ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. DOSS

Un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, n° 3 (1991), p. 407-423

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_3_407_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 3, 1991, p. 407-423. *Probabilités et Statistiques*

Un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire

par

H. DOSS

Université de Haute Normandie,
U.R.A.-C.N.R.S. D. 1378, Mathématiques,
U.F.R. des Sciences, B.P. n° 118,
76134 Mont-Saint-Aignan Cedex, France

RÉSUMÉ. — Considérons le couple « signal-observation »

$$(\mathscr{X}_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l,$$

solution de

$$\begin{cases} d\mathscr{X}_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{r} S - \sigma_i(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dB_t^i + \sum_{j=1}^{l} S - \tilde{\sigma}_j(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dY_t^{j,\varepsilon} + b(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dt \\ dY_t^\varepsilon = h(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dt + d\tilde{B}_t; \qquad \mathscr{X}_0^\varepsilon = x^\varepsilon, \quad Y_0^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$ et b sont des champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^n$, h est une application régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$, $B = (B^1, \ldots, B^r)$, $\tilde{B} = (\tilde{B}^1, \ldots, \tilde{B}^l)$ sont deux mouvements browniens indépendants. Quand $\varepsilon \downarrow 0$ et $x^\varepsilon \to x$, on démontre, sous certaines conditions, un principe de grandes déviations pour la loi conditionnelle $M^\varepsilon(., d\omega)$ du processus « signal » $\mathscr{X}^\varepsilon = (\mathscr{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ sachant « l'observation » $Y^\varepsilon = (Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$.

Classification A.M.S. : 60 F 10, 60 G 35, 60 H 10.

ABSTRACT. – Consider the couple "signal-observation"

$$(\mathscr{X}_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l,$$

solution of

$$\begin{cases} d\mathscr{X}_t^\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=1}^{r} S - \sigma_i(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dB_t^i + \sum_{j=1}^{l} S - \tilde{\sigma}_j(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dY_t^{j,\varepsilon} + b(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dt \\ dY_t^\varepsilon = h(\mathscr{X}_t^\varepsilon)\, dt + d\tilde{B}_t; \qquad \mathscr{X}_0^\varepsilon = x^\varepsilon, \quad Y_0^\varepsilon = 0 \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$ and b are regular vector fields on $\mathbb{R}^n$, h is a regular map from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^l$, $B = (B^1, \ldots, B^r)$, $\tilde{B} = (\tilde{B}^1, \ldots, \tilde{B}^l)$ are two independent brownian motions. When $\varepsilon \downarrow 0$ and $x^\varepsilon \to x$, we prove, under some conditions, a large deviations principle for the conditional probability distribution $M^\varepsilon(\,.\,, d\omega)$ of the "signal" process $\mathscr{X}^\varepsilon = (\mathscr{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ given the "observation" $Y^\varepsilon = (Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la solution $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)$ de l'équation :

$$(1) \quad \begin{cases} X_t^\varepsilon = x^\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} S - \int_0^t \sigma_i(X_s^\varepsilon)\, dB_s^i + \sum_{j=1}^{l} S - \int_0^t \tilde{\sigma}_j(X_s^\varepsilon)\, d\tilde{B}_s^j + \int_0^t b(X_s^\varepsilon)\, ds, \\ 0 \leqq t \leqq T, \end{cases}$$

où $x^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, les σ_i, $\tilde{\sigma}_j$ $(i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, l\})$ et b sont $r + l + 1$ champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ assez réguliers, $B = (B_t^i)_{i=1, \ldots, r}$, $\tilde{B} = (\tilde{B}_t^j)_{j=1, \ldots, l}$ sont deux mouvements browniens indépendants, issus de zéro, à valeurs $\mathbb{R}^r$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement, définis sur un espace de probabilité filtré $(\Theta, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$, vérifiant les conditions habituelles.

[La lettre S désigne l'intégrale (ou la différentielle) de Stratonovitch.]

Nous montrons, sous certaines hypothèses, l'existence d'une version régulière de la loi conditionnelle $N^\varepsilon(\,.\,, d\omega)$ du processus $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ sachant $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$ telle que, pour tout $\tilde{f} \in \mathscr{C}_0([0, T], \mathbb{R}^l)$, la famille de mesures de probabilité $(N^\varepsilon(\tilde{f}, d\omega))_{\varepsilon > 0}$ vérifie, quand $\varepsilon \downarrow 0$, un principe de grandes déviations, avec un calcul explicite de la fonctionnelle d'action associée.

Nous établissons ensuite, grâce à ces résultats, un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire (*cf.* le théorème 4).

Notons que ce travail est une suite naturelle de l'article écrit en [4] où on étudie la dépendance du processus X^ε relativement au mouvement brownien ε B au lieu de considérer, comme nous le faisons ici, le comportement de X^ε sachant $\tilde{B}$.

Plusieurs théorèmes établis dans ces deux articles sont cependant des extensions des estimations de Freidlin et Wentzell, [5], comme on le voit dans les énoncés, en posant $\tilde{\sigma}_1=\tilde{\sigma}_2=\ldots=\tilde{\sigma}_l=0$.

HYPOTHÈSE I :

On supposera, dans la suite, que :

1° il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $(x, y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$:

$$|b(x)-b(y)|+\sum_i|\sigma_i(x)-\sigma_i(y)|+\sum_j|\tilde{\sigma}_j(x)-\tilde{\sigma}_j(y)|\leqq C|x-y|.$$

($|\,.\,|$ désigne la norme euclidienne).

2° σ_i et $\tilde{\sigma}_j (i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,l)$ sont de classe C_b^2 (l'indice b signifie que les dérivées, lorsqu'elles existent, sont bornées).

3° les champs de vecteurs $\tilde{\sigma}_1,\ldots,\tilde{\sigma}_l$ commutent deux à deux, *i. e.* $\forall j\neq j'$ $(j, j'\in\{1,\ldots,l\})$, le crochet de Lie $[\tilde{\sigma}_j, \tilde{\sigma}_{j'}]$, est nul. □

Soit $T>0$ fixé. On posera $W=\mathscr{C}_0([0, T], \mathbb{R}^r)$, $\tilde{W}=\mathscr{C}_0([0, T], \mathbb{R}^l)$, $\Omega=\mathscr{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$; ces espaces sont munis de la norme uniforme (notée à chaque fois $\|\,.\,\|$) et de leurs tribus boréliennes, l'indice 0 signifie que l'on se restreint aux fonctions continues nulles en zéro.

Considérons l'ensemble H (resp. $\tilde{H}$) des applications $f\in W$ (resp. $\tilde{f}\in\tilde{W}$) absolument continues, à dérivée $\dot{f}$ de carré intégrable sur $[0, T]$; H (resp. $\tilde{H}$), muni du produit scalaire $(f, g)=\int_0^T \dot{f}_s.\dot{g}_s\,ds$, est un espace de Hilbert (espace de Caméron-Martin).

