S(E) la surface d'un borélien E de M. Fixons n points distincts $T_1, \ldots, T_n$ de M, et notons X le mouvement brownien de M issu de $X_0 \in M' = M \setminus \{T_1, \ldots, T_n\}$, ou de X_0 suivant la loi m.

Soit ω une 1-forme de classe C^2 sur M', à valeurs dans $\mathbb{C}$, que l'on suppose fermée dans un voisinage pointé des points T_j.

Pour chaque j fixons un voisinage V_j de T_j dans lequel M admet des coordonnées conformes (x_j, y_j), telles que $x_j(T_j) = y_j(T_j) = 0$ [16].

Introduisons $r^j = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(x_j^2 + y_j^2)$ et $x_j = e^{r^j} \cos \varphi^j$, $y_j = e^{r^j} \sin \varphi^j$, où $r^j \in \mathbb{R}$ et $\varphi^j \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; le choix de ces nouvelles coordonnées est justifié par le fait qu'elles mettent en évidence l'angle polaire φ^j et la partie radiale r^j, tout en restant conformes.

Fixons $-\infty < r_0 < \rho_0 < 0$ de sorte que $\{r < 1 + \rho_0\} \subset V_j$ pour chaque j, et posons $D_j = \{r^j < \rho_0\}$ et $K_j = \{r^j \leqq r_0\}$; choisissons ρ_0 de façon que les D_j soient disjoints et que ω soit fermée dans chaque $D_j \setminus T_j$.

DÉFINITION 1. — $c_j = c_j(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\{r^j = r'\}} \omega$, *pour tout* $r' < \rho_0$; *c'est le résidu de* ω *en* T_j.

DÉFINITION 2. — $N_t^\omega(u) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^{ut} \omega(X_s)$, *l'intégrale étant prise au sens de Stratonovitch le long des trajectoires de* X. *Une telle intégrale* $\displaystyle\int_0^t \omega(X_s)$ *est définie précisément en* [5], *déf.* 2.1, *où elle est notée* $\displaystyle\int_{X[0,t]} \omega$.

THÉORÈME. — $(N_t^\omega(u))_{u \geqq 0}$ *converge au sens des distributions marginales de dimension finie, lorsque* $t \to +\infty$, *vers le processus* $\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) C^j$, *où les* C^j *sont n processus de Cauchy indépendants de paramètre* π/S; *et cette convergence est conjointe pour toute famille finie de formes* ω.

Remarque. — Lorsque les c_j sont réels, $\sum_{j=1}^{n} c_j C^j$ est un processus de Cauchy de paramètre $\dfrac{\pi}{S} \sum_{j=1}^{n} |c_j|$.

NOTATION. — $Y_t \approx Z_t$ signifiera : $Y_t - Z_t$ converge en probabilité vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

$F^j(r_s^j, \varphi_s^j)$ pourra être abrégé par F_s^j, ou $F(r_s, \varphi_s)$ par F_s.

B. DEUX LEMMES GÉNÉRAUX

On montre ici qu'on peut négliger asymptotiquement la contribution des formes soit sans singularité (lemme 1) soit exactes (lemme 2).

LEMME 1. — $N_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \omega(X_s) \approx 0$ *dès que* ω *est de classe* C^2 *sur* M.

Preuve. — Considérons le cas plus général où M est de dimension d, et utilisons le théorème 3.1 de [5] :

$$N_t = \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{k=1}^{d} \omega_k(R_s)\, dB_s^k - \frac{1}{2t}\int_0^t \delta\omega(X_s)\, ds \quad \text{p. s.},$$

où R_s est un relèvement de X_s dans le fibré $O(M)$, où ω_k est une fonction C^2, donc bornée lorsque M est compacte, et où δ est l'opérateur de divergence.

Or d'une part

$$\left\| \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{d}\int_0^t \omega_k(R_s)\, dB_s^k \right\|_2^2 = \frac{1}{t^2}\int_0^t \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{d} \omega_k^2(R_s)\right) ds \leqq C/t,$$

et d'autre part

$$\frac{1}{t}\int_0^t \delta\omega(X_s)\, ds \xrightarrow[t\to+\infty]{\text{p. s.}} \int_M \delta\omega\, dm$$

à cause du théorème ergodique; ce qui entraîne que $N_t \approx 0$, puisque m vérifie : $[\forall F \in C^2(M)]\ \int_M \Delta F\, dm = 0$ et qu'utilisant la décomposition de De Rham ([3], § 31, corollaire 1) de ω sur M on a $\delta\omega = \Delta F$. ■

LEMME 2. — $\frac{1}{t} F(X_t) \approx 0$ *pour toute fonction* F *finie m-p.p. sur* M.

Remarque. — Ceci fait que $N_t \approx 0$ si ω est exacte, et donc que le théorème porte en fait sur l'espace de cohomologie $H^1(M')$.

Preuve. — Pour tout x de M on a $\varepsilon_x P_1 = f_x m$, P_t étant le semi-groupe de X et f_x une fonction bornée sur M (*voir* [12]). Donc

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty} \mathbb{P}_x\left(\left|\frac{1}{t} F(X_t)\right| \geqq \varepsilon\right) &\leqq \lim_{s\to+\infty}\!\searrow\ \limsup_{t\to+\infty} \mathbb{P}_x(|F(X_t)| \geqq \varepsilon s)\\
&= \lim_{s\to+\infty}\ \limsup_{t\to+\infty} \varepsilon_x P_t 1_{\{|F|\geqq \varepsilon s\}} = \lim_{s\to+\infty}\ \limsup_{t\to+\infty} \varepsilon_x P_1 P_t 1_{\{|F|\geqq \varepsilon s\}}\\
&= \lim_{s\to+\infty}\ \limsup_{t\to+\infty} f_x m P_t 1_{\{|F|\geqq \varepsilon s\}} \leqq \|f_x\|_\infty \lim_{s\to+\infty} m(\{|F| \geqq \varepsilon s\}) = 0. \quad ■
\end{aligned}$$

C. COMPARAISON AVEC DES NOMBRES DE PETITS TOURS

Il s'agit ici de ramener l'étude à celle des nombres de petits tours conjoints autour des singularités de la forme ω considérée; pour cela on intègre par parties et on vérifie avec l'aide de [B.] que les termes indésirables sont asymptotiquement négligeables.

