

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ANDRÉ GOLDMAN

## **Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Lévy à trois paramètres**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 25, n° 4 (1989), p. 351-381

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1989\\_\\_25\\_4\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_4_351_0)

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Echanges Annales

## Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Lévy à trois paramètres

par

**André GOLDMAN**

Université de Lyon-I,  
Institut de Mathématiques et Informatique,  
Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle et Probabilités

**ABSTRACT.** — We obtain a precise relation between the three-parameter Brownian motion and the Gaussian process whose covariance coincides with the Green function of the first kind for the bilaplacian  $\Delta^2$  defined on the half-space  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ . Some consequences of this result are mentioned.

**RÉSUMÉ.** — On obtient une relation précise entre le mouvement brownien à trois paramètres de P. Lévy et le processus gaussien, admettant pour covariance la fonction de Green de première espèce du bilaplacien  $\Delta^2$  restreint au demi-espace  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ . Des conséquences de ce résultat sont indiquées.

*Mots clés :* Mouvement brownien à plusieurs paramètres, fonctions biharmoniques, propriété de Markov-simple, prédiction.

### 1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Découvert par P. Lévy en 1945 [10], qui fonde sur lui de grands espoirs (voir [11]), le mouvement brownien à plusieurs paramètres  $B(P)$ ,  $P \in \mathbb{R}^n$ ,

*Classification A.M.S. :* 60 G 25, 60 G 60, 60 J 65, 35 J 40.

$n \geq 2$ , a connu jusqu'à présent un destin modeste; on pourra consulter la bibliographie figurant à la fin de cet article pour un aperçu général des travaux anciens et récents sur ce sujet. Comparé à l'essor formidable du mouvement brownien indexé sur la droite, il fait indéniablement figure de « parent pauvre ». La raison de cet insuccès relatif se situe à deux niveaux. Au niveau conceptuel, une interprétation physique comparable à celle dont on peut faire état pour le mouvement brownien indexé sur la droite (théorie de la chaleur, théorie du potentiel, etc.) fait défaut. Au niveau purement technique, une approche analytique manque également; les méthodes habituellement employées pour l'étude des champs gaussiens ne permettant pas de rendre compte des particularités de ce processus. En conséquence, de nombreuses questions (dont certaines furent posées par P. Levy lui-même, voir [12]) restent à ce jour non résolues. Plus particulièrement, les propriétés des trajectoires du mouvement brownien à plusieurs paramètres sont incomplètement connues (voir [3], [6], [7] et [16]) la plupart des recherches menées sur ce sujet n'ont conduit que vers des réponses partielles, les quelques résultats « fins » dont on dispose ayant nécessité la mise en place de moyens très élaborés masquant le plus souvent la véritable nature du phénomène étudié (voir [6], par exemple).

Dans l'actuel travail nous établissons une liaison, qui nous semble particulièrement prometteuse, entre le mouvement brownien indexé sur un espace  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n \geq 3$  impaire, et le laplacien itéré  $(n+1)/2$ -fois (que nous noterons  $\Delta^{(n+1)/2}$ ). L'existence d'une relation de cette nature a été pressentie depuis longtemps par H. P. McKean [8] sans être jusqu'à présent explicitée. Nous ne traiterons que le cas  $n=3$ , qui présente l'avantage de simplifier les calculs, des extensions au cas  $n=2k+1$  quelconque pouvant être également obtenues.

Pour comprendre la démarche qui nous a guidé, commençons par rappeler que le mouvement brownien de P. Levy à  $n$  paramètres est le processus gaussien centré, indexé sur  $\mathbb{R}^n$  et caractérisé par la covariance :

$$(1.1) \quad E(\mathbf{B}(P)\mathbf{B}(Q)) = (1/2) [\|\mathbf{P}\| + \|\mathbf{Q}\| - \|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\|], \quad \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n.$$

En prenant  $n=1$  on retrouve, bien évidemment, le mouvement brownien « ordinaire » à temps réel et en particulier, lorsque  $s, t \in \mathbb{R}^+$ , l'écriture habituelle :

$$(1.2) \quad E(\mathbf{B}(t)\mathbf{B}(s)) = (1/2) [|t| + |s| - |t-s|] = \inf(s, t).$$

Malgré l'analogie apparente entre (1.1) et (1.2) il existe entre ces deux formules une différence tout à fait essentielle. Elle tient au fait que le noyau  $G_0(s, t) = \inf(s, t)$  est la fonction de Green du « laplacien » sur  $\mathbb{R}$ ,  $D_0 = d^2/dt^2$ , associée à l'intervalle  $I = [0, 1]$  et au problème aux limites  $u(0) = (du/dt)(1) = 0$ . Cette propriété, qui est responsable du caractère markovien du mouvement brownien  $\mathbf{B}(t)$ ,  $t \geq 0$ , ne se retrouve pas au niveau de l'expression (1.1). En effet, le noyau  $E(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = E(\mathbf{B}(\mathbf{P})\mathbf{B}(\mathbf{Q}))$

n'est pas une fonction de Green d'un opérateur différentiel elliptique défini sur un domaine de l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Cela étant, on peut tout de même remarquer que la distance euclidienne  $\|P - Q\|$  intervenant dans l'écriture de  $E(P, Q)$  est, lorsque la dimension  $n$  est impaire, la solution élémentaire du laplacien itéré  $\Delta^{(n+1)/2}$ , en particulier pour  $n=3$  il s'agit de la solution élémentaire du bilaplacien  $\Delta^2$ . Cette particularité conduit à penser qu'une relation entre le mouvement brownien  $B(P)$ ,  $P \in \mathbb{R}^3$ , et un second processus qui serait canoniquement associé au bilaplacien, pourrait exister. Il est intéressant de noter à ce propos qu'une situation semblable se présente dans le cas scalaire pour le processus stationnaire d'Ornstein-Uhlenbeck  $U(t) = e^{-\lambda t} B(e^{2\lambda t})$ ,  $t \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  fixé, dont la fonction de covariance  $E(U(t)U(s)) = \exp(-\lambda|t-s|)$  est une solution élémentaire de l'opérateur  $D_\lambda = d^2/dt^2 - \lambda^2$  sans être pour autant une fonction de Green. Cependant si on introduit le processus gaussien centré non stationnaire  $O(t)$ ,  $t \geq 0$ , admettant pour covariance  $E(O(t)O(s)) = \exp(-\lambda|t-s|) - \exp(\lambda(s+t))$  la fonction de Green de l'opérateur  $D_\lambda$  relative à l'intervalle  $I = [0, +\infty[$  et au problème aux limites  $u(0) = u(+\infty) = 0$ , alors on voit immédiatement que, à condition de prendre le processus  $O(t)$ ,  $t \geq 0$ , indépendant de la variable aléatoire  $U(0)$ , l'identité en loi