Soient $x\in\mathbb{R}^n$ et Φ_x l'application de $H\times\tilde{H}$ dans Ω, donnée par: $\Phi_x(f,\tilde{f})=(\varphi_t)$ où (φ_t) est solution de :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}\varphi_t=x+\sum_{i=1}^{r}\int_0^t\sigma_i(\varphi_s)\,df_s^i+\sum_{j=1}^{l}\int_0^t\tilde{\sigma}_j(\varphi_s)\,d\tilde{f}_s^j+\int_0^t b(\varphi_s)\,ds,\\ \qquad 0\leqq t\leqq T,\end{array}\right.$$

pour tous $f=(f_s^i)_{i=1,\ldots,r}\in H$ et $\tilde{f}=(\tilde{f}_s^j)_{j=1,\ldots,l}\in\tilde{H}$.

LEMME 1. — *La fonctionnelle* $\Phi_x(.,.)$, *donnée par la formule* (2), *admet un prolongement unique, noté encore* Φ_x, *défini sur* $H\times\tilde{W}$ *à valeurs dans* Ω *tel que, pour tout* $f\in H$, *l'application :*

$$\tilde{f}\in\tilde{W}\to\Phi_x(f,\tilde{f})\in\Omega$$

soit continue pour la norme uniforme.

Le prolongement Φ_x *est donné par la formule explicite :*

$$\Phi_x(f, \tilde{f})(t) = \mathrm{A}(\mathrm{C}_t, \tilde{f}_t), \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \quad (f, \tilde{f}) \in \mathrm{H} \times \tilde{\mathrm{W}}, \tag{3}$$

où A *est l'application de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *déterminée par la résolution du système différentiel :*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \beta_j}(\alpha, \beta) = \tilde{\sigma}_j(\mathrm{A}(\alpha, \beta)), \qquad j = 1, \ldots, l \\ \mathrm{A}(\alpha, 0) = \alpha, \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \end{array}\right. \tag{4}$$

Cette solution existe, en vertu de l'hypothèse I, 3°, *cf.* [1].

$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_t)$ *est solution de l'équation intégrale :*

$$\mathrm{C}_t = x + \int_0^t m(\tilde{f}_s, \mathrm{C}_s)\, df_s + \int_0^t n(\tilde{f}_s, \mathrm{C}_s)\, ds, \qquad t \in [0, \mathrm{T}], \tag{5}$$

où les coefficients m et n sont donnés par :

$$\left\{\begin{array}{l} m(\beta, \alpha) = \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha}[\mathrm{A}(\alpha, \beta), -\beta].\{\sigma(\mathrm{A}(\alpha, \beta))\} \\ n(\beta, \alpha) = \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha}[\mathrm{A}(\alpha, \beta), -\beta].\{b(\mathrm{A}(\alpha, \beta))\} \end{array}\right. \tag{6}$$

$\sigma(.)$ *désigne ici la matrice* $n \times r$ *formée des vecteurs colonnes* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$*; noter que* $m(\tilde{f}_s, \mathrm{C}_s)$ *est aussi une matrice* $n \times r$.

Démonstration. — *Cf.* [1]. Si $(f, \tilde{f}) \in \mathrm{H} \times \tilde{\mathrm{H}}$, la démonstration consiste à vérifier, grâce à la formule du changement de variables, que $\mathrm{A}(\mathrm{C}_t, \tilde{f}_t)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ est solution de l'équation (2). La propriété de continuité énoncée dans le lemme se lit ensuite sur les formules explicites donnant $\mathrm{A}(\mathrm{C}_t, \tilde{f}_t)$ qui est bien défini pour tout $(f, \tilde{f}) \in \mathrm{H} \times \tilde{\mathrm{W}}$. □

Pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{H}}$, considérons le processus $\mathrm{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} = (\mathrm{Y}_t^{\varepsilon, \tilde{f}})$, solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Y}_t^{\varepsilon, \tilde{f}} = x^\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^r \mathrm{S} - \int_0^t \sigma_i(\mathrm{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}})\, d\mathrm{B}_s^i \\ + \sum_{j=1}^l \int_0^t \tilde{\sigma}_j(\mathrm{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}})\, d\tilde{f}_s^j + \int_0^t b(\mathrm{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}})\, ds, \\ \qquad 0 \leqq t \leqq \mathrm{T}. \end{array}\right. \tag{7}$$

On supposera toujours que $\lim_{\varepsilon \to 0} x^\varepsilon = x$.

Notons $\mathrm{N}^\varepsilon(\tilde{f}, d\omega)$ la loi du processus $\mathrm{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}}$: c'est un élément de l'espace $\mathscr{M}_1(\Omega)$ des mesures de probabilité sur Ω muni, dans toute la suite, de la topologie de la convergence étroite.

THÉORÈME 2. — *Sous l'hypothèse I :*

(*i*) *L'application qui à* $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{H}}$ *fait correspondre* $\mathrm{N}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega) \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ *admet un prolongement unique, noté encore* $\mathrm{N}^{\varepsilon}(., d\omega)$, *défini sur* $\tilde{\mathrm{W}}$ *à valeurs dans* $\mathscr{M}_1(\Omega)$, *continu pour la topologie de la convergence uniforme sur* $\tilde{\mathrm{W}}$; $\mathrm{N}^{\varepsilon}(., d\omega)$ *est une version régulière de la loi conditionnelle du processus* $\mathrm{X}^{\varepsilon} = (\mathrm{X}^{\varepsilon}_t)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ *sachant* $\tilde{\mathrm{B}} = (\tilde{\mathrm{B}}_t)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$.

(ii) *Pour tout* $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{W}}$ *et tout* $\chi \in \mathscr{B}_{\Omega}$ *(borélien de* Ω*), on a :*

$$(8) \qquad \begin{cases} \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}}\, \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathrm{N}^{\varepsilon}(\tilde{f}, \chi) \leqq -\operatorname{Inf}\{\lambda_{\tilde{f}}(\omega), \omega \in \bar{\chi}\} \\ \underline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}}\, \varepsilon^2 \operatorname{Log} \mathrm{N}^{\varepsilon}(\tilde{f}, \chi) \geqq -\operatorname{Inf}\{\lambda_{\tilde{f}}(\omega), \omega \in \mathring{\chi}\} \end{cases}$$

où $\mathring{\chi}$ *et* $\bar{\chi}$ *désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de* χ *dans* Ω,

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_{\tilde{f}}(\omega) = \operatorname{Inf}\{\mu(f), f \in \mathrm{H} \ t.q.\ \Phi_x(f, \tilde{f}) = \omega), \\ \qquad (\omega \in \Omega, \operatorname{Inf}\{\varnothing\} = +\infty) \end{cases}$$

$\mu(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} |\dot{f}_s|^2\, ds$ *et* $\Phi_x(f, \tilde{f})$ *est défini par la formule* (3), *lemme* 1.

De plus, pour tout $\mathrm{L} \geqq 0$, $\{\omega : \lambda_{\tilde{f}}(\omega) \leqq \mathrm{L}\}$ *est compact dans* Ω.