PROPOSITION 3. — *Il existe pour chaque j une fonction continue* g_j *de* $[-\infty, \rho_0] \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$, *constante sur* $\{-\infty\} \times \mathbb{R}$ *et de période* 2π *en la deuxième variable, telle que, lors de chacune de ses excursions dans* D_j, X_t *se révèle en une diffusion* (r_t^j, φ_t^j) *vérifiant* $(dr_t^j, d\varphi_t^j) = (g_j(r_t^j, \varphi_t^j))^{1/2} e^{-r_t^j}(d\beta_t, d\gamma_t)$, *où* (β, γ) *est un brownien plan.*

Preuve. — Écrivons-la sans l'indice j; $dl^2 = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$ entraîne $dl^2 = (g(r, \varphi))^{-1} e^{2r}(dr^2 + d\varphi^2)$, où $g(r, \varphi) = (f(e^r \cos\varphi, e^r \sin\varphi))^{-1}$; de sorte que, $T = \{r = -\infty\}$ étant polaire, dans ces coordonnées X induit lors de chaque excursion dans D une diffusion (r_t, φ_t) de générateur $2^{-1} g(r, \varphi) e^{-2r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$ (*voir* par exemple [12]); de là, on vérifie directement avec la formule d'Itô que l'expression donnée ci-dessus pour $(dr_t, d\varphi_t)$ est la bonne. ■

DÉFINITION 3. — *Définissons* r_t^j *et* φ_t^j *globalement, et non plus seulement sur* $\{X_t \in D_j\}$, *en posant*

$$\varphi_t^j = \int_0^t 1_{D_j}(X_s)\, d\varphi_s^j \qquad et \qquad r_t^j = r_0^j + \int_0^t 1_{D_j}(X_s)\, dr_s^j,$$

où $r_0^j = \rho_0$ *si* $X_0 \notin D_j$.

LEMME 4. — $N_t^\omega(u) \approx \sum_{j=1}^n (c_j(\omega)/t) \int_0^{ut} 1_{K_j}(X_s)\, d\varphi_s^j$.

Preuve. — Fixons une fonction h décroissante de classe C^3 sur $[-\infty, 1+\rho_0[$, égale à 1 sur $[-\infty, r_0]$ et nulle sur $[\rho_0, 1+\rho_0[$, et posons $\omega^j = h(r^j) 1_{D_j} \times \omega$ pour $1 \leqq j \leqq n$, puis $\omega^j = H^j(r^j, \varphi^j)\, dr^j + \Gamma^j(r^j, \varphi^j)\, d\varphi^j$; posons encore

$$N_t^j(u) = \frac{1}{t}\int_0^{ut} \omega^j(X_s), \qquad \gamma^j = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial r^j} - \frac{\partial H^j}{\partial \varphi^j},$$

$$q^j(r^j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma^j(r^j, y)\, dy,$$

et

$$b^j(r^j, \varphi^j) = \int_0^{\varphi^j} \Gamma^j(r^j, y)\, dy - \varphi^j q^j(r^j).$$

Faisons d'abord une série de remarques :

(i) ω^j est de classe C^2 sur $M \setminus \{T_j\}$ et nulle hors de D_j, et $\omega - \sum_{j=1}^n \omega^j$ est de classe C^2 sur M; en particulier le lemme 1 montre que $N_t^\omega(u) \approx \sum_{j=1}^n N_t^j(u)$;

(ii) $N_t^j(u) = \frac{1}{t}\int_0^{ut} H_s^j \circ dr_s^j + \frac{1}{t}\int_0^{ut} \Gamma_s^j \circ d\varphi_s^j$;

(iii) b^j est de période 2π en φ^j, de classe C^2, nulle hors de D_j, et on a donc

$$db^j(r_s^j, \varphi_s^j) = \frac{\partial b^j}{\partial r^j}(r_s^j, \varphi_s^j) \circ dr_s^j + \frac{\partial b^j}{\partial \varphi^j}(r_s^j, \varphi_s^j) \circ d\varphi_s^j;$$

(iv) $q^j(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{r^j = r\}} \omega^j = c_j(\omega)$ sur $\{-\infty < r \leqq r_0\}$;

(v) $\omega^j = h \times \omega_0^j$ avec ω_0^j fermée sur $\{-\infty < r^j \leqq \rho_0\}$, et donc $H^j = h \times H_0^j$ et $\Gamma^j = h \times \Gamma_0^j$, d'où $d\omega^j = \gamma^j\, dr^j \wedge d\varphi^j$ avec $\gamma^j = h' \times \Gamma_0^j$;

(vi) $\frac{1}{t}\int_{r_0^j}^{r_t^j} H^j(x, 0)\, dx \approx 0$ et $\frac{1}{t} b^j(r_t^j, \varphi_t^j) \approx 0$, d'après le lemme 2.