$$(1.3) \quad U(t) = e^{-\lambda t} U(0) + O(t), \quad t \geq 0,$$

est satisfaite. Il en résulte, en particulier, que pour une version convenable les trajectoires du processus  $U$  ne diffèrent de celles de  $0$  que par des dérivées «harmoniques»  $t \rightarrow a \exp(-\lambda t)$ .

Nous démontrons qu'une situation analogue à (1.3) se retrouve au niveau du mouvement brownien  $B(P)$  indexé sur le demi-plan  $\bar{H}_0^+ = \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$ . Plus précisément, considérons le processus gaussien centré  $V(P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$ , défini par  $V(P) \equiv 0$  lorsque  $P \in H_0 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  et de covariance

$$(1.4) \quad E(V(P)V(Q)) = (1/4) [\|P - Q\| - \|P - \bar{Q}\|]^2 / \|P - \bar{Q}\|,$$

$P, Q \in \bar{H}_0^+ \setminus H_0$ , où  $\bar{Q} = (x, -t)$  est le symétrique du point  $Q = (x, t)$  par rapport au plan  $H_0$ : à une constante multiplicative près, cette covariance est la fonction de Green de première espèce du bilaplacien  $\Delta^2$  restreint au demi-plan  $H_0^+$ . Il existe alors deux autres processus  $Z(P)$ ,  $Y(P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$  vérifiant les propriétés suivantes:

- (α) Les trois processus  $V$ ,  $Z$ ,  $Y$  sont mutuellement indépendants.
- (β) On a l'identité en loi

$$(1.5) \quad B(P) = V(P) + tZ(P) + Y(P), \quad P = (x, t) \in \bar{H}_0^+;$$

(γ) Les trajectoires du processus  $Z$  sont des fonctions harmoniques sur  $H_0^+$ , celles du processus  $Y$  étant biharmoniques (c'est-à-dire elles sont solution de l'équation  $\Delta^2 u = 0$ ).

Cette identité reliant  $B$  et  $V$  sur  $H_0^+$  se prolonge à  $\mathbb{R}^3$  tout entier, avec la formule

$$(1.6) \quad B(P) = V'(\bar{P}) + tZ(\bar{P}) + Y(\bar{P}), \quad P = (x, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus H_0^+,$$

le processus  $V'$  étant une copie de  $V$  indépendante du triplet  $V, Z, Y$ . On voit ainsi apparaître une propriété de réflexion, par rapport au plan  $H_0$ , pour le mouvement brownien  $B(P), P \in \mathbb{R}^3$ .

Dans la suite de notre travail nous explicitons une propriété de Markoff-simple pour le processus  $V(P), P \in H_0^+$ , sous la forme de l'identité en loi :

$$(1.7) \quad V(P + (0, a)) = V'(P) + W_a(P), \quad P \in H_0^+,$$

dans laquelle :

- ( $\alpha$ ) le point  $a > 0$  est fixé;
- ( $\beta$ ) le processus  $V'$  est une copie de  $V$  indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_a$  engendrée par les variables aléatoires  $V(x, t), x \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq a$ ;
- ( $\gamma$ ) les variables aléatoires  $W_a(P), P \in H_0^+$ , sont mesurables pour la tribu  $\mathcal{F}_a$ , les trajectoires du processus  $W_a$  étant presque sûrement des fonctions biharmoniques sur  $H_0^+$ .

Les preuves des identités (1.5), (1.6) et (1.7) reposent, principalement, sur deux types de résultats intermédiaires : (a) des formules de représentation de fonctions biharmoniques sur  $H_0^+$  à partir de leurs valeurs au bord  $H_0$ ; (b) des critères classiques assurant la continuité et précisant le comportement asymptotique des trajectoires des processus gaussiens. Concernant le point (a), l'unicité de la représentation, qui est un facteur essentiel ici, pose quelques problèmes (le domaine n'étant pas borné). Il ne nous a donc pas semblé inutile de détailler cette question au paragraphe préliminaire (2.1). Indiquons également que l'identité (1.7) rejoint, dans une certaine mesure, un travail fondamental de L. D. Pitt ([28], proposition 7.1; on pourra consulter également A. Benassi [23] et Yu. Rozanov [29]) développant une étude de la prédiction pour des processus gaussiens associés, au travers de leur covariance, à des opérateurs différentiels fortement elliptiques restreints à un domaine de l'espace euclidien. Cela étant, les travaux de ces auteurs ne visent pas à étudier les trajectoires des processus (ni, *a fortiori*, à utiliser leurs propriétés) les trajectoires envisagées se limitant à des domaines à frontière bornée (ce qui ne correspond pas au cadre de notre article).

Les décompositions canoniques (1.5) et (1.7) soulèvent à leur tour de nombreuses questions. Ainsi par exemple, on voit d'après (1.5) que les trajectoires du processus  $V$  ne diffèrent de celles du mouvement brownien  $B$  que à des dérivées biharmoniques près. On peut alors s'interroger sur l'influence que peut avoir une telle dérive sur le comportement de la trajectoire du processus  $V$ . Nous conjecturons qu'elle est de peu d'effet. Pour être plus précis, considérons deux processus  $\bar{V} = (V_1, \dots, V_p), \bar{B} = (B_1, \dots, B_p)$  constitués respectivement de  $p$ -copies indépendantes de  $V$

et  $B$ , alors il nous semble raisonnable d'énoncer :

CONJECTURE. — Soit  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , on a l'équivalence :

$$P(\exists P \in H_0^+; \bar{V}(P) \in K) > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$P\{\exists P \in H_0^+; \bar{B}(P) \in K\} > 0.$$

En d'autres termes les processus  $\bar{V}$  et  $\bar{B}$  ont les mêmes ensembles polaires.

