ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. MILHAUD

A. RAUGI

Étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus autorégressif : convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 4 (1989), p. 383-428

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_4_383_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 4, 1989, p. 383-428. *Probabilités et Statistiques*

Étude de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'un processus autorégressif : convergence, normalité asymptotique, vitesse de convergence

par

X. MILHAUD et A. RAUGI

Institut de Maths, U.S.T.L.,
place Eugène-Bataillon, 34095 Montpellier Cedex

RÉSUMÉ. — L'objet de ce travail est l'étude des propriétés du point de vue asymptotique, de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cadre du processus autorégressif: convergence, loi limite développement asymptotique, vitesse de convergence vers la loi limite.

Nous montrons en particulier que la vitesse de convergence vers la loi normale limite est $n^{-1/2}\log^{1/2} n$.

Mots clés : Estimateur du maximum de vraisemblance, processus autorégressif, vitesse de convergence, loi limite.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the asymptotic behaviour of maximum likelihood estimator in autoregressive process: consistency, asymptotic distribution and expansion, rate of convergence.

Particuliarly we show its rate of convergence in distribution towards the limit normal law is $n^{-1/2}\log^{1/2} n$.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des propriétés du point de vue asymptotique, de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cadre du processus autorégressif: convergence, loi limite, développement asymptotique, vitesse de convergence vers la loi limite.

Le but initial était de généraliser les résultats connus dans ce domaine pour des observations indépendantes au cas d'observations markoviennes. Nous nous sommes heurtés à de nombreuses difficultés. Aussi nous nous sommes limités au cas du processus autorégressif.

Ce processus, markovien quand les innovations sont indépendantes, est suffisamment proche du cas indépendant. Cela nous a permis de mener à bien cette étude.

Après quelques notations données en section 1 nous exposons en section 2 les résultats probabilistes utiles pour l'étude statistique. La section 3 présente les résultats statistiques. En section 4 sont présentés et démontrés des résultats probabilistes plus généraux que ceux de la section 2. En section 5 sont démontrés les théorèmes de la section 3.

Le lecteur remarquera que pour la démonstration du théorème 2.6 nous avons fait appel au théorème 2.11 de Gotze et Hipp [9]. Nous avons choisi cette méthode pour sa brièveté. A l'aide de [9] sous des hypothèses plus faibles nous pouvons démontrer l'inégalité de Berry Essen. Cependant l'utilisation du théorème de Ionescu Tulcea Marinescu est plus élégante et nous donne une majoration uniforme. De plus nous montrerons dans un travail ultérieur que nous pouvons obtenir par cette méthode un développement de Edgworth unique (ce que ne garantit pas la méthode de Gotze et Hipp et le résultat du théorème 2.11).

1. NOTATIONS

Nous considérons le processus autorégressif d'ordre d régi par le système d'équations :

$$(1.1)\quad \begin{cases} X_{-d+1}=x_{-d+1}, \ldots, X_0=x_0 \\ \forall n \geqq 1, \quad X_n(x,\theta)=\theta_1 X_{n-1}(x,\theta)+\ldots+\theta_d X_{n-d}(x,\theta)+\varepsilon_n; \end{cases}$$

où

$\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_d)'$ est un paramètre vectoriel de $\mathbb{R}^d$ et

$x=(x_0, x_1, \ldots, x_{-d+1})'$ est un vecteur fixé appartenant à un compact K de $\mathbb{R}^d$.

$\{\varepsilon_n, n \geqq 1\}$ est une famille de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et centrées.

Nous imposons au vecteur θ d'être tel que l'équation

$$(1.2)\qquad z^d-\theta_1 z^{d-1}-\ldots-\theta_{d-1} z-\theta_d=0$$

ait toutes ses racines de module inférieur ou égal à $(1-\alpha)$, $0<\alpha<1$. L'ensemble Θ des paramètres vérifiant cette relation est compact.

Ce processus peut s'écrire sous forme de processus autorégressif d'ordre 1. En effet, si nous posons

$$e_1=(1,0,\ldots,0)', \qquad A_\theta=\begin{bmatrix} \theta_1 & \ldots & & \theta_d \\ 1 & \ddots & (0) & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_n(\theta, x)=[X_n(\theta, x),\ldots,X_{n-d+1}(\theta, x)]';$$

nous avons alors

$$Y_n(\theta, x)=A_\theta Y_{n-1}(\theta, x)+\varepsilon_n e_1. \tag{1.3}$$

D'autre part munissons le produit cartésien $GL(d, \mathbb{R})\times\mathbb{R}^d$ du produit suivant

$$(A_1,b_1)(A_2,b_2)=(A_1 A_2, b_1+A_1 b_2),$$

nous obtenons le groupe affine G de $\mathbb{R}^d$. Si $g=(A(g), b(g))\in G$ alors l'image de $x\in\mathbb{R}^d$ par g, notée $g.x$, est $A(g)x+b(g)$.

En posant $g_n=(A_\theta, \varepsilon_n e_1)\in G$, la relation (1.3) s'écrit

$$\begin{aligned} Y_n(\theta, x)&=g_n.Y_{n-1}(\theta, x)\\ &=[g_n\ldots g_1].x \end{aligned}$$

Les v.a. $\{g_n\}_{n\geq 1}$ sont des v.a. indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans G. Pour tout $(\theta, x)\in\Theta\times\mathbb{R}^d$, $Y_n(\theta, x)$ est donc une marche aléatoire sur l'espace homogène $\mathbb{R}^d(\approx G/GL(d, \mathbb{R}))$ de G.

La probabilité de transition de cette chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$ est définie par

$$P_\theta f(x)=\int_{\mathbb{R}} f(A_\theta x+\varepsilon e_1)\,\mu(d\varepsilon)$$

où μ est la loi de la v.a.r. ε_1.

La v.a. $Y_n(\theta, x)$ a même loi que la v.a.

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n(\theta, x)&=[g_1\ldots g_n].x\\ &=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k A_\theta^{k-1}e_1+A_\theta^n x \end{aligned}$$

Lorsque

$$\mathbb{E}[\log^+|\varepsilon_1|]<+\infty, \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}^d$$

$Y_n(\theta, x)$ converge p.s. vers la v.a. $\tilde{Y}(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k A_\theta^{k-1}e_1$ (proposition 2.1).

On en déduit que la loi ν_θ de la v.a. $\tilde{Y}(\theta)$ est la seule loi stationnaire de cette chaîne et que, sous l'hypothèse d'étalement pour μ, la chaîne est Harris récurrente positive.

2. RÉSULTATS PROBABILISTES

2.1. PROPOSITION. — *Supposons que* $\mathbb{E}[\mathrm{Log}^+ |\varepsilon_1|] < +\infty$. *Alors pour* $\mathbb{P}$-*presque tout* $\omega \in \Omega$, *la série de fonctions de* θ, $\sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k| . \| A_\theta \|^{k-1}$ *est convergente. Si* K *est un compact de* $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}$-*p.s.*, $\tilde{Y}_n(\theta, x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A_\theta^{k-1} + A_\theta^n x$ *converge uniformément sur* $K \times \Theta$ *vers* $\tilde{Y}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k A_\theta^{k-1} e_1$. *La loi* ν_θ *de* $\tilde{Y}(\theta)$ *est la seule loi stationnaire de la chaîne* $Y_n(\theta, x)$.

Lorsque $\mathbb{E}[|\varepsilon_1|^p] < +\infty$, *pour* $p > 0$, *la convergence uniforme sur* $K \times \Theta$, *de* $\tilde{Y}_n(\theta, x)$ *vers* $\tilde{Y}(\theta)$ *a lieu aussi au sens de la norme* $\mathbb{L}^p$.

2.2. PROPOSITION. — *Soit* H *une fonction numérique mesurable définie sur* $\mathbb{R}$ *telle que pour un entier* $m \geqq 1$, *on ait* $\mathbb{E}[|H(\varepsilon_1)|^{m+1}] < +\infty$. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^d$. *Supposons que la v. a. r.* ε_1 *admette un moment d'ordre mq*, $q \geqq 1$. *Alors,*

(i) $$\sup_{\substack{n \geqq 1 \\ (x, \theta) \in K \times \Theta}} \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(\varepsilon_k) \| Y_{k-1}(\theta, x) \|^q \right|^m\right] < +\infty$$

(ii) *Pour tout* $\delta > 0$ *et tout* $l = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}^d$ *tel que*

$$|l| = \sum_{i=1}^{d} l_i \leqq q,$$

$$\sup_{\substack{n \geqq 1 \\ x \in K}} \mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(H(\varepsilon_k) Y_{k-1}^l(x, \theta) - \mathbb{E}[H(\varepsilon_1)] \int_{\mathbb{R}^d} y^l \nu_\theta(dy)\right)\right|^m\right] < \infty$$

[*avec la convention* $x^l = x_1^{l_1} \ldots x_d^{l_d}$ *si* $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$].

2.3. HYPOTHESES (H). — Soit F une fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant.

(i) Il existe des réels $\tau > 0$, $\gamma > 0$, et une fonction $\eta : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ telle que

$$|F(\varepsilon, x) - F(\varepsilon, y)| \leqq \eta(\varepsilon) \| x - y \|^\gamma (1 + \| x \|^\tau + \| y \|^\tau)$$

et

$$|F(\varepsilon, x)| \leqq \eta(\varepsilon)(1 + \| x \|^{\gamma + \tau})$$

Pour tous x, $y \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

(ii) Il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que:

$$\mathbb{E}[\eta(\varepsilon_1)^5 e^{c|\varepsilon_1|^\alpha}] < +\infty$$

(iii) Il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(\varepsilon, x) - e = \varphi(x) - \varphi(A_\theta x + \varepsilon)$$

pour $\mu \otimes \nu_\theta$-presque tout $(\varepsilon, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$; où μ est la loi de ε_1 et $e = \iint F(\varepsilon, x)\, \mu(d\varepsilon)\, \nu_\theta(dx)$.

On pose

$$S_n(\theta, x) = \sum_{k=1}^{n} F(\varepsilon_k, Y_{k-1}(\theta, x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

2.4. Théorème. — *Sous les hypothèses* (H), $\frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n^2(\theta, x)] \to \sigma^2(\theta) > 0$. *Il existe des réels* $C > 0$, $\lambda > 0$ *et* $\beta > 1$ *tels que : pour tout* $n \geqq 1$, $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left[\frac{S_n(\theta, x) - ne}{\sigma(\theta)\sqrt{n}} \leqq t \right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{t} e^{-(u^2/2)}\, du \right| \leqq \frac{C}{\sqrt{n}} e^{\lambda \| x \|^\alpha} (1 + \| x \|^{\beta\gamma})$$

Remarques. — Les hypothèses (i) et (ii) peuvent être remplacées par les hypothèses suivantes :

(i') Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}[| F(\varepsilon_1, x) - F(\varepsilon_1, y) |^{5+\delta}] \leqq C(\| x - y \|^\gamma (1 + \| x \|^\tau + \| y \|^\tau))^{5+\delta}$$
$$\mathbb{E}[| F(\varepsilon_1, x) |^{5+\delta}] \leqq C(1 + \| x \|^{(\gamma+\tau)})^{5+\delta}$$

(ii') Il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\mathbb{E}[e^{c |\varepsilon_1|^\alpha}] < +\infty$$

2.5. Hypothèse (H').

(i) *Il existe des réels* $\tau > 0$, $\gamma > 0$ *et une fonction* $\eta : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ *telle que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *on ait* :

$$| F(\varepsilon, x) - F(\varepsilon, y) | \leqq \eta(\varepsilon) \| x - y \|^\gamma (1 + \| x \|^\tau + \| y \|^\tau)$$

et

$$F(\varepsilon, x) \leqq \eta(\varepsilon)(1 + \| x \|^{\gamma+\tau})$$

(ii) *Il existe* $c > 0$, $\alpha > 0$, $s \geqq 3$ *tels que*

$$E(| \eta(\varepsilon) |^{s+1}) < \infty, \qquad E(| \varepsilon |^{(\gamma+t)(s+1)}) < \infty$$

(iii) $F(\varepsilon, x)$ *n'est pas* $\mu \otimes \nu_\theta$ *presque sûrement constante.*

Théorème 2.6. — *Sous les hypothèses* (H')

$$\sup_{y_0 \in K} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (F(\varepsilon_j, Y_{j-1}) - e) > ((s-2)\log n)^{1/2} \right) = o(n^{-((s-2)/2)})$$

où $e = \iint F(\varepsilon, x)\, \mu(d\varepsilon)\, \nu_\theta(dx)$.

3. RÉSULTATS STATISTIQUES

3.1. HYPOTHÈSES (HS_1).

(i) (ε_n, $n \in \mathbb{N}$) est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées centrées admettant une densité de probabilité f relativement à la mesure de Lebesgue, f est supposée dérivable, soit f' sa dérivée.

(ii) f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{u \to \infty} f(u) = 0.$$

(iii) Il existe un nombre réel r supérieur ou égal à 2 que l'on précisera par la suite tel que

$$I^{(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f'}{f}(u) \right|^r f(u)\, du < \infty$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^r f(u)\, du < \infty$$

(1) Nous désignons par $\mathbb{P}_{x,\theta}$ la probabilité sur $((\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}, \underset{\mathbb{N}}{\otimes} \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ pour laquelle les coordonnées $\{Y_k, k \geqq 0\}$ de $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$, forment une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{R}^d$, de probabilité de transition P_θ partant de $x \in \mathbb{R}^d$.

(2) $\mathbb{E}_{x,\theta}$ (resp. $\mathbb{E}$) désignera l'espérance mathématique pour $\mathbb{P}_{x,\theta}$ [resp. pour $\mathbb{P}$].

THÉORÈME 3.2. (1) *Sous les conditions* (HS_1) *et pour* $r \geqq d+1$ *en* (HS_1) (iii), *la suite* ($\hat{\theta}_n, n \in \mathbb{N}$) *des estimateurs du maximum de vraisemblance vérifie*

$$\mathscr{L}_{x,\theta}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)) \to N(0, \mathscr{I}_\theta^{-1}))$$

où

$$\mathscr{I}_\theta = I^{(2)} E(\tilde{Y}(\theta) \otimes \tilde{Y}(\theta))$$

cette convergence est uniforme sur $K \times \Theta$.

(2) *Pour tout entier positif* k

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_{x,\theta}(\| \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \|^k) = M_k(N(0, \mathscr{I}_\theta^{-1}))$$

où $M_k(N(0, \mathscr{I}_\theta^{-1}))$ *désigne le moment absolu d'ordre* k *de la loi normale centrée de matrice de covariance* $\mathscr{I}_\theta^{-1}$.

Cette convergence est uniforme sur $K \times \Theta$.

(3) *Pour tout réel positif* ρ *il existe trois constantes* A_1, A_2, B *strictement positives telles que*:

(*a*) $\mathbb{P}_{x,\theta}(\| \hat{\theta}_n - \theta \| > \rho) \leqq A_1 \exp(-A_2 n)$;

(*b*) $\mathbb{P}_{x,\theta}(\sqrt{n} \| \hat{\theta}_n - \theta \| > B \operatorname{Log}^{1/2} n) \leqq O(n^{-1})$.

Cette convergence est aussi uniforme sur $K \times \Theta$.

3.3. DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE L'ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE. HYPOTHÈSES (HS_2). — Aux hypothèses (HS_1) où $r \geqq d+1$ nous adjoignons les hypothèses (HS_2) suivantes

(i) f est $(p+1)$ fois dérivable, p entier supérieur ou égal à 1.