Intégrons maintenant par parties l'intégrale de Stratonovitch; on obtient :

$$\begin{aligned} N_t^j(u) - \frac{1}{t}\int_0^{ut} q^j(r_s^j) \circ d\varphi_s^j &= \frac{1}{t}\int_0^{ut}\left[H_s^j \circ dr_s^j + \left(\frac{\partial b^j}{\partial \varphi^j}\right)_s \circ d\varphi_s^j\right] \\ &= \frac{1}{t}\int_0^{ut}\left[db_s^j + \left(H_s^j - \left(\frac{\partial b^j}{\partial r^j}\right)\right)_s \circ dr_s^j\right] \\ &\approx \frac{1}{t}\int_0^{ut} [H_s^j - (H_s^j - H^j(r_s^j, 0) - \lambda_s^j)] \circ dr_s^j \approx \frac{1}{t}\int_0^{ut} \lambda_s^j \circ dr_s^j \end{aligned}$$

où

$$\lambda^j(r^j, \varphi^j) = -\int_0^{\varphi^j} \gamma^j(r^j, y)\, dy + \frac{\varphi^j}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma^j(r^j, y)\, dy;$$

or

$$\frac{1}{t}\int_0^{ut} \lambda_s^j \circ dr_s^j \approx 0$$

à cause du lemme 1, puisque $\gamma^j = h' \times \Gamma^j$ est de classe C^2 sur M; enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^{ut} q^j(r_s^j) \circ d\varphi_s^j &= \frac{1}{t}\int_0^{ut} q^j(r_s^j)\, 1_{\{r_s^j > r_0\}}\, d\varphi_s^j \\ &\quad + \frac{1}{t}\int_0^{ut} c_j(\omega)\, 1_{\{r_s^j \leqq r_0\}}\, d\varphi_s^j \approx (c_j(\omega)/t)\int_0^{ut} 1_{K_j}(X_s)\, d\varphi_s^j \end{aligned}$$

car

$$\left\| \frac{1}{t}\int_0^{ut} q^j(r_s^j)\, 1_{\{r_s^j > r_0\}}\, d\varphi_s^j \right\|_2^2$$
$$= t^{-2}\,\mathbb{E}\left(\int_0^{ut} |q^j|^2 (r_s^j)\, 1_{\{r_0 < r_s^j < \rho_0\}}\, g_j(r_s^j, \varphi_s^j)\, e^{-2r_s^j} ds \right) \leqq C/t. \quad \blacksquare$$

D. LOI DE LA CONTRIBUTION D'UNE EXCURSION

DÉFINITION 4. – *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *soient*

$$\tau_1^j = \operatorname{Inf}\{ t>0 \mid X_t \in K_j \}, \qquad \zeta_k^j = \operatorname{Inf}\{ t > \tau_k^j \mid X_t \notin D_j \},$$
$$\tau_{k+1}^j = \operatorname{Inf}\{ t > \zeta_k^j \mid X_t \in K_j \},$$

et

$$\psi_k^j = \int_{\tau_k^j}^{\zeta_k^j} d\varphi_s^j.$$

LEMME 5. – $\mathbb{E}_{X_{\tau_k}^j}(e^{i(\lambda/t)\psi_1^j}) = e^{-|\lambda|\rho/t}$ *pour tout* $k \geqq 2$ *et tout* j, *où* $\rho = \rho_0 - r_0$.

Preuve. – Fixons (sans l'écrire) un indice j; exploitons pleinement le choix des coordonnées conformes (r, φ) en écrivant $(r_t, \varphi_t) = (R_{\xi_t}, \Phi_{\xi_t})$, où (R_t, Φ_t) représente le brownien plan, et en observant que la variation de Φ au cours d'une excursion délimitée par R ne dépend pas de la vitesse de parcours ξ; et donc que l'on peut en fait imaginer que $\xi_t = t$, ce qui revient à dire que ψ_1 a la même loi que dans le cas euclidien; plus précisément, la diffusion $(r_t\, \varphi_t)$ issue de (r_0, φ_0) et définie pour $0 \leqq t \leqq \zeta = \operatorname{Inf}\{ t \mid r_t \geqq \rho_0 \}$ s'écrit d'après la proposition 3 en fonction d'un couple (B, W) de browniens réels issus de 0 indépendants (et indépendants de X_{τ_k}) : $r_t = r_0 + B(\xi_t)$, $\varphi_t = \varphi_0 + W(\xi_t)$ avec

$$\xi_t = \int_0^t e^{-2r_s} g(r_s, \varphi_s)\, ds = \operatorname{Inf}\left\{ v \,\middle|\, \int_0^v e^{2(r_0 + B_s)} g^{-1}(r_0 + B_s, \varphi_0 + W_s)\, ds > t \right\};$$

on s'intéresse à $\psi = \varphi_\zeta - \varphi_0 = W(\xi_\zeta)$, et on remarque que

$$\xi_\zeta = \xi(\operatorname{Inf}\{ t \mid r_0 + B(\xi_t) \geqq \rho_0 \}) = \operatorname{Inf}\{ \xi_t \mid B(\xi_t) \geqq \rho \} = \sigma_\rho,$$

où

$$\sigma_\rho = \operatorname{Inf}\{ s \mid B_s \geqq \rho \}.$$

Donc

$$\mathbb{E}_{r_0, \varphi_0}(e^{i\lambda\psi}) = \mathbb{E}_{0,0}(e^{i\lambda W(\sigma_\rho)}) = \mathbb{E}_0(e^{-(\lambda^2/2)\sigma_\rho}) = e^{-|\lambda|\rho}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 6. — *Les contributions* ψ_k^j $(1 \leqq j \leqq n,\ k \geqq 2)$ *des différentes excursions sont des variables de Cauchy indépendantes, de paramètre* ρ.

Preuve. — Notons $A^q = \bigcap_{j \neq q} \{\tau_2^q < \tau_2^j\}$, $p^1, \ldots, p^n$ des entiers >1, λ_k^j des réels, et effectuons une récurrence sur $\sum_{j=1}^{n} p^j$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{p^j} \lambda_k^j \psi_k^j\right)\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}_{X_{\zeta_2^q}}\big(\prod_{(j,k)\neq(q,2)} e^{i\lambda_k^j \psi_k^j}\big) e^{i\lambda_2^q \psi_2^q} 1_{A^q}\big) \text{(Markov)}$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \exp\big(-\rho \sum_{(j,k)\neq(q,2)} |\lambda_k^j|\big) \mathbb{E}\big(\mathbb{E}_{X_{\tau_2^q}}(e^{i\lambda_2^q \psi_1^q}) 1_{A^q}\big)$$

(hypothèse de récurrence)

$$= \exp\left(-\rho \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{p^j} |\lambda_k^j|\right) \sum_q \mathbb{P}(A^q) \quad \text{par le lemme 5;}$$

(d'après lequel en particulier $\mathbb{E}_{X_{\tau_2^q}}(e^{i\lambda_2^q \psi_1^q})$ ne dépend pas de $X_{\tau_2^q}$); enfin $\sum_q \mathbb{P}(A^q) = 1$. ■

E. ESTIMATION DES NOMBRES D'EXCURSIONS

DÉFINITION 5. — $\mu_t^j = \mathrm{Max}\{k \in \mathbb{N} \mid \zeta_k^j \leqq t\}$.