$\lambda_{\tilde{f}}$ *est donnée par la formule explicite* (59).

Démonstration :

(i) Soient $\mathrm{X}^{\varepsilon} = (\mathrm{X}^{\varepsilon}_t)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ la solution de (1) et, pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{H}}$, $\mathrm{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} = (\mathrm{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t)_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ la solution de (7). On a les représentations suivantes :

$$(10) \qquad \mathrm{X}^{\varepsilon}_t = \mathrm{A}(\bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_t, \tilde{\mathrm{B}}_t)$$

$$(11) \qquad \mathrm{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t = \mathrm{A}(\bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t, \tilde{f}_t)$$

où les processus $(\bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_t)$ et $(\bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t)$ sont solutions de :

$$(12) \qquad \bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_t = x^{\varepsilon} + \varepsilon \mathrm{S} - \int_0^t m(\tilde{\mathrm{B}}_s, \bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_s)\, d\mathrm{B}_s + \int_0^t n(\tilde{\mathrm{B}}_s, \bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_s)\, ds$$

$$(13) \qquad \bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t = x^{\varepsilon} + \varepsilon \mathrm{S} - \int_0^t m(\tilde{f}_s, \bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_s)\, d\mathrm{B}_s + \int_0^t n(\tilde{f}_s, \bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_s)\, ds$$

les fonctions A, m et n étant données par les formules (4) et (6).

Il suffit, en effet, d'utiliser la formule d'Itô, pour vérifier que les processus $(\mathrm{A}(\bar{\mathrm{X}}^{\varepsilon}_t, \tilde{\mathrm{B}}_t))_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ et $(\mathrm{A}(\bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t, \tilde{f}_t))_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ (où $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{H}}$) sont bien solutions des équations (1) et (7) respectivement, *cf.* [1].

Remarquons que le processus $(\mathrm{A}(\bar{\mathrm{Y}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t, \tilde{f}_t))_{t \in [0, \mathrm{T}]}$ est bien défini pour tout $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{W}}$. Notons, provisoirement, $\bar{\mathrm{N}}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega)$ la loi de ce processus.

On sait, d'après ce qui précède, que si $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{H}}$, $\bar{\mathrm{N}}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega) = \mathrm{N}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega)$ et on vérifie facilement que l'application $\tilde{f} \in \tilde{\mathrm{W}} \to \bar{\mathrm{N}}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega) \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\tilde{\mathrm{W}}$.

De plus, les formules (10) et (12), montrent, compte tenu de l'indépendance des mouvements browniens B et $\tilde{B}$, que la famille $(\bar{N}^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega))_{\tilde{f} \in \tilde{W}}$ est une version (très) régulière de la loi conditionnelle du processus X^{ε} sachant $\tilde{B}$. L'assertion (i) du théorème est donc démontrée.

Pour démontrer (ii), on a besoin du lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit* $\tilde{f} \in \tilde{W}$. *On posera* (*par extension*)

$$Y^{\varepsilon, \tilde{f}} = (A(\bar{Y}_t^{\varepsilon, \tilde{f}}, \tilde{f}_t))_{t \in [0, T]}.$$

Pour tous $R>0$, $\delta>0$, $a>0$, *il existe* $\delta'>0$ *tel que :*

$$(14) \qquad \sup_{\substack{f \in H \\ \mu(f) \leqq a}} P\{ \| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f}) \| \geqq \delta, \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \} \leqq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2} \right),$$

pour tout $\varepsilon>0$ *assez petit,* $\Phi_x(f, \tilde{f})$ *étant donné par la formule* (3).

Démonstration. — Posons $M = \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{f}(t)|$. Commençons par remarquer que :

$$(15) \qquad \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^n \\ \beta \in \mathbb{R}^l, |\beta| \leqq M}} \left\{ \left| \frac{\partial A}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} A(\alpha, \beta) \right| \right\} = K_M < \infty.$$

cf. [1].

On a, pour tout $(f, \tilde{f}) \in H \times \tilde{W}$:

$$Y_t^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f})(t) = A(\bar{Y}_t^{\varepsilon, \tilde{f}}, \tilde{f}_t) - A(C_t, \tilde{f}_t), \qquad t \in [0, T].$$

Donc

$$\| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f}) \| \leqq K_M \| \bar{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} - C \|$$

et

$$P\{ \| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f}) \| \geqq \delta, \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \}$$
$$\leqq P\left\{ \| \bar{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} - C \| \geqq \frac{\delta}{K_M}, \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \right\}.$$

Il suffit d'estimer $\| \bar{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} - C \|$ sur $\{ \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \}$.

Nous nous inspirons des idées développées en [3].

En considérant les équations (5) et (13), on a :

$$(16) \quad \bar{Y}_t^{\varepsilon, \tilde{f}} - C_t = (x^{\varepsilon} - x) + \int_0^t m(\tilde{f}_s, \bar{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}}) [\varepsilon dB_s - df_s]$$
$$+ \int_0^t [m(\tilde{f}_s, \bar{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}}) - m(\tilde{f}_s, C_s)] df_s + \int_0^t [n(\tilde{f}_s, \bar{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}}) - n(\tilde{f}_s, C_s)] ds$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^t \hat{m}(\tilde{f}_s, \bar{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}}) ds$$

où

$$\hat{m}(\beta, \alpha) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial m_i}{\partial \alpha}(\beta, \alpha)[m_i(\beta, \alpha)], \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l, \tag{17}$$

si $m(\beta, \alpha) = (m_1(\beta, \alpha), \ldots, m_r(\beta, \alpha))$, matrice $n \times r$.

On peut supposer dans la suite, vu le caractère local de l'estimation cherchée, que les coefficients *m et n* ainsi que leurs dérivées (lorsqu'elles existent) sont uniformément bornés.

L'équation (16) entraîne, grâce au lemme de Gronwall, qu'il existe une constante $K > 0$ (ne dépendant essentiellement que de a et T) telle que :

$$\| \bar{Y}^{\varepsilon, \tilde{f}} - C \| \leqq \left\{ | x^\varepsilon - x | + \frac{\varepsilon^2}{2} K + \| N^\varepsilon \| \right\} . K, \tag{18}$$

où

$$N_t^\varepsilon = \int_0^t m(\tilde{f}_s, \bar{Y}_s^{\varepsilon, \tilde{f}}) [\varepsilon \, dB_s - df_s], \qquad t \in [0, T]. \tag{19}$$

Pour démontrer le lemme, on voit qu'il suffit d'estimer, quand $\varepsilon \to 0$:

$$\| N^\varepsilon \| \qquad \text{sur} \quad \{ \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \}.$$