Il existe un réel m ($m \geqq 3$) tel que pour tout entier p' ($1 \leqq p' \leqq p$) on ait

$$\text{(ii)} \quad \begin{array}{c} E(|(\operatorname{Log} f)^{(p')}(\varepsilon_1)|^{m+1}) < \infty \\ |(\operatorname{Log} f)^{(p+1)}(u+v) - (\operatorname{Log} f)^{(p+1)}(u)| < R(u) \| v \| (1 + \| v \|^q) \end{array}$$

avec q réel positif et $E(R^{m+1}(\varepsilon_1)) < \infty$.

(iii) ε_1 admet un moment exponentiel d'ordre α positif. C'est-à-dire il existe deux constantes réelles positives α et C telles que $E(e^{C|\varepsilon_1|^\alpha}) < \infty$.

THÉORÈME 3.3. — *Sous les hypothèses* (HS_1) *et* (HS_2) *au voisinage de* θ_0 *nous avons le développement*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = h_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} h_2 + \ldots + \frac{1}{(\sqrt{n})^{p-1}} h_p + \frac{1}{(\sqrt{n})^p} \rho(n)$$

où les h_j *sont des vecteurs à composantes polynomiales homogènes définis en* 5.3.2.

Étant donnée une constante C_0 *assez grande si nous posons* $v_n = ((m-2)\log n)^{(p+1)/2}$ *nous avons*

$$P_{n, x, \theta}(|\rho(n)| > v_n) \leqq o(n^{-((m-2)/2)})$$

Cette convergence est uniforme sur K.

3.4. APPLICATION. — Vitesse de convergence vers la loi normale de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas autorégressif d'ordre 1.

THÉORÈME 3.4. — *Sous les conditions du théorème* 3.3 *avec en* (HS_2)

$$p=1, \qquad m \geqq 3$$

$$\sup_y |P_{x,\theta}(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) < y) - \Phi_{a^{-1}(\theta)}(y)| \leqq C \frac{(\operatorname{Log} n)^{1/2}}{\sqrt{n}}$$

où $a(\theta)$ *est l'information de la structure statistique. Cette convergence est uniforme sur* **K**.

4. THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRALE AVEC VITESSE DE CONVERGENCE. DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS PROBABILISTES

Nous allons établir des résultats plus généraux que ceux de la section 2. Ces résultats s'appliquent au cas des processus autorégressifs à coefficients aléatoires.

A. Notations, hypothèses et énoncé des résultats

4.1. On considère le groupe G des matrices

$$\left\{\begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A \in GL(d, \mathbb{R});\ b \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Si $g \in G$, on écrit $g = \begin{bmatrix} A(g) & b(g) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou plus simplement $g = (A(g), b(g))$.

Le groupe G opère sur $\mathbb{R}^d$ de la façon suivante:

$$g.x = A(g)\,x + b(g) \qquad (x \in \mathbb{R}^d, g \in G).$$

Soient $\{g_k = (A_k, b_k),\ k \geqq 1\}$ une suite de v. a. indépendantes de loi μ définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans G. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, nous posons

$$Y_0(x) = \tilde{Y}_0(x) = x$$
$$Y_n(x) = g_n \ldots g_1 . x, \qquad \tilde{Y}_n(x) = g_1 \ldots g_n . x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\{Y_n(x),\ n \geqq 0\}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^d$ de probabilité de transition P définie par

$$Pf(x) = \int_G f(g.x)\,\mu(dg) \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

4.2. Soit F une fonction sur $G \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse au comportement asymptotique de la suite de v. a.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F(g_k, Y_{k-1}(x)).$$

4.3. HYPOTHÈSES (H). — On suppose qu'il existe une norme $\| \ \|$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que:

(i) Il existe $\gamma > 0$, $\tau > 0$, et une fonction η de G dans $[1, +\infty[$ telle que, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in G$,

$$|F(g, x) - F(g, y)| \leqq \eta(g)\,\|x - y\|^\gamma (1 + \|x\|^\tau + \|y\|^\tau)$$

et

$$|F(g, x)| \leqq \eta(g)(\|x\|^{\gamma+\tau} + 1).$$

(ii) $\|A(.)\|<1$, μ-p. s., où, pour $A \in GL(d, \mathbb{R})$, $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

(iii) Il existe des réels $c>0$, $1 \geqq \alpha > 0$ tels que

$$\int \psi(g)\, e^{c\|b(g)\|^\alpha} \mu(dg) < +\infty$$

où

$$\psi(g) = \eta(g)^5 (1-\|A(g)\|^\alpha)^{-(5(\gamma+\tau)/\alpha)}.$$

(iv) Il n'existe pas de fonction φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$F(g, x) - e = \varphi(x) - \varphi(g.x),$$

pour $\mu \otimes \nu$-presque tout $(g, x) \in G \times \mathbb{R}^d$; où

$$e = \iint F(g, x)\, \mu(dg)\, \nu(dx) \text{ et } \nu \text{ désigne la loi de la v. a.}$$

$$Z = \sum_{k \geqq 1} A_1 \ldots A_{k-1} b_k = b_1 + A_1 b_2 + A_1 A_2 b_3 + \ldots$$

4.4. COMMENTAIRES.

(1) On peut aussi pour la validité du théorème 4.5, remplacer les hypothèses (i) et (iii) par les hypothèses suivantes:

(i') Il existe des réels positifs γ et δ, τ et C tels que pour tout x, y $\mathbb{R}^d$,

$$\int |F(g, x) - F(g, y)|^{5+\delta} \mu(dg) \leqq C[\|x-y\|^\gamma (1 + \|x\|^\tau + \|y\|^\tau)]^{5+\delta}$$

et

$$\int |F(g, x)|^{5+\delta} \mu(dg) \leqq C(1 + \|x\|^{(\gamma+\tau)})^{5+\delta}$$

(iii') Il existe des réels positifs c et α tels que

$$\int (1-\|A(g)\|^\alpha)^{-(5(\gamma+\tau)/\alpha)(1+(5/\delta))} e^{c\|b(g)\|^\alpha} \mu(dg) < +\infty.$$

(2) Parmi les hypothèses (H), la seule qui dépend du choix de la norme $\| \;\|$ sur $\mathbb{R}^d$ est l'hypothèse (ii).

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons

$$A(.) = A_\theta \quad \mu\text{-p. s.},$$

où A_θ est une matrice de norme spectrale inférieure à 1. D'après le lemme 4.7, on peut trouver une norme $\|.\|$ sur R^d telle que $\|A_\theta\| < 1$. La condition (iii) se réduit alors à

$$\int \eta(g)^5 e^{c\|b(g)\|^\alpha} \mu(dg) < +\infty.$$

(3) Enfin, l'hypothèse (iv) est nécessaire pour assurer la non-dégénérescence de la loi limite dans le théorème suivant.

4.5. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* (H), *la suite* $\frac{1}{n}|\mathrm{E}[(\mathrm{S}_n(x)-ne)^2]$ *converge vers un réel* $\sigma^2>0$. *Il existe des réels* $\mathrm{C}>0$, $\lambda>0$ *et* $\beta>1$ *tels que pour tous* $x\in\mathbb{R}^d$ *et* $u\in\mathbb{R}$,

$$\left|\mathbb{P}\left[\frac{\mathrm{S}_n(x)-ne}{\sigma\sqrt{n}}\leqq u\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-(v^2/2)}\,dv\right|\leqq\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}}e^{\lambda\|x\|^{\alpha}}(1+\|x\|^{\gamma\beta}).$$

D'autre part nous avons

4.6. THÉORÈME. — *Soit* F *une fonction de* $\mathrm{G}\times\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$ *pour laquelle il existe* $\gamma>0$, $\tau>0$ *et une fonction* η *de* G *dans* $[1,\infty[$ *telle que*

$$\begin{aligned}|\mathrm{F}(g,x)-\mathrm{F}(g,y)|&\leqq\eta(g)\|x-y\|^{\gamma}(1+\|x\|^{\tau}+\|y\|^{\tau})\\|\mathrm{F}(g,x)|&\leqq\eta(g)(1+\|x\|^{\gamma+\tau})\end{aligned}\qquad(1)$$

$$\|\mathrm{A}(.)\|\leqq\rho<1\quad\mu-p.s.\qquad(2)$$

$$\int\eta(g)^m\,\mu(dg)<\infty\qquad(m\geqq2)$$

et (3)

$$\int\|b(g)\|^{m(\gamma+\tau)}\,\mu(dg)<\infty$$

Alors, il existe une constante C *telle que pour tout* $x\in\mathbb{R}^d$

$$\sup_n \mathrm{E}\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{F}(g_k,\mathrm{X}_{k-1})-e)\right|^m\right\}\leqq\mathrm{C}(1+\|x\|^{m(\gamma+\tau)})$$

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème on a*

$$\sup_n \mathrm{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{F}(g_k,\mathrm{Y}_{k-1}(x))\right|^m\right)<\infty$$

B. Démonstration du théorème (4.5)

Le lemme 4.7 suivant justifie une affirmation faite en 4.4. Nous établissons ensuite deux lemmes qui précisent le comportement de la suite $\{\tilde{\mathrm{Y}}_n(x)\}$.

4.7. LEMME. — *Si* A *est une matrice d'ordre d dont les valeurs propres sont toutes de module* <1, *alors il existe une norme* $\|\ \|$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *telle que*

$$\|\mathrm{A}\|=\sup_{x\in\mathbb{R}^d-\{0\}}\frac{\|\mathrm{A}x\|}{\|x\|}<1.$$

4.8. LEMME. — *Avec les notations de* 4.1, *supposons que*

$$\int_G \operatorname{Log} \| g \| \mu(dg) < +\infty \qquad et \qquad \int_G \operatorname{Log} \| A(g) \| \mu(dg) < 0.$$

Alors, la série $\sum_{k \geqq 1}^{\infty} \| A_1 \ldots A_{k-1} \| . \| b_k \|$ *est convergente; pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, *la suite de v. a.* $\tilde{Y}_n(x)$ *converge* $\mathbb{P}$-*p. s. vers* $Z = \sum_{k \geqq 1} A_1 \ldots A_{k-1} b_k$.

4.9. LEMME. — *Supposons que*:

$$\int_G \operatorname{Log} \| g \| \mu(dg) < +\infty; \qquad \| A(.) \| \leqq 1 \quad \mu\text{-}p.s.$$

avec $\mu(\{ \| A(.) \| < 1 \}) > 0$; *et il existe des réels* $c > 0$ *et* $0 < \alpha \leqq 1$ *tels que*

$$\int_G e^{c \| b(g) \|^\alpha} \mu(dg) < +\infty.$$

Alors il existe $0 < \delta < c$ *tel que* $\mathbb{E}[e^{\delta \hat{Z}^\alpha}] < +\infty$, *où*

$$\hat{Z} = \sum_{k \geqq 1} \| A_1 \ldots A_{k-1} \| . \| b_k \|.$$

4.10. *Preuve du lemme* 4.8. — Pour tout $\alpha > 0$, nous avons

$$\sum_{k \geqq 1} \mathbb{P}[\| g_k \| > e^{k\alpha}] = \sum_{k \geqq 1} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\alpha} \operatorname{Log} \| \mathbf{g}_k \| > k\right] \leqq \frac{1}{\alpha} \int \operatorname{Log} \| g \| \mu(dg) < +\infty.$$

D'où l'on déduit que

$$\limsup_k \| \mathbf{g}_k \|^{1/k} \leqq 1.$$

D'autre part, d'après la loi des grands nombres, nous avons,

$$\frac{1}{k} \operatorname{Log} \| A_1 \ldots A_k \| \leqq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Log} \| A_i \| \xrightarrow{\text{p. s.}} \int_G \operatorname{Log} \| A(g) \| \mu(dg) < 0.$$

On en déduit que:

$$\limsup_k (\| A_1 \ldots A_{k-1} \| . \| b_k \|)^{1/k} \leqq \exp\left(\int_G \operatorname{Log} \| A(g) \| \mu(dg)\right) < 1.$$

D'où le résultat.

4.11. *Preuve du lemme* 4.9 :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{\delta^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\|\mathrm{A}_1\dots\mathrm{A}_{j-1}\|.\|b_j\|\right)^{\alpha k}\right]$$

$$\leqq \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{\delta^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\|\mathrm{A}_1\dots\mathrm{A}_{j-1}\|^{\alpha}\|b_j\|^{\alpha}\right)^{k}\right]$$

$$\leqq \mathbb{E}\left[\sum_{\{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n\}}\frac{\delta^{i_1+\dots+i_n}}{i_1!\dots!i_n!}\|b_1\|^{\alpha i_1}\dots(\|\mathrm{A}_1\dots\mathrm{A}_{n-1}\|.\|b_n\|)^{\alpha i_n}\right]$$

$$\leqq \mathbb{E}\left[\sum_{\{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n\}}\frac{\delta^{i_1+\dots+i_n}}{i_1!\dots!i_n!}\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{m=1}^{n-1}\|\mathrm{A}_m\|^{\alpha(i_{m+1}+\dots+i_n)}\|b_m\|^{\alpha i_m}\right)\|b_n\|^{\alpha i_n}\right]$$

$$\leqq \mathbb{E}\left[1+\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathrm{I}_{n-l}}\frac{(\delta\|b_{n-l}\|^{\alpha})^{i_{n-l}}}{i_{n-l}!}\right.$$

$$\left.\times\left(\prod_{m=1}^{n-l-1}\mathbb{E}\left[\|\mathrm{A}_m\|^{\alpha}\frac{(\delta\|b_m\|^{\alpha})^{i_m)}}{i_m!}\right]\right)\right]$$

avec

$$\mathrm{I}_{n-l}=\{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n/i_n=i_{n-1}=\dots=i_{n-l+1}=0,\ i_{n-l}\neq 0\}$$

$$\leqq \mathbb{E}\left|1+\sum_{l=1}^{n-1}(e^{\delta|b_{n-l}|^{\alpha}}-1)\left(\prod_{m=1}^{n-l-1}\mathbb{E}[\|\mathrm{A}_m\|^{\alpha}e^{\delta\|b_m\|^{\alpha}}]\right)\right.$$

$$\leqq 1+(\mathbb{E}[e^{\delta\|b_1\|^{\alpha}}]-1)\sum_{l=0}^{n-2}\mathbb{E}[\|\mathrm{A}_1\|^{\alpha}e^{\delta\|b_1\|^{\alpha}}]^l$$

Or quand $\delta\downarrow 0$, $\mathbb{E}[\|\mathrm{A}_1\|^{\alpha}e^{\delta\|b_1\|^{\alpha}}]\downarrow\mathbb{E}[\|\mathrm{A}_1\|^{\alpha}]<1$.

Il existe donc $0<\delta<c$ tel que $\rho=\mathbb{E}[\|\mathrm{A}_1\|^{\alpha}e^{\delta\|b_1\|^{\alpha}}]<1$.

On en déduit alors que

$$\mathbb{E}[e^{\delta Z^{\alpha}}]=\lim_{\mathrm{N}}\uparrow\mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 0}\frac{\delta^k}{k!}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\|\mathrm{A}_1\dots\mathrm{A}_{k-1}\|.\|b_k\|^{\alpha k}\right)\right]$$

$$\leqq 1+(1-\rho)^{-1}(\mathbb{E}[e^{\delta\|b_1\|^{\alpha}}]-1).\quad\square$$

4.12. Introduisons les opérateurs suivants

$$U_t f(x) = \int e^{it\,F(g\,.\,x)} f(g\,.\,x)\,\mu(dg) \qquad (x \in \mathbb{R}^d,\, t \in \mathbb{R})$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans C.