Un autre point important auquel il serait bon de répondre, concerne l'évaluation des probabilités de visite du processus  $\bar{V}$ . Est-il possible de caractériser [en s'appuyant par exemple sur la propriété de Markov (1.7)] les compacts  $K \subset \mathbb{R}^p$ ,  $p \geq 1$ , qui sont visités avec une probabilité non nulle? Existe-t-il un lien entre les probabilités de visite et l'équation biharmonique  $\Delta^2 u = 0$  (qui serait analogue à celui que l'on connaît entre le mouvement brownien à indice scalaire et l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ )? Quelle est la distribution du maximum de la restriction du processus  $V$  à une partie bornée de  $H_0^+$ ?

Indiquons pour finir une conséquence facile des identités (1.5) et (1.7) qui nous semble particulièrement frappante. On sait (voir [27]) que toute fonction  $h$  qui est biharmonique sur un domaine  $U \subset \mathbb{R}^2$ , satisfait la formule de la moyenne :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec} \\ M_\varepsilon(h, P) = (15/8 \pi \varepsilon^3) \int_{B(P, \varepsilon)} h dQ - (3/8 \pi \varepsilon^2) \int_{S(P, \varepsilon)} h d\sigma, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h(P) = M_\varepsilon(h, P), \quad P \in U, \quad \varepsilon > 0, \\ \end{array}$$

la boule  $B(P, \varepsilon)$  de centre  $P$  et de rayon  $\varepsilon > 0$  étant inclus dans  $U$ ,  $d\sigma$  désignant la mesure de surface de la sphère  $S(P, \varepsilon) = \partial B(P, \varepsilon)$ .

Fixons  $\varepsilon$ ,  $a$  vérifiant  $0 < 2\varepsilon < a$ . On voit alors avec (1.5) et (1.7) que les processus

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(P) - M_\varepsilon(B, P), \quad P = (x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon, \\ \text{et} \\ B(P + (0, a)) - M_\varepsilon(B, P + (0, a)), \quad P = (x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon, \end{array} \right.$$

sont indépendants et identiquement distribués. Cette propriété est à rapprocher de l'énoncé analogue pour le mouvement brownien indexé sur la droite, découlant de l'indépendance des accroissements et faisant intervenir la moyenne « harmonique », notamment :

Les points  $\varepsilon$ ,  $a$  étant fixés, les processus

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(t) - (1/2)[B(t - \varepsilon) + B(t + \varepsilon)], \quad \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon, \\ \text{et} \\ B(t + a) - (1/2)[B(t + a - \varepsilon) + B(t + a + \varepsilon)], \quad \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon \end{array} \right.$$

sont indépendants et identiquement distribués.

Notons qu'une expression un peu différente de (1.9) peut être obtenue en remplaçant la moyenne  $M_e(h, P)$  figurant dans (1.8) par :

$$M_{r,R}(h, P) = R^2 (R^2 - r^2)^{-1} \int_{S(P,r)} h d\sigma_r - r^2 (R^2 - r^2)^{-1} \int_{S(P,R)} h d\sigma_R,$$

$0 < r < R,$

la boule  $B(P, R)$  de centre  $P$  et de rayon  $R$  étant inclus dans  $U$ ,  $d\sigma_r$  et  $d\sigma_R$  désignant les mesures de surfaces normalisées des sphères  $S(P, r)$  et  $S(P, R)$  centrées au point  $P$  et de rayons respectifs  $r$  et  $R$ . Finalement, on pourrait songer à exploiter la propriété (1.9) pour construire une « intégrale stochastique » associée au mouvement brownien à trois paramètres; une telle étude reste à faire.

## 2. PRÉLIMINAIRES

### 2.1. Quelques rappels concernant l'opérateur différentiel $\Delta^2$

L'essentiel de ce travail se situe dans le cadre des fonctions définies continues sur un demi-espace fermé  $\bar{H}_a^+ = \mathbb{R}^2 \times [a, +\infty[$ ,  $a \geq 0$ , et biharmoniques sur le demi-espace ouvert  $H_a^+ = \mathbb{R}^2 \times ]a, +\infty[$ . Nous poserons encore:  $H_a = \mathbb{R}^2 \times \{a\}$ ,  $\bar{H}_0^- = \mathbb{R}^2 \times ]-\infty, 0]$  et  $H_0^- = \mathbb{R}^2 \times ]-\infty, 0[$ .

Pour tout point  $P \in \bar{H}_a^+$  nous noterons  $P = (x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $t \geq a$ . La distance euclidienne entre deux points  $P, Q \in \bar{H}_a^+$  s'écrit donc

$$\|P - Q\| = [\|x - y\|^2 + (t - s)^2]^{1/2}, \quad P = (x, t), \quad Q = (y, s)$$

avec

$$\|x - y\| = [(u - u')^2 + (v - v')^2]^{1/2}, \quad x = (u, v), \quad y = (u', v').$$

Convenons de désigner respectivement par  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  les opérateurs de dérivation partielle  $\partial/\partial u$ ,  $\partial/\partial v$  et  $\partial/\partial t$ ,  $P = (x, t)$ ,  $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $f$  est une fonction définie sur un demi-espace  $\bar{H}_a^+$  et  $P = (x, a)$  un point situé sur l'hyperplan affine  $H_a$ , alors  $D_3 f(P)$  correspond à la dérivée à droite au point  $P$ . Finalement, pour tout point  $P$  appartenant à la frontière  $\partial U$  (de classe  $C^1$ ) d'un domaine  $U \subset \bar{H}_0^+$ , nous noterons par  $D_n f(P)$  la dérivée au point  $P$  suivant la normale unité intérieure au domaine.