LEMME 7. — $\dfrac{\mu_t^j}{t}$ *converge p. s. lorsque* $t \to \infty$ *vers un réel* >0 *déterministe, disons* α^j.

Preuve. — Soit E l'ensemble des excursions de ∂D_j à ∂D_j via K_j définies sur un intervalle $[0, \zeta]$, *i.e.* des fonctions e continues de $[0, \zeta]$ dans M telles que :

$$e(0) \in \partial D_j,$$
$$\tau = \inf\{t > 0 \mid e(t) \in K_j\} < \infty \qquad \text{et} \qquad \zeta = \inf\{t > \tau \mid e(t) \notin D_j\} < \infty;$$

soient $\Omega = E^{\mathbb{N}^*}$, $\{Y_1, \ldots, Y_k, \ldots\}$ les coordonnées dans Ω, $Y_k \circ \theta = Y_{k+1}$, et $\mathbb{Q}$ la probabilité sur Ω conférant à $(Y_1, \ldots, Y_k, \ldots)$ la loi de $(X|_{[\zeta_1^j, \zeta_2^j]}, \ldots, X|_{[\zeta_k^j, \zeta_{k+1}^j]}, \ldots)$ pour la probabilité ν_0^j invariante pour la chaîne $X_{\zeta_k^j}$ sur ∂D_j l'existence de ν_0^j est démontrée dans [1], II); comme $\zeta_{k+1}^j = \zeta_k^j \circ \Theta_{\zeta_1^j} + \zeta_1^j + \zeta_1^j$, on a $\theta(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, et donc le théorème ergodique de Birkhoff affirme que, $\zeta\circ Y_1$ étant $\mathbb{Q}$-intégrable (fait qui est établi dans [1], II), $\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\zeta\circ Y_k$ converge p. s. vers $\int\zeta\circ Y_1\,d\mathbb{Q}$, *i.e.* $\frac{1}{p}\zeta_p^j\xrightarrow[p\to\infty]{\text{p. s.}}\mathbb{E}_{\nu_0^j}(\zeta_2^j-\zeta_1^j)=\alpha_0^j$.

On a donc $\frac{1}{\mu_t^j}\zeta_{\mu_t^j}^j\xrightarrow[\text{p. s.}]{t\to\infty}\alpha_0^j$; alors $\zeta_{\mu_t^j}^j\leqq t\leqq\zeta_{\mu_t^j+1}^j$ entraîne

$$0\leqq\frac{t}{\mu_t^j}-\frac{\zeta_{\mu_t^j}}{\mu_t^j}\leqq\frac{\zeta_{\mu_t^j+1}}{\mu_t^j+1}\left(\frac{1}{\mu_t^j}+1\right)-\frac{\zeta_{\mu_t^j}}{\mu_t^j}$$

et donc

$$\frac{\mu_t^j}{t}\xrightarrow[\text{p. s.}]{t\to\infty}\frac{1}{\alpha_0^j}=\alpha^j.\quad\blacksquare$$

Remarque (non utilisée dans la suite). — μ_t^j étant (à 1 près) une fonctionnelle additive intégrable, le théorème ergodique assure également que $\alpha^j=\mathbb{E}_m(\mu_1^j)$: *voir* ([2], 2) pour plus de précision. Il est démontré de plus dans ([2], 2) que α^j est la capacité de ∂D_j pour le processus X tué sur ∂K_j. $\blacksquare$

DÉFINITION 6. — *Soient* $u_t^{j,\varepsilon}=[t(1-\varepsilon)\alpha^j]$ *et* $v_t^{j,\varepsilon}=[t(1+\varepsilon)\alpha^j]$, *où* $0<\varepsilon<1$, *et où* $[w]=\operatorname{Max}\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leqq w\}$. *Soient aussi* $C_t^{j,\varepsilon}=\sum_{k=2}^{v_t^{j,\varepsilon}}\psi_k^j$, *et* $J_t^\varepsilon=\bigcap_{j=1}^{n}\{u_t^{j,\varepsilon}<\mu_t^j<v_t^{j,\varepsilon}\}$

LEMME 8. — $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\limsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{t}C_t^{j,\varepsilon}-\frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\mu_t^j}\psi_k^j\right|>\eta\right)=0$ *pour tout* $\eta>0$.

Preuve. — Omettons l'indice j, notons C^0 un processus de Cauchy continu à droite de paramètre ρ, et posons

$$z_t^\varepsilon=\mathbb{P}\left(J_t^\varepsilon\cap\left\{\left|C_t^\varepsilon-\sum_{k=2}^{\mu_t}\psi_k\right|>t\eta\right\}\right);$$

on a d'une part $1_{J_t^\varepsilon} \xrightarrow[t \to \infty]{\text{p. s.}} 1$ pour tout $\varepsilon > 0$ par le lemme 7, et d'autre part

$$z_t^\varepsilon \leqq \mathbb{P}\left(\operatorname{Sup}_{p > u_t^\varepsilon} \left| \sum_{k=p}^{v_t^\varepsilon} \psi_k \right| > \eta t \right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{v_t^\varepsilon - u_t^\varepsilon} \{ |C_p^0| > \eta t \} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{v_t^\varepsilon - u_t^\varepsilon} \{ |C_{p/t}^0| > \eta \} \right) \text{ (par rééchelonnement)}$$

$$\leqq \mathbb{P}\left(\operatorname{Inf}\{ s > 0 \mid |C_s^0| > \eta \} \leqq \frac{v_t^\varepsilon - u_t^\varepsilon}{t} \right)$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \mathbb{P}(\operatorname{Inf}\{ s \mid |C_s^0| > \eta \} \leqq 2\alpha\varepsilon)$$

qui par continuité à droite de C^0 tend vers 0 avec ε. ■

F. LOI LIMITE DE N_t^ω

LEMME 9. — $N_t^\omega(u) \approx \sum_{j=1}^{n} (c_j(\omega)/t) \sum_{k=2}^{\mu_{ut}^j} \psi_k^j$, *au moins lorsque la loi de* X_0 *est* m.