4.13. Lemme. — *La transformée de Fourier de la v.a.* $S_n(x)$ *est donnée par*

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}\,[e^{it\,S_n(x)}] = U_t^n \mathbf{1}(x)$$

où $\mathbf{1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$
$x \mapsto 1.$

Preuve. — Vérification immédiate. □

4.14. La démonstration du théorème 4.5 est assez technique et va se faire en plusieurs étapes. L'idée de la démonstration est la suivante: on introduit un espace de Banach L_λ, contenant la fonction **1**, sur lequel les U_t, $t \in \mathbb{R}$, sont des opérateurs quasi-compacts avec une valeur propre simple dominante; ceci nous permet de *montrer* et de *contrôler* la convergence de

$$\mathbb{E}\,[e^{it\,(S_n(x) - ne/\sqrt{n})}] = e^{-it\sqrt{n}\,e}\,(U_{(t/\sqrt{n})})^n\,\mathbf{1}(x)$$

vers la transformée de Fourier d'une loi normale centrée $N(0, \sigma^2)$; on conclut alors en utilisant l'inégalité classique d'Esseen.

4.15. *Première étape.* — Étude des opérateurs U_t, $t \in \mathbb{R}$.

Nous choisissons un réel β vérifiant $1 < \beta < 5$.

Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue et $\lambda > 0$, nous posons

$$|f|_\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{(1 + \|x\|^{\beta\gamma})\, e^{\lambda \|x\|^\alpha}}$$

$$m_\lambda(f) = \sup_{\substack{x,\, y \in \mathbb{R}^d \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\gamma\, e^{\lambda(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)}}.$$

$$\|f\|_\lambda = |f|_\lambda + m_\lambda(f)$$

On voit facilement que $|\ \ |_\lambda$ [resp. $\|\ \ \|_\lambda$] est une norme sur l'espace B_λ [resp. L_λ] des fonctions continues f sur $\mathbb{R}^d$ telles que $|f|_\lambda < +\infty$, [resp. $\|f\|_\lambda < +\infty$], et que pour cette norme B_λ [resp. L_λ] est un espace de Banach.

De plus la boule unité de L_λ est relativement compacte dans B_λ

4.16. LEMME. — *Sous les hypothèses* (H) *et pour* $\lambda>0$, *assez petit nous avons*

$$\sup_{n\geqq 1}\ \sup_{f\in B_\lambda}\frac{|U_t^n f|_\lambda}{|f|_\lambda}<+\infty,$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Preuve:

$$U_t^n f(x)=\mathbb{E}\left[e^{it\,S_n(x)}f(Y_n(x))\right],$$

par suite,

$$|U_t^n f|_\lambda\leqq|f|_\lambda\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}\left[\frac{(1+\|Y_n(x)\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|Y_n(x)\|^\alpha}}{(1+\|x\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|x\|^\alpha}}\right].$$

Or

$$\|Y_n(x)\|^\tau\leqq C_1(\|A_1\ldots A_n x\|^\tau+\hat{Z}^\tau)\leqq C_1(\|x\|^\tau+\hat{Z}^\tau)$$

avec $C_1=2^{\tau-1}$ si $\tau>1$, $C_1=1$ si $0<\tau\leqq 1$.

D'où

$$\begin{aligned}|U_t^n f|_\lambda&\leqq|f|_\lambda C_1\left(\mathbb{E}[e^{\lambda\hat{Z}^\alpha}]+\mathbb{E}[\hat{Z}^{\beta\gamma}e^{\lambda\hat{Z}^\alpha}]\right)\\&\leqq|f|_\lambda C_2\,\mathbb{E}[e^{\delta\hat{Z}^\alpha}]\qquad(\lambda<\delta).\quad\square\end{aligned}$$

4.17. LEMME. — *Sous les hypothèses* (H), *il existe des réels* $\lambda_0>0$, $C>0$, $C'>0$ *et* $0\leqq r<1$ *tels que pour tout* $0<\lambda\leqq\lambda_0$ *et pour tout* $t\in\mathbb{R}$

$$\|U_t f\|_\lambda\leqq r\|f\|_\lambda+(C|t|+C')|f|_\lambda.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\frac{|U_t f(x)-U_t f(y)|}{\|x-y\|^\gamma e^{\lambda(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha)}}&\leqq\int\frac{|f(g.x)-f(g.y)|}{\|x-y\|^\gamma e^{\lambda(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha)}}\mu(dg)\\&\quad+\int\frac{|f(g.y)|}{e^{\lambda(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha)}}\left|\frac{e^{it\,F(g,x)}-e^{it\,F(g,y)}}{\|x-y\|^\gamma}\right|\mu(dg)\\&\leqq m_\lambda(f)\int\|A(g)\|^\gamma e^{2\lambda\|b(g)\|^\alpha}\mu(dg)\\&\quad+|t|.|f|_\lambda\int\frac{(1+\|g.y\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|g.y\|^\alpha}}{e^{\lambda(\|x\|^\alpha+\|y\|^\alpha)}}\eta(g)(1+\|x\|^\tau+\|y\|^\tau)\mu(dg)\\&\leqq m_\lambda(f)\int\|A(g)\|^\gamma e^{2\lambda\|b(g)\|^\alpha}\mu(dg)\\&\quad+C|t|.|f|_\lambda\int(1+\|y\|^{\beta\gamma+\tau})\,e^{\lambda(\|A(g)y\|^\alpha-\|y\|^\alpha)}e^{c\|b(g)\|^\alpha}\eta(g)\mu(dg)\end{aligned}$$

Or

$$\|y\|^{\beta\gamma+\tau} e^{\lambda(\|A(g)y\|^{\alpha}-\|y\|^{\alpha})} \leqq \|y\|^{\beta\gamma+\tau} e^{-\lambda(1-\|A(g)\|^{\alpha})\|y\|^{\alpha}} \leqq C_3(1-\|A(g)\|^{\alpha})^{-((\beta\gamma+\tau)/\alpha)}.$$

D'autre part lorsque λ décroît vers zéro, $\int \|A(g)\|^{\gamma} e^{2\lambda\|b(g)\|^{\alpha}} \mu(dg)$ décroît vers $\int \|A(g)\|^{\gamma} \mu(dg) < 1$.

Par suite pour λ *assez petit,*

$$m_{\lambda}(U_t f) \leqq r m_{\lambda}(f) + C_4 |t| . |f|_{\lambda}$$

avec $C_4 > 0$ et $r \in [0, 1[$;
d'où

$$\|U_t f\|_{\lambda} \leqq r \|f\|_{\lambda} + (C_4 |t| + C_5) |f|_{\lambda}. \quad \square$$

Dans la suite, nous choisissons un réel $\lambda \leqq \lambda_0$.

4.18. Proposition. — *Sous les hypothèses* (H), *pour tout* $f \in L_{\lambda}$ *et tout entier* $n \geqq 1$,

$$U_0^n f = \int f \, d\nu + Q_0^n f,$$

où Q_0 *est un opérateur de* L_{λ} *de rayon spectral* <1 *vérifiant* $Q_0 \mathbf{1} = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, U_t, *est un opérateur de rayon spectral* <1 *excepté s'il existe un réel* τ *et une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *telle que, pour* $\mu \otimes \nu$-*presque tout* $(g, x) \in G \times \mathbb{R}^d$

$$e^{it F(g, x)} \frac{\varphi(g . x)}{\varphi(x)} = e^{i\tau}$$

Preuve. — De 4.15 et des lemmes 4.16 et 4.17 il résulte (théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [7]) que: l'ensemble $S(t)$ des valeurs propres de module 1 de l'opérateur U_t de L_{λ} est fini, le sous-espace propre $E_s(t)$ associé à chaque élément s de $S(t)$ est de dimension finie; et pour tout $n \geqq 1$,

$$U_t^n = \sum_{s \in S(t)} s^n \pi_s(t) + Q^n(t),$$

où $\pi_s(t)$ est le projecteur sur $E_s(t)$, $Q(t)$ est de rayon spectral <1, $\pi_s(t)\pi_{s'}(t) = 0$ si $s \neq s'$, $Q(t)\pi_s(t) = \pi_s(t)\, Q(t) = 0$.

Pour prouver la proposition, il nous reste à établir que

$$S(0) = \{1\}; \qquad E_1(0) = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

et

$$S(t) = \emptyset, \qquad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{excepté si} \ldots$$

Soit $e^{i\tau} \in S(0)$. Il existe alors $f \in L_\lambda$ telle que

$$U_0 f(x) = e^{i\tau} f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d);$$

et par suite

$$U_0^n f(x) = \mathbb{E}[f(\tilde{Y}_n(x))] = e^{ni\tau} f(x).$$

Mais

$$\tilde{Y}_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}\ \text{p.s.}} Z$$

et

$$|f(\tilde{Y}_n(x))| \leqq |f|_\lambda (1 + \|\tilde{Y}_n(x)\|^{\beta\gamma}) e^{\lambda \|\tilde{Y}_n(x)\|^\alpha}$$
$$\leqq |f|_\lambda (1 + C(\|x\|^{\beta\gamma} + \hat{Z}^{\beta\gamma}) e^{\lambda(\|x\|^\alpha + \hat{Z}^\alpha)}.$$

Cette dernière variable aléatoire est intégrable d'après le lemme 4.9.

D'après le théorème de convergence dominée, nous avons alors

$$\lim_n \mathbb{E}[f(\tilde{Y}_n(x))] = \nu(f);$$

ce qui n'est possible que si $e^{i\tau} = 1$ et f est constante.

Soit $e^{i\tau} \in S(t)$, avec $t \neq 0$. Il existe alors $f \in L_\lambda$ telle que

$$U_t^n f(x) = \mathbb{E}[e^{it S_n(x)} f(Y_n(x))] = e^{ni\tau} f(x), \qquad \forall n \geqq 1.$$

Par suite $|f(x)| \leqq \mathbb{E}[|f(\tilde{Y}_n(x))|] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \nu(|f|)$.

On en déduit que $|f(x)| \leqq \nu(|f|)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$; d'où il résulte que

$$|f(x)| = \nu(|f|), \qquad \forall x \in \operatorname{Supp} \nu.$$

L'égalité

$$\int e^{it F(g, x)} \frac{f(g \cdot x)}{f(x)} \mu(dg) = e^{i\tau} \qquad (x \in \operatorname{Supp} \nu),$$

entraîne alors que

$$e^{it F(g \cdot x)} \frac{f(g \cdot x)}{f(x)} = e^{i\tau}$$

pour $\mu \otimes \nu$-presque tout $(g, x) \in G \times \mathbb{R}^d$. □

4.19. Proposition. – *Sous les hypothèses* (H), *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *vérifiant* $|t| < \eta$, *tout* $f \in L_\lambda$ *et tout* $n \geqq 1$,

$$U_t^n f = (s(t))^n \pi(t) f + [Q(t)]^n f;$$

où $s(t)$ *est une valeur propre de* U_t *dont l'espace propre* $E(t)$ *associé est de dimension* 1, $\pi(t)$ *est le projecteur sur* $E(t)$, $Q(t)$ *est de rayon spectral strictement inférieur à* $|s(t)|$, $Q(t)\,\pi(t) = \pi(t)\,Q(t) = 0$ *et il existe des réels*

$C>0$ *et* $0<\rho<1$ *tels que*

$$\| Q^n(t)\mathbf{1} \|_\lambda \leqq C\,|t|\,\rho^n. \tag{1}$$

Les applications $t \to s(t)$, $t \to \pi(t)$ *et* $t \to Q(t)$ *sont de classe* C^3.

Preuve. – Pour $1 \leqq k \leqq 3$.
Posons

$$U_t^{(k)}(f) = \int (i F(g, x))^k e^{it F(g \cdot x)} f(g, x)\,\mu(dg) < \infty$$

Un calcul fastidieux montre que sous l'hypothèse

$$\int \eta^{k+1}(g)(1 - \| A(g) \|^\alpha)^{-(k+1)((\gamma+\tau)/\alpha)} e^{c \| b(g) \|^\alpha} \mu(dg) < \infty$$

l'opérateur $U_t^{(k)}$ envoie L_λ dans L_λ (pour $2\lambda < c$). Par un calcul non moins fastidieux, on montre ensuite que pour $0 \leqq l \leqq 2$ ($U_t^{(0)} = U_t$), sous l'hypothèse

$$\int \eta(g)^{l+3}(1 - \| A(g) \|^\alpha)^{-(l+3)((\gamma+\tau)/\alpha)} e^{c \| b(g) \|^\alpha} \mu(dg) < \infty$$

(pour $2\lambda < c$)

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{U_{t+h}^{(l)} - U_t^{(l)} - h U_t^{(l+1)}}{h} \right\|_\lambda = 0$$

Autrement dit sous les hypothèses (H) l'application

$$U \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathscr{L}(L_\lambda) \\ t \to U(t) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^3$. La proposition 4.19 résulte alors de la proposition 4.18 et de la théorie des perturbations des opérateurs (*cf.* par exemple [4]). □

4.20. Lemme. – *Sous les hypothèses* (H):
(i) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n(x)] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e = \iint F(g, x)\,\mu(dg)\,\nu(dx)$$

(ii) *Il existe* $\sigma > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[(S_n(x) - ne)^2] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$$

Preuve :

(i) Posons $\mathrm{H}(x)=\int \mathrm{F}(g, x)\,\mu(dg)$; H est un élément de L_λ. Nous avons,

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{S}_n(x)]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{U}_0^{k-1}\mathrm{H})(x)$$

qui converge vers $\nu(\mathrm{H})=e$, puisque la suite d'opérateurs de L_λ, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{U}_0^{k-1}$ converge vers ν (proposition 4.18).

(ii) Soit R la probabilité de transition de la chaîne de Markov $\mathrm{Z}_n(x)=(g_n, \mathrm{X}_{n-1}(x))$ sur $\mathrm{G}\times\mathbb{R}^d$. Posons

$$\begin{aligned} h(g, x)&=\sum_{k\geqq 0}[\mathrm{R}^k(\mathrm{F}-e)](g, x)\\ &=\mathrm{F}(g, x)-e+\sum_{k\geqq 0}\mathrm{U}_0^k(\mathrm{H}-e)(g.x); \end{aligned}$$

par suite $\mathrm{F}(g, x)-e=[(\mathrm{I}-\mathrm{R})h](g, x)$.

Nous avons

$$|h(g, x)|\leqq|\mathrm{F}(g, x)|+|e|+|\sum_{k\geqq 0}\mathrm{U}_0^k(\mathrm{H}-e)|_\lambda(1+\|g.x\|^{\beta\gamma})e^{\lambda\|g.x\|^\alpha}$$

D'où

$$h^2(g, x)\leqq 3\,(\mathrm{F}^2(g, x)+e^2+|\sum_{k\geqq 0}\mathrm{U}_0^k(\mathrm{H}-e)|_\lambda^2(1+|g.x|^{\beta\gamma})^2e^{2\lambda|g.x|^\alpha})$$

D'après l'hypothèse (i) il résulte que

$$\mathrm{F}^2(g, x)\leqq 2\eta^2(g)(\|x\|^{2(\gamma+\tau)}+1)$$

On en déduit alors qu'il existe des réels $\mathrm{C}_1>0$ et $\mathrm{C}_2>0$, tels que

$$(*)\qquad \int h^2(g, x)\,\mu(dg)\leqq \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\left(\int\eta(g)^2e^{\delta\|b(g)\|^\alpha}\mu(dg)\right)e^{\delta\|x\|^\alpha},$$

pour $2\lambda<\delta<c$.

