ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. HASSENFORDER

Seules les affinités préservent le type de la loi gamma à paramètre entier

Annales de l'I. H. P., section B, tome 26, nº 4 (1990), p. 541-548

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_4_541_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 26, n° 4, 1990, p. 541-548. *Probabilités et Statistiques*

Seules les affinités préservent le type de la loi gamma à paramètre entier

par

C. HASSENFORDER

Laboratoire de Probabilités et de Statistique,
Université Paul-Sabatier, U.A.-C.N.R.S. n° 745,
118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $\mu(dx)=\frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,dx$ la loi gamma de paramètre n entier et soit A (μ) l'ensemble des mesures images de μ par les affinités de $\mathbb{R}$. Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : l'image par f de tout élément de A (μ) est dans A (μ). Nous démontrons qu'une telle application f est affine presque partout.

ABSTRACT. — If $\mu(dx)=\frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\,dx$ is the gamma distribution with integer parameter n and if A (μ) is the set of image measures of μ by all affinities, consider the measurable function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ with the following property: the image by f of every element of A (μ) is in A (μ). We prove that such an f is affine almost everywhere.

Classification A.M.S. : 60 E 10; 62 E 10.

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 26/90/04/541/08/$ 2,80/© Gauthier-Villars

INTRODUCTION

Soit μ une mesure de probabilité sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit A le groupe affine de $\mathbb{R}$; désignons par A (μ) l'ensemble des mesures images de μ par les éléments de A : A (μ) est appelé le type de μ. Désignons par F (μ) l'ensemble des applications mesurables réelles préservant le type de μ.

En d'autres termes, si X est une variable aléatoire réelle de loi μ, A (μ) est l'ensemble des lois des variables aléatoires $u+p\mathrm{X}$ avec u et p réels et $p\neq 0$, et $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dans F (μ) si quels que soient $p\neq 0$ et u, il existe $\mathrm{P}\neq 0$ et U tels que $f(u+p\mathrm{X})$ et $\mathrm{U}+\mathrm{PX}$ aient même loi.

Par exemple, si $\mu(dx)=(\pi(1+x^2))^{-1}\,dx$ (loi de Cauchy), la classe F (μ) est un ensemble assez vaste, caractérisé par Letac dans [2].

Pour tout μ, il est clair que F (μ) contient au moins l'ensemble A des fonctions affines; plus précisément F (μ) contient au moins la classe T (μ) des fonctions f telles que : pour tout élément ν de A (μ), il existe $p_\nu\neq 0$ et u_ν tels que :

$$f(x)=u_\nu+p_\nu x \qquad \nu \text{ presque partout.}$$

Kingman a conjecturé (*voir* [3]), que F $(\mu)\neq$ T (μ) si et seulement si μ est une loi de Cauchy. A l'appui de celà, on a pu montrer que F $(\mu)=$ T (μ) si μ est une loi normale (Letac-Pradines [3]) et si μ est une loi uniforme sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$ (Dunau-Sénateur [1]). Cette conjecture de Kingman semble difficile à montrer dans le cas général, et chaque vérification pour un type particulier fait appel à une technique spécialement adaptée au type considéré.

Le but du présent article est de démontrer la conjecture ci-dessus dans le cas des lois gamma à paramètre entier. La procédure semble inadaptable si le paramètre n'est pas entier.

THÉORÈME. — *Soit* $\mu(dx)=\dfrac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}\,\mathbb{1}_{[0,\,+\infty[}(x)\,dx$ *la loi gamma standard de paramètre n. Si f est une application mesurable réelle telle que* $f(\mathrm{A}(\mu))\subseteq \mathrm{A}(\mu)$, *alors f est égale presque partout à une application affine.*

Démonstration. — Rappelons que si X est une variable aléatoire de loi μ, la fonction caractéristique de X est définie par

$$\Psi(t)=\mathrm{E}(e^{it\mathrm{X}})=(1-it)^{-n}$$

Si $\mu_{u,\,p}$ est la loi de $u+p\mathrm{X}$, alors :

$$\mu_{u,\,p}(dx)=\frac{1}{(n-1)!}\,p^{-n}\,e^{-((x-u)/p)}(x-u)^{n-1}\,\mathrm{I}_p(x-u)\,dx$$

avec $I_p = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}$ si $p>0$ et $I_p = -\mathbb{1}_{]-\infty, 0]}$ si $p<0$.

Si $\Psi_{u, p}(t) = \mathrm{E}(e^{it(u+p\mathrm{X})})$, alors $\Psi_{u, p}(t) = e^{iut}(1-itp)^{-n}$.

