ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DAMIEN LAMBERTON
GILLES PAGÈS

# Sur l'approximation des réduites

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 26, n° 2 (1990), p. 331-355
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1990__26_2_331_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*

Vol. 26, n° 2, 1990, p. 331-355. *Probabilités et Statistiques*

# Sur l'approximation des réduites

par

**Damien LAMBERTON**

L.A.M.M., C.E.R.M.A.-E.N.P.C., La Courtine,
93167 Noisy-le-Grand Cedex, France

et

**Gilles PAGÈS**

L.A.M.M., C.E.R.M.A.-E.N.P.C. et Université Paris-I,
90, rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13, France

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'approximation des réduites par des méthodes probabilistes, dans un cadre markovien et dans un cadre abstrait. La démarche adoptée dans le cas markovien permet de montrer la convergence uniforme sur les compacts des réduites vers la réduite limite. Dans le cadre abstrait on obtient, sous des hypothèses très faibles, un résultat de semi-continuité inférieure.

*Mots clés :* Arrêt optimal, réduites, processus de Markov, théorèmes limites fonctionnels.

ABSTRACT. — We study the approximation of reduites by probabilistic techniques, both in the Markovian case and in an abstract setting. The method used in the Markovian case enables us to prove that the reduites of the approximating processes converge uniformly on compact sets. In the abstract setting a lower semi-continuity property is proved under very weak assumptions.

*Classification A.M.S. :* 60 G 40, 60 F 05, 60 J.

*Annales de l'Institut Henri Poincaré* - Probabilités et Statistiques - 0246-0203
Vol. 26/90/02/331/25/$ 4,50/© Gauthier-Villars

La résolution d'un problème d'arrêt optimal passe classiquement par l'introduction de « l'enveloppe de Snell », à partir de laquelle on construit le plus petit temps d'arrêt optimal (*cf.* [14], chapitre V pour les processus à temps discret et [9] pour les processus à temps continu). Sous des hypothèses markoviennes, on dispose d'algorithmes de calcul. Considérons par exemple une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'espace d'état E, de matrice de transition P et de réalisation canonique $(\Omega, (\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathscr{F}, (P_x)_{x \in E})$. Pour toute fonction continue bornée $f$ sur E et pour tout entier N, appelons « réduite d'horizon N » la fonction de $x \in E$ définie par:

$$u(x, N, f) = \sup_{\nu \in \mathscr{T}_N} \mathbf{E}_x(f(X_\nu))$$

où $\mathscr{T}_N$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$. La fonction $u(., N, f)$ se calcule à partir des relations de récurrence suivantes:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} u(., 0, f) = f \\ u(., N+1, f) = \sup(f, Pu(., N, f)). \end{cases}$$

Dans le cas d'un processus de Markov à temps continu, le calcul numérique d'une réduite peut se faire par deux voies: 1) la méthode analytique consiste à montrer que la réduite est solution d'une inéquation variationnelle (*cf.* [4] et [5]) puis à résoudre numériquement l'inéquation (*cf.* [10]), 2) la méthode probabiliste consiste à approcher le processus de Markov par une chaîne de Markov et à calculer la réduite associée à la chaîne par l'algorithme (I) (*cf.* [12]).

C'est la convergence de cette deuxième voie que nous étudions ici par une méthode différente de celle de Kushner [12]. Dans la première partie, nous montrons que la convergence (en un sens à préciser) des générateurs infinitésimaux entraîne la convergence uniforme sur tout compact des réduites et dans la seconde, nous précisons comment ces résultats s'appliquent à l'approximation de processus par des chaînes de Markov. Contrairement à Kushner, nous travaillons directement sur les réduites plutôt que sur les temps d'arrêt optimaux, et nous n'utilisons pas les techniques de convergence en loi de type fonctionnel; l'outil essentiel pour nous est le théorème de Trotter-Kato qui permet de passer de la convergence des générateurs infinitésimaux à la convergence des semi-groupes.

Dans la troisième partie de ce travail, nous abandonnons le cadre markovien pour examiner la convergence des réduites d'une suite de processus qui converge en loi. Les idées développées dans cette partie se trouvent déjà, pour l'essentiel, dans [12] où sont traités de nombreux exemples de problèmes d'arrêt optimal liés aux diffusions. La question a également été abordée par Aldous (*voir* [3]) dans un cadre abstrait, comme illustration de la topologie qui porte son nom. Le but de cette partie est de dégager, dans ce même cadre abstrait, les hypothèses minimales assurant une certaine régularité à la réduite comme fonctionnelle du processus : sous des hypothèses très faibles (convergence fini-dimensionnelle) on obtient la semi-continuité inférieure, mais la continuité n'a lieu que sous des hypothèses plus fortes (la seule convergence au sens de Skorokhod étant insuffisante).

## 1. CONVERGENCE DES GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX ET CONVERGENCE DES RÉDUITES

Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace localement compact à base dénombrable, muni de sa tribu borélienne. On considère une famille $(P_t^h)_{t \geqq 0}$, indexée par $h \geqq 0$, de semi-groupes de Markov de Feller sur E. Chaque $(P_t^h)_{t \geqq 0}$ définit donc un semi-groupe fortement continu sur l'espace $C_0(E)$ des fonctions continues sur E qui tendent vers 0 à l'infini et nous noterons $A^h$ son générateur infinitésimal. Nous supposerons que $A^h$ converge vers $A = A^0$, au sens suivant :

**(H 1)** Il existe un sous-espace D de $\bigcap_{h \geqq 0} \mathscr{D}(A^h)$ tel que $(\lambda - A^0)$ D soit dense dans $C_0(E)$ pour un $\lambda > 0$ et vérifiant : pour toute fonction $f \in D$, $A^h f$ converge uniformément vers $A^0 f$ quand $h$ tend vers 0.

*Remarque* 1.1. — Dans la pratique, E sera $\mathbf{R}^d$ (ou un ouvert de $\mathbf{R}^d$) et D sera l'ensemble des fonctions de classe $C^2$ à support compact. L'hypothèse (H 1) entraîne d'après le théorème de Trotter-Kato, que pour toute fonction $f \in C_0(E)$, $P_t^h f$ converge uniformément vers $P_t^0 f$ quand $h$ tend vers 0, quel que soit $t$ (*cf.* par exemple [15], chap. 3).

Pour $h \geqq 0$, soit $(\Omega^h, (\mathscr{F}_t^h), (X_t^h), \mathbf{P}_x^h)$, une réalisation fortement markovienne du semi-groupe $(P_t^h)$. A toute fonction $f$ appartenant à l'espace $C_b(E)$ des fonctions continues bornées sur E et à tout réel $T > 0$, on associe les fonctions $u^h(., T, f)$ définies par :

$$u^h(x, T, f) = \sup_{\tau \in \mathscr{T}_T^h} \mathbf{E}_x^h(f(X_\tau^h))$$

où $\mathscr{T}_T^h$ est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration $\mathscr{F}^h$, à valeurs dans $[0, T]$.

THÉORÈME 1.2. — *Sous l'hypothèse* (H 1), *pour toute fonction* $f \in C_0(E)$ *et pour tout* $T>0$, $u^h(.,T,f)$ *converge uniformément vers* $u^0(.,T,f)$ *quand* $h$ *tend vers* 0.

Pour obtenir un résultat de convergence uniforme quand $f$ est seulement continue bornée, nous aurons besoin de l'hypothèse supplémentaire suivante :

**(H 2)** Pour tout compact K de E et pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction $f \in D$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que : $f=1$ sur K et $\sup_{x \in E} |Af(x)| < \varepsilon$.

THÉORÈME 1.3. — *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *pour toute fonction* $f \in C_b(E)$ *et pour tout* $T>0$, $u^h(.,T,f)$ *converge uniformément sur tout compact vers* $u^0(.,T,f)$ *quand* $h$ *tend vers* 0.

*Remarque* 1.4. — Ces résultats s'étendent immédiatement à des fonctions $f$ dépendant à la fois de $t$ et de $x$. Il suffit en effet d'introduire sur l'espace $\hat{E} = \mathbf{R}_+ \times E$ les semi-groupes $(\hat{P}_t^h)$ définis par : $\hat{P}_t^h F(s,.) = P_t^h F(s+t,.)$, pour toute fonction $F \in C_0(\hat{E})$. Supposons alors (H 1) vérifiée et notons $\hat{D}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de la forme : $F(t,x) = f(t)\,\varphi(x)$, avec $f$ de classe $C^1$ à support compact et $\varphi \in D$. Il est clair que $\hat{D}$ est contenu dans le domaine du générateur infinitésimal $A^h$ de $(\hat{P}_t^h)$ et que si $F(t,x) = f(t)\,\varphi(x)$, avec $f$ de classe $C^1$ à support compact et $\varphi \in D$, $\hat{A}^h F(t,x) = \partial f/\partial t\,(t)\,\varphi(x) + f(t)\,A^h\varphi(x)$. On vérifie aisément l'analogue de (H 1) pour les opérateurs $\hat{A}^h$. De même, si (H 2) est vérifiée, l'analogue pour $\hat{A}$ l'est aussi.

Pour démontrer le théorème 1.2, nous utiliserons deux lemmes.

LEMME 1.5. — *Soit* $f \in D$ *et soit* $\rho$ *une subdivision de l'intervalle* $[0,T]$. *On note* $\mathcal{T}_T^{h,\rho}$ *l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans* $\rho$ *et* $u^{h,\rho}(x,T,f) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_T^{h,\rho}} \mathbf{E}_x^h(f(X_\tau^h))$. *Alors on a* :

$$\forall x \in E \quad |u^h(x,T,f) - u^{h,\rho}(x,T,f)| \leqq |\rho|\, \|A^h f\|_\infty$$

*où* $|\rho|$ *est le pas de la subdivision* $\rho$/*et* $\|.\|_\infty$ *la norme usuelle dans* $C_0(E)$/.