Ceci dit nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(x)-ne&=\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{F}(\mathrm{Z}_k(x))-e)=\sum_{k=1}^{n}[(\mathrm{I}-\mathrm{R})h](\mathrm{Z}_k(x))\\ &=h(g_1, x)-\mathrm{R}\,h(\mathrm{Z}_n(x))+\sum_{k=2}^{n}[h(\mathrm{Z}_k(x))-\mathrm{R}\,h(\mathrm{Z}_{k-1}(x))]. \end{aligned}$$

Les v. a. $\{h(Z_k(x)) - R\,h(Z_{k-1}(x))\}_{k \geqq 1}$ sont des accroissements de martingale; d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mathbb{E}[(S_n(x)-ne)^2] &\sim \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{n}(h(Z_k(x)) - R\,h(Z_{k-1}(x))^2\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(\mathbb{E}[h^2(Z_k(x))] - \mathbb{E}[(R\,h)^2(Z_{k-1}(x))])\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\mathbb{E}\left[\int h^2(g, \tilde{Y}_{k-1}(x))\,\mu(dg)\right]\right.\\ &\qquad \left. - \mathbb{E}\left[\int (R\,h)^2(g, Y_{k-2}(x)\,\mu(dg)\right]\right)\end{aligned}$$

Or $\tilde{Y}_n(x) \xrightarrow{\text{p. s.}} Z$ et d'après l'inégalité (*), les v. a.

$$\int h^2(g, \tilde{Y}_{k-1}(x))\,\mu(dg) \qquad \text{et} \qquad \int (R\,h)^2(g, \tilde{Y}_{k-2}(x))\,\mu(dg)$$

sont majorées par des v. a. P-intégrable. [On a par exemple:

$$\int h^2(g, \tilde{Y}_{k-1}(x))\,\mu(dg) \leqq C_1 + C_3\,e^{\delta\,\|x\|^\alpha}\,e^{\delta\widehat{Z^\alpha}};$$

qui est intégrable d'après le lemme 4.9.]

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\frac{1}{n}\mathbb{E}[(S_n(x)-ne)^2]$ converge alors vers

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \iint h^2(g, x)\,\mu(dg)\,\nu(dx) - \iint (R\,h(g, x))^2\,\mu(dg)\,\nu(dx)\\ &= \iint h^2(g, x)\,\mu(dg)\,\nu(dx) - \int\left(\int h(g, x)\,\mu(dg)\right)^2\nu(dx).\end{aligned}$$

Si $\sigma = 0$, alors pour ν-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int h^2(g, x)\,\mu(dg) = \left(\int h(g, x)\,\mu(dg)\right)^2;$$

ce qui entraîne que $h(g, x) = \int h(y, x)\,\mu(dy)$ pour $\mu \otimes \nu$ presque tout $(g, x) \in G \times \mathbb{R}^d$.

Posons $\varphi(x)=\int h(y,x)\,\mu(dy)$, $x\in\mathbb{R}^d$. Il vient alors

$$\begin{aligned}F(g,x)-e&=h(g,x)-\mathrm{R}\,h(g,x)\\&=h(g,x)-\int h(y,g.x)\,\mu(dy)\\&=\varphi(x)-\varphi(g.x),\end{aligned}$$

pour $\mu\otimes\nu$-presque tout $(g,x)\in G\times\mathbb{R}^d$. □

4.21. Lemme. — *Nous avons*: (i) $s'(0)=ie$; (ii) $s''(0)=-(e^2+\sigma^2)$.

Preuve:

(i) Soit

$$\mathrm{H}_1(t)=\mathbb{E}[e^{it\,\mathrm{S}_n(x)/n}]=(\mathrm{U}_{(t/n)})^n\,\mathbf{1}(x)=\left(s\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\pi\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{1}(x)+\left(\mathrm{Q}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\mathbf{1}(x).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{H}_1}{dt}(t)&=\mathbb{E}\left[i\frac{\mathrm{S}_n(x)}{n}e^{it\,\mathrm{S}_n(x)/n}\right]\\&=\left(s\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-1}s'\left(\frac{t}{n}\right)\pi\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{1}(x)+\frac{1}{n}\left(s\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\pi'\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{1}(x)\\&\quad+\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\mathrm{Q}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{l-1}\mathrm{Q}'\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathrm{Q}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-l}\mathbf{1}(x)\end{aligned}$$

Pour $t=0$, il vient

$$i\,\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{S}_n(x)}{n}\right]=s'(0)+\frac{1}{n}\pi'(0)\,\mathbf{1}(x)+\frac{1}{n}(\mathrm{Q}(0))^{n-1}\,\mathrm{Q}'(0)\,\mathbf{1}(x).$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre n vers l'infini.

(ii) Soit

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_2(t)&=\mathbb{E}[e^{(it/\sqrt{n})(\mathrm{S}_n(x)-ne)}]=e^{-i\sqrt{n}\,te}\left(\mathrm{U}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\mathbf{1}(x)\\&=e^{-i\sqrt{n}\,te}\left(\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)+\left(\mathrm{Q}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\mathbf{1}(x)\right).\end{aligned}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathrm{H}_2}{dt^2}(t)&=-\frac{1}{n}\mathbb{E}[(\mathrm{S}_n(x)-ne)^2\,e^{(it/\sqrt{n})(\mathrm{S}_n(x)-ne)}]\\&=-ne^2\,e^{-i\sqrt{n}\,te}\left(\mathrm{U}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\mathbf{1}(x)\right)-2ei\sqrt{n}\,e^{-i\sqrt{n}\,te}\left(\sqrt{n}\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-1}\right.\end{aligned}$$

$$\times s'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)+\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\pi'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\left(Q\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{l-1}Q'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(Q\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-l}\mathbf{1}(x)\right)$$
$$+e^{-i\sqrt{n}te}\left((n-1)\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-2}\left(s'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^2\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)\right.$$
$$+\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-1}s''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)+2\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^{n-1}s'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\pi'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)$$
$$+\frac{1}{n}\left(s\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\pi''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{0\leqq l+k\leqq n-2}Q^l\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q^k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q^{n-(l+k)-2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)$$
$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}Q^l\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)Q^{n-l-1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)\right)$$

D'où

$$-\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[(S_n(x)-ne)^2\right]$$
$$=-ne^2-2i\sqrt{n}e\left(\sqrt{n}s'(0)+\frac{1}{\sqrt{n}}\pi'(0)\mathbf{1}(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}Q(0)^{n-1}Q'(0)\mathbf{1}(x)\right)$$
$$+(n-1)(s'(0))^2+s''(0)+2s'(0)\pi'(0)\mathbf{1}(x)+\frac{1}{n}\pi''(0)\mathbf{1}(x)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-2}Q^l(0)Q'(0)Q^{n-2-l}(0)Q'(0)\mathbf{1}(x)$$
$$+\frac{1}{n}Q^{n-1}(0)Q''(0)\mathbf{1}(x)$$

En tenant compte de (i) et du fait que $Q(0)$ est de rayon spectral <1, on obtient alors (ii) en faisant tendre n vers $+\infty$.

Deuxième étape. — Estimation de la vitesse de convergence de la fonction caractéristique.

4.22. LEMME. — *Il existe* $\eta>0$, $A>0$, $B>0$, *et* $0<\rho<1$ *tels que, pour* $|t|\leqq\eta\sqrt{n}$,

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{it((S_n(x)-ne)/\sqrt{n}\,\sigma)}\right]-e^{-(t^2/2)}\right|\leqq\left(A\frac{|t|^3}{\sqrt{n}}e^{-(t^2/4)}+B\frac{|t|}{\sqrt{n}}\rho^n\right)(1+\|x\|^{\beta\gamma})e^{\lambda\|x\|^\alpha}$$

Preuve:

$$\mathbb{E}[e^{it((S_n(x)-ne)/\sqrt{n}\,\sigma)}]-e^{-(t^2/2)}$$

$$=\left[e^{(t^2/2)}e^{-(it\sqrt{n}\,e/\sigma)}(U_{(t/\sigma\sqrt{n})})^n\mathbf{1}(x)-1\right]e^{-(t^2/2)}$$

$$=(v_n(t)+w_n(t))\,e^{-(t^2/2)}$$

avec

$$v_n(t)=e^{(t^2/2)-(it\sqrt{n}\,e/\sigma)}\left(s\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n\pi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)-1$$

$$w_n(t)=e^{(t^2/2)-(it\sqrt{n}\,e/\sigma)}\left(Q\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n\mathbf{1}(x).$$

. Nous avons

$$v_n(t)=e^{(t^2/2)-i(t/\sigma)\sqrt{n}\,e}$$

$$e^{n\,\mathrm{Log}\,[1+(iet/\sigma\sqrt{n})-((e^2+\sigma^2)\,t^2/2\,\sigma^2\,n)+(t^3/6\,\sigma^3\,n^{3/2}\,(s'''(0)+\varepsilon(t/\sqrt{n}))]}\,\pi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)-1$$

$$=e^{(t^3/\sigma)\,1/\sqrt{n}\,((s'''(0)/6)-(ie^3/3)+\varepsilon(t/\sigma\sqrt{n}))}\,\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\mathbf{1}(x)-1.$$

Il existe alors $\eta_1>0$ suffisamment petit pour que, pour tout $|t|\leqq\eta_1\sqrt{n}$:

1. $\left\|\pi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\|_\lambda<C_1$;

2. $\left|\left(\frac{t}{\sigma}\right)^3\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{s'''(0)}{6}-\frac{ie^3}{3}+\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right|\leqq\frac{C_2|t|^3}{\sqrt{n}}\leqq\frac{t^2}{4}.$

Compte tenu de l'inégalité $|e^Z-1|\leqq|Z|e^{|Z|}$, on obtient alors pour $|t|\leqq\eta_1\sqrt{n}$

$$|v_n(t)|\leqq\frac{C_2|t|^3}{\sqrt{n}}e^{t^2/4}C_1(1+\|x\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|x\|^\alpha}.$$

. D'autre part d'après la relation (1) de la proposition 4.19, nous avons

$$|w_n(t)|\leqq e^{(t^2/2)}C\left|\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right|\rho^n(1+\|x\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|x\|^\alpha},$$

pour $\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ suffisamment petit.

D'où le résultat.

4.23. *Troisième étape*. — Utilisation de l'inégalité de Esseen [10].

D'après l'inégalité de Esseen, nous avons $\forall \mathrm{T}>0$, $\forall n \geqq 1$

$$\left|\mathbb{P}\left[\frac{\mathrm{S}_n(x)-ne}{\sqrt{n}\,\sigma}\leqq u\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-(v^2/2)}\,dv\right| \leqq \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,\mathrm{T}}+\frac{1}{\pi}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}}\frac{1}{|t|}\left|\mathrm{E}\left(e^{it\,((\mathrm{S}_n(x)-ne)/\sigma\sqrt{n})}\right)-e^{-(t^2/2)}\right|dt$$

en posant $\mathrm{T}=\eta\sqrt{n}$ et en tenant compte du lemme 2.14, il vient

$$\left|\mathbb{P}\left[\frac{\mathrm{S}_n(x)-ne}{\sqrt{n}\,\sigma}\leqq y\right]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-(u^2/2)}\,du\right| \leqq \frac{\mathrm{K}}{\eta\sqrt{n}}+\left(\frac{\mathrm{A}}{\pi\sqrt{n}}\int_{-\eta\sqrt{n}}^{\eta\sqrt{n}} e^{-(t^2/4)}\,|t|^2\,dt+2\,\mathrm{B}\,\eta\rho^n\right)(1+\|x\|^{\beta\gamma})\,e^{\lambda\|x\|^{\alpha}}. \quad \square$$

C. Démonstration du théorème (4.6)

4.24. Si $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue nous posons :

$$|f|=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|}{1+\|x\|^{(\gamma+\tau)\beta}} \qquad (\beta>1, \text{voisin de } 1)$$

$$m(f)=\sup_{\substack{x,\,y\in\mathbb{R}^d\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^{\gamma}(1+\|x\|^{\tau}+\|y\|^{\tau})}$$

On appelle B « l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $|\ \ |$ ». On désigne par **L** « l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\ \ \|$ défini par

$$\|f\|=|f|+m(f)\text{ ».}$$

Soit P l'opérateur de L défini par

$$\mathrm{P}f=\int_{\mathrm{G}} f(g,\,x)\,\mu(dg).$$

Nous avons les lemmes suivants.

4.25. Lemme. — *Tout sous-ensemble borné de* L *est relativement compact dans* B.

4.26. Lemme. — *Avec les hypothèses du théorème* 4.6

$$\sup_{n\geqq 1}\ \sup_{f\in\mathrm{B}}\frac{|\mathrm{P}^n f|}{|f|}<+\infty$$

[*on notera que la v.a.* $\hat{\mathrm{Z}}=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k-1}\|b_k\|$, *vérifie* $\mathbb{E}[\hat{\mathrm{Z}}^{m(\gamma+\tau)}]<+\infty\ldots$].

4.27. LEMME. — *Avec les hypothèses du théorème* (4.6), *il existe un entier* $p \geqq 1$ *et des réels* $C>0$ *et* $0 \leqq r<1$ *tels que*

$$\|P^p f\| \leqq r\|f\|+C|f|$$

Du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu il résulte alors que $\forall f \in L$, $\forall n \geqq 1$

$$P^n f=\int f\,d\nu+Q^n f$$

où Q est de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Posons

$$H(x)=\int_G F(g, x)\,\mu(dg)$$

alors $H \in L$ grâce aux hypothèses (1).

D'après les propriétés spectrales de l'opérateur P, $\sum_{k \geqq 0} P^k(H-e)$ définit un élément de $L\,(e=\nu(H))$. Considérons la fonction de $G \times \mathbb{R}^d$ définie par

$$M(g, x)=F(g, x)-e+\sum_{k \geqq 0} P^k(H-e)(g, x).$$

Alors

$$F(g, x)-e=M(g, x)-\int M(\xi, g.x)\,\mu(d\xi)$$

$$\begin{aligned}
S_n(x)= & \sum_{k=1}^n(F(g_k, Y_{k-1}(x))-e) \\
& =\sum_{k=1}^n\left(M(g_k, Y_{k-1}(x))-\int M(\xi, Y_k(x))\,\mu(d\xi)\right) \\
& =M(g_1, x)-\int M(\xi, Y_n(x))\,\mu(d\xi) \\
& \quad+\sum_{k=2}^n\left(M(g_k, Y_{k-1}(x))-\int M(\xi, Y_{k-1}(x))\,\mu(d\xi)\right)
\end{aligned}$$

les variables aléatoires

$$\left\{M(g_k, Y_{k-1}(x))-\int M(\xi, Y_{k-1}(x))\,\mu(d\xi)\right\}_{k \geqq 2}$$

forment une suite d'accroissements de martingales.