Soit $\rho > 0$. On a, grâce à la formule de Caméron-Martin :

$$P\{ \| N^\varepsilon \| \geqq \rho, \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \} = E \left\{ 1_{\{ \varepsilon \| \tilde{N}^\varepsilon \| \geqq \rho, \| \varepsilon B \| \leqq \delta' \}} \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \dot{f}_s . dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T | \dot{f}_s |^2 \, ds \right) \right\}, \tag{20}$$

où

$$\tilde{N}_t^\varepsilon = \int_0^t m(\tilde{f}_s, Z_s^\varepsilon) \, dB_s, \qquad t \in [0, T], \tag{21}$$

$Z^\varepsilon = (Z_t^\varepsilon)$ étant solution de l'équation :

$$Z_t^\varepsilon = x^\varepsilon + \varepsilon S - \int_0^t m(\tilde{f}_s, Z_s^\varepsilon) \, dB_s + \int_0^t [m(\tilde{f}_s, Z_s^\varepsilon) \dot{f}_s + n(\tilde{f}_s, Z_s^\varepsilon)] \, ds. \tag{22}$$

On déduit de (20), en utilisant l'inégalité de Schwarz, que

$$P\{ \| N^\varepsilon \| \geqq \rho, \| \varepsilon B - f \| \leqq \delta' \} \leqq (P\{ \| \varepsilon \tilde{N}^\varepsilon \| \geqq \rho, \| \varepsilon B \| \leqq \delta' \})^{1/2} \exp\left(\frac{4a}{\varepsilon^2} \right) \tag{23}$$

si $\mu(f) = \frac{1}{2} \int_0^T | \dot{f}_s |^2 \, ds \leqq a$.

On voit maintenant qu'il suffit de démontrer la propriété suivante :

(24) Pour tous $R>0$, $\rho>0$, $a>0$, il existe $\delta'>0$ tel que :

$$\sup_{\substack{f \in H \\ \mu(f) \leqq a}} P\{\|\varepsilon \tilde{N}^\varepsilon\| \geqq \rho,\ \|\varepsilon B\| \leqq \delta'\} \leqq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right),$$

pour tout $\varepsilon>0$ assez petit.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_i=\dfrac{iT}{k}$, $i=0, 1, \ldots, k$.

Posons $Z_t^{\varepsilon,k}=Z_{t_i}^\varepsilon$ et $\mathcal{J}_t^k=\mathcal{J}_{t_i}$ si $t \in [t_i, t_{i+1}[$.

On a $\{\|\varepsilon \tilde{N}^\varepsilon\| \geqq \rho,\ \|\varepsilon B\| \leqq \delta'\} \subseteq \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ où :

$$\mathcal{S}_1=\{\|Z^\varepsilon-Z^{\varepsilon,k}\|+\|\mathcal{J}-\mathcal{J}^k\| \geqq \gamma\}, \qquad \gamma \text{ paramètre} > 0$$

$$\mathcal{S}_2=\left\{\|Z^\varepsilon-Z^{\varepsilon,k}\|+\|\mathcal{J}-\mathcal{J}^k\| \leqq \gamma,\right.$$
$$\left.\left\|\varepsilon \int_0^\cdot [m(\mathcal{J}_s, Z_s^\varepsilon)-m(\mathcal{J}_s^k, Z_s^{\varepsilon,k})]\,.\,dB_s\right\| \geqq \frac{\rho}{2}\right\}$$

$$\mathcal{S}_3=\left\{\left\|\varepsilon \int_0^\cdot m(\mathcal{J}_s^k, Z_s^{\varepsilon,k})\,dB_s\right\| \geqq \frac{\rho}{2},\ \|\varepsilon B\| \leqq \delta'\right\}.$$

Notons, grâce à la majoration exponentielle, qu'il existe deux constantes K_1 et $K_2>0$ telles que :

$$P\{\mathcal{S}_2\} \leqq K_1 \exp\left(-\frac{K_2\rho^2}{\varepsilon^2\gamma^2 T}\right).$$

On peut donc choisir le paramètre $\gamma>0$ assez petit, pour que :

$$(25) \qquad \left\{\begin{array}{l} P\{\mathcal{S}_2\} \leqq K_1\, exp\left(-\dfrac{K_2\rho^2}{\varepsilon^2\gamma^2 T}\right) \leqq \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{R}{\varepsilon^2}\right), \\ \text{si } \varepsilon \in]0, 1]. \end{array}\right.$$

γ étant fixé de cette façon, on voit que, pour tout k assez grand, $\|\mathcal{J}-\mathcal{J}^k\|<\dfrac{\gamma}{2}$ et donc, avec des notations évidentes :

$$(26) \quad P\{\mathcal{S}_1\} \leqq P\left\{\|Z^\varepsilon-Z^{\varepsilon,k}\| \geqq \frac{\gamma}{2}\right\}$$
$$\leqq \sum_{i=0}^{k-1} P\left\{\|Z^\varepsilon-Z^{\varepsilon,k}\|_{t_i}^{t_{i+1}} \geqq \frac{\gamma}{2}\right\}$$
$$\leqq \sum_{i=0}^{k-1} P\left\{\left\|\varepsilon \int_{t_i}^\cdot m(\mathcal{J}_s, Z_s^\varepsilon)\,dB_s\right\|_{t_i}^{t_{i+1}} \geqq \frac{\gamma}{4}\right\}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1} P\left\{\left\|\int_{t_i}^\cdot h_\varepsilon(s, Z_s^\varepsilon)\,ds\right\|_{t_i}^{t_{i+1}} \geqq \frac{\gamma}{4}\right\}$$

où $h_\varepsilon(s,\alpha)=m(\tilde{f}_s,\alpha).\dot{f}_s+n(\tilde{f}_s,\alpha)+\frac{\varepsilon^2}{2}\hat{m}(\tilde{f}_s,\alpha)$, $s\in[0, \mathrm{T}]$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$, $\hat{m}$ étant donné par (17).

On voit facilement que, si $k\in\mathbb{N}^*$ est assez grand, alors

$$\mathrm{P}\left\{\left\|\int_{t_i}^{\cdot} h_\varepsilon(s, \mathrm{Z}_s^\varepsilon)\,ds\right\|_{t_i}^{t_{i+1}} \geqq \frac{\gamma}{4}\right\}=0,$$

pour tous $i\in\{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\varepsilon\in]0, 1]$ et tout $f\in\mathrm{H}$ tel que $\mu(f)\leqq a$.

Donc on peut trouver $k_0\in\mathbb{N}^*$ assez grand et deux constante $\mathrm{K}'_1>0$ et $\mathrm{K}'_2>0$ telles que :

$$\mathrm{P}\{\mathscr{S}_1\}\leqq\mathrm{K}'_1.k_0\exp\left(-\frac{\mathrm{K}'_2 k_0\gamma^2}{\varepsilon^2.\mathrm{T}}\right)\leqq\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\mathrm{R}}{\varepsilon^2}\right) \tag{27}$$

pour tout $\varepsilon\in]0, 1]$.

k_0 étant ainsi choisi, il s'agit d'estimer $\mathscr{S}_3$.