*Démonstration.* — Puisque le processus

$$f(X_t^h) - f(X_0^h) - \int_0^t A^h f(X_s^h)\,ds$$

est une martingale sous toute loi $\mathbf{P}_x^h$, on a, pour tous temps d'arrêt $\tau_1$, $\tau_2$ vérifiant $0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq T$ :

$$\mathbf{E}_x^h(f(X_{\tau_2}^h)) - \mathbf{E}_x^h(f(X_{\tau_1}^h)) = \mathbf{E}_x^h \int_{\tau_1}^{\tau_2} A^h f(X_s^h)\,ds.$$

D'où :

$$|\mathbf{E}_x^h(f(\mathrm{X}_{\tau_2}^h)) - \mathbf{E}_x^h(f(\mathrm{X}_{\tau_1}^h))| \leqq \|\mathrm{A}^h f\|_\infty \mathbf{E}_x^h |\tau_2 - \tau_1|.$$

Soit alors $\tau \in \mathscr{T}_\mathrm{T}^h$ et soit $j(\tau) = \inf\{t \in \rho \mid t \geqq \tau\}$. Il est clair que $j(\tau) \in \mathscr{T}_\mathrm{T}^{h,\rho}$ et que

$$0 \leqq j(\tau) - \tau \leqq |\rho|.$$

Par suite :

$$|\mathbf{E}_x^h(f(\mathrm{X}_{j(\tau)}^h)) - \mathbf{E}_x^h(f(\mathrm{X}_\tau^h))| \leqq \|\mathrm{A}^h f\|_\infty |\rho|$$

D'où le lemme.

LEMME 1.6. — *Pour toute subdivision* $\rho$, *pour toute fonction* $f \in \mathrm{C}_0(\mathrm{E})$, *et pour tout* $\mathrm{T} > 0$, *la fonction* $u^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f)$ *converge uniformément vers* $u^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)$ *quand h tend vers* 0.

*Démonstration.* — Soit $\rho = (t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{\mathrm{N}-1} < t_\mathrm{N} = \mathrm{T})$ une subdivision de $[0, \mathrm{T}]$ et soit $\mathscr{T}_{t_j,\mathrm{T}}^{h,\rho}$ l'ensemble des temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t^h)$ à valeurs dans $\{t_j, t_{j+1}, \ldots, t_\mathrm{N}\}$. D'après le « principe de la programmation dynamique » (*cf.* [14], [9]) on peut écrire :

$$\operatorname*{supess}_{\tau \in \mathscr{T}_{t_j,\mathrm{T}}^{h,\rho}} \mathbf{E}(f(\mathrm{X}_\tau^h) \mid \mathscr{F}_{t_j}^h) = u_j^{h,\rho}(\mathrm{X}_{t_j}^h, \mathrm{T}, f)$$

où les fonctions $u_j^{h,\rho}$ sont définies, pour $j \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{N}\}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_\mathrm{N}^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) = f \\ u_j^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) = \max(f, \mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^h u_{j+1}^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f)) \\ 0 \leqq j \leqq \mathrm{N}-1 \end{cases}$$

On a évidemment $u_0^{h,\rho} = u^{h,\rho}$ et, par les relations de récurrence ci-dessus :

$$\begin{aligned} &\|u_j^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) - u_j^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)\|_\infty \\ &\quad \leqq \|\mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^h u_{j+1}^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) - \mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^0 u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)\|_\infty \\ &\quad \leqq \|\mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^h (u_{j+1}^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) - u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f))\|_\infty \\ &\quad + \|\mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^h u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f) - \mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^0 u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)\|_\infty \\ &\quad \leqq \|u_{j+1}^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f) - u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)\|_\infty \\ &\quad + \|\mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^h u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f) - \mathrm{P}_{t_{j+1}-t_j}^0 u_{j+1}^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)\|_\infty. \end{aligned}$$

A partir de cette dernière inégalité, on montre aisément, par récurrence descendante sur $j$, la convergence uniforme de $u_j^{h,\rho}(.,\mathrm{T},f)$ vers $u_j^{0,\rho}(.,\mathrm{T},f)$, en utilisant l'hypothèse (H 1) et le théorème de Trotter-Kato.

*Démonstration du théorème* 1.2. — On suppose d'abord que $f \in \mathrm{D}$. Utilisant le lemme 1.5, on voit que pour toute subdivision $\rho$ :

$$\begin{aligned} |u^h(x,\mathrm{T},f)-u^0(x,\mathrm{T},f)| &\leqq |u^h(x,\mathrm{T},f)-u^{h,\rho}(x,\mathrm{T},f)| \\ &\quad + |u^{h,\rho}(x,\mathrm{T},f)-u^{0,\rho}(x,\mathrm{T},f)| + |u^{0,\rho}(x,\mathrm{T},f)-u^0(x,\mathrm{T},f)| \\ &\leqq |\rho|(\|\mathrm{A}^h f\|_\infty + \|\mathrm{A}^0 f\|_\infty) + |u^{h,\rho}(x,\mathrm{T},f)-u^{0,\rho}(x,\mathrm{T},f)|. \end{aligned}$$

D'où, en appliquant le lemme 1.6 :

$$\limsup_{h\to 0} \|u^h(.,\mathrm{T},f)-u^0(.,\mathrm{T},f)\|_\infty \leqq 2|\rho|\,\|\mathrm{A}f\|_\infty$$

et comme $\rho$ est arbitraire :

$$\lim_{h\to 0} \|u^h(.,\mathrm{T},f)-u^0(.,\mathrm{T},f)\|_\infty = 0$$

ce qui démontre le théorème 1.2 pour $f \in \mathrm{D}$. On étend le résultat à $\mathrm{C}_0(\mathrm{E})$ par densité en remarquant que :

$$\forall f, g \in \mathrm{C}_0(\mathrm{E}), \quad \|u^h(.,\mathrm{T},f)-u^h(.,\mathrm{T},g)\|_\infty \leqq \|f-g\|_\infty.$$

Le théorème 1.3 apparaîtra comme une conséquence simple du théorème 1.2 et du lemme suivant :

LEMME 1.7. — *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *pour tout compact* K *de* E *et pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un compact* L *de* E *tel que* :

$$\begin{gathered} \exists \delta>0, \quad \forall h \in [0,\delta], \quad \forall x \in \mathrm{K}, \\ \mathbf{P}_x^h(\{\forall t \in [0,\mathrm{T}], \mathrm{X}_t^h \in \mathrm{L}\}) > 1-\varepsilon. \end{gathered}$$

*Démonstration.* — Étant donné un compact K et $\varepsilon>0$, on peut trouver, d'après l'hypothèse (H 2), une fonction $f \in \mathrm{D}$, à valeurs dans [0, 1], telle que :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad f(x)=1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in\mathrm{E}} |\mathrm{A}f(x)| < \min(\varepsilon/8\,\mathrm{T}, 1/4\,\mathrm{T})$$

Compte tenu de l'hypothèse (H 1), il existe $\delta>0$ tel que :

$$\forall h \in [0,\delta], \quad \sup_{x\in\mathrm{E}} |\mathrm{A}^h f(x)| < \min(\varepsilon/8\,\mathrm{T}, 1/4\,\mathrm{T})$$

On a alors :

$$\sup_{0\leqq t\leqq \mathrm{T}} \left| \int_0^t \mathrm{A}^h f(\mathrm{X}_s^h)\,ds \right| < 1/4$$

et par conséquent :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathbf{P}_x^h(\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |f(\mathrm{X}_t^h) - f(\mathrm{X}_0^h)| > 1/2)$$
$$\leqq \mathbf{P}_x^h(\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |f(\mathrm{X}_t^h) - f(\mathrm{X}_0^h) - \int_0^t \mathrm{A}^h f(\mathrm{X}_s^h)\, ds| > 1/4)$$
$$\leqq 4\, \mathbf{E}_x^h \left| f(\mathrm{X}_\mathrm{T}^h) - f(\mathrm{X}_0^h) - \int_0^\mathrm{T} \mathrm{A}^h f(\mathrm{X}_s^h)\, ds \right|$$

par l'inégalité de Doob.

Si $x \in \mathrm{K}$, on a :

$$\mathbf{E}_x^h \left| f(\mathrm{X}_\mathrm{T}^h) - f(\mathrm{X}_0^h) - \int_0^\mathrm{T} \mathrm{A}^h f(\mathrm{X}_s^h)\, ds \right|$$
$$\leqq \mathbf{E}_x^h |f(\mathrm{X}_\mathrm{T}^h) - f(\mathrm{X}_0^h)| + \mathrm{T}\, \|\mathrm{A}^h f\|_\infty < \mathbf{E}_x^h(1 - f(\mathrm{X}_\mathrm{T}^h)) + \varepsilon/8$$
$$\leqq \int_0^\mathrm{T} |\mathrm{A}^h \mathrm{P}_s^h f(x)|\, ds + \varepsilon/8 < \varepsilon/4.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \mathbf{P}_x^h(\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |f(\mathrm{X}_t^h) - f(\mathrm{X}_0^h)| > 1/2) < \varepsilon$$

et par conséquent, puisque $f = 1$ sur K :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \mathbf{P}_x^h(\inf_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} f(\mathrm{X}_t^h) < 1/2) < \varepsilon.$$

Le compact $\mathrm{L} = \{ x \in \mathrm{E} \mid f(x) \geqq 1/2 \}$ vérifie alors la propriété annoncée dans le lemme.