Une part importante de nos résultats repose sur le fait qu'une fonction  $f$  définie continue sur  $\bar{H}_0^+$  et biharmonique sur  $H_0^+$  peut se représenter, sous certaines conditions que nous allons préciser, à partir de ses valeurs limites :

$$g(x) = f(x, 0) \quad \text{et} \quad h(x) = D_3 f(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

selon la formule :

$$(2.1.1) \quad f(P) = \int [K_1(x-y, t)g(y) + K_2(x-y, t)h(y)] dy, \quad P = (x, t) \in H_0^+,$$

les noyaux de Poisson  $K_1(P)$  et  $K_2(P)$ , intervenant dans cette expression se présentant sous la forme :

$$(2.1.2) \quad \left\{ \begin{aligned} K_1(x, t) &= \frac{3t^3}{2\pi(\|x\|^2 + t^2)^{5/2}} \\ K_2(x, t) &= \frac{t^2}{2\pi(\|x\|^2 + t^2)^{3/2}}, \end{aligned} \right. \quad P = (x, t) \in H_0^+.$$

Une étude assez complète des fonctionnelles obtenues en prenant des produits de convolution de noyaux de Poisson par des fonctions définies au « bord » d'un demi-espace, est présentée en [20] et [21]. Cela étant, les résultats qui se trouvent exposés dans ces travaux ne permettent pas de vérifier que les fonctions biharmoniques que nous allons considérer admettent la représentation (2.1.1). Les complications proviennent, bien évidemment, du fait que le domaine  $H_0^+$  n'étant pas borné le problème de Lauricella pour le bilaplacien n'a pas de solution unique. Commençons par donner un critère assurant, sous certaines conditions de régularité, la validité de la formule (2.1.1). Précisons, tout d'abord, quelques notations.

Soient,  $B(R)$  la boule ouverte centrée au point  $C = C(R) = (0, R) \in H_0^+$  et de rayon  $R > 0$ ,  $S(R)$  sa frontière et  $I: B(R) \rightarrow B(R)^c \subset \mathbb{R}^3$  l'inversion de centre  $C(R)$  et de puissance  $R^2$ . La fonction de Green du bilaplacien  $\Delta^2$ , pour le problème intérieur de Lauricella relatif à la boule  $B(R)$ , s'écrit ([27], p. 37) :

$$(2.1.3) \quad \left\{ \begin{aligned} L(P, Q) &= (1/16\pi) \left[ \frac{R\|P-Q\|^2}{\|P-C\| \cdot \|Q-I(P)\|} - 2\|P-Q\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|P-C\| \cdot \|Q-I(P)\|}{R} \right], \\ P, Q &\in B(R). \end{aligned} \right.$$

Le point  $P \in B(R)$  étant fixé, le laplacien de l'application  $Q \rightarrow L(P, Q)$  se calcule selon :

$$(2.1.4) \quad \Delta L(P, Q) = A_0(P, Q) + B_0(P, Q),$$

avec :

$$(2.1.5) \quad A_0(P, Q) = (1/8\pi) \left[ \frac{3R^2 + \|P-C\|^2}{R\|P-C\| \cdot \|Q-I(P)\|} - \frac{2R\|P-Q\|^2}{\|P-C\| \cdot \|Q-I(P)\|^3} - \frac{2}{\|P-Q\|} \right],$$



et

$$(2.1.6) \quad B_0(P, Q) = (1/4\pi) R \langle P - Q, P - I(P) \rangle / \|P - C\| \cdot \|Q - I(P)\|^3,$$

la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .

Plus particulièrement, en prenant  $Q \in S(R)$  on obtient :

$$(2.1.7) \quad A_0(P, Q) = (1/8\pi) (R^2 - \|P - C\|^2) / R^2 \|P - Q\|,$$

et

$$(2.1.8) \quad B_0(P, Q) = (1/4\pi) \|P - C\|^2 \langle P - Q, P - I(P) \rangle / R^2 \|P - Q\|^3.$$

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|y\| < R$ , nous poserons

$$Q^*(y, R) = (y, R^* \sqrt{R^2 - \|y\|^2}), \quad Q^*(y, 1) = Q^*(y).$$

Ces points appartiennent à la sphère  $S(R)$  et on vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$(2.1.9) \quad (a) \quad \|P - RQ^-(y)\| \geq (1/2) \left( \|x\| \cdot \|y\| - t(1 + \sqrt{1 - \|y\|^2}) \right), \quad \text{pour tout } P = (x, t) \in H_0^+, y \in \mathbb{R}^2, \|y\| \leq 1 \text{ et } R > 0;$$

$$(a') \quad \|P - RQ^-(y)\| \geq (1/2) R \|y\| \quad \text{si} \quad R \|y\| \geq 2 \|x\|, \quad \|y\| \leq 1, P = (x, t) \in H_0^+;$$

$$(a'') \quad \|P - RQ^-(y)\| \geq t/2 \quad \text{si} \quad R \|y\| \leq 2 \|x\| \quad \text{et} \quad R \geq 8 \|x\|^2/t, \quad \|y\| \leq 1, P = (x, t) \in H_0^+;$$

$$(a''') \quad \|P - RQ^-(y)\|^{-1} \leq (2/R \|y\|) (1 + 2 \|x\|/t), \quad \text{pour tout } R \geq 8 \|x\|^2/t, \|y\| \leq 1, P = (x, t) \in H_0^+;$$

$$(b) \quad 0 \leq A_0(P, R, Q^-(y)) \leq (t/2\pi R^2 \|y\|) (1 + 2 \|x\|/t), \quad \text{pour tout } R \geq 8 \|x\|^2/t, \|y\| \leq 1, P = (x, t) \in H_0^+;$$

(c)  $B_0(P, Q) = C_0(P, Q) + D_0(P, Q)$ ,  $P \in H_0^+$ ,  $Q \in S(R)$ , avec :

$$C_0(P, Q) = (1/4\pi) \|P - C\|^2 \langle x - y, x \left( 1 - \frac{R^2}{\|P\|^2} \right) \rangle R^{-2} \|P - Q\|^{-3},$$

et

$$D_0(P, Q) = (1/4\pi) \|P - C\|^2 \left\langle t - (R - \sqrt{R^2 - \|y\|^2}), \right. \\ \left. t - \left( R + \frac{t - R}{\|P\|^2} \times R^2 \right) \right\rangle R^{-2} \|P - Q\|^{-3};$$

$$(d) \quad |D_0(P, Q^-(y, R))| \leq c_1 \left| t - (R - \sqrt{R^2 - \|y\|^2}) \|P - Q^-(y, R)\|^{-3} \right. \\ \left. \leq (c_1 t/2) [\|x - y\|^2 + t^2/4]^{-3/2} \right.$$