Pour tout $t\in[0, \mathrm{T}]$, on a, en posant $t'_i=\mathrm{Min}(t_i, t)$:

$$\varepsilon.\int_0^t m(\tilde{f}_s^{k_0}, \mathrm{Z}_s^{\varepsilon, k_0})\,d\mathrm{B}_s=\varepsilon.\sum_{i=0}^{k_0-1} m(\tilde{f}_{t'_i}, \mathrm{Z}_{t'_i}^\varepsilon).(\mathrm{B}_{t'_{i+1}}-\mathrm{B}_{t'_i})$$

et donc $\left\|\varepsilon.\int_0^{\cdot} m(\tilde{f}_s^{k_0}, \mathrm{Z}_s^{\varepsilon, k_0})\,d\mathrm{B}_s\right\|\leqq 2k_0.\mathrm{K}''\delta'$ sur $\{\|\varepsilon\mathrm{B}\|\leqq\delta'\}$ où $\mathrm{K}''=\sup\limits_{(\beta,\alpha)}|m(\beta,\alpha)|$.

On en déduit que $\mathrm{P}\{\mathscr{S}_3\}=0$ si $\delta'<\frac{\rho}{4\mathrm{k}_0\mathrm{K}''}$.

La propriété (24) est donc démontrée. □

Fin de la démonstration du théorème 2 :

Soient $\tilde{f}\in\tilde{\mathrm{W}}$ et $\lambda_{\tilde{f}}(.)$ la fonctionnelle définie par la formule (9).

Commençons par vérifier, que pour tout $\mathrm{L}\geqq 0$, $\{\lambda_{\tilde{f}}\leqq\mathrm{L}\}$ est compact dans Ω.

Soit $\mathscr{C}_\mathrm{L}=\{f\in\mathrm{W}$ t. q. $\mu(f)\leqq\mathrm{L}\}$. On sait que $\mathscr{C}_\mathrm{L}$ est compact dans W, [5]. Il suffit donc de montrer que l'application :

$$f\in\mathscr{C}_\mathrm{L}\to\Phi_x(f, \tilde{f})\in\Omega \tag{28}$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}_\mathrm{L}$, puisque, dans ce cas, $\{\lambda_{\tilde{f}}\leqq\mathrm{L}\}=\{\Phi_x(f, \tilde{f}),\ f\in\mathscr{C}_\mathrm{L}\}$ est compact dans Ω. La continuité de l'application $\Phi_x(.\,, \tilde{f})_{|\mathscr{C}_\mathrm{L}}$ lorsque $\tilde{f}\in\tilde{\mathrm{H}}\subseteq\tilde{\mathrm{W}}$ est facile à démontrer car, alors, pour tout $f\in\mathscr{C}_\mathrm{L}$, $\Phi_x(f, \tilde{f})$ est solution de l'équation (2), *cf.* [3].

Par contre, lorsque $\tilde{f} \in \tilde{W} \setminus \tilde{H}$, on utilise le fait que :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

(29) $\tilde{g} \in \tilde{H}$ et $\| \tilde{f} - \tilde{g} \| \leqq \alpha \Rightarrow \sup_{f \in \mathscr{C}_L} \| \Phi_x(f, \tilde{f}) - \Phi_x(f, \tilde{g}) \| \leqq \varepsilon.$

La propriété (29) est, grâce au lemme de Gronwall, une conséquence des représentations (3) et (5). Il est facile de montrer qu'elle entraîne, compte tenu de ce qui précède, la continuité de l'application donnée par (28) lorsque $\tilde{f} \in \tilde{W} \setminus \tilde{H}$.

Grâce au lemme 3, la suite de la démonstration ne pose pas de difficultés (*cf.* [3]). Nous la donnons pour être complets.

Soit F un fermé de Ω tel que $\Lambda_{\tilde{f}}(F) = \operatorname{Inf} \{ \lambda_{\tilde{f}}(\omega), \omega \in F \} > 0$.

Si $L \in [0, \Lambda_{\tilde{f}}(F)[$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{C}_L$

(30) $\{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} \subseteq \{ \| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f}) \| \geqq \delta \}$ à cause de (28).

L'ensemble $\mathscr{C}_L$ étant compact dans W, pour tout $\alpha > 0$, on peut trouver $f_1, \ldots, f_{N_\alpha} \in \mathscr{C}_L$ tels que $\mathscr{C}_L \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\alpha} V(f_i, \alpha) = U$, où $V(f_i, \alpha)$ désigne la boule ouverte de centre f_i et de rayon α dans W.

Donc

$$\begin{aligned} P \{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} &\leqq P \{ \varepsilon B \notin U \} + P \{ \varepsilon B \in U, Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} \\ &\leqq P \{ \varepsilon B \notin U \} + \sum_{i=1}^{N_\alpha} P \{ \| \varepsilon B - f_i \| \leqq \alpha, \\ &\qquad \| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f_i, \tilde{f}) \| \geqq \delta \}. \end{aligned}$$

Soit $R > L$. On peut trouver, d'après le lemme 3, $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$(31) \qquad P \{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} \leqq P \{ \varepsilon B \notin U \} + N_\alpha \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2} \right).$$

On déduit de l'inégalité (31) que

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, \varepsilon^2 \operatorname{Log} P \{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} \leqq -L$$

puisque $\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \, \varepsilon^2 \operatorname{Log} P \{ \varepsilon B \notin U \} \leqq -L$ (*cf.* [5]).

Soient $\mathbf{0}$ un ouvert de Ω et $\omega \in \mathbf{0}$ tel que $\lambda_{\tilde{f}}(\omega) < \infty$.

Si $a > \lambda_{\tilde{f}}(\omega)$, il existe $f \in H$ t. q. $\lambda_{\tilde{f}}(\omega) = \mu(f) < a$ et $\Phi_x(f, \tilde{f}) = \omega$, à cause de (28).

Soit $\delta > 0$ tel $V(\omega, \delta) \subseteq 0$.

Pour tout $\alpha > 0$, on a :

$$(32) \quad \begin{aligned} P \{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in 0 \} &\geqq P \{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in V(\omega, \delta), \| \varepsilon B - f \| \leqq \alpha \} \\ &\geqq P \{ \| \varepsilon B - f \| \leqq \alpha \} - P \{ \| Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f}) \| \geqq \delta, \| \varepsilon B - f \| \leqq \alpha \}. \end{aligned}$$

Soit $R > a$. On choisit $\alpha > 0$, tel que :

$$P\{\|Y^{\varepsilon, \tilde{f}} - \Phi_x(f, \tilde{f})\| \geqq \delta, \|\varepsilon B - f\| \leqq \alpha\} \leqq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit (lemme 3).