*Démonstration du théorème* 1.3. — Soit $f \in \mathrm{C}_b(\mathrm{E})$, K un compact et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 1.7, il existe un nombre $\delta > 0$ et un compact L de E tels que :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \forall h \in [0, \delta]$$
$$\mathbf{P}_x^h(\{ \forall t \in [0, \mathrm{T}], \mathrm{X}_t^h \in \mathrm{L} \}) > 1 - \varepsilon.$$

Soit alors $\varphi \in \mathrm{C}_0(\mathrm{E})$, à valeurs dans [0, 1], égale à 1 sur L. On a :

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \forall h \in [0, \delta],$$
$$|u^h(x, \mathrm{T}, f) - u^h(x, \mathrm{T}, f\varphi)| \leqq \mathbf{E}_x^h(\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |f(\mathrm{X}_t^h)|\, |1 - \varphi(\mathrm{X}_t^h)|) \leqq \varepsilon \|f\|_\infty.$$

D'où :

$$\forall h \in [0, \delta], \quad \sup_{x \in \mathrm{K}} |u^h(x, \mathrm{T}, f) - u^0(x, \mathrm{T}, f)|$$
$$\leqq 2\varepsilon \|f\|_\infty + \sup_{x \in \mathrm{K}} |u^h(x, \mathrm{T}, f\varphi) - u^0(x, \mathrm{T}, f\varphi)|$$

et, puisque $f\varphi \in C_0(E)$ :

$$\limsup_{h \to 0} \sup_{x \in K} | u^h(x, T, f) - u^0(x, T, f) | \leqq 2\varepsilon \|f\|_\infty,$$

ce qui entraîne la convergence uniforme sur K de $u^h(.,T,f)$ vers $u^0(.,T,f)$.

*Remarque* 1.8. — Si $f \in D$, on a facilement :

$$| u^h(x, T, f) - u^h(x, S, f) | \leqq | T - S | \| A^h f \|_\infty.$$

Il en résulte que $u^h(.,.,f)$ converge uniformément vers $u^0(.,.,f)$ sur tout compact de $E \times \mathbf{R}_+$. Cette propriété s'étend aisément à des fonctions $f \in C_b(E)$, à partir du lemme 1.7, par le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1.3.

## 2. APPLICATION A LA DISCRÉTISATION

Le but de cette partie est d'étudier des approximations par des processus de Markov de sauts ou par des chaînes de Markov, telles qu'elles apparaissent dans la discrétisation des équations différentielles stochastiques (*cf.* [12]). Nous supposerons donc que, pour $h > 0$, l'opérateur $A^h$ s'écrit :

$$A^h f(x) = \frac{1}{\Delta t^h(x)} (P^h f(x) - f(x))$$

où $P^h$ est un noyau markovien opérant sur $C_0(E)$ et $\Delta t^h$ une fonction continue bornée sur E, vérifiant :

$$\forall h > 0, \quad \inf_{x \in E} \Delta t^h(x) > 0$$

et

$$\lim_{h \to 0} \| \Delta t^h \|_\infty = 0.$$

Dans les exemples usuels de discrétisation les opérateurs $A^h$ ainsi définis vérifient l'hypothèse (H1).

Le processus de sauts associé à l'opérateur $A^h$ se construit classiquement de la façon suivante (*cf.* par exemple [8], chap. 4). Sur l'espace $\Omega = E^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}_+^{\mathbf{N}}$, muni de la tribu produit naturelle, on note $Z_0$, $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ les applications coordonnées et $\mathbf{P}_x^h$ l'unique probabilité sous laquelle la suite $(Z_n)_{n \geqq 0}$ est une chaîne de Markov d'état initial $x$ et de matrice de transition $P^h$ et la suite $(T_n)_{n \geqq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes exponentielles de paramètre 1, les suites $(Z_n)$ et $(T_n)$ étant indépendantes.

On pose alors :

$$X_t^h = \begin{cases} Z_0 & \text{si} \quad 0 \leqq t < T_1 \Delta t^h (Z_0) \\ Z_n & \text{si} \quad \sum_{j=0}^{n-1} T_{j+1} \Delta t^h (Z_j) \leqq t < \sum_{j=0}^{n} T_{j+1} \Delta t^h (Z_j). \end{cases}$$

Sous la probabilité $\mathbf{P}_x^h$, $(X_t^h)$ est un processus de Markov de générateur infinitésimal $A^h$ et d'état initial $x$.

En fait, dans la pratique (*cf.* [12]), il est plus commode d'approcher le processus limite $(X_t^0)$ par le processus « semi-markovien » $(\tilde{X}_T^h)$ défini par :

$$\tilde{X}_t^h =: \begin{cases} Z_0 & \text{si} \quad 0 \leqq t < \Delta t^h (Z_0) \\ Z_n & \text{si} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^h (Z_j) \leqq t < \sum_{j=0}^{n} \Delta t^h (Z_j). \end{cases}$$

Soit $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$ la filtration naturelle du processus $(\tilde{X}_t^h)$. Pour toute fonction continue bornée $f$ sur E et pour tout $T > 0$, nous noterons $\tilde{u}^h(.\,,T,f)$ la fonction définie par :

$$\tilde{u}^h(x, T, f) = \sup_{\tau \in \tilde{\mathscr{T}}_T^h} \mathbf{E}_x^h (f(\tilde{X}_\tau^h))$$

où $\tilde{\mathscr{T}}_T^h$ est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$ à valeurs dans $[0, T]$.

THÉORÈME 2.1. — *Sous les hypothèses* (H 1) *et* (H 2), *pour toute fonction* $f \in C_b(E)$, $\tilde{u}^h(.\,,T,f)$ *converge uniformément sur tout compact vers* $u^0(.\,,T,f)$ *quand* $h$ *tend vers* 0.

La démonstration consistera à comparer les fonctions $u^h$ et $\tilde{u}^h$ et à utiliser les résultats de la section 1. Pour cela, il sera commode d'introduire les compteurs des sauts $(N_t^h)$ et $(\tilde{N}_t^h)$ des processus $(X_t^h)$ et $(\tilde{X}_t^h)$ :

$$N_t^h = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqq t < T_1 \Delta t^h (Z_0) \\ n & \text{si} \quad \sum_{j=0}^{n-1} T_{j+1} \Delta t^h (Z_j) \leqq t < \sum_{j=0}^{n} T_{j+1} \Delta t^h (Z_j) \end{cases}$$

$$\tilde{N}_t^h = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqq t < \Delta t^h (Z_0) \\ n & \text{si} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t^h (Z_j) \leqq t < \sum_{j=0}^{n} \Delta t^h (Z_j). \end{cases}$$

*Remarque* 2.2. — On montre facilement que les variables aléatoires $\Delta'_p = \sum_{j=0}^{p} \Delta t^h(Z_j)$, $p \in \mathbb{N}$, sont des temps d'arrêt de la filtration $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$. Il en résulte que $(\tilde{N}_t^h)$ est $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$-adapté.

Nous noterons $(\mathscr{F}_t^h)$ la filtration naturelle du processus $(X_t^h, N_t^h)$ et $(\tilde{\mathscr{G}}_t^h)$ la filtration définie par : $\tilde{\mathscr{G}}_t^h = \tilde{\mathscr{F}}_t^h \vee \sigma(T_1, T_2, \ldots)$. Le processus $(X_t^h)$ est markovien par rapport à $(\mathscr{F}_t^h)$. La proposition suivante nous permettra de comparer les fonctions $u^h$ et $\tilde{u}^h$.

PROPOSITION 2.3. — *Soit $\tilde{\tau}$ un temps d'arrêt de $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$ et soit $\tau = \inf\{t \geqq 0 \mid N_t^h = \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\}$. Alors, $\tau$ est un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t^h)$ et on a :*

$$\mathbf{E}_x^h |\tilde{\tau} - \tau| \leqq \|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty \mathbf{E}_x^h(\tilde{\tau})}.$$

(*b*) *Soit $\theta$ un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t^h)$ et soit $\tilde{\theta} = \inf\{t \geqq 0 \mid \tilde{N}_t^h = N_\theta^h\}$. Alors, $\tilde{\theta}$ est un temps d'arrêt de $(\tilde{\mathscr{G}}_t^h)$ et on a :*

$$\mathbf{E}_x^h |\theta - \tilde{\theta}| \leqq 2 \|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty (\mathbf{E}_x^h(\theta) + \|\Delta t^h\|_\infty)}.$$

*Démonstration.* — (*a*) D'après la définition de $\tau$, on a, pour tout $t \geqq 0$ :

$$\begin{aligned}\{\tau \leqq t\} &= \{N_t^h \geqq \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\} \\ &= \bigcup_{p=0}^{\infty} (\{N_t^h = p\} \cap \{p \geqq \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\}).\end{aligned}$$

On a :

$$\{p \geqq \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (\{\tilde{\tau} \leqq r\} \cap \{\tilde{N}_r^h \leqq p\})$$

et on voit facilement que tout événement de la forme $A \cap \{\tilde{N}_r^h \leqq p\}$, avec $A \in \tilde{\mathscr{F}}_r^h$ est dans $\sigma(Z_0, \ldots, Z_p)$. On a donc :

$$(1) \qquad \{p \geqq \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\} \in \sigma(Z_0, \ldots, Z_p).$$