(On part de $k=2$ pour éviter la première excursion, qui peut être incomplète.)

Preuve. — Utilisons le lemme 4, et constatons d'une part que

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^{ut} 1_{K_j}(X_s)\, d\varphi_s^j - \frac{1}{t} \sum_{k \geqq 1} \int_{ut \wedge \tau_k^j}^{ut \wedge \zeta_k^j} d\varphi_s^j \right\|_2^2$$

$$\leqq t^{-2}\, \mathbb{E}\left(\int_0^{ut} 1_{D_j \setminus K_j}(X_s)\, d\langle \varphi_s^j \rangle \right) \leqq C\, u/t,$$

et d'autre part que la contribution de la première excursion, incomplète ou non, tend vers 0 p. s.; enfin la contribution d'une éventuelle dernière excursion incomplète est asymptotiquement négligeable en probabilité, car par retournement du temps de X au temps fixe t, lorsque X est stationnaire de loi m, on a pour tout indice j et tout $\eta > 0$:

$$\mathbb{P}_m\left[\left| t^{-1} \int_{t \wedge \tau_1^j + \mu_t^j}^{t} d\varphi_s^j \right| \geqq \eta \right]$$

$$= \mathbb{P}_m\left[\left| \int_0^{0 \vee \operatorname{Sup}\{ u \leqq \operatorname{Inf}\{ v > 0 \mid X_v \notin D_j \} \mid X_u \in K_j \}} d\varphi_s^j \right| \geqq \eta t \right]$$

qui tend vers 0 lorsque $t \to \infty$, puisque la dernière intégrale est p. s. finie. ■

Conclusion provisoire

1. Fixons p dans $\mathbb{N}$ et $0 = u_0 \leqq u_1 \leqq \ldots \leqq u_p$ dans $\mathbb{R}$; supposant pour simple commodité d'écriture qu'il n'y a qu'une forme ω et que les $c_j(\omega)$ sont réels, on a pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ réels :

$$\lim_t \mathbb{E}_m\left(\exp\left[i \sum_{q=1}^{p} \lambda_q [\mathrm{N}_t^\omega(u_q) - \mathrm{N}_t^\omega(u_{q-1})]\right]\right)$$

$$= \lim_t \mathbb{E}_m\left(\exp\left[i \sum_{j=1}^{n} (c_j(\omega)/t) \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \left(\sum_{k=1+1 \vee \mu^j_{u_{q-1}t}}^{\mu^j_{u_q t}} \psi^j_k\right)\right]\right) \quad \text{(lemme 9)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_t \mathbb{E}_m\left(\exp\left[i \sum_{j=1}^{n} (c_j(\omega)/t) \sum_{q=1}^{p} \lambda_q [\mathrm{C}^{j,\varepsilon}_{u_q t} - \mathrm{C}^{j,\varepsilon}_{u_{q-1} t}]\right]\right) \quad \text{(lemme 8)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_t \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} |c_j(\omega)| \sum_{q=1}^{p} |\lambda_q| \rho [v^{j,\varepsilon}_{u_q t} - v^{j,\varepsilon}_{u_{q-1} t}] t^{-1}\right] \quad \text{(corollaire 6)}$$

$$= \exp\left[-\rho \sum_{j=1}^{n} |c_j(\omega)| \sum_{q=1}^{p} |\lambda_q| \alpha^j (u_q - u_{q-1})\right] \quad \text{(définition 6)}$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left[i \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) [\mathrm{C}^j_{u_q} - \mathrm{C}^j_{u_{q-1}}]\right]\right)$$

où les C^j sont n processus de Cauchy indépendants, de paramètres respectifs $\rho\alpha^j$, et indépendants de ω; ce qui prouve le théorème annoncé en [A.] dans le cas stationnaire, modulo le calcul des $\rho\alpha^j$; passons ensuite au cas où $\mathrm{X}_0 = x$.

2. Pour tous x dans M' et $u, w, \eta > 0$, utilisant $\varepsilon_x \mathrm{P}_1 = f_x m$ comme au lemme 2 on a :

$$\mathbb{P}_x\left[\left|t^{-1}\int_{tu}^{tu+w} \omega(\mathrm{X}_s)\right| > \eta\right] = \mathbb{E}_x\left[\mathbb{P}_{\mathrm{X}_{tu}}\left[\left|\int_0^w \omega(\mathrm{X}_s)\right| > \eta\, t\right]\right]$$

$$= \varepsilon_x \mathrm{P}_{tu}\left[\mathbb{P}_.\left[\left|\int_0^w \omega(\mathrm{X}_s)\right| > \eta\, t\right]\right] = f_x m \mathrm{P}_{tu-1}\left[\mathbb{P}_.\left[\left|\int_0^w \omega(\mathrm{X}_s)\right| > \eta\, t\right]\right]$$

$$\leqq \|f_x\|_\infty \mathbb{P}_m\left[\left|\int_0^w \omega(\mathrm{X}_s)\right| > \eta\, t\right] \xrightarrow[t \to \infty]{} 0;$$

soit

$$\mathrm{F}^t(x) = \mathbb{E}_x\left(\exp\left[i \sum_{q=1}^{p} \lambda_q [\mathrm{N}_t^\omega(u_q) - \mathrm{N}_t^\omega(u_{q-1})]\right]\right)$$

pour x dans M′ et λ_q, u_q comme en 1; ce qui précède montre que pour $w>0$:

$$\lim_{t\to\infty} [F^t(x)-\varepsilon_x P_w(F^t)]$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[F^t(x)-\mathbb{E}_x\left(\exp\left[i\sum_{q=1}^{p}\lambda_q t^{-1}\int_{w+tu_{q-1}}^{w+tu_q}\omega(X_s)\right]\right)\right]=0;$$