D'où :

$$\mathbb{E}(|S_n(x)|^m) \leqq 3^{m-1}\left[\left(\Delta_n(x) + \int |M(g, x)|^m\right)\mu(dg) + \int E|M(g, Y_n)|^m \mu(dg)\right]$$

Avec

$$\Delta_n(x) = E\left(\left|\sum_{k=2}^{n}\left[M(g_k, Y_{k-1}(x)) - \int M(\xi, Y_{k-1}(x))\,\mu(d\xi)\right]\right|^m\right).$$

On voit facilement que

$$|M(g, x)| \leqq C(1 + \|x\|^{\gamma+\tau})(\eta(g) + |b(g)|^{\gamma+\tau})$$

qui est m-intégrable pour tout x d'après l'hypothèse (3) du théorème. De même $M(g, Y_n(x))$ est majoré par

$$C(1 + (\rho^n\|x\| + \hat{Z})^{\gamma+\tau})(\eta(g) + |b(g)|^{\gamma+\tau})$$

et d'autre part l'inégalité de B.D.G. [1] nous dit qu'il existe une constante universelle $C_2 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\Delta_n(x) &\leqq C_2\, E\left[\left(\sum_{k=2}^{n}\left[M(g_k, Y_{k-1}(x)) - \int M(\xi, Y_{k-1}(x))\,\mu(d\xi)\right]^2\right)^{m/2}\right]\\ &\leqq C_2\, n^{(m/2)-1}\sum_{k=2}^{n} E\left\{\left|M(g_k, Y_{k-1}(x)) - \int M(\xi, Y_{k-1}(x))\,\mu(d\xi)\right|^m\right\}\\ &\leqq C_3\, n^{m/2}\,[(1+\|x\|)^{m(\gamma+\tau)} + \mathbb{E}[\hat{Z}^{m(\gamma+\tau)}]]\\ &\qquad \times\left[\int_G \eta(g)^m \mu(dg) + \int_G \|b(g)\|^{(\gamma+\tau)m}\mu(dg)\right]\end{aligned}$$

D'où

$$E\left(\left|\frac{S_n(x)}{\sqrt{n}}\right|^m\right) \leqq C_4(1 + \|x\|^{m(\gamma+\tau)}) \quad \square$$

D. Preuves des résultats de la section 2

Preuve de la proposition 2.1. — Pour montrer la proposition 2.1, nous aurons besoin du lemme suivant :

4.28. LEMME. — *Il existe deux constantes réelles* $C>0$ *et* $0<\rho<1$ *telles que,* $\forall n \geqq 0$,

$$\sup_{\theta\in\Theta} \| A_\theta^n \|_e < C\,\rho^n$$

où $\| \quad \|_e$ *correspond à la norme euclidienne.*

Preuve. — Pour tout entier n positif les fonctions de θ, $\| A_\theta^n \|^{1/n}$ sont continues sur Θ. Les ensembles

$$F_n = \left\{ \theta \in \Theta \,\middle|\, \| A_\theta^n \|^{1/n} \geqq 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}$$

sont donc fermés. Pour tout θ dans Θ le rayon spectral de A_θ étant inférieur ou égal à $1-\alpha$ nous avons :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$$

De la compacité de Θ nous déduisons l'existence d'un entier positif n_0 tel que pour tout θ dans Θ

$$n \geqq n_0 \quad \text{implique} \, \| A_\theta^n \|^{1/n} \leqq 1 - \frac{\alpha}{2} = \rho$$

et donc :

$$\| A_\theta^n \| \leqq \rho^n$$

D'autre part la quantité :

$$C^* = \sup \left\{ \frac{\| A_\theta^k \|}{\rho^k} \,\middle|\, 0<k<n_0, \quad \theta\in\Theta \right\}$$

est finie. Il suffit alors de choisir :

$$C = \sup(C^*, 1) \quad \square$$

La première partie de la proposition 2.1 résulte des lemmes 4.2, 4.7 et 4.8. Les autres parties se montrent aisément.

Preuve de la proposition 2.2. — La conclusion (i) résulte de l'inégalité

$$E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} H(\varepsilon_k) \| Y_{k-1}(x,\theta) \|^q \right|^m \leqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(| H(\varepsilon_k) |^m \| Y_{k-1}(x,\theta) \|^{qm})$$

et du fait que $\tilde{Y}_{k-1}$ converge vers $\tilde{Y}$ dans L^{mq} uniformément sur $K\times\Theta$.

La conclusion (ii) est une conséquence du théorème 4.6 en posant

$$F(\varepsilon, y) = H(\varepsilon)\, y^\alpha$$

Preuve du théorème 2.4. — Pour chaque $\theta \in \Theta$, le théorème 4.5 nous donne la majoration voulue. □

Démonstration du théorème 2.6. — Nous démontrons le théorème pour chaque $\theta \in \Theta$.

Nous remarquons d'abord que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} F(\varepsilon_j, Y_{j-1}) - e = S_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} u_j$$

où

$$u_j = E(F(\varepsilon_j, Y_{j-1})) - e$$

et

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Z_j$$

avec

$$Z_j = F(\varepsilon_j, Y_{j-1}) - E(F(\varepsilon_j, Y_{j-1}))$$
$$|u_j| = |E(F(\varepsilon_j, Y_{j-1})) - e| = |E(F(\varepsilon_0, \tilde{Y}_{j-1}) - F(\varepsilon_0, Y^*_{j-1})|$$

où

- $\tilde{Y}_{j-1} = A^{j-1} y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 A e_1 + \ldots + \varepsilon_{j-1} A^{j-2} e_1$;
- $Y^*_{j-1} = A^{j-1} y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 A e_1 + \ldots$;
- ε_0 a même loi que ε_1 et est indépendant de la famille de variables aléatoires $(\varepsilon_i, i \geqq 1)$.

Les hypothèses (H′) (i) et (ii) permettent de voir que $(u_j, j = 1, 2, \ldots)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Donc :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} u_j}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Nous sommes ramenés à l'étude du comportement de

$$P\left(|S_n| > ((s-2)\log n)^{1/2} - O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \leqq \ldots \leqq P(|2 S_n| > ((s-2)\log n)^{1/2})$$

pour n assez grand.

Supposons que, pour la suite $(Z_j, j = 1, 2, \ldots)$ définie en (1), soient réalisées les conditions 2.1-2.4 et 1.4 de [9]. Ces conditions sont aussi réalisées pour $2 Z_j, j = 1, 2, \ldots$). Nous pouvons appliquer le théorème 2.11 de [9] :

Posons

$$s_0 \begin{cases} = s & \text{si } s \text{ est pair} \\ = s-1 & \text{si } s \text{ est impair} \end{cases}$$

nous avons alors en vertu de ce théorème

$$E((1+|2S_n|^{s_0})1_{\{2|S_n|>((s-2)\log n)^{1/2}\}})=o(n^{-((s-2)/2)})$$

Nous en déduisons alors aisément:

$$P(|S_n|>((s-2)\log n)^{1/2})=o(n^{-((s-2)/2)})$$

d'où le théorème 2.6.

Vérification des conditions 2.1-2.4 *et* 1.4 *de* [9]

CONDITION 1:

$$E(Z_j)=0, \qquad j=1,2,\ldots$$

vérification immédiate.

CONDITION 2:

$$E(|Z_j|^{s+1})\leqq\beta_{s+1}, \qquad j=1,2,\ldots$$

Démonstration. — Soient deux constantes positives K et ρ $(0<\rho<1)$ telles que: pour tout entier n

$$\sup\{\|A_0^n\|\theta\in\Theta\}\leqq K\rho^n$$

et soit $Z=|\varepsilon_1|+K\rho|\varepsilon_2|+\ldots+K\rho^{n-1}|\varepsilon_n|+\ldots$

Nous avons:

$$E(|Z_j|^{s+1})\leqq E\{|F(\varepsilon_j,Y_{j-1})-E(F(\varepsilon_j,Y_{j-1}))|^{s+1})\}$$
$$\leqq 2^s(E(|F(\varepsilon_j,Y_{j-1})|^{s+1})+|E(F(\varepsilon_j,Y_{j-1}))|^{s+1})$$

Or par l'hypothèse (H') (i)

$$E(|F(\varepsilon_j,Y_{j-1})|^{s+1})\leqq E(\eta^{s+1}(\varepsilon_j))E((1+\|Y_{j-1}\|^{\gamma+\tau})^{(s+1)})$$

Nous avons alors

$$E((1+\|Y_{j-1}\|^{\gamma+\tau})^{s+1})$$
$$\leqq 3^s[1+2^{(\gamma+\tau-1)(s+1)}(E(Z^{(\gamma+\tau)(s+1)}))+(K\rho^{j-1}\|y_0\|)^{(\gamma+\tau)(s+1)}]$$

$\|y_0\|$ appartient à un compact de $\mathbb{R}^d$ et il existe une constante C telle que:

$$E(|Z|^{(\gamma+\tau)(s+1)})\leqq CE(|\varepsilon|^{(\gamma+\tau)(s+1)})$$

la condition 2 est donc vérifiée. □

CONDITION 3. — Il existe une constante positive d telle que pour tous m, $n=1,2,\ldots$ avec $m>d^{-1}$ il existe une variable aléatoire $Z_{n,m}$ $\mathscr{D}_{n-m}^{n+m}$ mesurable vérifiant:

$$E(|Z_n-Z_{n,m}|)\leqq d^{-1}\exp(-dm)$$

où $\mathscr{D}_p^q$ désigne la tribu engendrée par les v.a. $(\varepsilon_j,\ p\leqq j\leqq q)$.

Démonstration. — Notons par:

$$Y_{n-1,m}(y_0)=\varepsilon_{n-1}e_1+\varepsilon_{n-2}Ae_1+\ldots+\varepsilon_{n-m}A^{m-1}e_1+A^{n-1}y_0$$

et

$$Z_{n,m}=F(\varepsilon_n, Y_{n-1,m})-E(F(\varepsilon_n, Y_{n-1}))$$

Alors : de (H') (i) nous déduisons

$$|Z_n-Z_{n,m}|\leqq\eta(\varepsilon_n)\|Y_{n-1}-Y_{n-1,m}\|^{\gamma}(1+\|Y_{n-1}\|^{\tau}+\|Y_{n-1,m}\|^{\tau})$$

et donc

$$E|Z_n-Z_{n,m}|\leqq A\times B$$

avec :

$$A=E(\eta(\varepsilon_n))$$
$$B=E(\|Y_{n-1}-Y_{n-1,m}\|^{\gamma}(1+\|Y_{n-1}\|^{\tau}+\|Y_{n-1,m}\|^{\tau}))$$

Nous avons $s\geqq 3$. L'inégalité de Holder permet de majorer B

$$B\leqq B_1\times B_2$$

avec

$$B_1=E^{\gamma/\gamma+\tau}(\|Y_{n-1}-Y_{n-1,m}\|^{\gamma+\tau})$$
$$B_2=E^{\tau/\gamma+\tau}((1+\|Y_{n-1}\|^{\tau}+\|Y_{n-1,m}\|^{\tau})^{(s+1)/\tau}$$

Nous avons :

$$Y_{n-1}-Y_{n-1,m}=\varepsilon_{n-(m+1)}A^m e_1+\ldots+\varepsilon_1 A^{n-2}e_1$$

et donc B_1 se majore par

$$B_1\leqq C_1 E^{\gamma/\gamma+\tau}(|Z|^{\gamma+\tau})\rho^{\gamma m}\leqq C\rho^{\gamma m}$$

B_2 se majore grâce aux inégalités de Holder et de convexité par

$$B_2\leqq 3^{1-(\tau/(\gamma+\tau))}(1+2^{\tau}(E^{\tau/\gamma+\tau}(Z^{\gamma+\tau})+(K\rho^{n-1}\|y_0\|)^{\tau}))$$

qui se majore encore par une constante. Donc :

$$E|Z_n-Z_{n,m}|\leqq C\rho^{m\gamma}$$

Il nous suffit donc de prendre

$$d=\inf\left(-\gamma\log\rho,\frac{1}{C}\right)\quad\blacksquare$$

CONDITION 4. – Il existe $d>0$ tel que pour tous m, $n=1,2,\ldots$, $A\in\mathscr{D}^n_{-\infty}$, $B\in\mathscr{D}^{\infty}_{n+m}$

$$|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqq d^{-1}e^{-dm}$$

vérification immédiate, la famille (ε_i, $i=1,2,\ldots$) étant indépendante.

CONDITION 5:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{var}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Z_j\right) \neq 0$$

vérification immédiate.

Le théorème 2.6 est donc démontré pour chaque $\theta \in \Theta$.

5. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES STATISTIQUES

5.1. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 3.2.

A. Pour démontrer le théorème 3.2 nous passerons par plusieurs lemmes. Nous posons:

$$Z_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f(X_i - \langle \theta + t/\sqrt{n}, Y_{i-1} \rangle)}{f(X_i - \langle \theta, Y_{i-1} \rangle)}$$

(δ désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^d$).

$$\sqrt{n}(\Theta - \theta) = \left\{ t \in \mathbf{R}^d / \theta + \frac{t}{\sqrt{n}} \in \Theta \right\}$$

$$C_n = \{ t \mid \delta(t, \sqrt{n}(\Theta - \theta)) \geqq 1 \}.$$

On note ∂A la frontière de l'ensemble A.

Si $d \geqq 3$ l'ensemble Θ n'est pas convexe. Nous prolongeons chaque fonction aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ comme suit

$$\tilde{Z}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in C_n \\ Z_n(t) & \text{si } t \in \sqrt{n}(\Theta - \theta) \\ \inf\left\{ \left| \dfrac{\delta(t, t^*)(Z_n(t^*) + 1)}{\delta(t, \sqrt{n}(\Theta - \theta))} - 1 \right|, \right. & \\ \qquad\qquad \left. t^* \in \{ \partial(\sqrt{n}(\Theta - \theta)) \} \cup C_n \right\} & \end{cases}$$

$\tilde{Z}_n(.)$ est continue, positive, majorée par la borne supérieure de $Z_n(.)$ sur $\partial(\sqrt{n}(\Theta - \theta))$. De plus par ce prolongement un ensemble équicontinu et borné de fonctions donnera un ensemble équicontinu et borné.

Dans la suite s'il n'y a pas confusion nous noterons $\tilde{Z}_n$ par Z_n.

B. *Étude des lois finies dimensionnelles de* Z_n.

Par passage au logarithme nous sommes ramenés à la différentiabilité asymptotique de la structure statistique. Nous allons montrer

5.1.1. LEMME. — *Sous les conditions* (HS_1) *avec* $r \geqq 2$

$$\operatorname{Log} Z_n(t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \langle Y_{j-1}, t \rangle \frac{f'(\varepsilon_j)}{f(\varepsilon_j)} + \frac{1}{2} \langle \mathscr{I}_\theta t, t \rangle \to 0, \qquad \mathbb{P}_{x,\theta} - \text{p. s.}$$

uniformément sur $K \times \Theta$.

Démonstration. — La démonstration pour le cas stationnaire développée, dans Roussas [(72), p. 52] [8] s'adapte ici aisément pour chaque (x, θ) de $K \times \Theta$.

Pour démontrer la convergence uniforme vers zéro, il suffit de démontrer que la fonction de τ

$$\frac{f^{1/2}(X_j - \langle \theta + \tau, Y_{j-1} \rangle)}{f^{1/2}(X_j - \langle \theta, Y_{j-1} \rangle)}$$

est uniformément différentiable en moyenne quadratique pour $P_{n, x, \theta}$ sur $K \times \Theta$; les lois des grands nombres intervenant dans la démonstration de la différentiabilité asymptotique ont lieu uniformément.