En remarquant que, sur l'événement $\{N_t^h = p\}$, on a, pour $j \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $Z_j = X_{\tau_j \wedge t}^h$, où $\tau_j$ est le $j$-ième temps de saut du processus $(N_t^h)$, on voit alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \{N_t^h = p\} \cap \{p \geqq \tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h\} \in \mathscr{F}_t^h$$

et par conséquent, $\tau$ est un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t^h)$.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}\tau-\tilde{\tau}&=\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1} T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)-\tilde{\tau}\\&=\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)+\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)-\tilde{\tau}.\end{aligned}$$

D'où, puisque :

$$\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)\leqq\tilde{\tau}<\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h}\Delta t^h(Z_j)$$

$$|\tau-\tilde{\tau}|\leqq\|\Delta t^h\|_\infty+\left|\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right|$$

et, en prenant les espérances et en conditionnant par rapport aux $Z_j$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x^h|\tau-\tilde{\tau}|&\leqq\|\Delta t^h\|_\infty+\mathbf{E}_x^h\left|\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right|\\&\leqq\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right)^2}\\&=\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}(\Delta t^h(Z_j))^2\,\mathbf{E}(T_{j+1}-1)^2\right)}\\&\leqq\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty}\sqrt{\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\tilde{N}_{\tilde{\tau}}^h-1}(\Delta t^h(Z_j))\right)}\\&\leqq\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty\,\mathbf{E}_x^h(\tilde{\tau})}.\end{aligned}$$

(*b*) On démontre que $\tilde{\theta}$ est un temps d'arrêt de $(\tilde{\mathcal{G}}_t^h)$ en raisonnant comme pour $\tau$. On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}\theta-\tilde{\theta}&=\theta-\sum_{j=0}^{N_\theta^h-1}\Delta t^h(Z_j)\\&=\theta-\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)\,T_{j+1}+\sum_{j=0}^{N_\theta^h}(T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)-\Delta t^h(Z_j))+\Delta t^h(Z_{N_\theta^h}).\end{aligned}$$

D'où :

$$(2)\quad |\theta-\tilde{\theta}|\leqq\left|\sum_{j=0}^{N_\theta^h} T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)-\theta\right|+\|\Delta t^h\|_\infty+\left|\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right|.$$

Notons que $\sum_{j=0}^{N_\theta^h} T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)$ est l'instant du premier saut après $\theta$. On a donc, par la propriété de Markov forte :

$$(3)\qquad \mathbf{E}_x^h\left|\sum_{j=0}^{N_\theta^h} T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)-\theta\right|=\mathbf{E}_x^h(\Delta t^h(Z_{N_\theta^h}))\leqq\|\Delta t^h\|_\infty.$$

D'autre part :

$$\mathbf{E}_x^h\left|\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right|\leqq\sqrt{\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right)^2}$$
$$=\sqrt{\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\infty}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\,\mathbf{1}_{\{j\leqq N_\theta^h\}}\right)^2}.$$

Par le même raisonnement qui nous a conduit à (1) dans (*a*), on voit que

$$\{j\leqq N_\theta^h\}\in\sigma(Z_0,\ldots,Z_{j-1},T_1,\ldots,T_j).$$

D'où, en conditionnant par rapport aux $Z_j$ :

$$\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\infty}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\,\mathbf{1}_{\{j\leqq N_\theta^h\}}\right)^2$$
$$=\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{\infty}(\Delta t^h(Z_j))^2\,\mathbf{1}_{\{j\leqq N_\theta^h\}}\right)\leqq\|\Delta t^h\|_\infty\,\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)\right)$$
$$=\|\Delta t^h\|_\infty\,\mathbf{E}_x^h\left(\sum_{j=0}^{N_\theta^h}T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)\right)$$
$$=\|\Delta t^h\|_\infty\,\mathbf{E}_x^h\left(\theta+\sum_{j=0}^{N_\theta^h}T_{j+1}\,\Delta t^h(Z_j)-\theta\right)=\|\Delta t^h\|_\infty\,\mathbf{E}_x^h(\theta+\Delta t^h(Z_{N_\theta^h}))$$

par une nouvelle application de la propriété de Markov forte.

D'où :

$$(4)\quad \mathbf{E}_x^h\left|\sum_{j=0}^{N_\theta^h}\Delta t^h(Z_j)(T_{j+1}-1)\right|\leqq\sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty(\mathbf{E}_x^h(\theta)+\|\Delta t^h\|_\infty)}.$$

Et, en réunissant les inégalités (2), (3) et (4):

$$\mathbf{E}_x^h |\theta - \tilde{\theta}| \leqq 2 \|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty (\mathbf{E}_x^h(\theta) + \|\Delta t^h\|_\infty)}.$$

*Démonstration du théorème* 2.1. — Soit $f \in C_b(E)$, soit $\tilde{\tau} \in \tilde{\mathscr{T}}_T^h$ et soit $\tau$ le temps d'arrêt associé à $\tilde{\tau}$ par la proposition 2.3 (*a*). On a: $\tilde{X}_{\tilde{\tau}}^h = X_\tau^h$, donc:

$$\mathbf{E}_x^h f(\tilde{X}_{\tilde{\tau}}^h) = \mathbf{E}_x^h f(X_\tau^h)$$

et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x^h f(\tilde{X}_{\tilde{\tau}}^h)) = \mathbf{E}_x^h f(X_{\tau \wedge (T+\varepsilon)}^h) \\ + \mathbf{E}_x^h (f(X_\tau^h) - f(X_{T+\varepsilon}^h)) \mathbf{1}_{\tau > T+\varepsilon} \\ \leqq u^h(x, T+\varepsilon, f) + 2 \|f\|_\infty \mathbf{P}_x^h(\tau - \tilde{\tau} > \varepsilon) \\ \leqq u^h(x, T+\varepsilon, f) + 2 \|f\|_\infty \frac{\mathbf{E}_x^h |\tau - \tilde{\tau}|}{\varepsilon} \\ \leqq u^h(x, T+\varepsilon, f) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} (\|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{T \|\Delta t^h\|_\infty}).\end{aligned}$$

D'où:

$$\tilde{u}^h(x, T, f) \leqq u^h(x, T+\varepsilon, f) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} (\|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{T \|\Delta t^h\|_\infty})$$

et, par un raisonnement analogue:

$$\begin{aligned}u^h(x, (T-\varepsilon)_+, f) \leqq \sup_{\tilde{\theta} \in \tilde{\mathscr{T}}_T'^h} \mathbf{E}_x^h f(\tilde{X}_{\tilde{\theta}}^h) \\ + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} (2 \|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty (T + \|\Delta t^h\|_\infty)})\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathscr{T}}_T'^h$ est l'ensemble des temps d'arrêt de $(\mathscr{G}_t^h)$ à valeurs dans $[0, T]$. Comme la tribu $\sigma(T_1, T_2, \ldots)$ est indépendante de $\tilde{\mathscr{F}}_T^h$, on a:

$$\sup_{\tilde{\theta} \in \tilde{\mathscr{T}}_T'^h} \mathbf{E}_x^h f(\tilde{X}_{\tilde{\theta}}^h) = \tilde{u}^h(x, T, f)$$

(les éléments de $\tilde{\mathscr{T}}_T'^h$ sont des temps d'arrêts «randomisés» de $(\tilde{\mathscr{F}}_t^h)$) et par conséquent:

$$\begin{aligned}u^h(x, (T-\varepsilon)_+, f) \leqq \tilde{u}^h(x, T, f) \\ + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon} (2 \|\Delta t^h\|_\infty + \sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty (T + \|\Delta t^h\|_\infty)}).\end{aligned}$$

D'où :

$$u^h(x,(\mathrm{T}-\varepsilon)_+,f)-2\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon}(2\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\|\Delta t^h\|_\infty(\mathrm{T}+\|\Delta t^h\|_\infty)})$$
$$\leqq \widetilde{u}^h(x,\mathrm{T},f)\leqq u^h(x,(\mathrm{T}+\varepsilon),f)$$
$$+2\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon}(\|\Delta t^h\|_\infty+\sqrt{\mathrm{T}\|\Delta t^h\|_\infty}).$$

A partir de cette double inégalité, le théorème 2.1 résulte du théorème 1.3 et de la remarque 1.8.

*Remarque* 2.4. — Dans le cas où la fonction $\Delta t^h$ est égale à la constante T/N (discrétisation « à pas constant »), on peut montrer directement le théorème 2.1 en utilisant la version discrète du théorème de Trotter-Kato (*cf.* [15], § 3.6).

*Remarque* 2.5. — La méthode de Kushner (qui ne semble pas donner directement de résultat de convergence uniforme) donne des informations sur la convergence des lois de temps d'arrêt optimaux (*cf.* [12], chap. 8, voir aussi [3] et la section 3 ci-dessous).

## 3. CONVERGENCE DE RÉDUITES : CADRE ABSTRAIT

Si les résultats obtenus dans le cadre markovien sont à la fois satisfaisants et naturels, les méthodes développées pour les obtenir restent par contre très spécifiques et ne sauraient être généralisées à une situation plus abstraite. Ces résultats ne doivent pas non plus laisser croire que la convergence des réduites découle automatiquement de la convergence (en loi) des processus. Une telle assertion est fausse même dans un cadre markovien, comme le montre le contre-exemple suivant : soient U une variable aléatoire de Bernoulli centrée, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et, pour tout $n\geqq 1$, les processus $\mathrm{X}^n$ définis par $\mathrm{X}_t^n=\mathrm{U}/n\,\mathbf{1}_{[0,1/2[}+\mathrm{U}\,\mathbf{1}_{[1/2,1]}$. Il est clair que, $\mathbf{P}$-*ps*, $\mathrm{X}_t^n\to\mathrm{X}_t=\mathrm{U}\,\mathbf{1}_{[1/2,1]}(t)$. On vérifie aisément que, pour tout $n\geqq 1$ fixé, la réduite à l'origine vaut $u^n(0)=(n-1)/2n$, cette valeur étant atteinte pour les temps d'arrêt de la forme $\alpha\,\mathbf{1}_{(\mathrm{X}_0^n>0)}\,\alpha\in[1/2,1]$. Par contre $u=0$ car $\mathrm{E}(\mathrm{X}_\tau)=0$ pour tout $\mathscr{F}^{\mathrm{X}}$-temps d'arrêt $\tau$. On n'a donc pas $u^n\to u$.