si  $\|y\|^2/R \leq t/2$  et  $R \geq c_2$ , les constantes  $c_1 > 0$  et  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $P = (x, t) \in H_0^+$ ;

$$(e) \quad |D_0(P, RQ^-(y))| \leq (3c_1 R \|y\|^2) \|P - RQ^-(y)\|^{-3} \\ \leq (24c_1 / \|y\| R^2) (1 + 2 \|x\|/t)^3$$

si  $R \|y\|^2 \geq t/2$  et  $R \geq c_3$ ,  $\|y\| \leq 1$ , la constante  $c_3 > 0$  ne dépendant que de  $P$ ;

$$(f) \lim_{R \rightarrow +\infty} D_0(P, Q^-(y, R)) = K_2(x - y, t), \quad y \in \mathbb{R}^2, P = (x, t) \in H_0^+;$$

$$(g) |C_0(P, RQ^-(y))| \leq (c_4/R) \|P - RQ^-(y)\|^{-2} \\ \leq (4c_4/R^2 \|y\|)(1 + 2\|x\|t) \times \|x\| \cdot \|y\| - t(1 + \sqrt{1 - \|y\|^2})^{-1},$$

pour tout  $R \geq c_5$  et  $\|y\| \leq 1$ , les constantes  $c_4 > 0$  et  $c_5 > 0$  ne dépendant que de P;

$$(h) \|P - RQ^+(y)\| \geq (1/2)R, \quad \|y\| \leq 1, R \geq 2t;$$

(i)  $A_0(P, RQ^+(y)) + |B_0(P, RQ^+(y))| \leq c_6/R^2, \quad R \geq c_7, \quad \|y\| \leq 1$ , les constantes  $c_6 > 0$  et  $c_7 > 0$  ne dépendant que de P.

Nous en déduisons le lemme suivant :

LEMME (2.1). — Soit  $f: \bar{H}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, bornée et vérifiant :

$$(\alpha) \lim_{R \rightarrow +\infty} f(RQ) = 0, \text{ pour tout } Q \in H_0^+;$$

$$(\beta) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(y, \varepsilon) = f(y, 0), \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^2.$$

Notons

$$I(R, P) = \int_{S(R)} f(Q) \Delta L(P, Q) d\sigma(Q),$$

où  $d\sigma(Q)$  désigne la mesure de surface de la sphère  $S(R)$ . Alors on a :

$$(2.1.10) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R, P) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y, 0) K_2(x - y, t) dy, \\ \text{pour tout point } P = (x, t) \in H_0^+.$$

Preuve du lemme. — Notons  $S^-(R) = \{(y, s) \in S(R); s < R\}$ ,  $S^+(R) = \{(y, s) \in S(R); s > R\}$  et soit  $\varphi(t)$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1[$  ( $\varphi(t) = 1$  si  $0 \leq t < 1$ ,  $\varphi(t) = 0$  si  $t \geq 1$ ). L'intégrale  $I(R, P)$  peut se décomposer sous la forme :

$$(2.1.11) \quad I(R, P) = I^+(R, P) + I_1^-(R, P) + I_2^-(R, P)$$

avec :

$$(2.1.12) \quad I^+(R, P) = \int_{S^+(R)} f(Q) [A_0(P, Q) + B_0(P, Q)] d\sigma(Q) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\|y\|/R) f(Q^+(y, R)) [A_0(P, Q^+(y, R)) + B_0(P, Q^+(y, R))] \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|y\|^2}} dy \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\|y\|/R) f(RQ^+(y)) [A_0(P, RQ^+(y)) + B_0(P, RQ^+(y))] \frac{R^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy$$

$$(2.1.13) \quad I_1^-(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) A_0(P, Q) d\sigma(Q) \\ = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) f(RQ^-(y)) A_0(P, RQ^-(y)) \frac{R^2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy,$$

$$(2.1.14) \quad I_2^-(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) B_0(P, Q) d\sigma(Q) \\ = M(R, P) + N(R, P)$$

où :

$$M(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) C_0(P, Q) d\sigma(Q) \\ = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) f(RQ^-(y)) C_0(P, RQ^-(y)) \frac{R^2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy,$$

et :

$$N(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) D_0(P, Q) d\sigma(Q) \\ = N_1(R, P) + N_2(R, P)$$

où :

$$N_1(R, P) = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(2\|y\|^2/Rt) f(Q^-(y, R)) \\ \times D_0(P, Q^-(y, R)) \frac{R}{\sqrt{R^2-\|y\|^2}} dy$$

et

$$N_2(R, P) = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) [1 - \varphi(2R\|y\|^2/t)] f(RQ^-(y)) \\ \times D_0(P, RQ^-(y)) \frac{R^2}{\sqrt{1-\|y\|^2}} dy.$$

La fonction  $f$  étant bornée, on obtient, en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, les valeurs limites suivantes :

$$(2.1.15) \quad 0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_1^+(R, P) = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_1^-(R, P) \\ = \lim_{R \rightarrow +\infty} M(R, P) = \lim_{R \rightarrow +\infty} N_2(R, P)$$

$$(2.1.16) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} N_1(R, P) = \int_{\mathcal{R}^2} f(y, 0) K_2(x-y, t) dy, \\ P = (x, t) \in H_0^+.$$

Concernant les intégrales  $I^+$ ,  $I_1^-$ ,  $M$  et  $N_2$ , les conditions de domination résultent respectivement de (2.1.9) (i), (b), (g) et (e) et l'on conclut d'après l'hypothèse ( $\alpha$ ) du lemme. Dans le cas de l'intégrale  $N_1$  la condition de domination est assurée par (d) [en notant que l'on a:  $R/(R^2 - \|y\|^2)^{1/2} \leq 1/2$  pour  $2R\|y\|^2 \leq t$  si  $R \geq 2t/3$ ] la limite se déduisant alors de (f) et de l'hypothèse ( $\beta$ ) du lemme.