5.1.2. LEMME :

$$\frac{f^{1/2}(X_j - \langle \theta + \tau, Y_{j-1} \rangle)}{f^{1/2}(X_j - \langle \theta, Y_{j-1} \rangle)}$$

est uniformément différentiable en moyenne quadratique pour $P_{n, x, \Theta}$ *sur* $\mathbb{N}^* \times K \times \Theta$.

Démonstration. — Posons

$$\Delta(\lambda) = \sup_{\substack{\|\tau\| \leqq 1 \\ j \geqq 1 \\ (x, \theta) \in K \times \Theta}} \left\| \frac{1}{\lambda} \left[\frac{f^{1/2}(X_j - \langle \theta + \lambda\tau, Y_{j-1} \rangle)}{f^{1/2}(X_j - \langle \theta, Y_{j-1} \rangle)} - 1 \right] - \langle Y_{j-1}, \tau \rangle \frac{f'}{2f}(X_j - \langle \theta, Y_{j-1} \rangle) \right\|_{2, x, \theta}$$

où $\| \quad \|_{2, x, \theta}$ désigne la norme dans $L^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{P}_{x, \theta})$.

En exprimant le coefficient de $\frac{1}{\lambda}$ comme intégrale de sa dérivée puis appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'égalité de Fubini nous obtenons

$$\Delta^2(\lambda) \leqq \sup_{\substack{\|\tau\| \leqq 1 \\ j \geqq 1 \\ \theta \in \Theta \\ x \in K}} \int_0^1 \mathbb{E}_{x, \theta} \left| (\langle Y_{j-1}, t \rangle^2) A(\tau, \theta, j, u, \lambda) \right| du$$

avec

$$A(\tau, \theta, j, u, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f'}{2\sqrt{f}}(v - \lambda u \langle \tau, Y_{j-1} \rangle) - \frac{f'}{2\sqrt{f}}(v) \right)^2 dv \quad (1)$$

Nous remarquons alors que:

$$A(\tau, \theta, j, u, \lambda) \leqq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f'^2}{4f}(v - \lambda u \langle \tau, Y_{j-1} \rangle + \frac{f'^2}{4f}(v)) \right) dv = I$$

Pour tout nombre réel C nous avons

$$\mathbb{E}_{x,\theta}(\langle Y_{j-1}, \tau \rangle^2 A(.)) \leqq \mathbb{E}_{x,\theta}((1_{\| Y_{j-1} \| < c} + 1_{\| Y_{j-1} \| \geqq c}) \langle Y_{j-1}, \tau \rangle^2 A(.)). \quad (2)$$

D'après la proposition 2.1 ($\tilde{Y}_j(\theta, x)$, $j \geqq 1$, $\theta \in \Theta$, $x \in K$) converge dans $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{P})$.

Étant donné $\alpha > 0$ il existe donc une constante $C(\alpha)$ assez grande telle que

$$\mathbb{E}(\langle Y_{j-1}(\theta, x), \tau \rangle^2 A(.) 1_{\| Y_{j-1}(\theta, x) \| > C}) < \alpha$$

ou

$$\mathbb{E}_{(\theta, x)}(\langle Y_{j-1}, \tau \rangle^2 A(.) 1_{\| Y_{j-1} \| > C}) < \alpha$$

Sur l'ensemble $\| Y_{j-1} \| < C(\alpha)$ nous avons

$$|\lambda u \langle \tau, Y_{j-1} \rangle C| \leqq C(\alpha) \| \tau \| \lambda;$$

l'application $s \to \left(\int_{\mathbb{R}} (h(u+s) - h(u))^2 \right)$ est uniformément continue si $h \in \mathbb{L}^2(\mathrm{R}, dx)$; il s'ensuit que sur l'ensemble $\{ \| Y_{j-1} \| < C(\alpha) \}$, $A(\tau, \theta, j, u, \lambda)$ tend vers zéro, uniformément pour $\| \tau \| \leqq 1$, $\theta \in \Theta$, $x \in K$, $j \geqq 1$ et $u \in [0, 1]$, lorsque λ tend vers zéro.

Revenons à (2) nous voyons alors que

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathbb{E}_{x,\theta}(\| Y_{j-1} \|^2 A(.)) = 0$$

uniformément pour $\| \tau \| \leqq 1$, $\theta \in \Theta$, $x \in K$ et $j \geqq 1$.

Le lemme est alors démontré. □

5.1.3. Lemme. — *Sous les hypothèses* (HS_1) *avec* $r \geqq 4$, *pour tout* $\alpha > 0$, *les suites*

$$\mathbb{P}_{x,\theta}\left(\sup_{\| \tau \| = 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f'}{f}(X_j - \langle \theta, Y_{j-1} \rangle) \langle Y_{j-1}, \tau \rangle \right| > \alpha \right)$$

et

$$\mathbb{P}_{x,\theta}\left(\sup_{\|\tau\|=1}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{f'^2}{f^2}(X_j-\langle\theta, Y_{j-1}\rangle)\langle Y_{j-1},\tau\rangle^2-\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.-E\left(\frac{f'^2}{f^2}(\varepsilon_1)\right)E(\langle\tilde{Y},\tau\rangle^2)\right|>\alpha\right)$$

convergent uniformément vers zéro sur $\Theta\times K$ *quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. — Ce lemme est une conséquence immédiate de la proposition 2.2, via l'inégalité de Tchebichev.

Pour le premier cas on prend $H(x)=\frac{f'}{f}(x)\,(x\in\mathbb{R})$ et $r\geqq 2$ suffit pour la conclusion.

Pour le deuxième cas, on prend $H(x)=\left(\frac{f'}{f}\right)^2(x)\,(x\in\mathbb{R})$ et il faut que r soit $\geqq 4$.

5.2. INÉGALITÉS DU PROCESSUS $Z_n(t)$.

5.2.1. LEMME 4. — *Il existe une constante positive* C *indépendante de* x *et* θ *telle que pour tout entier naturel n et tout élément t de* $\mathbb{R}^d$ *vérifiant* $\theta+\frac{t}{\sqrt{n}}\in\Theta$ *on ait :*

$$E_{x,\theta}(Z_n^{1/2}(t))<e^{-Ct^2}$$

Démonstration. — Soit $t=(t_1,\ldots,t_d)'$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$.
Pour chaque entier i $(i\geqq -d+1)$ x_i désignera un nombre réel et pour chaque entier $j\,(j\geqq 0)$ on notera par y_j le vecteur de $\mathbb{R}^d$ $(x_j,\ldots,x_{j-d+1})'$.
Nous appelons parenté conditionnelle d'ordre k l'expression :

$$b_k(y_0,\theta,t)=\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^{k}f^{1/2}(x_j-\langle\theta,y_{j-1}\rangle)\,f^{1/2}(x_j-\langle\theta+t,y_{j-1}\rangle).dx_j \quad (1)$$

la division euclidienne de n par $d+1$ donne

$$n=q(d+1)+r \qquad \text{avec} \quad 0\leqq r<d+1$$

Nous posons :

$$P(\theta,t,n,p)=\prod_{r=0}^{d}\frac{f^{1/2}(X_{p(d+1)+r'}-\langle\theta+(t/\sqrt{n}),Y_{p(d+1)+r'}\rangle)}{f^{1/2}(X_{p(d+1)+r'}-\langle\theta,Y_{p(d+1)}\rangle)} \quad (2)$$

pour $0\leqq p\leqq q-1$; et

$$R(\theta,t,n)=\prod_{r'=0}^{r}\frac{f^{1/2}(X_{q(d+1)+r'}-\langle\theta+t/\sqrt{n},Y_{q(d+1)+r'}\rangle)}{f^{1/2}(X_{q(d+1)+r'}-\langle\theta,Y_{q(d+1)+r'}\rangle)} \quad (3)$$

Alors

$$\mathbb{E}(Z_n^{1/2}(t)) = \mathbb{E}\left(\prod_{p=1}^{q-1} P(\theta, t, n, p) \times R(\theta, t, n)\right).$$

Soit $\mathscr{T}_m$ la tribu engendrée par $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, nous notons que :

$\mathbb{E}[R(\theta, t, n) \mid \mathscr{T}_{q(d+1)}]$ est une parenté conditionnelle et est donc majorée par 1.

Nous montrerons (lemme 5.2.2) que pour tout $0 \leqq p \leqq q-1$:

$\mathbb{E}[P(\theta, t, n, p) \mid \mathscr{T}_{p(d+1)}]$, qui est aussi une parenté conditionnelle d'ordre $d+1$, est majoré uniformément sur Θ par $\left(1 - C\dfrac{t^2}{n}\right)^{1/2}$ où C est un réel positif convenablement choisi.

Nous obtenons alors :

$$\mathbb{E}_{\theta, x}(Z_n^{1/2}(t)) \leqq \left(1 - C\frac{t^2}{n}\right)^{q/2} = \left(1 - C\frac{t^2}{n}\right)^{[n/(d+1)]/2}$$

où $[a]$ est la partie entière du réel positif a.

Il existe donc une constante C indépendante de n telle que

$$\sup_{\substack{x \in K \\ \theta \in \Theta}} \mathbb{E}_{\theta, x}(Z_n^{1/2}(t)) < e^{-Ct^2}$$

LEMME 5.2.2. — *Il existe une constante positive* C, *telle que pour tout vecteur* y_0 *de* R^d *et pour tout vecteur* t *vérifiant* $\theta + t \in \Theta$, *on ait* :

$$b_{d+1}(y_0, \theta, t) \leqq (1 - C\|t\|^2)^{1/2}$$

Démonstration. — La définition de la parenté conditionnelle donnée dans la démonstration précédente permet d'écrire

$$b = b_{d+1}(y_0, \theta, t) = E\left(\prod_{j=1}^{d+1} \frac{f^{1/2}(\varepsilon_j - \langle t, Y_{j-1}\rangle)}{f^{1/2}(\varepsilon_j)}\right)$$

où $(\varepsilon_j, j = 1, \ldots)$ sont des variables aléatoires indépendantes de densité f sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et

$$Y_j = A_\theta^j y_0 + \varepsilon_1 A_\theta^{j-1} e_1 + \ldots + \varepsilon_{j-1} A_\theta e_1 + \varepsilon_j.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne la majoration :

$$b^2 \leqq E\left[E^2\left(\frac{f^{1/2}(\varepsilon_{d+1} - \langle t, Y_d\rangle)}{f^{1/2}(\varepsilon_{d+1})} \,\middle|\, \mathscr{T}_d\right)\right]$$

Les résultats connus sur la parenté et l'hypothèse (HS_1) (iii) permet d'écrire :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{f(u-s)}{f(u)}} f(u)\, du\right)^2 \leqq (1 - C_1 s^2)\, 1_{[0,1[}(s) + \rho\, 1_{[1,\infty)}(s)$$

Posons $t=\lambda\tau$ avec $\|\tau\|=1$ et $\lambda \geqq 0$.

Alors

$$\frac{1-b^2}{\lambda^2} \geqq r = \mathrm{E}\left(\mathrm{C}_1 \langle \tau, \mathrm{Y}_d \rangle^2 1_{[0,1[}(\lambda \,|\langle \tau, \mathrm{Y}_d \rangle|) + \frac{1-\rho}{\lambda^2} 1_{[1,\infty)}(\lambda\,|\langle \tau, \mathrm{Y}_d \rangle|)\right)$$

La majoration du lemme sera obtenue si r est uniformément minoré pour tout y_0 dans $\mathbb{R}^d$, tout τ ($\|\tau\|=1$) et tout λ vérifiant $\theta+\lambda\tau \in \Theta$.

Introduisons quelques notations supplémentaires

$$\mathrm{S}_{d-1} = \{ \tau \in \mathbb{R}^d \,|\, \|\tau\| = 1 \}$$
$$\lambda_0 = \max \{ \lambda \geqq 0 \,|\, \theta + \lambda\tau \in \Theta, \theta \in \Theta, \tau \in \mathrm{S}_{d-1} \}$$

λ_0 est fini, $\Theta \times \mathrm{S}_{d-1}$ étant compact.

Pour tout $\theta \in \Theta$ $(\mathrm{A}_\theta^j e_1, j=0, \ldots, d-1)$ est une base de $\mathbb{R}^d$. La fonction de θ et τ

$$h(\theta, \tau) = \left| \sum_{j=0}^{d-1} \langle \mathrm{A}_\theta^j e_1, \tau \rangle \right|$$

est donc strictement positive sur l'ensemble compact $\Theta \times \mathrm{S}_{d-1}$. Comme elle est continue en θ et τ, il existe un nombre réel strictement positif m tel que

$$0 < m < h(\theta, \tau), \qquad \forall (\theta, \tau) \in \Theta \times \mathrm{S}_{d-1}$$

Posons désormais

$$\alpha_j(\theta, \tau) = \langle \mathrm{A}_\theta^{d-j} e_1, \tau \rangle$$

et

$$\mathrm{M} = \sup \{ |\alpha_j(\theta, \tau)| : j = 1, d, (\theta, \tau) \in \Theta \times \mathrm{S}_{d-1} \} < \infty$$

Pour minorer r nous considérons 4 cas.

Premier cas: $\lambda \langle \mathrm{A}_\theta^d e_1, y_0 \rangle \geqq 1$.

Nous avons alors:

$$\{ \lambda \langle \mathrm{Y}_d, \tau \rangle > 1 \} \supset \bigcap_{j=1}^{d} \{ \alpha_j(\theta, \tau), \varepsilon_j > 0 \}$$

donc

$$r \geqq \frac{1-\rho}{\lambda^2} \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{d} \{ \alpha_j(\theta, \tau), \varepsilon_j > 0 \} \right)$$
$$\geqq \frac{1-\rho}{\lambda^2} \xi^d$$

où

$$\xi=\min(\mathrm{P}(\varepsilon_1>0),\mathrm{P}(\varepsilon_1<0))$$

ξ est positif car ε_1 admet une densité de probabilité et est centré.

Deuxième cas: $\lambda\langle \mathrm{A}_\theta^d e_1, y_0\rangle\leqq -1$.

Ce cas se traite comme le premier cas et nous trouvons la même minoration.

Troisième cas: $-1<\lambda\langle \mathrm{A}_\theta^d e_1, y_0\rangle\leqq 0$.

Nous avons alors:

$$\{-1\leqq\langle \mathrm{Y}_d,\tau\rangle<1\}\supset\bigcap_{j=1}^{d}\left\{0\leqq\lambda\alpha_j(\theta,\tau)\,\varepsilon_j<\frac{1}{d}\right\}$$

Posons

$$s_j=s_j(\tau,\theta)=\begin{array}{rcr} 1 & \text{si} & \alpha_j(\theta,\tau)>0\\ -1 & & <0\\ 0 & & =0\end{array}$$

et

$$\delta=\frac{1}{d\mathrm{M}\,\lambda_0}$$

Alors:

$$\{-1<\langle \mathrm{Y}_d,\tau\rangle<1\}\supset\bigcap_{j=1}^{d}\{0\leqq s_j\varepsilon_j<\delta\}$$

et donc:

$$r\geqq \mathrm{C}_1\,\mathrm{E}\left(<\tau,\mathrm{Y}_d\rangle^2\prod_{j=1}^{d}1_{\{0\leqq s_j\varepsilon_j<\delta\}}\right)$$

La variance minorant le moment d'ordre 2 et les ε_j étant des variables indépendantes nous avons:

$$r\geqq \mathrm{C}_1\sum_{j=1}^{d}\alpha_j^2(\theta,\tau)\,\mathrm{var}(\varepsilon_j\,1_{\{0\leqq s_j\varepsilon_j<\delta\}})$$

soit

$$\sigma^2=\min(\mathrm{var}(\varepsilon_1\,1_{[0,\delta[}(\varepsilon_1)),\mathrm{var}\,\varepsilon_1\,1_{]-\delta,0]}(\varepsilon_1))$$

ε_1 étant centré et admettant une densité strictement positive, σ^2 est strictement positif

D'autre part:

$$\left|\sum_{j=1}^{d}\alpha_j(\theta,\tau)\right|\geqq m$$

implique

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j^2(\theta,\tau) \geqq \frac{m^2}{d}$$

D'où

$$r \geqq C_1 \frac{m^2}{d} \sigma^2$$

Quatrième cas: $0 \leqq \lambda < A_\theta^d e_1, y_0 \rangle < 1$.