Le propos de cette section est donc de dégager des méthodes générales permettant d'établir un théorème de convergence des réduites dans un cadre abstrait (sous-section 3.3), voire même, sous des hypothèses beaucoup plus faibles, un résultat sur la semi-continuité inférieure de la réduite comme fonctionnelle de processus.

### 3.1. Notations, définitions et rappels

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé filtré, $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ satisfaisant aux conditions habituelles et $T > 0$. Pour alléger les notations nous désignerons maintenant par:

(5) $$\mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}}) = \{\tau : \Omega \to [0, T], \tau\ \underline{\mathcal{F}}\text{-temps d'arrêt}\}$$

l'ensemble des $\underline{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$.

Soit $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ un processus càdlàg à valeurs réelles, $\underline{\mathcal{F}}$-adapté défini sur $\Omega$. La $\underline{\mathcal{F}}$-réduite $u(\underline{\mathcal{F}}, t)$ du opocessus Y est définie par:

(6) $$u(\underline{\mathcal{F}}) = \sup\{E(Y_\tau), \tau \in \mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}})\}$$

dès que cette formule a un sens. L'existence de $u(\underline{\mathcal{F}})$ est acquise, par exemple, dès que:

(7) Y est dans la classe D (*i.e.* $\{Y_\tau, \tau \in \mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}})\}$ est équiintégrable).

Si, comme souvent dans la suite, $\underline{\mathcal{F}} = \underline{\mathcal{F}}^Y$ (filtration naturelle continue à droite de Y) nous noterons $\mathcal{T}^Y$ pour $\mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}}^Y)$ et $u$ pour $u(\underline{\mathcal{F}}^Y)$. Dans les questions de théorèmes limites il est commode d'introduire l'espace canonique associé aux processus étudiés, en l'occurrence $\mathbf{D} = \{\alpha : [0, T] \to \mathbf{R},\ \text{càdlàg}\}$. Nous munirons $\mathbf{D}$ successivement de deux topologies très différentes: la topologie de la convergence simple le long d'une partie dense D de $[0, T]$, contenant T (symbolisée par $S_D$) et la topologie de Skorokhod (symbolisée par $S k$). Le lecteur non familier avec celle-ci pourra se reporter par exemple à [6] et [11] pour des exposés complets sur la question. Désignons par X le processus canonique défini sur $\mathbf{D}$ par: $\forall \alpha \in \mathbf{D}\ \forall t \in [0, T]\ X_t(\alpha) = \alpha(t)$. Les topologies $S_D$ et $S k$ définissent la même tribu borélienne $\mathcal{D} = \sigma(X_t, t \in [0, T])$ (*cf.* [6]). La filtration $\underline{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}_t)_{t \in [0, T]}$ est définie par: $\forall t \in [0, T[\ \mathcal{D}_t = \bigcap_{s > t} \sigma(X_u, u \leq s)$ et $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble $\mathcal{T}^X$ des $\underline{\mathcal{D}}$-temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$. On vérifie alors aisément que $\mathcal{T}^Y = \mathcal{T} \circ Y$ au sens où:

(8) $$\tau \in \mathcal{T}^Y \Leftrightarrow \exists \bar{\tau} \in \mathcal{T} / \tau = \bar{\tau} \circ Y.$$

On en déduit immédiatement que l'existence et la valeur de la réduite d'un processus par rapport à sa filtration propre ne dépend que de la loi $\mathbf{P}_Y$ de ce processus, *i.e.* que X sur $(\mathbf{D}, \mathcal{D}, \underline{\mathcal{D}}, \mathbf{P}_Y)$ et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}^Y, \mathbf{P})$

ont même réduite. Grâce à cette remarque on pourra toujours supposer dans la suite que $X^n$ converge en loi vers le processus canonique X (indépendamment de la topologie sous-jacente).

### 3.2. Semi-continuité inférieure de la réduite pour la topologie $S_D$.

Soient $(X^n)_{n \geqq 0}$ une suite de processus càdlàg adaptés sur des bases stochastiques $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \underline{\mathscr{F}}^n, \mathbf{P}^n)$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\mathbf{D}, \mathscr{D}, \underline{\mathscr{D}})$ tels que $(X^n, \underline{\mathscr{F}}^n)$ et $(X, \underline{\mathscr{D}})$ vérifient la condition (7) (classe D). Nous allons montrer que, sous des hypothéses très faibles, $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S_D)} X$ entraîne:

$$u \leqq \liminf_n u^n (\underline{\mathscr{F}}^n) \tag{9}$$

où $u^n$ et $u$ désignent respectivement les réduites de $X^n$ et X. L'idée de base consiste à approcher tout temps d'arrêt de $\mathscr{T}$ sur $\mathbf{D}$ par des temps d'arrêt $\mathbf{P}$-*ps* $S_D$-continus.

LEMME 3.1. — *Soit* $D \subset [0, T]$, *dense*, $T \in D$. *Alors pour tous* $n$, $p \geqq 1$ *il existe* $\tau_n$, $\tau_{n,p} \in \mathscr{T}$, *ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, toutes dans* D, *tels que*:

$$\tau_n - 1/n \leqq \tau \leqq \tau_n, \tag{10}$$

$$\mathbf{P}\text{-}ps \lim_p \tau_{n,p} = \tau_n \tag{11}$$

$$\mathbf{P}(d\alpha)\text{-}ps\ \beta \to X_{\tau_{n,p}}(\beta)\ \textit{est}\ S_D\textit{-continue en}\ \alpha. \tag{12}$$

*Démonstration.* — Soit $(t_k^n)_{0 \leqq k \leqq l_n}$ une subdivision de D de pas inférieur à $1/n$ avec $t_0^n = 0$, $t_{l_n}^n = T$. On pose:

$$\tau_n = \sum_{1 \leqq k \leqq l_n} t_k^n \mathbf{1}_{A_{n,k}},$$

$$A_{n,k} = \{ t_{k-1}^n \leqq \tau < t_k^n \}\ 1 \leqq k \leqq l_n - 1, \qquad A_{n, l_n} = \{ t_{l_n - 1}^n \leqq \tau \leqq T \}.$$

$\tau_n$ est un $\underline{\mathscr{D}}'$-temps d'arrêt où $\mathscr{D}'_t = \mathscr{D}_{t-}$ si $t < T$ et $\mathscr{D}'_T = \mathscr{D}_T$. Grâce au théorème de classe monotone on montre que l'on peut approcher $\mathbf{P}$-*ps* toute variable aléatoire bornée $\mathscr{D}_{u}-$-mesurable ($u \in ]0, T[$) par des v. a. de même nature, mais $\mathscr{S}_D$-continues; ce résultat s'étend à $\mathscr{D}_T$. Ceci permet de construire les $\tau_{n,p}$, en effet, appliquons le résultat précédent à $\mathbf{1}_A$, $A \in \mathscr{D}_{u-}$ (resp. $\mathscr{D}_T$); il existe une suite $Z_p^A \xrightarrow{\mathbf{P}-ps} \mathbf{1}_A$ (on peut supposer les $Z_p^A$ à valeurs dans [0, 1]) et $\alpha \in ]0, 1[$ tels que $\mathbf{P}(Z_p^A = \alpha) = 0$ pour tout $p$. Soit

$A^p = \{ Z_p^A > \alpha \}$. Il vient :

(13) $\qquad A^p \in \mathscr{D}_{u-}$ (resp. $\mathscr{D}_T$), $\qquad \mathbf{P}(\partial A^p) = 0, \quad \mathbf{1}_{A^p} \xrightarrow{\mathbf{P}-ps} \mathbf{1}_A.$

Ainsi, pour chaque $A_{n,k}$, on dispose d'une suite $(A_{n,k}^p)_{p \geqq 1}$ vérifiant (13). A $n$ et $p$ fixés on pose : $B_{n,k}^p = A_{n,k}^p - \bigcup_{1 \leqq i \leqq k-1} B_{n,i}^p$ pour $2 \leqq k \leqq l_n$, $B_{n,1}^p = A_{n,1}^p$ et $B_{n,l_n+1}^p = (\bigcup_{1 \leqq k \leqq l_n} B_{n,k}^p)^c$. Les $B_{n,k}^p$ forment une partition vérifiant : $\mathbf{P}(\partial B_{n,k}^p) = 0$ pour tout $k$ et $B_{n,k}^p \in \mathscr{D}_{t_k^n -}$ $(1 \leqq k \leqq l_n - 1)$. On pose alors simplement $\tau_{n,p} = \sum_{1 \leqq k \leqq l_n - 1} t_k^n \mathbf{1}_{B_{n,k}^p} + T\, \mathbf{1}_{(B_{n,l_n}^p \cup B_{n,l_n+1}^p)}$. □

On déduit sans difficulté de ce lemme le théorème recherché :