Considérons maintenant l'application  $Q \rightarrow \Delta L(P, Q)$ . Le point  $P \rightarrow B(R)$  étant fixé, la dérivée normale  $D_n \Delta L(P, Q)$ , calculée en un point  $Q$  appartenant à la sphère  $S(R)$ , s'écrit :

$$(2.1.17) \quad D_n \Delta L(P, Q) = A_1(P, Q) + B_1(P, Q),$$

avec :

$$(2.1.18) \quad A_1(P, Q) = 2(R^2 - \|P - C\|^2) [8\pi R^4 \|Q - C\| \cdot \|Q - P\|^3]^{-1} \\ \times \langle Q - C, R^2(P - Q) + \|P - C\|^2(Q - I(P)) \rangle$$

et

$$B_1(P, Q) = 3\|P - I(P)\|^2 \|P - C\|^4 [8\pi R^4 \|Q - C\| \cdot \|Q - P\|^5]^{-1} \\ \times \langle I(P) - Q, C - Q \rangle.$$

On établit, à partir des inégalités (2.1.9) une nouvelle série d'estimations concernant les noyaux  $A_1(P, Q)$  et  $B_1(P, Q)$ . Les constantes  $d_i > 0$ ,  $i = 1, \dots$ , intervenant dans les expressions qui suivent ne dépendent que du point  $P \in H_0^+$ .

(2.1.19) (a)  $A_1(P, Q) = C_1(P, Q) + D_1(P, Q)$ , avec :

$$C_1(P, Q) = 2(2Rt - \|x\|^2) [8\pi R^5 \|Q - P\|^3]^{-1} \\ \times \langle y, R^2(x - y) + \|P - C\|^2 \left( y - \frac{x}{\|P\|^2} R^2 \right) \rangle$$

et

$$D_1(P, Q) = 2(2Rt - \|x\|^2) [8\pi R^5 \|Q - P\|^3]^{-1} \\ \times \langle s - R, R^2(t - s) + \|P - C\|^2 \left( s - R - \frac{t - R}{\|P\|^2} R^2 \right) \rangle,$$

$$P = (x, t), \quad Q = (y, s);$$

(b)  $|C_1(P, RQ^-(y))| \leq d_1 \|y\| (1 + R\|y\|) / R^2 \|P - RQ^-(y)\|^3 \leq d_2 \|y\| R^3$  pour  $R \geq d_3$  et  $\|y\| \leq 1$  [on aura utilisé les majorations (2.1.9) (a) et (a'')];

(c)  $|D_1(P, Q^-(R, y))| \leq d_4 [R^2 - \|y\|^2]^{1/2} / R^2 \|P - Q^-(y, R)\|^3 \\ \leq d_5 [R^2 - \|y\|^2]^{1/2} / R^2 [\|x - y\|^2 + t^2/4]^{3/2},$

si  $\|y\|^2 \leq Rt/2$  et  $R \geq d_6$ ;

$$(d) \quad |D_1(P, RQ^-(y))| \leq d_7 / R \|P - RQ^-(y)\|^3 \\ \leq d_8 / R (R\|y\|)^3 \\ \leq d_9 / R^3 \|y\|,$$

si  $R \|y\|^2 \geq t/2$ ,  $\|y\| \leq 1$  et  $R \geq d_{10}$ ;

$$(e) \lim_{R \rightarrow +\infty} |D_1(P, Q^-(R, y))| R^2 / \sqrt{R^2 - \|y\|^2} = 0, P \in H_0^+ \text{ et } y \in \mathbb{R}^2 \text{ étant}$$

fixés;

$$(f) \lim_{R \rightarrow +\infty} R^3 D_1(P, Q^-(R, y)) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^3 C_1(P, RQ^-(y)) = 0, P \in H_0^+$$

et  $0 < \|y\| \leq 1$  étant fixés;

$$(g) B_1(P, Q) = C_2(P, Q) + D_2(P, Q), \text{ avec:}$$

$$C_2(P, Q) = 3 \|P - I(P)\|^2 \|P - C\|^4 [8\pi R^5 \|Q - P\|^5]^{-1}$$

$$\times \left\langle y - \frac{x}{\|P\|^2} R^2, y \right\rangle$$

$$D_2(P, Q) = 3 \|P - I(P)\|^2 \|P - C\|^4 [8\pi R^5 \|Q - P\|^5]^{-1}$$

$$\times \left\langle R + \frac{t-R}{\|P\|^2} R^2 - s, R - s \right\rangle,$$

$$P = (x, t), \quad Q = (y, s);$$

$$(h) |C_2(P, RQ^-(y))| \leq d_{11} \|y\|/R \|P - RQ^-(y)\|^5 \\ \leq d_{12}/\|y\| R^3, \text{ pour } R \geq d_{13} \text{ et } \|y\| \leq 1;$$

$$(i) |D_2(P, Q^-(y, R))| \leq d_{13} [R^2 - \|y\|^2]^{1/2}/R \|P - Q^-(y, R)\|^5 \\ \leq d_{14} [R^2 - \|y\|^2]^{1/2}/R [\|x - y\|^2 + t^2/4]^{5/2}$$

si  $\|y\|^2 \leq R t/2$  et  $R \geq d_{15}$ ;

$$(j) |C_2(P, RQ^-(y))| \leq d_{16}/\|P - RQ^-(y)\|^5 \\ \leq d_{17}/R^5 \|y\|^5 \\ \leq d_{18}/R^3 \|y\|,$$

si  $R \|y\|^2 > t/2$ ,  $\|y\| \leq 1$  et  $R \geq d_{19}$ ;

$$(k) \lim_{R \rightarrow +\infty} R^3 D_2(P, RQ^-(R, y)) = \lim_{R \rightarrow +\infty} R^3 C_2(P, RQ^-(y)) = 0,$$

$P \in H_0^+$  et  $0 < \|y\| \leq 1$  étant fixés;

$$(l) \lim_{R \rightarrow +\infty} D_2(P, Q^-(y, R)) = -K_1(x - y, t), y \in \mathbb{R}^2, P = (x, t) \in H_0^+;$$

$$(m) |A_1(P, RQ^+(y))| + |B_1(P, RQ^+(y))| \leq d_{20}/R^4 \text{ si } R \geq d_{21}.$$

Les inégalités (2.1.19) vont nous permettre de démontrer le résultat suivant :