Ce cas se traite comme le cas 3 on obtient la même minoration.

Nous en déduisons

$$r \geqq \min\left(C_1 \frac{m^2}{d}\sigma^2, \frac{1-\rho}{\lambda_0^2}\xi^d\right) = C$$
$$b(y_\theta, \theta, t) \leqq (1 - C \| t \|^2)^{1/2} \quad \square$$

5.2.3. Lemme. — *Sous les hypothèses* (HS_1), *avec* $r \geqq d+1$ *il existe une constante* C *telle que :*

$$\sup_{n \geqq 1} \sup_{\theta, x \in \Theta \times K} \mathbb{E}_{x,\theta}^{1/d+1}(|Z_n^{1/d+1}(t') - Z_n^{1/d+1}(t)|^{d+1}) \leqq C \| t' - t \|$$

pour tous t et t' réels appartenant à $\sqrt{n}(\Theta - \theta)$.

Démonstration. — Nous devons chercher une majoration de

$$\Delta_n(t,h) = \mathbb{E}_{\theta,x}(|Z_n^{1/d+1}(t+h) - Z_n^{1/d+1}(t)|^{d+1})$$
$$\Delta_n(t,h) \leqq \mathbb{E}_{\theta,x}\left|\int_0^1 \frac{d}{dv}\left(Z_n^{1/d+1}(t+vh)\right) dv\right|^{d+1}$$

qui se majore grâce à l'inégalité de Holder par

$$\mathbb{E}_{\theta,x}\left(\int_0^1 \left|\frac{d}{dv} Z_n^{1/d+1}(t+vh)\right|^{d+1} dv\right)$$

Nous explicitons la dérivée par rapport à v et grâce à l'égalité de Fubini nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta_n(t,h) \leqq {} & \frac{1}{n^{(d+1)/2}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{d+1} \\ & \times \mathbb{E}_{\theta,x}\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f'}{f}\left(X_k - \langle \theta + \frac{t+vh}{\sqrt{n}}, Y_{k-1}\rangle\right)\right.\right. \\ & \left.\left. \times \langle h, Y_{k-1}\rangle\right|^{d+1} Z_n(t+vh)\, dv\right) \quad (1)\end{aligned}$$

Nous remarquons que si H(.) est une fonction positive mesurable par rapport à la tribu engendrée par $Y_1, \ldots, Y_n$, alors

$$\mathbb{E}_{\theta,x}(H(.)\, Z_n(t+vh) = E_{\theta+((t+vh)/\sqrt{n}),\, x}(H(.)).$$

Le deuxième membre de (1) est donc égal à

$$\left(\frac{1}{d+1}\right)^{d+1}\frac{1}{n^{(d+1)/2}}$$

$$\times \underbrace{\int_0^1 \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{f'}{f}(\varepsilon_k)\left\langle h, Y_{k-1}\left(\theta+\frac{t+vh}{\sqrt{n}},x\right)\right\rangle\right|^{d+1}\right)}\, dy. \quad (2)$$

Appliquons alors la proposition 2.2 (i) avec: $H(x)=\frac{f'}{f}(x)$,

en remarquant que $\mathbb{E}[H(\varepsilon_1)]=0$.

Nous obtenons le résultat voulu.

Du théorème 1.1, p. 174 de I. K. [3] nous déduisons alors les conclusions 1 et 2 du théorème 3.2. La conclusion 3 (a) se déduit du théorème 5.1, p. 42. Pour la conclusion 3 (b) il suffit de prendre dans la démonstration du même théorème $H=\mathrm{Log}^{1/2}\, n$ et remarquer que $g(.)=(.)^2$. □

5.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3.

5.3.0. NOTATIONS. — Nous notons par $l(.)$ la fonction $-\mathrm{Log} f$.

Pour chaque entier i positif $l^i(.)$ est si elle existe la dérivée i-ième de la fonction $l(.)$.

Pour chaque entier $k \geqq 1$ nous posons

$$l_k(\theta)=l(X_k-\langle \theta, Y_{k-1}\rangle)$$

Alors $l_k(.)$ est une fonction aléatoire indicée par Θ l'entier k en sera son numéro.

Nous posons:

$$_n\mathrm{L}(\theta,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} l_k(\theta) \qquad (0.1)$$

C'est le logarithme de la vraisemblance normalisé par $\frac{1}{n}$.

$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)$ est un vecteur de composantes entières non négatives. Nous posons

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i, \qquad \alpha!=\alpha_1!\ldots!\alpha_d!$$

Étant donné $v=(v_1\ldots v_d)'$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$, on pose

$$v^\alpha=v_1^{\alpha_1}\ldots v_d^{\alpha_d}$$

$$(1)=\underbrace{(1,\ldots,1)}_{d}$$

τ_n ou τ s'il n'y a pas ambiguïté désigne $n^{-1/2}$. Étant donné une fonction u de la variable vectorielle $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_d)$ nous posons :

$$u^{(\alpha)}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\theta^\alpha}u=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_d}}{\partial\theta^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_d}\theta_d}u$$

Ainsi nous avons :

$$l^{(\alpha)}(x-\langle\theta,y\rangle)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\theta^\alpha}l(x-\langle\theta,y\rangle)$$
$$=(-1)^{|\alpha|}y_1^{\alpha_1}\ldots y_d^{\alpha_d}l^{|\alpha|}(x-\langle\theta,y\rangle) \quad (0.2)$$

Nous noterons par $l^{(\alpha)}(\theta)$ l'application

$$l^{(\alpha)}(\theta), \qquad (x,y)\to l^{(\alpha)}(x-\langle\theta,y\rangle).$$

Pour tout entier positif i, $1\leqq i\leqq d$

$$l^{(\alpha)\,i}(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_i}l^{(\alpha)}(\theta) \quad (0.3)$$

Posons $\partial_i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ième qui est égale à 1. Alors :

$$\begin{aligned} l^{(\alpha)\,i}(\theta)&=l^{(\alpha+\partial_i)}(\theta)\\ l^{(\alpha)\,ij}(\theta)&=l^{(\alpha+\partial_i+\partial_j)}\\ l^{ij}(\theta)&=l^{(\partial_i+\partial_j)}(\theta)\end{aligned} \quad (0.4)$$

ν_θ loi stationnaire du processus $(Y_j)_{\mathbb{N}}$ pour la valeur Θ du paramètre désignera aussi la loi stationnaire de $(X_j, Y_{j-1})_{\mathbb{N}}$.

Pour tout entier positif k et tout vecteur α, nous posons :

$$a_\theta=E_{\nu_\theta}(l(\theta))$$
$$a(\alpha,\theta)=E_{\nu_\theta}(l^{(\alpha)}(\theta))$$

Si i et j sont deux entiers positifs (0.5)

$$a_k(\alpha,i,\theta)=E_{\nu_\theta}(l_k^{(\alpha)\,i}(\theta))$$

et il en sera de même pour $a(\alpha, i, j, \theta)$.

Si $(b_k, k\geqq 1)$ est une suite de nombres où de fonctions nous noterons

$$_nb=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n b_k \quad (0.6)$$

Si n est un entier positif nous noterons

$$\begin{aligned} {}_n\xi(\theta, x)&=n^{-1/2}\sum_{k=1}^n(l_k(\theta)-a(\theta))\\ {}_n\xi^{(\alpha)}(\theta, x)&=n^{-1/2}\sum_{k=1}^n(l_k^{(\alpha)}(\theta)-a(\alpha,\theta))\end{aligned} \quad (0.7)$$

Exposons maintenant les notations vectorielles ou matricielles

$$(v^i, i=1, \ldots, d), \quad \text{vecteur de } \mathbb{R}^d$$

sera noté par $v^{[1]}$

$$(v^{ij}, i,j=1, \ldots, d), \quad \text{matrice } (d \times d)$$

sera notée $v^{[1,1]}$.
Nous considérerons aussi

$$A(\theta) = a^{[1,1]}(\theta)$$

Dans la suite s'il n'y a pas de confusion C désignera une constante positive ne dépendant pas des variables aléatoires $(X_k, k \geqq 1)$ et de θ dans Θ.

5.3.1. *Démonstration.* — Nous employons une méthode voisine de celle de Chibisov [2].

Au voisinage de θ_0 nous faisons un développement de Taylor-Lagrange des composantes du vecteur ${}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta, x)$. Pour alléger les notations nous omettons le vecteur initial x. Développement de chaque composante:

$$l_k^{(i)}(\theta) = l_k^{(i)}(\theta_0) + \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq p} (\alpha!)^{-1} l_k^{(\alpha)\, i}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^\alpha + \gamma^i(\theta_0, \theta, k) \quad (1.1)$$

avec

$$\gamma^i(\theta_0, \theta, k) = \sum_{|\alpha| = p} (\alpha!)^{-1} (l_k^{(\alpha)\, i}(\tilde{\theta}(i)) - l_k^{(\alpha)\, i}(\theta_0))(\theta - \theta_0)^\alpha \quad (1.2)$$

où $\tilde{\theta}(i)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ dépendant de X_k, Y_{k-1} θ, i, x et vérifiant:

$$\| \tilde{\theta}(i) - \theta_0 \| \leqq \| \theta - \theta_0 \|$$

Nous en déduisons le développement de ${}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta, x) = {}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta)$

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta) &= \tau\, {}_n\xi^{[1]}(\theta_0) + \mathrm{A}(\theta_0) + \tau\, {}_n\xi^{[1,1]}(\theta_0)(\theta - \theta_0) \\ &+ \sum_{2 \leqq |\alpha| \leqq p} (\alpha!)^{-1} (a^{(\alpha)[1]}(\theta_0) + \tau\, {}_n\xi^{(\alpha)[1]}(\theta_0))(\theta - \theta_0)^\alpha + {}_n\eta(\theta_0, \theta) \quad (1.3) \end{aligned}$$

où

$${}_n\eta(\theta_0, \theta) = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \gamma^{[1]}(\theta, \theta_0, k) \quad (1.4)$$

L'hypothèse (HS_2) (ii) et les notations précédentes impliquent en supposant $\| \theta_0 - \theta \| < 1$:

$$\begin{aligned} \| {}_n\eta(\theta_0, \theta) \| &\leqq \frac{1}{p!} \| \theta - \theta_0 \|^{p+1} \\ &\times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}(\varepsilon_k) \| \mathrm{Y}_{k-1} \|^{p+1} (1 + \| \mathrm{Y}_{k-1} \|^q) \quad (1.5) \end{aligned}$$

Un développement analogue de ${}_n l^{i,j}(\theta)$ pour $i, j=1, d$ nous donne :

$$
\begin{aligned}
{}_n l^{ij}(\theta) = a(i,j,\theta_0) + \tau\, {}_n\xi^{i,j}(\theta_0) \\
+ \sum_{1 \leqq |\alpha| \leqq p-1} (\alpha!)^{-1} (a(\alpha,i,j,\theta_0) + \ldots \\
+ \tau\, {}_n\xi^{(\alpha)\, ij}(\theta_0))(\theta-\theta_0)^{\alpha} + {}_n\eta(i,j,\theta_0,\theta). \quad (1.6)
\end{aligned}
$$

Si nous imposons

$$\|\theta-\theta_0\|<1$$

nous avons :

$$
\begin{aligned}
{}_n\eta(i,j,\theta_0,\theta) \leqq \frac{1}{(p-1)!}\|\theta-\theta_0\|^p \\
\times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R(\varepsilon_k)\|Y_{k-1}\|^p . (1+\|Y_{k-1}\|^q). \quad (1.7)
\end{aligned}
$$

Par le théorème 3.2 étant donné ρ entier positif

$$P(\|\hat{\theta}_n-\theta\|>\rho) \leqq A_1 \exp - A_2 n \qquad (1.8)$$

Première étape. — Nous montrons que pour ρ « assez petit » mais fixé et pour ω appartenant à un ensemble de probabilité « assez forte », sur la boule $(S(\theta_0, \rho))$, ${}_n L(\theta)$ est convexe. Donc quand $\hat{\theta}_n$ en plus appartient à cette boule (ce qui se réalise avec une probabilité assez forte par 1.8) $\hat{\theta}_n$ est solution unique de l'équation de vraisemblance

$${}_n L^{[1]}(\theta)=0$$

Nous considérons les événements suivants où $\|\theta-\theta_0\|<1$

$$E(\alpha, i, j, \theta_0, x, c_1, \sqrt{n}) = \{ |{}_n\xi^{(\alpha)\, ij}(\theta_0)| < c_1\sqrt{n} \}$$

avec

$$
\begin{aligned}
(|\alpha|=1, \ldots, p-1) \\
E(i,j,\theta_0,x,\delta,\sqrt{n}) = \{ |\xi^{ij}(\theta_0)| < \delta\sqrt{n} \} \quad (1.9) \\
\Gamma(\theta_0, x, c_2, n) = \left\{ n^{-1} \sum_{k=1}^{n} R(\varepsilon_k)\|Y_{k-1}\|^p (1+\|Y_{k-1}\|^q) < c_2 \right\}
\end{aligned}
$$

où c_1, δ sont des réels positifs, c_2 est un réel positif assez grand.

Étant donné une matrice M, nous désignons par $\lambda_{\min}(M)$ sa plus petite valeur propre. La matrice d'information $A(\theta)$ est définie positive et continue sur Θ, nous aurons

$$\inf_{\theta\in\Theta} \lambda_{\min}(A(\theta)) = \lambda > 0$$

Pour tout couple d'entiers positifs $1 \leqq i, j \leqq d$ soit t_{ij} un vecteur de Θ et (t) le tableau des (t_{ij}). Soit ${}_n l^{[1,1]}((t))$ la matrice $({}_n l^{ij}(t_{ij}))_{i,j=1,\ldots,d}$.

5.3.1'. LEMME. — *Posons* $\delta=\dfrac{\lambda}{8d}$ *et supposons réalisés les événements* $E(\alpha, i, j, \theta_0, x, c, \sqrt{n})$, $E(i, j, \theta_0, x, \delta, \sqrt{n})$ *et* $\Gamma(\theta_0, x, c_2, n)$. *Alors il existe un réel positif* ρ *et un entier positif* n_0 *tels que pour tout* $n \geqq n_0$ *et tout tableau* (t) *de vecteurs* t_{ij} *dans* $S(\theta_0, \rho) \cap \Theta$ *on ait*

$$\lambda_{\min}({}_n l^{[1,1]}((t))) \geqq \frac{\lambda}{2}$$

ρ *et* n_0 *peuvent être choisis les mêmes pour tout* θ_0 *de* Θ, x *de* K.