L'inégalité (32) entraîne alors que :

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P\{Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in 0\} \geqq -a$$

puisque $\underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} P\{\|\varepsilon B - f\| \leqq \alpha\} \geqq -a$, *cf.* [5]. □

Théorie du filtrage non linéaire. — Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$, considérons maintenant le couple « signal-observation », $(\mathscr{X}_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$, donné par :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathscr{X}_t^\varepsilon &= x^\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^r S-\int_0^t \sigma_i(\mathscr{X}_s^\varepsilon)\, dB_s^i \\ &\quad + \sum_{j=1}^l S-\int_0^t \tilde{\sigma}_j(\mathscr{X}_s^\varepsilon)\,[d\tilde{B}_s^j + h_j(\mathscr{X}_s^\varepsilon)]\, ds + \int_0^t b(\mathscr{X}_s^\varepsilon)\, ds \\ Y_t^\varepsilon &= \int_0^t h(\mathscr{X}_s^\varepsilon)\, ds + \tilde{B}_t \end{aligned} \right.$$

où h est une application régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$.

On se propose d'établir, en utilisant le théorème 2, un principe de grandes déviations, quand $\varepsilon \downarrow 0$, pour la loi conditionnelle $M^\varepsilon(., d\omega)$ du processus « signal » $\mathscr{X}^\varepsilon = (\mathscr{X}_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ sachant « l'observation »

$$Y^\varepsilon = (Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}.$$

Notons que, dans la situation très différente où les bruits, dans le signal et l'observation, sont de la forme εB, $\varepsilon \tilde{B}$ et lorsque $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \ldots = \tilde{\sigma}_l = 0$, cas non corrélé, O. Hijab, [7], a étudié un principe de grandes déviations pour la loi conditionnelle de $\mathscr{X}^\varepsilon$ sachant Y^ε, quand $\varepsilon \downarrow 0$. C'est un modèle moins naturel, du point de vue des applications, que celui que nous considérons ici et les résultats qu'il obtient sont, évidemment, tout à fait différents des nôtres.

HYPOTHÈSE II. — Outre l'hypothèse I, on supposera que :

1° Les coefficients $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont bornés; l'application h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$, figurant en (33), est bornée, de classe C_b^2.

2° Considérons les champs de vecteurs $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ définis sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$(34) \quad \Lambda_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{\sigma}_j^\alpha(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + h_j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}},$$

où $\tilde{\sigma}_j = (\tilde{\sigma}_j^\alpha)_{\alpha=1,\ldots,n}$, $h=(h_j)_{j=1,\ldots,l}$, $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors, pour tous $j \neq j'$ $(j, j' \in \{1, \ldots, l\})$, le crochet de Lie :

$$[\Lambda_j, \Lambda_{j'}] \quad \text{est nul.} \quad \square$$

Remarque. — Les conditions de commutativité, Hypothèses I, 3° et II, 2° sont automatiquement satisfaites dans les deux cas importants suivants :

1° $l=1$ (observation scalaire);

2° l quelconque et $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_2 = \ldots = \tilde{\sigma}_l = 0$.

(Les bruits dans le signal et l'observation sont non corrélés.)

THÉORÈME 4. — *Sous l'hypothèse* II, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *considérons le couple* $(\mathcal{X}^\varepsilon, Y^\varepsilon) = (\mathcal{X}_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$, *donné par* (33), *comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace* $\Omega \times \tilde{W}$, *alors :*

(i) *la loi conditionnelle du processus* $\mathcal{X}^\varepsilon$ *sachant* Y^ε *admet une version régulière, notée* $M^\varepsilon(.\,, d\omega)$, *telle que l'application :*

$$\tilde{y} \in \tilde{W} \to M^\varepsilon(\tilde{y}, d\omega) \in \mathcal{M}_1(\Omega)$$

soit continue pour la topologie de la convergence uniforme sur $\tilde{W}$.

(ii) *Pour tout* $\tilde{y} \in \tilde{W}$ *et tout* $\chi \in \mathcal{B}_\Omega$ *(borélien de* Ω*), on a :*

$$(35) \quad \begin{cases} \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} M^\varepsilon(\tilde{y}, \chi) \leqq -\operatorname{Inf}\{\lambda_{\tilde{y}}(\omega), \omega \in \bar{\chi}\} \\ \underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} M^\varepsilon(\tilde{y}, \chi) \geqq -\operatorname{Inf}\{\lambda_{\tilde{y}}(\omega), \omega \in \mathring{\chi}\} \end{cases}$$

où $\mathring{\chi}$ *et* $\bar{\chi}$ *désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de* χ *dans* Ω, $\lambda_{\tilde{y}}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, *est donné par les formules* (9) *et* (59).

Démonstration. — Soient $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ la solution de l'équation (1), ψ et $\tilde{\psi}$ deux applications mesurables et bornées de Ω dans $\mathbb{R}$ et de $\tilde{W}$ dans $\mathbb{R}$ respectivement; on a, d'après le théorème de Girsanov :

$$(36) \quad E\{\psi(\mathcal{X}^\varepsilon).\tilde{\psi}(Y^\varepsilon)\} = E\left\{\psi(X^\varepsilon).\tilde{\psi}(B) \times \exp\left(\int_0^T h(X_s^\varepsilon).d\tilde{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^T |h|^2(X_s^\varepsilon)\,ds\right)\right\}.$$

On en déduit évidemment que les lois de Y^ε et de $\tilde{B}$ sont équivalentes ainsi que la formule bien connue :

pour presque tout $\tilde{y} \in \tilde{W}$ (relativement à la mesure de Wiener sur $\tilde{W}$)

$$(37) \quad E\{\psi(\mathcal{X}^\varepsilon)/Y^\varepsilon = \tilde{y}\} = \frac{E\left\{\psi(X^\varepsilon)\exp\left(\int_0^T h(X_s^\varepsilon)\,d\tilde{B}_s - (1/2)\int_0^T |h|^2(X_s^\varepsilon)\,ds\right)\Big/\tilde{B} = \tilde{y}\right\}}{E\left\{\exp\left(\int_0^T h(X_s^\varepsilon)\,d\tilde{B}_s - (1/2)\int_0^T |h|^2(X_s^\varepsilon)\,ds\right)\Big/\tilde{B} = \tilde{y}\right\}}.$$

Introduisons le couple

$$\mathscr{S}^\varepsilon = \left(X_t^\varepsilon, \int_0^t h(X_s^\varepsilon)\, d\tilde{B}_s \right)_{t \in [0, T]} = (\mathscr{S}^\varepsilon_{(1), t}, \mathscr{S}^\varepsilon_{(2), t})_{t \in [0, T]}.$$

$\mathscr{S}^\varepsilon = (\mathscr{S}_t^\varepsilon)_{t \in [0, T]}$ est un processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, solution de l'équation suivante :

$$\text{(38)} \quad \mathscr{S}_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} x^\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{i=1}^r \mathrm{S} - \int_0^t \hat{\sigma}_i(\mathscr{S}_s^\varepsilon)\, dB_s^i + \sum_{j=1}^l \mathrm{S} - \int_0^t \Lambda_j(\mathscr{S}_s^\varepsilon)\, d\tilde{B}_s^j + \int_0^t \hat{b}(\mathscr{S}_s^\varepsilon)\, ds$$

où $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ sont les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définis par (34),

$$\text{(39)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (\sigma_i(x_1, \ldots, x_n), 0), \\ i = 1, \ldots, r, \qquad (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \hat{b}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \left(b(x_1, \ldots, x_n), -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tilde{\sigma}_j h_j(x_1, \ldots, x_n) \right) \end{array} \right.$$

sont considérés comme des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'hypothèse II, 2° entraîne qu'on a, pour le processus $\mathscr{S}^\varepsilon$, une représentation analogue à celle que nous avons obtenue, sous l'hypothèse I, 3° pour le processus X^ε [formules (10) et (12)].