THÉORÈME 3.2. — *Soit* $D \subset [0, T]$, *dense*, $T \in D$. *Sous les hypothèses* :

(7) $\qquad$ (*classe* D) *pour* $(X, \mathscr{D})$ *et* $(X^n, \mathscr{F}^n)$,

(14) $\qquad \forall \tau \in \mathscr{T}$, $\{ X^n_{\tau \circ X_n}, n \in \mathbb{N} \}$ *est équiintégrable*,

(15) $\qquad X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(\mathscr{S}_D)} X$ (i. e. $\mathbf{P}^n_{X^n} \overset{S_D}{\Rightarrow} \mathbf{P}$),

On a :

$$u \leqq \liminf_n u^n \, (\mathscr{F}^n).$$

*Démonstration.* — Soit $\tau \in \mathscr{T}$, $\tau_n$ et $\tau_{n,p}$ les temps d'arrêt qui lui sont associés par le lemme 3.1. **P**-*ps* $\tau_n \downarrow \tau$ donc **P**-*ps* $X_{\tau_n} \to X_\tau$ et partant, d'après (7), $E(X_{\tau_n}) \to E(X_\tau)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon$ tel que $E(X_\tau) \leqq E(X_{\tau_{n_\varepsilon}}) + \varepsilon/2$. $\tau_{n,p}$ et $\tau_n$ étant discrets, $\tau_{n,p}$ converge vers $\tau_n$ en stationnant donc $X_{\tau_{n_\varepsilon, p}} \xrightarrow[p \to \infty]{\mathbf{P}-ps} X_{\tau_{n_\varepsilon}}$; d'où l'existence d'un $p_\varepsilon$ tel que $E(X_\tau) \leqq E(X_{\tau_{n_\varepsilon, p_\varepsilon}}) + \varepsilon$. D'autre part (12) et (15) entraînent $X^n_{\tau_{n_\varepsilon, p_\varepsilon}(X^n)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbf{P}-ps} X_{\tau_{n_\varepsilon, p_\varepsilon}}$ et donc

$$E(X_{\tau_{n_\varepsilon, p_\varepsilon}}) = \lim_n E^n (X^n_{\tau_{n_\varepsilon, p_\varepsilon}(X^n)}) \leqq \liminf_n u^n.$$

D'où finalement :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall \tau \in \mathscr{T} \; E(X_\tau) \leqq \liminf_n u^n + \varepsilon, \qquad i.e. \; u \leqq \liminf_n u^n. \quad \square$$

*Remarque* 3.3. — Si $X \geqq 0$ et $X^n \geqq 0$, on peut passer outre les hypothèses d'équiintégrabilité (7) et (14) en invoquant le lemme de Fatou (en loi), sans garantir la finitude des réduites évidemment.

*Remarque* 3.4. — Il est possible d'étendre ce résultat à des situations dans lesquelles la réduite de X est définie par rapport à une filtration de la forme $\underline{\mathscr{F}}^{(X, Y)}$ où Y est un processus càdlàg à valeurs dans un espace métrique E. Pour ce faire, on associe à $X^n$ des processus compagnons $Y^n$, càdlàg à valeurs dans E. Une adaptation triviale de la preuve du théorème 3.2 conduit à l'énoncé suivant où (X, Y) désigne le processus canonique sur $\mathbf{D}(\mathbf{R} \times E)$. Si :

(7) $\qquad$ (classe D) pour $(X, \underline{\mathscr{D}}^{(X, Y)})$ et $(X^n, \underline{\mathscr{F}}^n)$,

(16) $\qquad \forall \tau \in \mathscr{T}(\underline{\mathscr{D}}^{(X, Y)}), \quad \{ X^n_{\tau \circ (X_n, Y_n)}, n \in \mathbf{N} \text{ est équiintégrable} \}$,

(17) $\qquad (X^n, Y^n) \xrightarrow{\mathscr{L}(S_D)} (X, Y)$,

on a

$$u(\underline{\mathscr{D}}^{(X, Y)}) \leq \liminf_n u^n(\underline{\mathscr{F}}^n).$$

Grâce à ce type d'extension on peut en particulier obtenir des résultats sur les réduites de fonctionnelles des $X^n$ (*cf.* sous-section 3.3).

Le cas à temps discret est contenu dans le théorème 3.2. Il suffit pour cela de considérer les processus càdlàg continus par morceaux sautant aux instants entiers associés aux processus à temps discret. Pour un énoncé précis on consultera [13].

### 3.3. Continuité de la réduite pour la convergence fonctionnelle de Skorokhod

Le titre de cette partie est exagérément optimiste puisque comme le montre le contre-exemple présenté dans l'introduction de cette section, on ne peut espérer un résultat du type : $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(Sk)} X \Rightarrow \lim_n u^n(\underline{\mathscr{F}}^n) = u$ en toute généralité. Plus précisément que constate-t-on au vu de ce contre-exemple ? Que la non-convergence des réduites est due à une dégénérescence des filtrations à la limite qui, restreignant trop les classes de temps d'arrêt, interdit de prendre en compte les candidats naturels que sont les valeurs d'adhérence de suites de temps d'arrêt optimaux : si $t \in [1/2, 1]$ $\underline{\mathscr{F}}_t^{X^n} = \underline{\mathscr{F}}_t^X = \sigma(U)$ mais pour $t \in [0, 1/2]$ $\underline{\mathscr{F}}_t^{X_n} = \sigma(U)$ alors que $\underline{\mathscr{F}}_t^X$ est triviale.

Supposons que l'on reprenne cette démarche générale mais que l'on grossisse la filtration de la limite afin que la limite des temps d'arrêt optimaux soit un temps d'arrêt pour cette filtration. Si l'on montre ensuite que, dans certaines situations, les réduites par rapport à cette filtration grossie et par rapport à la filtration naturelle sont identiques, la convergence des réduites aura bien lieu. C'est cette idée que nous allons mettre en œuvre. Pour ce faire nous avons donc besoin d'un critère préalable autorisant l'augmentation de la filtration.

PROPOSITION 3.5. — *Soit* Y *un processus càdlàg adapté sur une base* $(\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathcal{F}}, \mathbf{P})$ *et* $D \subset [0, T]$, *dense, avec* $T \in D$. *Si* Y *vérifie la* $\underline{\mathcal{F}}$*-condition d'équiintégrabilité* (7) *et si*:

$$(18) \qquad \begin{cases} \forall t \in [0, t], \quad \forall n \geqq 1, \quad \forall t_1, \ldots, t_n \in D, \quad \forall h \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \\ E(h(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})/\mathcal{F}_t) = E(h(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})/\mathcal{F}_t^Y)\ \mathbf{P}\text{-}ps \end{cases}$$

*alors*:

$$u(\underline{\mathcal{F}}) = u.$$

*Démonstration.* — $t$ étant fixé, on vérifie par classe monotone que (18) entraîne:

$$(19) \qquad \forall H \in \mathcal{F}_T^Y, \quad \text{bornée sur } \Omega, E(H/\mathcal{F}_t) \overset{\mathbf{P}-\mathrm{ps}}{=} E(H/\mathcal{F}_t^Y)$$

ceci s'étendant alors à $L^1(\Omega, \mathcal{F}_t^Y, \mathbf{P})$. Y étant càdlàg et vérifiant (7), le $\underline{\mathcal{F}}$-gain maximal $(\tilde{Z}_\tau = \operatorname{supess}\{E(Y_\sigma/\mathcal{F}_\tau), \sigma \geqq \tau, \sigma \in \mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}})\})_{\tau \in \mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}})}$ s'agrège en une sur-martingale càdlàg $(\tilde{Z}_t)_{t \in [0, T]}$ (l'enveloppe de Snell, *cf.* [9]). C'est la plus petite sur-martingale supérieure à Y. De même, comme $\underline{\mathcal{F}}^Y \subset \underline{\mathcal{F}}$, le $\underline{\mathcal{F}}^Y$-gain maximal s'agrège en une sur-martingale càdlàg $Z \leqq \tilde{Z}$. Or Z étant $\underline{\mathcal{F}}$-adaptée est aussi, d'après (19), une $\underline{\mathcal{F}}$-sur-martingale. Par suite $Z = \tilde{Z}$ **P**-*ps* et donc $u = E(Z_0) = E(\tilde{Z}_0) = u(\underline{\mathcal{F}})$. □

*Remarque* 3.6. — L'hypothèse (18) est connue dans la littérature sur le grossissement de filtration (*cf.* [7]) pour être équivalente à l'« hypothèse (H) »: toute $\underline{\mathcal{F}}^Y$-martingale est une $\underline{\mathcal{F}}$-martingale.

Bien que ce ne soit pas absolument nécessaire si l'on ne s'intéresse qu'à la convergence des réduites, nous allons nous placer dorénavant dans un cadre assurant l'existence de temps d'arrêt optimaux pour les $\underline{\mathcal{F}}^{X^n}$-réduites $u^n$ de $X^n$. Ceci nous permettra, outre un allègement des énoncés, d'obtenir quelques résultats concernant la convergence des temps d'arrêt optimaux.

*Rappel* (cf. [9]). — Soit Y comme dans la proposition 3.5. Si Y vérifie:

(7) pour $\underline{\mathcal{F}}$,

$$(20) \qquad \text{pour toute suite } \tau_n \text{ de } \underline{\mathcal{F}}\text{-temps d'arrêt}, \tau_n \uparrow \tau, Y_{\tau_n} \xrightarrow{\mathbf{P}-ps} Y_\tau,$$

alors :

$$\exists\, \tau^* \in \mathcal{T}(\underline{\mathcal{F}}) / u(\underline{\mathcal{F}}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}_{\tau^*}).$$

Or, (20) n'est autre que la définition de la $(\mathbf{P}, \underline{\mathcal{F}})$-quasi-continuité à gauche de Y (*cf.* [11] par exemple).