Le principe de la démonstration est le même que dans Chibisov [2]. □

Sur l'intersection des ensembles suivants $\Gamma(.)$, $E(.)$, $\{\hat{\theta}_n \in S(\theta_0, \rho)\}$ $\hat{\theta}_n$ est solution unique de l'équation

$${}_n L^{[1]}(\theta)=0$$

Deuxième étape. — Sur cette intersection donnons une estimation plus fine de $|\hat{\theta}_n-\theta_0|$.

Faisons un développement du type 1.3 pour $p=1$.

Nous trouvons un système de vecteurs $(t)=(t_{ij})$, i, $j=1, \ldots, d$ de $\Theta \cap S(\theta_0, \rho)$ tels que :

$$\begin{aligned} 0={}_n L^{[1]}(\hat{\theta}_n) &= \tau\, {}_n\xi^{[1]}(\theta_0)+(A(\theta_0)+\tau_n\, \xi^{[1,1]}((t)))(\hat{\theta}_n-\theta_0) \\ &= \tau\, {}_n\xi^{[1]}(\theta_0)+A((t))(\hat{\theta}_n-\theta_0) \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent la plus petite valeur propre de $A((t))$ est minorée par $\dfrac{\lambda}{2}$. $A((t))$ est inversible. Nous obtenons :

$$\|\hat{\theta}_n-\theta_0\| \leqq \tau \frac{\lambda^{-1}}{2} \|{}_n\xi^{[1]}(\theta_0)\|. \tag{1.10}$$

Troisième étape. — Nous posons maintenant

$${}_n\Lambda(\theta, \tau, p)={}_n L^{[1]}(\theta)-\eta_n(\theta_0, \theta).$$

Pour alléger les notations nous poserons $\theta_0=0$ et sous entendons en général l'argument (θ_0, x). Nous considèrerons la série formelle $\Lambda(\theta, \tau)$ déduite de $\Lambda(\theta, \tau, p)$ en étendant formellement la sommation

$${}_n\Lambda(\theta, \tau)=\tau\, {}_n\xi^{[1]}+A\,\theta+\tau\, {}_n\xi^{[1,1]}\theta+\sum_{2 \leqq |\alpha|} (\alpha!)^{-1}(a^{[\alpha, 1]}+\tau\, {}_n\xi^{[\alpha, 1]})\theta^\alpha. \tag{1.11}$$

Remarquons que pour $|\alpha| \leqq p$

$$A=A(\theta_0), \qquad a^{[\alpha, 1]}=a^{[\alpha, 1]}(\theta_0)$$

Nous conviendrons que pour $|\alpha|>p$

$$a^{[\alpha, 1]}={}_n\xi^{[\alpha, 1]}=0$$

Nous supposerons alors que la série formelle

$$\theta(\tau)=\tau h_1+\tau^2 h_2+\ldots$$

solution de

$$ {}_n\Lambda(\theta, t) = 0 \tag{1.12}$$

est déterminée en substituant successivement chaque développement partiel

$$\theta^{(r)}(\tau) = \tau h_1 + \tau^2 h_2 + \ldots + \tau^r h_r, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

dans ${}_n\Lambda(\theta, \tau)$ et en annulant les coefficients des termes $(\tau^j, j = 1, \ldots, r)$. Alors:

$$ {}_n\Lambda(\theta^{(r)}(\tau), \tau) = \sum_{j \geqq r+1} \tau^j h_{jr}. \tag{1.13}$$

5.3.2. LEMME. — *Tous les $h_j (j = 1, 2, \ldots)$ et les $h_{j,l}$ $(l > j)$ et $(l \in \mathbb{N})$ sont des vecteurs dont les composantes sont des polynômes homogènes de degrés j en $({}_n\xi^{(\alpha)}, |\alpha| = 1, \ldots, j)$.*

Démonstration. — La démonstration ne requiert pas d'idées nouvelles par rapport à celle de Chibisov [2]. □

Soit $v_n = ((m-2) \operatorname{Log} n)^{(p+1)/2}$.

Nous allons montrer que si les événements

$$\left.\begin{array}{c} \{\hat{\theta}_n \in S(\theta_0, \rho)\} \\ E(\alpha, \theta_0, x, c, v_n^{1/p+1}) = \{|{}_n\xi^{(\alpha)}(\theta_0, x)| < c v_n^{1/p+1}\} \\ |\alpha| = 1, \ldots, p+1 \\ \Gamma(\theta_0, x, c_2, n) \end{array}\right. \tag{2.1}$$

sont réalisés, nous aurons:

$$\|\hat{\theta}_n - \theta^{(p+1)}(\tau)\| < c\, \tau^{p+1} v_n. \tag{2.2}$$

En effet (2.1) assure que les conditions du lemme 5.3.1′ sont réalisés et donc que (1.8) est réalisé. Si nous posons

$$d_n = \tau\, v_n^{1/p+1} = n^{-1/2}\, v_n^{1/p+1}$$

alors $d_n \to 0$ quand $n \to \infty$. De (1.8) et de (2.1) nous déduisons

$$\|\hat{\theta}_n\| < c d_n \tag{2.3}$$

Remarquant que $(\tau^j h_j,\ j = 1, 2, \ldots)$ et $(\tau^j h_{j,l},\ j = 1, 2, \ldots,\ l > j)$ sont à composantes polynomiales homogènes de degrés j en $(\xi^{(\alpha)}, |\alpha| = i, \ldots, j)$ (*cf.* lemme 5.3.2)

$$|\tau^j h_j| < c d_n^j, \qquad |\tau^j h_{jl}| < c d_n^j \tag{2.4}$$

$$\|\theta_n^{(p)}(\tau)\| < c d_n, \qquad |{}_n\Lambda(\theta^{(p)}(\tau), \tau, p)| < c d_n^{p+1} \tag{2.5}$$

où c est une constante convenablement choisie.

De (1.5), (2.5), (1.10) on déduit:

$$|{}_n\eta(\hat{\theta}_n)| < c d_n^{p+1}$$
$$|{}_n\eta(\theta_n^{(p)})| < c d_n^{p+1}$$

Alors nous avons

$$\| {}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta^{(p)}(\tau)) \| < c d_n^{p+1}. \tag{2.6}$$

De l'inégalité :

$$\| \theta_1^\alpha - \theta_2^\alpha \| \geqq c(\alpha) \| \theta_1 - \theta_2 \| (\max(\| \theta_1 \|, \| \theta_2 \|))^{|\alpha|-1}$$

pour θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}^d$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\| {}_n\mathrm{L}^{[1]}(\hat{\theta}_n) - {}_n\mathrm{L}^{[1]}(\theta_n^{(p)}) \| \\
&\quad \geqq \big| \| {}_n\Lambda(\hat{\theta}_n, \tau, p) - {}_n\Lambda(\theta^{(p)}, \tau, p) \| - \| {}_n\eta(\hat{\theta}_n) \| - \| {}_n\eta(\theta^{(p)}(\tau)) \| \big| \\
&\quad \geqq \Big| \| \hat{\theta}_n - \theta^{(p)}(\tau) \| \Big[\lambda - d\tau \max_{j,l} {}_n\xi^{jl} - \dots - \sum_{j=2}^{p} \mathrm{C}(\max(\hat{\theta}_n, \theta^{(p)}(\tau)))^{j-1} \Big] \\
&\qquad - \mathrm{C} d_n^{p+1} \Big| \geqq \| \hat{\theta}_n - \theta^{(p)}(\tau) \| \frac{\lambda}{2} - \mathrm{C} d_n^{p+1} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}
\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que $\mathrm{L}_n^{[1]}(\hat{\theta}_n) = 0$ et des inégalités (2.5) et (2.6) nous obtenons alors l'inégalité (2.2).

L'évaluation de $\mathbb{P}(\| \rho(n) \| > v_n)$ résulte de l'évaluation des probabilités des événements

$$\complement \mathrm{E}(.) \complement \Gamma(.) \qquad \text{et} \qquad \{ \hat{\theta}_n \notin \mathrm{S}(\theta_0, \rho) \}.$$

Or d'après le théorème 2.6

$$\mathrm{P}(\complement \mathrm{E}_\alpha) = o(n^{((m-2)/2)})$$

D'après l'inégalité de Markov et la proposition 2.2 (i)

$$\mathrm{P}(\complement \Gamma) = o(n^{-((m+1)/2)})$$

Pour $\mathrm{P}\left(\complement \{ \hat{\theta}_n \in \mathrm{S}(\theta_0, \rho) \} \right)$ nous avons la majoration exponentielle d'après le théorème 3.2 conclusion 3 (*a*).

5.3.3. *Démonstration du théorème* 3.4. — Pour alléger les notations nous notons

$$\mathrm{A}(\theta) = a(\theta) = \mathrm{E}(g'^2(\varepsilon_1)) \, \mathrm{E}_{\nu_\theta}(\tilde{\mathrm{Y}}^2)$$

c'est l'information au point θ de la structure statistique. Les indices de dérivation [1] et [1,1] sont remplacés par (1) et (2).

Nous suivons partiellement la démonstration du théorème de [6], th., p. 74.

Nous développons ${}_n\mathrm{L}^{(1)}(\theta)$ au voisinage de θ_0 avec $p = 1$. Nous obtenons alors

$$0 = \sqrt{n} \, {}_n\mathrm{L}^{(1)}(\hat{\theta}_n, x) = \sqrt{n} \, {}_n\mathrm{L}^{(1)}(\theta_0, x) + \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \, {}_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n, x)$$

où

$$| \tilde{\theta}_n - \theta_0 | < | \hat{\theta}_n - \theta_0 |$$

Si

$$_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n, \mathrm{x}) > 0$$

nous aurons :

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0) < t$$

dès que

$$-\sqrt{n}\,_n\mathrm{L}^{(1)}(\theta_0, x) < t\,_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n x)$$

De [6], lemme 1, p. 78 nous obtenons :

$$\begin{aligned} |p(\sqrt{n}\,a(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0) < t) - \Phi_{a(\theta_0)}(t)| &\leqq \mathrm{P}(|\hat{\theta}_n - \theta_0| > d) \\ &+ \sup_s |\mathrm{P}(\sqrt{n}\,_n\mathrm{L}^{(1)}(\theta_0, x) < s) - \varphi(s)| \\ &+ \mathrm{P}(_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n, x) - a(\theta_0) > cn^{-1/2}(\mathrm{Log}\,n)^{1/2}) \\ &+ n^{-1/2}(\mathrm{Log}\,n)^{1/2} = \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n + \mathrm{C}_n + \mathrm{D}_n \end{aligned}$$

où c est choisi assez grand et déterminé en 3.5.

Alors

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > d) \quad \text{décroît de façon exponentielle en } n \tag{3.1}$$

$$\mathrm{B}_n \leqq \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} \quad \text{en vertu de l'expression de } _n\mathrm{L}^{(1)} \text{ et du théorème 2.4.} \tag{3.2}$$

Reste à évaluer C_n.

Or

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n \leqq \mathrm{P}\left[|_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n, x) - {}_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, x)| > \frac{c}{2} n^{-1/2} \mathrm{Log}^{1/2}\, n \right] \\ + \mathrm{P}\left[|_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, x) - a(\theta_0)| > \frac{c}{2} n^{-1/2} \mathrm{Log}^{1/2}\, n \right] = \mathrm{C}_{1,n} + \mathrm{C}_{2,n} \end{aligned}$$

$\mathrm{C}_{2,n}$ se majore grâce au théorème 2.6

$$\mathrm{C}_{2,n} = o(n^{-((m-2)/2)}) = o(n^{-1/2}) \tag{3.3}$$

D'autre part :

$$|_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, \tilde{\theta}_n, x) - {}_n\mathrm{L}^{(2)}(\theta_0, x)| \leqq |\hat{\theta}_n - \theta_0| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}(\varepsilon_i) |\mathrm{Y}_{i-1}| (1 + |\mathrm{Y}_{i-1}|^q)$$

D'où

$$\mathrm{C}_{1,n} \leqq \mathrm{C}'_{1,n} + \mathrm{C}'_{2,n}$$

avec

$$\mathrm{C}'_{1,n} = \mathrm{P}(|\hat{\theta}_n - \theta_0| > c' n^{-1/2} (\mathrm{Log}\,n)^{1/2})$$

$$\mathrm{C}'_{2,n} = \mathrm{P}\left[\frac{n^{-1/2} \mathrm{Log}^{1/2} n}{n} \sum \mathrm{R}(\varepsilon_i) \| \mathrm{Y}_{i-1} \| (1 + \| \mathrm{Y}_{i-1} \|^q) < \frac{c}{2c'} n^{-1/2} \mathrm{Log}^{1/2}\, n \right]$$

En vertu du théorème 3.2 (b) pour c' assez grand

$$\mathrm{C}'_{1,n} = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.4}$$

La proposition 2.2 et l'inégalité de Markov pour c assez grand donnent

$$C'_{2,n}=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\left(\frac{c}{2c'}>\iint \mathrm{R}(\varepsilon)\|y\|(1+\|y\|^q)\,\mu(d\varepsilon)\,\nu(dy)\right) \tag{3.5}$$

Enfin par définition

$$\mathrm{D}_n=n^{-1/2}\,\mathrm{Log}^{1/2}\,n \tag{3.6}$$

Les évaluations de (3.1) à (3.6) donnent le résultat attendu. □

Nota. — Actuellement au moment de la parution de cet article les résultats que nous possédons sont plus fins et vont faire l'objet d'une prochaine publication:

En particulier, nous pouvons démontrer pour l'estimateur du maximum de vraisemblance convenablement normalisé d'un paramètre vectoriel une vitesse convergence en loi de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ et cette vitesse est uniforme sur l'espace paramétrique.

RÉFÉRENCES

[1] D. L. BURKHOLDER, Distribution Function Inequalities for Martingales, *Annals Probab.*, vol. **1**, n° 1, fév. 1973, p. 19-43.

[2] D. M. CHIBISOV, An Asymptotic Expansion for a Class of Estimators Containing Maximum Likelihood Estimators, *Theor. Prob. Appli.*, vol. **18**, 1973, p. 295-303.

[3] I. A. IBRAGIMOV et R. Z. HASMINSKY, Statistical Estimation. Asymptotic Theory, *Applications of Mathematics*, n° 16, Springer Verlag, New York, Heidelberg Berlin, 1981.

[4] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, New York Inc., 1966.

[5] R. MICHEL, Higher Order Asymptotic Sufficiency, *Sankhyā*, série A, vol. **40**, 1978, p. 76-84.

[6] R. MICHEL et J. PFANZAGL, The Accuracy of the Normal Approximation for Minimum Contrast Estimates, *Z. Wahr. u. Verw. Geb.*, vol. **18**, 1971, p. 73-74.

[7] F. NORMAN, *Markov Processes and Learning Models*, Academic Press, New York and London, 1972.

[8] G. G. ROUSSAS, *Contiguity of Probability Measures: Some Applications in Statistics*, Cambridge University Press, 1972.

[9] F. GOTZE et C. HIPP, Asymptotic Expansions for Sums of Weakly Dependent Random Vectors, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, vol. **64**, 1983, p. 211-239.

[10] R. N. BHATTACHARYA et R. RANGA RAO, *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*, New York, Wiley, 1976.

(*Manuscrit reçu le* 12 *janvier* 1988)
(*révisé le* 25 *janvier* 1989.)