3. Considérons maintenant la décomposition spectrale de Δ sur $L^2(M, m)$:

$$P_w = e^{\Delta\cdot w/2} = \sum_{l\geqq 0} e^{\beta_l\cdot w/2}\,\Pi_l;$$

les valeurs propres β_l, rangées par ordre décroissant, sont <0 pour $l>0$, et pour toute h de $L^2(M, m)$ $\Pi_0 h$ est constante, puisque les fonctions harmoniques sur M sont constantes; plus précisément, on a :

$$\Pi_0 h = m(\Pi_0 h) = \lim_{t\to\infty} m P_t h = m(h);$$

et donc utilisant à nouveau $\varepsilon_x P_1 = f_x m$:

$$|(\varepsilon_x P_{w+1}-m)(F^t)|$$

$$= |\varepsilon_x P_1[(P_w-m)(F^t)]| \leqq \|f_x\|_\infty . m(|P_w-\Pi_0)(F^t)|)$$

$$\leqq \|f_x\|_\infty \cdot \|\sum_{l\geqq 1} e^{\beta_l\cdot w/2}\,\Pi_l F^t\|_2 = \|f_x\|_\infty .(\sum_{l\geqq 1} e^{\beta_l\cdot w}\|\Pi_l F^t\|_2^2)^{1/2}$$

$$\leqq \|f_x\|_\infty . e^{\beta_1\cdot w/2} . \|F^t\|_2 \leqq \|f_x\|_\infty . e^{\beta_1\cdot w/2};$$

donc $\varepsilon_x P_w(F^t)$ converge uniformément en t lorsque $w\to\infty$ vers $m(F^t)$.

4. 2 et 3 montrent que $F^t(x)$ a même limite en ∞ que $m(F^t)$, et 1 donne exactement la limite de $m(F^t)$. Le théorème de [A.] est donc établi lorsque X est issu de $X_0 = x \in M'$, modulo le calcul des $\rho\alpha^j$. ■

G. CALCUL DE $\rho\alpha^j$

Remarque. – Puisque N_t^j est indépendant de (r_0, ρ_0), il en est de même de $\rho\alpha^i$.

– Fixons un indice j, sans plus l'écrire.

– Notons ν la probabilité invariante sur ∂K pour la chaîne X_{τ_k}, analogue à ν_0 déjà définie au lemme 7 pour X_{ζ_k}, notons $\alpha_* = \mathbb{E}_\nu(\zeta_2-\tau_2)$, et posons

$$g^* = g^*(\rho_0) = \operatorname*{Sup}_D g \qquad \text{et} \qquad g_* = g_*(\rho_0) = \operatorname*{Inf}_D g.$$

LEMME 10. – $e^{2r_0}(e^{2\rho}-1)(2g^*)^{-1} \leqq \alpha_* \leqq e^{2r_0}(e^{2\rho}-1)(2g_*)^{-1}$.

Preuve. — Reprenant les notations de la preuve du lemme 5, on a :

$$\alpha_* = \mathbb{E}_v(\zeta) = \mathbb{E}_v(\operatorname{Inf}\{t \mid B(\xi_t) \geqq \rho\})$$

$$= \mathbb{E}_v\left(\operatorname{Inf}\left\{\int_0^s e^{2(r_0+B_t)} g^{-1}(r_0+B_t, \varphi_0+W_t)\,dt \mid B_s \geqq \rho\right\}\right)$$

$$= \mathbb{E}_v\left(\int_0^{\sigma_\rho} e^{2B_t} g^{-1}(r_0+B_t, \varphi_0+W_t)\,dt \times e^{2r_0}\right)$$

$$\leqq \mathbb{E}_0\left(\int_0^{\sigma_\rho} e^{2B_t}\,dt\right) \times e^{2r_0}/g_*;$$

or suivant la formule d'Itô $\exp(2\,B_{\sigma_\rho}) - e^{2B_0} = 2\int_0^{\sigma_\rho} e^{2B_t}\,dB_t + 2\int_0^{\sigma_\rho} e^{2B_t}\,dt$, et donc ($e^{2B_t}$ étant borné sur $[0, \sigma_\rho]$) $\mathbb{E}_0\left(\int_0^{\sigma_\rho} e^{2B_t}\,dt\right) = (e^{2\rho}-1)/2$. ■

PROPOSITION 11. — $\rho\alpha^j = \pi/S$.

Autrement dit, les capacités α^j sont toutes égales à $\pi/\rho\, s$.

Preuve. — (i) De l'expression donnée à la proposition 3 de dl^2 dans D on tire :

$$S(D) = \iint_D e^{2r} g^{-1}(r, \varphi)\,dr\,d\varphi \leqq 2\pi \int_{-\infty}^{\rho_0} e^{2r}(g_*)^{-1}\,dr = e^{2\rho_0}\pi/g_*,$$

et de même $S(K) \geqq e^{2r_0}\pi/g^*$.