LEMME (2.2). — Soit  $f: \bar{H}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, vérifiant :

$$(\alpha) |f(RQ)| = O(R) \text{ lorsque } R \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } Q \in H_0^+;$$

$$(\beta) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(y, \varepsilon) = f(y, 0) \text{ pour presque tout } y \in \mathbb{R}^2;$$

( $\gamma$ ) Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ , de sorte que l'on ait :

$$|f(y, \varepsilon)| \leq f_1(y) [\|y\|^2 + 1]^{5/2} \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \text{ et tout } y \in \mathbb{R}^2.$$

Notons

$$J(P, R) = \int_{S(R)} f(Q) D_n \Delta L(P, Q) d\sigma(Q)$$

en prenant pour  $d\sigma(Q)$  la mesure de surface de la sphère  $S(R)$ . Alors on a :

$$(2.1.20) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} J(R, P) = - \int_{\mathbb{R}^2} f(y, 0) K_1(x-y, t) dy,$$

pour tout point  $P = (x, t) \in H_0^+$ .

*Preuve du lemme.* — Considérons à nouveau les sphères  $S^-(R)$  et  $S^+(R)$  introduites lors de la preuve du lemme (2.1). Soit  $\varphi(t), t \geq 0$ , la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1]$ . L'intégrale  $J(R, P)$  se décompose sous la forme :

$$(2.1.21) \quad J(R, P) = J^+(R, P) + J_1^-(R, P) + J_2^-(R, P) + J_3^-(R, P) + J_4^-(R, P)$$

avec :

$$(2.1.22) \quad J^+(R, P) = \int_{S^+(R)} f(Q) [A_1(P, Q) + B_1(P, Q)] d\sigma(Q)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\|y\|/R) f(Q^+(y, R)) [A_1(P, Q^+(y, R)) + B_1(P, Q^+(y, R))] \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|y\|^2}} dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\|y\|) f(RQ^+(y)) [A_1(P, RQ^+(y)) + B_1(P, RQ^+(y))] \frac{R^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy,$$

$$(2.1.23) \quad J_1^-(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) C_1(P, Q) d\sigma(Q)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\|y\|) f(RQ^-(y)) C_1(P, RQ^-(y)) \frac{R^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy,$$

$$(2.1.24) \quad J_2^-(R, P) = \int_{S^-(R)} f(Q) D_1(P, Q) d\sigma(Q)$$

$$= M_1(R, P) + N_1(R, P)$$

avec :

$$M_1(R, P) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(2\|y\|^2/R) f(Q^-(y, R))$$

$$\times D_1(P, Q^-(y, R)) \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|y\|^2}} dy$$

et

$$N_1(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) (1 - \varphi(2\mathbf{R}\|y\|^2/t)) f(\mathbf{RQ}^-(y)) \\ \times D_1(\mathbf{P}, \mathbf{RQ}^-(y)) \frac{\mathbf{R}^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy$$

$$(2.1.25) \quad J_3^-(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \int_{S^-(\mathbf{R})} f(\mathbf{Q}) C_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) d\sigma(\mathbf{Q}) \\ = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) f(\mathbf{RQ}^-(y)) C_2(\mathbf{P}, \mathbf{RQ}^-(y)) \frac{\mathbf{R}^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy,$$

$$(2.1.26) \quad J_4^-(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \int_{S^-(\mathbf{R})} f(\mathbf{Q}) D_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) d\sigma(\mathbf{Q}) \\ = M_2(\mathbf{R}, \mathbf{P}) + N_2(\mathbf{R}, \mathbf{P})$$

avec :

$$M_2(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(2\|y\|^2/\mathbf{R}t) f(\mathbf{Q}^-(y, \mathbf{R})) \\ \times D_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}^-(y, \mathbf{R})) \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R}^2 - \|y\|^2}} dy$$

et

$$N_2(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \int_{\mathcal{R}^2} \varphi(\|y\|) (1 - \varphi(2\mathbf{R}\|y\|^2/t)) f(\mathbf{RQ}^-(y)) \\ \times D_2(\mathbf{P}, \mathbf{RQ}^-(y)) \frac{\mathbf{R}^2}{\sqrt{1 - \|y\|^2}} dy$$

En appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on voit, avec l'hypothèse ( $\alpha$ ) du lemme (2.2), que les intégrales  $J^+(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ ,  $J_1^-(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ ,  $M_1(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ ,  $N_1(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ ,  $J_3^-(\mathbf{R}, \mathbf{P})$  et  $N_2(\mathbf{R}, \mathbf{P})$  convergent, lorsque  $\mathbf{R} \rightarrow +\infty$ , vers zéro. Cela découle respectivement des points : (m), (b) et (f), (c) et (e), (d) et (f), (h) et (k), (j) et (k), de (2.1.19).

De même, les hypothèses ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) associées aux estimations (i) et (l) de (2.1.19) conduisent, via le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, vers :

$$(2.1.27) \quad \lim_{\mathbf{R} \rightarrow +\infty} M_2(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = - \int_{\mathcal{R}^2} f(y, 0) K_1(x-y, t) dy$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Les lemmes (2.1) et (2.2) permettent, à leur tour, de formuler un critère assurant la validité de la représentation (2.1.1) pour une fonction  $f$  biharmonique sur le demi-espace  $H_0^+$ .

PROPOSITION (2.1). — Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{H}_0^+$  et biharmonique sur  $\mathbb{H}_0^+$ . On suppose les conditions suivantes réalisées :

( $\alpha$ )  $f(\mathbb{R}Q) = O(R)$ , lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , pour tout  $Q \in \mathbb{H}_0^+$ .

( $\beta$ ) Pour presque tout  $y \in \mathbb{R}^2$ , la fonction  $f(y, \varepsilon)$  converge, lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers une limite  $g(y) \in \mathbb{R}$ .