Soit $f \in \mathrm{F}(\mu)$, c'est-à-dire que $f(\mathrm{A}(\mu)) \subseteqq \mathrm{A}(\mu)$.

Alors, pour tout $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, il existe $\mathrm{U}(u, p) \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{P}(u, p) \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$f\mu_{u, p} = \mu_{\mathrm{U}, \mathrm{P}}.$$

D'où, en prenant les fonctions caractéristiques, on a :

$$\mathrm{E}(e^{itf(u+p\mathrm{X})}) = \mathrm{E}(e^{it(\mathrm{U}+\mathrm{PX})})$$

c'est-à-dire

$$e^{i\mathrm{U}t}(1-it\mathrm{P})^{-n} = \int e^{itf(x)} \frac{1}{(n-1)!} p^{-n} e^{-((x-u)/p)} (x-u)^{n-1} \mathrm{I}_p(x-u)\, dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned} e^{it\mathrm{U}-(u/p)}(1-it\mathrm{P})^{-n} &= \frac{1}{(n-1)!\, p^n} \int e^{itf(x)-(x/p)} (x-u)^{n-1} \mathrm{I}_p(x-u)\, dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!\, p^n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^k (-u)^k \mathrm{K}(u, p) \qquad (1) \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{K}(u, p) = \int_u^{+\infty} e^{itf(x)-(x/p)} x^{n-1-k}\, dx \qquad \text{si} \quad p>0$$

et

$$\mathrm{K}(u, p) = \int_{-\infty}^u e^{itf(x)-(x/p)} x^{n-1-k}\, dx \qquad \text{si} \quad p<0$$

On en déduit alors que pour tout t fixé et pour tout $p \neq 0$ fixé, le deuxième membre de l'égalité (1) est une fonction absolument continue de u (comme somme de produits de fonctions absolument continues) et n fois dérivable par rapport à u, de dérivée n-ième égale presque partout à :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf(u)-(u/p)}$$

Il en résulte donc que le premier membre de (1) :

$$u \to e^{it\mathrm{U}-(u/p)}(1-it\mathrm{P})^{-n}$$

est absolument continu et n fois dérivable presque partout.

On en déduit d'abord, en multipliant par $e^{u/p}$ que : $u \to e^{it\,\mathrm{U}}(1-it\,\mathrm{P})^{-n}$ est absolument continu et n fois dérivable presque partout.

Puis, en prenant le carré de la fonction précédente d'une part, et en prenant $t'=2\,t$ d'autre part, que les fonctions :

$$u \to e^{2\,it\,\mathrm{U}}(1-it\,\mathrm{P})^{-2\,n} \qquad \text{et} \qquad u \to e^{2\,it\,\mathrm{U}}(1-2\,it\,\mathrm{P})^{-n}$$

sont absolument continues et n fois dérivables presque partout.

On montre alors que U et P sont des fonctions absolument continues de u et n fois dérivables presque partout par rapport à u.

Plus précisément, pour tout $p \neq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble $\mathrm{E}_{p,\,t}$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que sur $\mathrm{E}^c_{p,\,t}$, U et P soient n fois dérivables par rapport à u.

On a donc, pour tout $u \in \mathrm{E}^c_{p,\,t}$

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf\,(u)-(u/p)} = \frac{\partial^n}{\partial u^n}\left(e^{it\,\mathrm{U}-(u/p)}(1-it\,\mathrm{P})^{-n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(e^{it\,\mathrm{U}-(u/p)}\right)\frac{\partial^{n-k}}{\partial u^{n-k}}\left((1-it\,\mathrm{P})^{-n}\right)$$

Or $\dfrac{\partial^k}{\partial u^k}\left(e^{it\,\mathrm{U}-(u/p)}\right)=\mathrm{R}_k(it)\,e^{it\,\mathrm{U}-(u/p)}$ où R_k est un polynôme à coefficients réels de degré k, tel que :

$$\mathrm{R}_0=1$$
$$\mathrm{R}_{k+1}(it)=\frac{\partial \mathrm{R}_k}{\partial u}(it)+\left(it\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}-\frac{1}{p}\right)\mathrm{R}_k(it).$$

En particulier, le coefficient dominant de R_k est $\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\right)^k$ et

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left((1-it\,\mathrm{P})^{-n}\right)=\mathrm{Q}_k(it)(1-it\,\mathrm{P})^{-n-k} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Q}_0=1;$$
$$\mathrm{Q}_1(it)=nit\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}.$$