(ii) $\int_0^t 1_K(X_s)\,ds \leqq \sum_{k\geqq 1}(t \wedge \zeta_k - t \wedge \tau_k) \leqq \int_0^t 1_D(X_s)\,ds$ entraîne sur J_t^ε :

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_K(X_s)\,ds \leqq \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{v_t^\varepsilon}(\zeta_k - \tau_k) \leqq \alpha(1+\varepsilon)\frac{1}{v_t^\varepsilon}\sum_{k=1}^{v_t^\varepsilon}(\zeta_k - \tau_k)$$

et

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_D(X_s)\,ds \geqq \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{1+u_t^\varepsilon}(\zeta_k - \tau_k) \geqq \alpha(1-\varepsilon)\frac{1}{u_t^\varepsilon}\sum_{k=1}^{u_t^\varepsilon}(\zeta_k - \tau_k).$$

(iii) Le théorème ergodique (avec la même justification que dans la preuve du lemme 7 pour la troisième assertion) assure que lorsque $t \to \infty$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t 1_K(X_s)\,ds \xrightarrow{\text{p. s.}} S(K)/S, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t 1_D(X_s)\,ds \xrightarrow{\text{p. s.}} S(D)/S$$

et

$$\frac{1}{w_t^\varepsilon}\sum_{k=1}^{w_t^\varepsilon}(\zeta_k - \tau_k) \xrightarrow{\text{p. s.}} \alpha_* \quad (\text{pour } w \text{ valant } u \text{ ou } v).$$

(iv) $1_{J_f^\varepsilon} \xrightarrow{\text{p. s.}} 1$ grâce au lemme 7.

(v) (ii), (iii) et (iv) font que pour tout $\varepsilon>0$

$$S(K)/S \leqq \alpha(1+\varepsilon)\alpha_* \leqq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} S(D)/S,$$

d'où

$$S(K)/S \leqq \alpha\alpha_* \leqq S(D)/S.$$

(vi) (i), (v) et le lemme 10 font que

$$\frac{\pi}{S} \times \frac{g_*}{g^*} \times \left(\frac{e^{2\rho}-1}{2\rho}\right)^{-1} \leqq \rho\alpha \leqq \frac{\pi}{S} \times \frac{g^*}{g_*} \times \left(\frac{e^{2\rho}-1}{2\rho}\right)^{-1} \times e^{2\rho};$$

enfin, puisque $\rho\alpha$ est indépendant de (ρ, ρ_0) selon la remarque précédant le lemme 10, on obtient le résultat en faisant tendre ρ vers 0, puis ρ_0 vers $-\infty$. ■

H. EXTENSION A CERTAINES FORMES NON FERMÉES

– Conservons les notations de [A.] et [C.], et notons de plus θ la densité de $d\omega$ par rapport à m, $\theta|_{D_j} = \theta^j(r^j, \varphi^j)$, et δ^j la distance à T_j, et soit

$$q^j(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\{r^j=r\}} \omega.$$

– Remplaçons l'hypothèse de fermeture de ω, à savoir : $\theta=0$ dans les K_j, par l'hypothèse plus faible suivante :

($\mathbb{H}$) Pour tout j :

$$\frac{\partial\theta^j}{\partial r^j} \in L^1(K_j, m), \qquad \text{et} \qquad (\delta^j)^{-1}\int_{D(T_j, \delta^j)} d\omega \in L^2(K_j, m).$$

Remarques. – (i) On a dans D_j

$$\delta^j g_*^j \leqq e^{r^j} \leqq \delta^j g_j^* \qquad \text{et} \qquad g_j S m = e^{2r^j} dr^j \wedge d\varphi^j$$

et donc $\theta = S g_j e^{-2r^j}\gamma^j$. ($\gamma^j$ et λ^j sont ceux du lemme 4.)

(ii) ($\mathbb{H}$) assure que $d\omega$ n'explose pas trop vite près des pôles de ω, et est vérifiée par exemple si $\frac{\partial\theta^j}{\partial\delta^j} \in L^1(K_j, \delta^j m)$ et $\theta \in L^2(M, m)$.

LEMME 12. – 1. $\theta \in L^1(M, m)$ $\left(\textit{et donc } \int_{D(T_j, \delta^j)} d\omega \textit{ a bien un sens}\right)$;

2. $\lim_{r \to -\infty} e^{2r} \int_0^{2\pi} |\theta^j(r, \varphi)| \, d\varphi = 0$, *et donc* $\lim_{r \to -\infty} \sup_\varphi |\lambda^j| = 0$;
3. $c_j(\omega) = \lim_{-\infty} q^j$ *existe dans* $\mathbb{C}$.

Remarque. – Le $c_j(\omega)$ de 3 se substitue à celui défini en [A.].

Preuve. – On a pour $x < r_0$:

$$\int_x^{r_0} |\theta^j| \, e^{2r} \, dr - |\theta^j(r_0, .)| \, (e^{2r_0} - e^{2x})/2$$

$$\leqq \int_x^{r_0} |\theta^j(r, .) - \theta^j(r_0, .)| \, e^{2r} \, dr \leqq \int_x^{r_0} \left(\int_r^{r_0} \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j} \right| dr^j \right) e^{2r} \, dr$$

$$= \left[e^{2r}/2 \int_r^{r_0} \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j} \right| dr^j \right]_x^{r_0} + 1/2 \int_x^{r_0} \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j} \right| e^{2r} \, dr$$

et donc

$$2 \int_{-\infty}^{r_0} |\theta^j| \, e^{2r} \, dr \leqq \int_{-\infty}^{r_0} \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j} \right| e^{2r} \, dr + e^{2r_0} |\theta^j(r_0, .)|$$

en faisant tendre x vers $-\infty$; d'où

$$2 g_*^j \, \| \theta \|_{L^1(K_j, m)} \leqq g_j^* \left\| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j} \right\|_{L^1(K_j, m)} + C < \infty.$$

2. Soit

$$\Phi^j(r) = e^{2r} \int_0^{2\pi} |\theta^j(r, \varphi)| \, d\varphi;$$

on a

$$|\Phi^j(r) - \Phi^j(r')| \leqq \left| 2 \int_r^{r'} \Phi^j(r^j) \, dr^j \right| + \left| \int_r^{r'} e^{2r^j} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial r^j}(r^j, \varphi) \right| d\varphi \, dr^j \right|$$

qui tend vers 0 lorsque r et r' tendent vers $-\infty$, à cause de ($\mathbb{H}$) et de 1; donc $\Phi^j \xrightarrow[r \to -\infty]{} l^j$; puis $\Phi^j \in L^1([-\infty, r_0])$ entraîne $l^j = 0$.