$$\text{(40)} \qquad \mathscr{S}_t^\varepsilon = \hat{A}(\bar{\mathscr{S}}_t^\varepsilon, \tilde{B}_t), \qquad t \in [0, T]$$

où $\hat{A}$ est l'application de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{A}}{\partial \beta_j}(\alpha, \beta) = \Lambda_j(\hat{A}(\alpha, \beta)), \qquad j = 1, \ldots, l \\ \hat{A}(\alpha, 0) = \alpha, \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^l; \end{array} \right.$$

le processus $(\bar{\mathscr{S}}_t^\varepsilon)$ est solution de :

$$\text{(41)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathscr{S}}_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} x^\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\, \mathrm{S} - \int_0^t \tilde{m}(\tilde{B}_s, \bar{\mathscr{S}}_s^\varepsilon)\, dB_s + \int_0^t \tilde{n}(\tilde{B}_s, \bar{\mathscr{S}}_s^\varepsilon)\, ds, \\ \qquad t \in [0, T], \end{array} \right.$$

les coefficients $\tilde{m}$ et $\tilde{n}$ étant donnés par :

$$\text{(42)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}(\beta, \alpha) = \dfrac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha}[\hat{A}(\alpha, \beta), -\beta]\{\hat{\sigma}(A(\alpha, \beta))\} \\ \tilde{n}(\beta, \alpha) = \dfrac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha}[\hat{A}(\alpha, \beta), -\beta]\{\hat{b}(\hat{A}(\alpha, \beta))\}, \\ \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^l; \end{array} \right.$$

$\hat{\sigma}$ désigne la matrice $(n+1)\times r$ formée des vecteurs colonnes $(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_r)$.

Pour tout $\tilde{f}\in\tilde{W}$, soit $\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}=(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1)}, \mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(2)})$ le processus à valeurs $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ défini par :

$$(43)\qquad \mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t=(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1), t}, \mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(2), t})=\hat{A}(\bar{\mathscr{S}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t, \tilde{f}_t), \qquad t\in[0, T]$$

où $(\bar{\mathscr{S}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t)$ est solution de

$$(44)\qquad \bar{\mathscr{S}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_t=\begin{pmatrix} x^{\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix}+\varepsilon S-\int_0^t \tilde{m}(\tilde{f}_s, \bar{\mathscr{S}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_s)\, dB_s+\int_0^t \tilde{n}(\tilde{f}_s, \bar{\mathscr{S}}^{\varepsilon, \tilde{f}}_s)\, ds.$$

La loi conditionnelle du processus $\mathscr{S}^{\varepsilon}$ sachant que $\tilde{B}=\tilde{f}$ est la loi du processus $\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}$. Elle dépend continûment, pour la topologie de la convergence uniforme sur $\tilde{W}$, de la trajectoire $\tilde{f}$. Soit ψ une application mesurable et bornée de Ω dans $\mathbb{R}$. La formule (37) montre que :

$$(45)\qquad E\{\psi(\mathscr{X}^{\varepsilon})/Y^{\varepsilon}=\tilde{f}\}$$

$$=\frac{E\left\{\psi(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1)})\exp\left(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(2), T}-(1/2)\int_0^T |h|^2(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1), s})\, ds\right)\right\}}{E\left\{\exp\left(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(2), T}-(1/2)\int_0^T |h|^2(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1), s})\, ds\right)\right\}}$$

$$=\int_{\Omega}\psi(\omega)\, M^{\varepsilon}(\tilde{f}, d\omega).$$

Il est facile d'en déduire l'assertion (i) du théorème 4.

On voit, compte tenu de la définition de $\mathscr{S}^{\varepsilon}$ et $\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}$, que $\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1)}$ est égal au processus $Y^{\varepsilon, \tilde{f}}$, introduit dans l'énoncé du lemme 3.

$$(46)\qquad \text{Soit } U^{\varepsilon}=\exp\left(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(2), T}-\frac{1}{2}\int_0^T |h|^2(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1), s})\, ds\right).$$

On peut montrer, compte tenu des hypothèses et des formules (43), (44) que la famille de variables aléatoires $(U^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est bornée dans L^p, pour tout $p>1$ et que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} U^{\varepsilon}=U^0>0$ existe p. s.

Soit F un fermé de Ω. On a, d'après (45), pour tout $p\in]1, \infty[$:

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} & M^{\varepsilon}(\tilde{f}, F)=\frac{E\{1_F(\mathscr{S}^{\varepsilon, \tilde{f}}_{(1)}) . U^{\varepsilon}\}}{E(U^{\varepsilon})}\leqq (P\{Y^{\varepsilon, \tilde{f}}\in F\})^{1/p}\frac{[E((U^{\varepsilon})^q)]^{1/q}}{E\{U^{\varepsilon}\}}, \\ & \text{si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \end{aligned}\right.$$

donc, grâce au théorème 2, on voit que, pour tout $p \in]1, \infty[$:

(48) $$\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \varepsilon^2 \operatorname{Log} M^\varepsilon(\tilde{f}, F) \leqq \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\varepsilon^2}{p} \operatorname{Log} P\{ Y^{\varepsilon, \tilde{f}} \in F \} \leqq -\frac{1}{p} \operatorname{Inf}\{ \lambda_{\tilde{f}}(\omega), \omega \in F \}$$

où $\lambda_{\tilde{f}}$ est donné par la formule (9).

Soient $\mathbf{0}$ un ouvert de Ω et $\omega \in \mathbf{0}$ tel que $\lambda_{\tilde{f}}(\omega) < \infty$.

Il existe $f \in H$ tel que $\omega = \Phi_x(f, \tilde{f}) \in \mathbf{0}$ et $\mu(f) = \lambda_{\tilde{f}}(\omega)$ où $\Phi_x(.,.)$ est donné par la formule (3).