Donc Q_k est nul pour $k \geqq 1$ si $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=0$; sinon Q_k est un polynôme à coefficients réels de degré k tel que :

$$\mathrm{Q}_0=1$$
$$\mathrm{Q}_{k+1}(it)=\frac{\partial \mathrm{Q}_k}{\partial u}(it)(1-it\,\mathrm{P})+(n+k)\,it\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}\mathrm{Q}_k(it).$$

Par conséquent, pour tout $u \in E^c_{p,\,t}$:

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n e^{itf(u)-(u/p)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, R_k(it)\, Q_{n-k}(it)\, e^{it\,U-(u/p)}(1-it\,P)^{k-2n}$$

C'est-à-dire :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-it\,P)^{2n} e^{itf(u)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, R_k(it)\, Q_{n-k}(it)(1-it\,P)^k e^{it\,U}.$$

Soit maintenant une suite $\{t_j\}_{j \geqq 0}$ convergente dans $\mathbb{R}$ et soit

$$E_p = \bigcup_{j \geqq 0} E_{p,\,t_j}$$

Alors, pour tout $u \in E^c_p$ et pour tout j :

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-it_j P)^{2n} e^{it_j f(u)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, R_k(it_j)\, Q_{n-k}(it_j)(1-it_j P)^k e^{it_j U}.$$

Or, pour p et pour $u \in E^c_p$ fixés, les fonctions :

$$z \to \left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-Pz)^{2n} e^{zf(u)}$$

et

$$z \to \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, R_k(z)\, Q_{n-k}(z)(1-Pz)^k e^{zU}$$

sont des fonctions analytiques qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation; elles coïncident donc sur tout $\mathbb{C}$, et en particulier sur $\mathbb{R}$. On utilise alors par exemple, que la famille $\{x^\alpha e^{\beta x}\}_{\alpha,\,\beta \in \mathbb{R}^2}$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$ pour conclure que pour tout p fixé et pour tout $u \in E^c_p$:

$$U = f(u) \tag{2}$$

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-zP)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, R_k(z)\, Q_{n-k}(z)(1-Pz)^k. \tag{3}$$

En particulier, de (2) on déduit que U ne dépend que de u.

On s'intéresse maintenant à l'égalité des polynômes (3).

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n (1-Pz)^{2n} = Q_n(z) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, R_k(z)\, Q_{n-k}(z)(1-Pz)^k$$

On conclut en particulier que $Q_n(z)$ est divisible par $(1-\mathrm{P}z)$. Or

$$Q_n(z)=\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial u}(z)(1-\mathrm{P}z)+(2n-1)\,z\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}Q_{n-1}(z).$$

Donc $Q_{n-1}(z)$ est aussi divisible par $(1-\mathrm{P}z)$ et on montre par récurrence que pour $k\leqq n$, $Q_k(z)$ est divisible par $(1-\mathrm{P}z)$.

En particulier $Q_1(z)$ est divisible par $(1-\mathrm{P}z)$; or comme $Q_1(z)=nz\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}$, ceci n'est possible que si $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=0$.

Donc P ne dépend que de p et $Q_k(z)=0$ pour $k\geqq 1$.

En revenant à (3) on a donc pour tout p et pour tout $u\in E_p^c$:

$$\left(-\frac{1}{p}\right)^n(1-\mathrm{P}z)^{2n}=R_n(z)\,Q_0(z)(1-\mathrm{P}z)^n$$

c'est-à-dire $R_n(z)=\left(-\frac{1}{p}\right)^n(1-\mathrm{P}z)^n$.

En identifiant les coefficients dominants des deux polynômes, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{p}\right)^n=\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\right)^n$$

Le premier membre ne dépend que de p, le deuxième que de u, donc

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{p}\right)^n=\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\right)^n=\mathrm{Cte}.$$

En particulier, si n est impair $\frac{\mathrm{P}}{p}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}=c$.

D'où $\mathrm{P}=pc$ et $\mathrm{U}=f(u)=cu+d$ presque partout.

Si n est pair le résultat n'est pas aussi immédiat. On a :

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{p}\right)^2=\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\right)^2$$

Posons $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}=c\,\varepsilon_1(u)$ et $\mathrm{P}=pc\,\varepsilon_2(p)$ où $c\in\mathbb{R}_+^*$ et où ε_1 et ε_2 sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\{-1,+1\}$.