Nous allons faire une dernière hypothèse importante sur la suite $\mathrm{X}^n$, en l'occurrence qu'elle vérifie le critère d'Aldous :

$$(21) \quad \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n} \sup \{ \mathbf{P}^n (| \mathrm{X}^n_\tau - \mathrm{X}^n_\sigma | \geqq \varepsilon), \tau \leqq \sigma \leqq \tau + \delta, \tau, \sigma \in \mathcal{T}^{\mathrm{X}^n} \} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Si l'on impose également une condition d'équiintégrabilité, par exemple :

$$(22) \qquad \{ \mathrm{X}^n_\tau, n \in \mathrm{N}, \tau \in \mathcal{T}^{\mathrm{X}^n} \} \text{ équiintégrale,}$$

on déduit de (21) la version $\mathrm{L}^1$ du critère d'Aldous qui nous sera utile :

$$(23) \quad \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n} \sup \{ \mathrm{E}^n | \mathrm{X}^n_\tau - \mathrm{X}^n_\sigma |, \tau \leqq \sigma \leqq (\tau + \delta) \wedge \mathrm{T}, \tau, \sigma \in \mathcal{T}^{\mathrm{X}^n} \} = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Le critère d'Aldous (21) est classiquement utilisé, associé à une condition de bornitude asymptotique en probabilité, comme un critère de S$k$-tension (*cf.* [1] et [11]). Son emploi est donc relativement peu coûteux ici, d'autant qu'il est essentiellement toujours vérifié dans les situations appliquées. Rappelons pour mémoire que ce critère impose la quasi-continuité à gauche de la limite par rapport à sa filtration propre (*cf.* [3]).

Soit donc $(\tau^*_n)$ une suite de temps d'arrêt optimaux associés à $(\mathrm{X}^n, \underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{X}^n})$. Les hypothèses (22) et (23) assurent immédiatement (*cf.* [11]) la S$k$-tension de $\mathcal{L}(\mathrm{X}^n, \tau^*_n)$ pour la convergence étroite pour la topologie produit sur $\mathbf{D} \times [0, \mathrm{T}]$. Désignons par $(\mathrm{X}, \theta)$ la variable aléatoire canonique sur $\mathbf{D} \times [0, \mathrm{T}]$ et par $\underline{\mathcal{D}}^\theta$ la plus petite filtration continue à droite vérifiant : X est $\underline{\mathcal{D}}^\theta$-adapté et $\theta$ est un $\underline{\mathcal{D}}^\theta$-temps d'arrêt $(\mathcal{D}^\theta_t = \bigcap_{s > t} \sigma(\mathrm{X}_u, (\theta \leqq u), u \leqq s))$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de cette partie :

THÉORÈME 3.7. — *Soit* $\mathrm{X}^n$ *une suite de processus càdlàg quasi continus à gauche sur* $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}^n)$ *vérifiant* (22) *et* (23) *et* $\tau^*_n$ *une suite de* $(\underline{\mathcal{F}}^{\mathrm{X}^n}, \mathbf{P}^n)$-*temps d'arrêt optimaux. Si* $\mathrm{X}^n$ *vérifie également* :

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}(\mathrm{X}^n) \overset{(\mathrm{S}k)}{\Rightarrow} \mathbf{P}, \mathbf{P} \textit{ probabilité sur } (\mathbf{D}, \mathcal{D}) \\ \textit{telle que } \| \mathrm{X} \|_\infty = \sup_{s \in [0, \mathrm{T}]} | \mathrm{X}_s | \in \mathrm{L}^1 (\mathbf{D}, \mathcal{D}, \mathbf{P}). \end{cases}$$

(25) $\forall$ $\mathbf{Q} \in \mathscr{A} = \{$ *valeur d'adhérence de* $\mathscr{L}(X^n, \tau_n^*)_{n \geq 1}$ *sur* $\mathbf{D} \times [0, T]\}$, *le triplet* $(X, \mathbf{Q}, \mathscr{D}^\theta)$ *vérifie la propriété* (18) *sur les lois conditionnelles.*

*Alors:*

$$u^n \to u. \tag{26}$$

*Si, en outre, pour tout* $\mathbf{Q} \in \mathscr{A}$ *le problème d'arrêt optimal associé à* $(X, \mathbf{Q}, \mathscr{D}^\theta)$ *admet une solution unique en loi, soit* $\mu_{\tau^*}^*$, *indépendante de* $\mathbf{Q}$, *alors:*

$$\tau_n^* \xrightarrow{\mathscr{L}([0, T])} \mu_{\tau^*}^*. \tag{27}$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que les hypothèses du théorème 3.2 de la sous-section 3.1 sont vérifiées puisque (24) entraîne $X^n \xrightarrow{\mathscr{L}(S_D)} \mathbf{P}$ pour $D = \{ t / \mathbf{P}(\Delta X_t \neq 0) = 0 \} \ni T$. D'ailleurs ici, grâce à (21), $D = [0, T]$. Donc $\liminf_n u^n \geqq u$. Quitte à extraire on peut supposer que $u^n \to \limsup_n u^n$ et que $\mathscr{L}(X^n, \tau_n^*) \overset{\mathbf{D} \times [0, T]}{\Rightarrow} \mathbf{Q}$. Comme $\mathbf{Q}(\Delta X_T \neq 0) = \mathbf{P}(\Delta X_T \neq 0) = 0$, il est clair que, sauf pour un nombre au plus dénombrable de $\delta$, on a: $\mathbf{Q}(\Delta X_{(\theta + \delta) \wedge T} \neq 0) = 0$. Soit $\Delta_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble de tels $\delta$. Le critère d'Aldous $L^1$ (23) entraîne alors que:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \delta \in \Delta_{\mathbf{Q}}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqq n_0$$
$$E^n | X^n_{(\tau_n^* + \delta) \wedge T} - X^n_{\tau_n^*} | < \varepsilon.$$

Comme $\delta \in \Delta_{\mathbf{Q}}$ il vient $\mathscr{L}(X^n_{(\tau_n^* + \delta) \wedge T)}) \to \mathscr{L}(X_{(\theta + \delta) \wedge T})$. Par (22) (équiintégrabilité) on en déduit que $\limsup_n E^n(X^n_{\tau_n^*}) \leqq E_{\mathbf{Q}}(X_{(\theta + \delta) \wedge T}) + \varepsilon$. Or $|X_{(\theta + \delta) \wedge T}| \leqq \| X \|_\infty \in L^1(\mathbf{D} \times [0, T], \mathscr{D}_T^\theta, \mathbf{Q})$ car $\mathbf{Q}_X = \mathbf{P}$, donc $E_{\mathbf{Q}}(X_{(\theta + \delta) \wedge T}) \to E_{\mathbf{Q}}(X_\theta)$. D'où:

$$\limsup_n E^n(X^n_{\tau_n^*}) \leqq E_{\mathbf{Q}}(X_\theta) \leqq u^\theta \tag{28}$$

où $u^\theta$ désigne la $(\mathbf{Q}, \mathscr{D}^\theta)$-réduite de X [dont l'existence découle de (24)]. Or, d'après la proposition 3.5 ci-avant $u_\theta = u$ donc $\limsup_n u^n \leqq u$.

Le point (27) découle directement de (28) car $u = u^\theta = E_{\mathbf{Q}}(X_\theta)$ donc $\theta$ est alors un $(\mathbf{Q}, \mathscr{D}^\theta)$-temps d'arrêt optimal pour X donc $\mathbf{Q}_\theta = \mu_{\tau^*}^*$. Par unicité de la valeur d'adhérence on a $\tau_n^* \xrightarrow{\mathscr{L}} \mu_{\tau^*}^*$. □

Les hypothèses de ce théorème apparaissent difficiles à vérifier directement, notamment (25). C'est pourtant assez aisé dans un cadre markovien. On retrouve ainsi, à l'uniformité en $x$ (valeur initiale des processus) près des résultats analogues à ceux de la section 1 (*cf.* [13]). Nous verrons également que ce théorème permet de conclure lorsque l'on a convergence des processus au sens d'Aldous (*cf.* sous-section 3.4).

*Remarque* 3.8. — Comme dans la sous-section 3.2, on étend la portée du théorème 3.7 à la convergence de réduites de la forme $u^n(\underline{\mathscr{F}}^{(X^n, Y^n)})$ et $u^n(\underline{\mathscr{F}}^{(X, Y)})$ où $Y^n$ est une suite de processus-compagnons des $X^n$, càdlàg adaptés à valeurs dans un espace polonais E. L'adaptation des hypothèses est analogue à celle de la remarque 3.4: signalons que les $X^n$ devront être $\underline{\mathscr{F}}^{(X^n, Y^n)}$-quasi continus à gauche; par contre il suffira que $(X^n, Y^n)$ converge en loi sur l'espace produit $(\mathbf{D}([0, T], \mathbf{R}) \times \mathbf{D}([0, T], E), Sk_{\mathbf{R}} \otimes Sk_E)$ vers le processus canonique (X, Y) puisque $Sk_{\mathbf{R}} \otimes Sk_E$ et $Sk_{\mathbf{R} \times E}$ engendrent les mêmes boréliens.