On a, grâce à la formule de Caméron-Martin :

(49) $$E\{ 1_{\mathbf{0}}(Y^{\varepsilon, \tilde{f}}) . U^\varepsilon \} = E\left\{ 1_{\mathbf{0}}(\tilde{Y}^\varepsilon) . \tilde{U}^\varepsilon \times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \dot{f}_s \, dB_s - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^T |\dot{f}_s|^2 \, ds \right) \right\}$$

où

(50) $$\tilde{Y}^\varepsilon = (A(T_t^\varepsilon, \tilde{f}_t))_{t \in [0, T]}.$$

A étant donné par (4), T^ε est la solution de :

(51) $$\begin{cases} T_t^\varepsilon = x^\varepsilon + S - \displaystyle\int_0^t m(\tilde{f}_s, T_s^\varepsilon) [\varepsilon \, dB_s + df_s] + \int_0^t n(\tilde{f}_s, T_s^\varepsilon) \, ds, \\ 0 \leqq t \leqq T. \end{cases}$$

(52) $\tilde{U}^\varepsilon$ est la variable aléatoire qui s'obtient, par translation, à partir de U^ε en remplaçant [dans l'équation (44)] le mouvement brownien εB par $\varepsilon B + f$.

On déduit de (49), que pour toute constante $K > 0$:

(53) $$E\{ 1_{\mathbf{0}}(Y^{\varepsilon, \tilde{f}}) . U^\varepsilon \} \geqq E\{ 1_{\mathbf{0}}(\tilde{Y}^\varepsilon) . \tilde{U}^\varepsilon . 1_{\{ \int_0^T \dot{f}_s dB_s < K \}} \} \times \exp\left(-\frac{\mu(f)}{\varepsilon^2} \right) . \exp\left(-\frac{K}{\varepsilon} \right)$$

donc

(54) $$\underline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \varepsilon^2 \operatorname{Log}\{ E\{ 1_{\mathbf{0}}(Y^{\varepsilon, \tilde{f}}) . U^\varepsilon \} \} \geqq -\mu(f)$$

car

$$\underline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} E\{ 1_{\mathbf{0}}(\tilde{Y}^\varepsilon) . \tilde{U}^\varepsilon . 1_{\{ \int_0^T \dot{f}_s dB_s < K \}} \} \geqq E\{ \tilde{U}^0 . 1_{\{ \int_0^T \dot{f}_s dB_s < K \}} \} > 0$$

puisque $\tilde{Y}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \Phi_x(f, \tilde{f})$ p. s., $\Phi_x(f, \tilde{f}) \in \mathbf{0}$ et $\tilde{U}^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \tilde{U}^0 > 0$ p. s. (en utilisant les propriétés de dépendance des solutions d'équations stochastiques par rapport à un paramètre).

On en déduit que

$$(55)\quad \underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} M^\varepsilon(\tilde{f}, 0) = \underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^2 \operatorname{Log} \left\{ \frac{E\{1_{\mathbf{0}}(Y^{\varepsilon, \tilde{f}}) . U^\varepsilon\}}{E\{U^\varepsilon\}} \right\} \geqq -\mu(f)$$

puisque $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E\{U^\varepsilon\} = E\{U^0\} \in]0, \infty[$.

La démonstration du théorème 4 est donc achevée. □

On se propose, maintenant, de calculer, pour tous $\tilde{f} \in \tilde{W}$, $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la fonctionnelle $\lambda_{\tilde{f}}(\omega) = \lambda_{x, \tilde{f}}(\omega)$ donnée par la formule (9).

Soit $f \in H$ telle que $\Phi_x(f, \tilde{f}) = \omega$.

Donc $A(C_t, \tilde{f}_t) = \omega_t$, pour tout $t \in [0, T]$.

(C_t) étant la solution de l'équation (5).

D'après les propriétés de la fonction A, on a

$$(56)\qquad C_t = A(\omega_t, -\tilde{f}_t), \quad cf.\ [1]$$

d'où l'égalité, pour ds presque tout $s \in [0, T]$:

$$(57)\qquad m(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s)) . \dot{f}_s = \dot{\overline{A(\omega_s, -\tilde{f}_s)}} - n(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s))$$

Pour tout $(s, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, soit

$$(58)\qquad q_{\tilde{f}, \omega}(s, v) = \operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \{ 2\langle y, v \rangle - \langle y, m . m^*(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s)) . y \rangle \}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$, $m^*(.,.)$ désigne la transposée de la matrice $n \times r$, $m(.,.)$.

Proposition 5. — *Pour tous $\tilde{f} \in \tilde{W}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la fonctionnelle $\lambda_{\tilde{f}} = \lambda_{x, \tilde{f}}$ [définie par (9)] est donnée par :*

$$(59)\quad \lambda_{x, \tilde{f}}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^T q_{\tilde{f}, \omega}(s, \dot{\overline{A(\omega_s, -\tilde{f}_s)}} - n(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s))) \, ds \\ \text{si la dérivée : } \dot{\overline{A(\omega_s, -\tilde{f}_s)}} \text{ existe p.p. sur } [0, T] \text{ et } \omega(0) = x, \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$q_{\tilde{f}, \omega}(.,.)$, $A(.,.)$, $m(.,.)$ et $n(.,.)$ sont déterminés par les formules (58), (4) *et* (6) *respectivement.*

En particulier, si la matrice $n \times n$, $\sigma . \sigma^*(.)$ est inversible [où $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$), alors $m . m^*(.,.)$ est inversible et, lorsque $\lambda_{x, \tilde{f}}(\omega) < \infty$, *on a :*

$$(61) \qquad \lambda_{x,\tilde{f}}(\omega)=\frac{1}{2}\int_0^T \|\dot{\overline{A(\omega_s, -\tilde{f}_s)}}-n(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s))\|^2_{(s,\omega,\tilde{f})}\,ds$$

où $\|v\|^2_{(s,\omega,\tilde{f})}=\langle v, (mm^*)^{-1}(\tilde{f}_s, A(\omega_s, -\tilde{f}_s)).[v]\rangle$ $(v\in\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la définition (9) de $\lambda_{x,\tilde{f}}$, l'égalité (57) ainsi que les propriétés de la forme quadratique conjuguée $q_{\tilde{f},\omega}(s, .)$ donnée par (58) (*cf.* [3]). □

RÉFÉRENCES

[1] H. DOSS, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **283**, série I, 1976; *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **XIII**, n° 2, 1977, p. 99-125.

[2] H. DOSS, Démonstration probabiliste de certains développements asymptotiques quasi-classiques, *Bull. Sci. Math.*, 2e série, t. **109**, p. 179-208.

[3] H. DOSS et P. PRIOURET, Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion, *Lect. Notes Math.*, n° **986**, 1983, Springer.

[4] H. DOSS et D. W. STROOCK, Nouveaux résultats concernant les petites perturbations de systèmes dynamiques, *J. Funct. Anal.* (à paraître).

[5] M. FREIDLIN et A. D. WENTZELL, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer, New York, 1984.

[6] M. HAZEWINKEL et J. C. WILLEMS, Stochastic Systems: The Mathematics of Filtering and Identification and Applications. *Proceedings of the N.A.T.O. Advanced Study Institute*, Les Arcs, Savoie, 1980, Reidel, Dordrecht, 1981.

[7] O. HIJAB, Asymptotic Bayesian Estimation of a First Order Equation with Small Diffusion, *Annals Prob.*, vo. **12**, n° 2, 1984, p. 890-902.

(*Manuscrit reçu le* 14 *septembre* 1990.)