On a $\mathrm{U}(u_2)-\mathrm{U}(u_1)=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}(s)\,ds=\int_{u_1}^{u_2}c\,\varepsilon_1(s)\,ds$.

D'autre part $\mathrm{U}=f(u)$ donc $\int_{u_1}^{u_2}c\,\varepsilon_1(s)\,ds=f(u_2)-f(u_1)$.

On en déduit :

$$f(u+pX)-f(u)=\int_u^{u+pX} c\,\varepsilon_1(s)\,ds.$$

Or $f(u+pX)$ a pour loi $f\mu_{u,\,p}=\mu_{U,\,P}$.

On en déduit $f(u+pX) \overset{\mathscr{L}}{=} U+PX=f(u)+pc\,\varepsilon_2(p)\,X$ et ceci donne :

$$\int_u^{u+pX} c\,\varepsilon_1(s)\,ds \overset{\mathscr{L}}{=} pc\,\varepsilon_2(p)\,X.$$

Considérons maintenant les ensembles suivants :

$$\Lambda_1=\left\{u\in\mathbb{R};\ \varepsilon_1(u)=1 \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \text{ existe en } u\right\}$$

$$\Lambda_{-1}=\left\{u\in\mathbb{R};\ \varepsilon_1(u)=-1 \text{ et } \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} \text{ existe en } u\right\}$$

On a vu que U est n fois dérivable presque partout. Comme ici n est pair, $n\geqq 2$ donc $\dfrac{\partial^2 U}{\partial u^2}$ existe presque partout; ainsi $(\Lambda_{-1}\cup\Lambda_1)^c$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Supposons par exemple que Λ_1 est non vide et soit $u_1\in\Lambda_1$. Alors $\dfrac{\partial^2 U}{\partial u^2}(u_1)$ existe et $\dfrac{\partial U}{\partial u}$ est dérivable donc continue en u_1.

Comme $\dfrac{\partial U}{\partial u}=c\,\varepsilon_1$, ε_1 est continue en u_1 et il existe un voisinage $]u_1-\alpha,\,u_1+\alpha[$ de u_1 sur lequel $\varepsilon_1(u)=1$.

On a ainsi montré que Λ_1 est ouvert; par le même argument Λ_{-1} est aussi ouvert.

Revenons à l'équation $\displaystyle\int_u^{u+pX} \varepsilon_1(s)\,ds \overset{\mathscr{L}}{=} p\,\varepsilon_2(p)\,X.$

Soit $p>0$ fixé.

La v.a. $\displaystyle\int_{u_1}^{u_1+pX} \varepsilon_1(s)\,ds$ prend des valeurs positives sur l'ensemble $(|X|<\alpha/p)$ qui est de mesure non nulle.

De l'égalité $\displaystyle\int_{u_1}^{u_1+pX} \varepsilon_1(s)\,ds \overset{\mathscr{L}}{=} p\,\varepsilon_2(p)\,X$, on en conclut donc que $\varepsilon_2(p)=1$. Dès lors, ε_1 ne peut être que 1 presque partout. (Sinon, il existerait $u_{-1} \in \Lambda_{-1}$, puis un voisinage de u_{-1} sur lequel $\varepsilon_1 = -1$, puis en appliquant $\int_{u_{-1}}^{u_{-1}+p\mathrm{X}} \varepsilon_1(s)\, ds \overset{\mathscr{L}}{=} p\,\varepsilon_2(p)\,\mathrm{X}$, on obtiendrait $\varepsilon_2(p) < 0$ ce qui est contradictoire.)

Donc, si Λ_1 est non vide, alors Λ_{-1} est vide et $\varepsilon_1 = 1$ presque partout; on a alors $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} = c$, $\varepsilon_2(p) = 1$ et $\mathrm{P} = pc$ presque partout.

Si Λ_1 est vide, alors $\varepsilon_1 = -1$ presque partout; d'où $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} = c$, $\varepsilon_2(p) = -1$ et $\mathrm{P} = -pc$ presque partout.

RÉFÉRENCES

[1] J. L. DUNAU et H. SÉNATEUR, Quelles fonctions changent toute loi uniforme en une loi uniforme? *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1984, Paris 20, p. 247-250.

[2] G. LETAC, Which Functions Preserve Cauchy Laws?, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. **67**, 1977, p. 277-286.

[3] G. LETAC et J. PRADINES, Seules les affinités préservent les lois normales; *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **286**, 1978, p. 399-402.

(*Manuscrit reçu le* 20 *septembre* 1989;
révisé le 11 *mai* 1990.)