3. $|q^j(r) - q^j(r')| = 1/2\pi \left| \int_{\{r < r^j < r'\}} d\omega \right| \leqq 1/2\pi \int_{\{r < r^j < r'\}} |\theta| \, dm$ pour $r < r'$, ce qui avec 1 permet d'appliquer le critère de Cauchy. ■

THÉORÈME. – *Le théorème de* [A.] *reste valable sous l'hypothèse* ($\mathbb{H}$).

Preuve. – Il faut contrôler que la preuve du lemme 4 s'adapte sous ($\mathbb{H}$), λ^1 n'étant plus de classe C^2 sur M; mais

$$\frac{1}{t} \int_0^t \lambda_s^j \circ dr_s^j = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_s^j e^{-r_s^j} (g_j)_s^{1/2} \, d\beta_s + \frac{1}{2t} \int_0^t \left(\frac{\partial \lambda^j}{\partial r^j} \right)_s (g_j)_s \, e^{-2r_s^j} \, ds,$$

et le processus croissant de la partie martingale vaut

$$\frac{1}{t^2}\int_0^t |\lambda_s^j|^2 e^{-2r_s^j}(g_j)_s\,ds \approx \frac{1}{t}\int_{D_j} |\lambda^j|^2 e^{-2r^j} g_j\,dm \approx 0$$

car $\int_{D_j} |\lambda^j|\,e^{-2r^j}\,dm \leqq C\int_{D_j} |\theta|\,dm$, et par (12, 2); tandis que l'autre terme tend p. s. vers

$$\int_{D_j}\left(\frac{\partial\lambda^j}{\partial r^j}\right)e^{-2r^j}g_j\,dm = S^{-1}\int_{D_j}\left(\frac{\partial\lambda^j}{\partial r^j}\right)dr^j\wedge d\varphi^j = \lim_{r\to-\infty}\int_0^{2\pi}\lambda^j(r,\varphi)\,d\varphi = 0$$

car $\int_{D_j}\left|\frac{\partial\lambda^j}{\partial r^j}\right|dr^j\,d\varphi^j \leqq C\int_{D_j}\left|\frac{\partial\theta^j}{\partial r^j}\right|dm$, et par (12, 2); ce qui prouve que $\frac{1}{t}\int_0^t \lambda_s^j \circ dr_s^j \approx 0$.

Enfin $\frac{1}{t}\int_0^t ((q^j - c_j)\,1_{D_j})(r_s^j)\,d\varphi_s^j \approx 0$ puisque son processus croissant est

$$\frac{1}{t^2}\int_0^t (|q^j - c_j|^2\,1_{D_j})(r_s^j)\,e^{-2r_s^j}(g_j)_s\,ds \approx \frac{1}{t}\int_{D_j} |q^j - c_j|^2 e^{-2r^j} g_j\,dm$$

qui tend vers 0 à cause de la deuxième condition de ($\mathbb{H}$). ■

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers Yves Le Jan, qui m'a régulièrement et judicieusement conseillé; je veux également remercier J. F. Le Gall et J. C. Gruet pour quelques utiles remarques.

RÉFÉRENCES

[1] J. Azema, M. Duflo et D. Revuz, Propriétés relatives des processus de Markov récurrents, Z.F.W., vol. **13**, 1969, p. 286-314.

[2] K. Burdzy, J. W. Pitman et M. Yor, *Some Asymptotic Laws for Crossings and Excursions*, preprint.

[3] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, 1960.

[4] J. Franchi, Théorème des résidus stochastique et asymptotique pour 1-formes sur S^2, *Prépublication* n° 16 du Laboratoire de Probabilités de Paris-VI, 1989.

[5] N. Ikeda et S. Manabe, Integral of Differential Forms Along the Path of Diffusion Processes, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.*, vol. **15**, 1979, p. 827-852.

[6] J. F. Le Gall et M. Yor, Étude asymptotique de certains mouvements browniens complexes avec drift, *Proba. Theor. Rel. fields*, vol. **71**, 1986, p. 183-229, Springer.

[7] T. LYONS et H. P. MCKEAN, Windings of the Plane Brownian Motion, *Adv. Math.*, vol. **51**, 1984, p. 212-225.
[8] S. MANABE, On the Intersection Number of the Path of a Diffusion and Chains, *Proc. Jpn Acad.*, vol. **55**, Ser. A, 1979.
[9] S. MANABE, Stochastic Intersection Number and Homological Behaviors of Diffusion Processes on Riemannian Manifolds, *Osaka J. Math.*, vol. **19**, 1982, p. 429-457.
[10] H. P. MCKEAN, *Stochastic Integrals*, Academic Press, New York, 1969.
[11] P. MESSULAM et M. YOR, On D. Williams' « Pinching Method » and Some Applications, *J. London Math. Soc.*, vol. **26**, 1982, p. 348-364.
[12] S. MINAKSHISUNDARAM, Eigenfunctions on Riemannian Manifolds, *J. Indian Math. Soc.*, vol. **17**, 1953, p. 158-165.
[13] J. W. PITMAN et M. YOR, Asymptotic Laws of Planar Brownian Motion, *Annals Proba.*, vol. **14**, 1986, p. 733-779.
[14] J. W. PITMAN et M. YOR, Further Asymptotic Laws of Planar Brownian Motion, *Annals Proba.*, vol. **17**, n° 3, 1989, p. 965-1011.
[15] F. SPITZER, Some Theorems Concerning Two-Dimensional Brownian Motion, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **87**, 1958, p. 187-197.
[16] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. **IV**, Chap. 9, Add. 1, Publish or perish Inc., Boston, 1975.

(*Manuscrit reçu le* 2 *octobre* 1989;
révisé le 31 *janvier* 1991.)