L'analogue en temps discret du théorème 3.7 se démontre quant à lui soit en adaptant les méthodes de démonstration du théorème, soit directement à l'aide de la formule de la programmation dynamique (*cf.* [14]) reliant le processus $(Y_k)_{0 \leqq k \leqq N}$ à son enveloppe de Snell (gain maximal) Z par

$$Z_N = Y_N \qquad \text{et} \qquad Z_k = \max(Y_k, E(Z_{k+1}/\mathscr{F}_k))$$

### 3.4. Application: continuité de la réduite pour la convergence d'Aldous

Nous avons vu dans l'introduction de cette partie et dans l'alinéa 3.3 que la non-convergence de la réduite était due d'un point de vue heuristique à la dégénérescence de la suite des filtrations des processus $X^n$. Or, la convergence fonctionnelle d'Aldous (*cf.* [2] et [3]) se fonde précisément sur la constatation que les modes de convergence exclusivement trajectoriels ne sont pas adaptés à la notion de processus développée dans la théorie générale du fait qu'ils ignorent toute la part de la structure probabiliste liée à sa filtration — propre ou non. Afin de pouvoir englober la totalité de la structure probabiliste, la topologie d'Aldous s'attache elle directement au couple processus-filtration $(X, \underline{\mathscr{F}})$ en considérant à la fois le processus X et sa loi conditionnelle sous $\underline{\mathscr{F}}$. Nous donnons ici, comme définition, l'une des caractérisations de la convergence d'Aldous:

DÉFINITION 3.9. — *Soient* $(X^n, \underline{\mathscr{F}}^n)$ *et* $(X, \underline{\mathscr{F}})$ *des processus càdlàg* (*réels pour simplifier*). *On dira que* $(X^n, \underline{\mathscr{F}}^n) \xrightarrow{\mathscr{L}(A)} (X, \underline{\mathscr{F}})$ (*converge au sens d'Aldous*) *ssi*:

$$\forall h_1, \ldots, h_k \in \mathscr{C}_b(\mathbf{D}([0, T], \mathbf{R}), \mathbf{R})$$

$$(X_t^n, E(h_i(X^n)/\mathscr{F}_t^n))_{1 \leq i \leq k,\, 0 \leq t \leq T} \xrightarrow{\mathscr{L}(Sk)} (X_t, E(h_i(X)/\mathscr{F}_t))_{1 \leq i \leq k,\, 0 \leq t \leq T}$$

*quand* $n \to +\infty$, *la convergence en loi ayant lieu sur* $(\mathbf{D}([0, T], \mathbf{R}^{k+1}), Sk)$.

Dans ce cadre nous allons voir que la convergence d'Aldous est tout à fait adaptée à notre problème. Elle apparaît même un peu trop « forte ». Le revers de la médaille tient en ce que ce type de convergence fonctionnelle est excessivement difficile à établir. Le théorème qui, au mode de convergence et à la condition (25) disparue près, s'apparente au théorème 3.7 s'énonce ainsi :

THÉORÈME 3.10. — *Soient* $X^n$ *une suite de processus càdlàg quasi continue à gauche sur* $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{P}^n)$ *vérifiant* (21) (*critère d'Aldous*) *et* $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *telle que* $f(X^n)$ *vérifie* (22) (*équiintégrabilité*). *Sous l'hypothèse* :

$$(29) \quad \exists\, \mathbf{P}, \quad \textit{probabilité sur } (\mathbf{D}, \mathscr{D}) \textit{ telle que } \begin{cases} \text{(i)} \ (X^n, \underline{\mathscr{F}}^{X_n}) \xrightarrow{\mathscr{L}(A)} (X, \underline{\mathscr{D}}) \textit{ sous } \mathbf{P} \\ \text{(ii)} \ \|f(X)\|_\infty \in L^1(\mathbf{P}) \end{cases}$$

Alors :

$$u^n(f(X^n), \underline{\mathscr{F}}^{X^n}) \to u(f(X), \underline{\mathscr{D}}).$$

*Démonstration.* — Afin d'éviter de manipuler des processus compagnons nous allons supposer que $f(x) = x$. La convergence au sens d'Aldous entraînant la convergence de Skorokhod, il nous suffit de vérifier qu'une suite de temps d'arrêt optimaux $\tau_n^*$ vérifie la condition (25). Soit donc $\mathbf{Q}$ adhérant à $\mathscr{L}((X^n, \underline{\mathscr{F}}^{X^n}), \tau_{t,n}^*)_{n \geq 1}$ pour la topologie produit $A \otimes [0, T]$. Soient $\varphi$ $\mathbf{Q}$-*ps* $Sk$-continue, bornée, H $Sk \otimes [0, T]$-continue bornée; on a simultanément :

$$E(\varphi(f(X^n))/\mathscr{F}^{X^n}.)\, H(X^n, \tau_n^*) \xrightarrow{\mathscr{L}(S\,k)} E_{\mathbf{Q}}(\varphi(f(X))/\mathscr{D}.)\, H(X, \theta)$$

$$\varphi(f(X^n))\, H(X^n, \tau_n^*) \xrightarrow{\mathscr{L}(S\,k)} \varphi(f(X))\, H(X, \theta).$$

Toutes ces quantités étant bornées, il vient :

$$(30) \qquad E_{\mathbf{Q}}(E(\varphi(f(X))/\mathscr{D}.)\, H(X, \theta)) = E_{\mathbf{Q}}(\varphi(f(X))\, H(X, \theta))$$

et donc :

$$(31) \qquad E_{\mathbf{Q}}(\varphi(f(X))/\mathscr{D}_t) \neq E_{\mathbf{Q}}(\varphi(f(X))/\mathscr{D}_t^\theta), \quad \mathbf{Q}\text{-}ps.$$

(31) entraîne en particulier si l'on considère des fonctions $\varphi$ de la forme $\varphi(X) = h(X_{t_1}, \ldots, X_{t_p})$, $h \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}^p, \mathbf{R})$ l'égalité des lois conditionnelles de $f(X)$ sous $\underline{\mathscr{D}}^\theta$ et $\underline{\mathscr{D}}$ [condition (18) de la proposition 3.5]. La condition (25) du théorème 3.7 est donc bien vérifiée.

Dans le cas général $-$ $f$ continue quelconque $-$ la méthode de démonstration reste sensiblement la même. Les $X^n$ jouent alors le rôle de processus compagnons et les $f(X^n)$ de processus principaux. Il devient nécessaire de se placer sur l'espace $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$ ce qui introduit quelques difficultés techniques. On trouvera un exemple détaillé d'utilisation des processus compagnons pour ce type de problème dans [13]. □

Le théorème 3.10 a déjà été établi [lorsque $f(x)=x$] par Aldous dans [3]. Sa démonstration, qui s'appuie sur des temps d'arrêt « randomisés », diffère quelque peu de celle que nous proposons, fondée sur le résultat de la proposition 3.5.

Rappelons à nouveau que la quasi-continuité à gauche des $X^n$ et le critère d'Aldous entraînent la $\underline{\mathscr{F}}^X$-quasi-continuité à gauche de X. Dans cet ordre d'idée notre énoncé peut d'ailleurs être allégé si l'on fait appel à un autre résultat de [3] selon lequel si X est $\underline{\mathscr{F}}^X$-quasi continu à gauche et $(X^n, \underline{\mathscr{F}}^{X^n}) \xrightarrow{\mathscr{L}(A)} (X, \underline{\mathscr{F}})$ alors la suite $X^n$ vérifie nécessairement le critère d'Aldous (21): il nous suffirait donc de remplacer le critère d'Aldous par la $(\mathbf{P}, \underline{\mathscr{F}}^X)$-quasi-continuité à gauche de X dans les hypothèses.

Nous remercions J. Jacod pour ces remarques et ses commentaires sur une version préliminaire de ce travail et le rapporteur pour nous avoir signalé la référence [7].

## RÉFÉRENCES

[1] D. ALDOUS, Stopping Times and Tightness, *Ann. Prob.*, vol. **6**, 1979, p. 335-340.

[2] D. ALDOUS, *Weak Convergence of Stochastic Processes for Processes Viewed in the Strasbourg Manner*, non publié, 1978.

[3] D. ALDOUS, *Extended Weak Convergence*, non publié, 1979.

[4] A. BENSOUSSAN et J.-L. LIONS, *Applications des inéquations variationnelles au contrôle stochastique*, Dunod, Paris, 1978, 545 p.

[5] A. BENSOUSSAN et J.-L. LIONS, *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi variationnelles*, Dunod, Paris, 1982, 596 p.

[6] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, Wiley and Sons, New York, 1968, 253 p.

[7] P. BRÉMAUD et M. YOR, Changes of Filtrations and of Probability Measures, *Z. Wahr.*, vol. **45**, 1978, p. 269-295.

[8] S. N. ETHIER et T. G. KURTZ, *Markov Processes, Characterization and Convergence*, Wiley and Sons, New York, 1986, 534 p.

[9] N. EL KAROUI, Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, École d'été de probabilités de Saint-Flour-IX, *Lect. Notes Math.*, vol. **876**, Berlin, 1979, p. 73-238, Springer-Verlag.

[10] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS et R. TRÉMOLLIÈRES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, Paris, 1976, 268 p.

[11] J. JACOD et A. N. SHIRYAEV, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 600 p.

[12] H. J. KUSHNER, *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1977, 243 p.

[13] D. LAMBERTON et G. PAGÈS, Convergence des réduites d'une suite de processus càdlàg, *Les Cahiers du C.E.R.M.A.*, n° 11, décembre 1989.

[14] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, Paris, 1971, 215 p.

[15] A. PAZY, *Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983, 279 p.

(*Manuscrit reçu le* 4 *septembre* 1989)
(*corrigé le* 11 *décembre* 1989.)