( $\gamma$ ) Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue, de sorte que l'on ait :

$$|f(y, \varepsilon)| \leq f_1(y) [ \|y\|^2 + 1 ]^{5/2} \quad \text{pour tout } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \text{ et tout } y \in \mathbb{R}^2.$$

( $\delta$ ) Les dérivées partielles  $D_i f(Q)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont bornées sur  $\mathbb{H}_0^+$  et l'on a :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} D_i f(\mathbb{R}Q) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad Q \in \mathbb{H}_0^+;$$

( $\varepsilon$ ) Pour presque tout  $y \in \mathbb{R}^2$  la fonction  $f$  admet une dérivée à droite  $D_3 f(y, 0) = h(y)$  telle que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} \langle \text{grad} f(Q^-(y, R)), C - Q^-(y, R) \rangle = h(y).$$

Alors, dans ces conditions, la représentation (2.1.1) est satisfaite.

Preuve. — Fixons  $P \in \mathbb{H}_0^+$ ; pour  $R$  pris suffisamment grand ( $R > \|P\|^2/2t$ ) le point  $P$  appartient à la boule ouverte  $B(R)$ . La fonction  $f$  étant, en particulier, biharmonique sur le domaine borné  $B(R)$ , sa valeur  $f(P)$  au point  $P \in B(R)$  se calcule explicitement à partir des valeurs limites  $f(Q)$  et  $D_n f(Q)$ ,  $Q \in \partial B(R) = S(R)$  (d'après la solution du problème de Lauricella, voir [27], p. 36, ou [22], p. 183) selon :

$$(2.1.28) \quad f(P) = I(R, P) + J(R, P), \quad R > \|P\|^2/2t$$

avec :

$$(2.1.29) \quad I(R, P) = \int_{S(R)} R^{-1} \langle \text{grad}(f(Q)), C - Q \rangle \Delta L(P, Q) d\sigma(Q)$$

et

$$(2.1.30) \quad J(R, P) = - \int_{S(R)} f(Q) D_n \Delta L(P, Q) d\sigma(Q).$$

Les hypothèses ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ) et ( $\varepsilon$ ), figurant dans l'énoncé de la proposition, impliquent que les conditions d'application des lemmes (2.1) et (2.2) sont réunies, par suite il vient :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R, P) = \int_{\mathbb{R}^2} h(y) K_2(x - y, t) dy$$



et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} J(R, P) = \int_{\mathbb{R}^2} g(y) K_1(x-y, t) dy$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Précisons les représentations qui vont nous être utiles dans la suite de ce travail. Soit :

$$(2.1.31) \quad E(P, Q) = (1/2) [\|P\| + \|Q\| - \|P - Q\|], \quad P, Q \in \mathbb{R}^3,$$

la fonction de covariance du mouvement brownien de P. Levy indexé sur  $\mathbb{R}^3$ . Considérons également la fonction de Green de première espèce, pour le bilaplacien, relative au domaine  $H_0^+$ ; elle s'écrit :

$$\begin{aligned} G_0(P, Q) &= G_0(Q, P) = \lim_{R \rightarrow +\infty} L(P, Q) \\ &= (1/16\pi) [\|P - Q\|^2 - \|P - \bar{Q}\|^2] / \|P - \bar{Q}\| \\ &= (1/16\pi) [\|P - Q\|^2 / \|P - \bar{Q}\| - 2\|P - Q\| + \|P - \bar{Q}\|], \quad P, Q \in H_0^+, \end{aligned}$$

où  $\bar{Q} = (y, -s)$  est le symétrique du point  $Q = (y, s)$ ,  $s > 0$ , par rapport à l'hyperplan  $H_0$ .

Notons encore :

$$(2.1.32) \quad f(P, Q) = E(P, Q) - 4\pi G_0(Q, P).$$

La fonction  $f(P, Q)$  étant biharmonique, séparément en P et Q, sur  $H_0^+$  nous allons établir, comme conséquence de la proposition (2.1), la formule suivante :

PROPOSITION (2.2). — Pour tout choix de  $P = (x, t)$ ,  $Q = (y, s)$ ,  $P, Q \in H_0^+$ , on a :

$$(2.1.33) \quad f(P, Q) = (1/2) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [(\|u\| + \|v\| - \|u - v\|) K_1(x - u, t) K_1(y - v, s) + \|u - v\|^{-1} K_2(x - u, t) K_2(y - v, s)] du dv.$$

Preuve. — Fixons  $P \in H_0^+$ , la fonction  $Q \rightarrow f(P, Q)$  est définie continue sur  $H_0^+$  et biharmonique sur  $H_0^+$ . En outre, des calculs simples permettent de voir que l'on a :

(α)  $f(P, RQ) = O(R)$ , lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , pour tout  $Q \in H_0^+$ ;

(β)  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(P, (y, \varepsilon)) = f(P, (y, 0)) = E(P, (y, 0))$ ;

(γ)  $f(P, (y, s)) \leq c(\|y\| + 1)$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$  et tout  $0 \leq s \leq 1$ , la constante  $c > 0$  ne dépendant que de P. Ainsi, la majoration (γ), figurant parmi les hypothèses de la proposition (2.1), est satisfaite (avec le choix  $f_1(y) = 2c/[\|y\|^2 + 1]^2$ ).

(δ)  $D_i f(P, Q) = (1/2) \{ y_i \|Q\|^{-1} - (1/2)(y_i - x_i) \times [2\|P - Q\|^{-1} - \|P - Q\|^2 \|P - \bar{Q}\|^{-3} + \|P - \bar{Q}\|^{-1}] \}$ ,  $i = 1, 2$ ;

$D_3 f(P, Q) = (1/2) \{ s \|Q\|^{-1} - (1/2) [2(s-t) \|P - \bar{Q}\|^{-1} - (s+t) \|P - \bar{Q}\|^2 \|P - \bar{Q}\|^{-3} + (s+t) \|P - \bar{Q}\|^{-1}] \}$   
 avec  $P = (x_1, x_2, t)$  et  $Q = (y_1, y_2, s)$ . Il en résulte, en particulier, que :

$$|D_i f(P, Q)| \leq 3/2 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} D_i f(P, RQ) = 0 \quad \text{pour tout } Q \in H_0^+, \quad i = 1, 2, 3.$$

(ε) Pour tout  $y \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$ , la fonction  $Q \rightarrow f(P, Q)$  admet une dérivée à droite :

$$D_3 f(P, (y, 0)) = (t/2) \|P - (y, 0)\|^{-1}.$$

(ε')  $\langle \text{grad } f(P, Q), C - Q \rangle = A_2(P, Q) + B_2(P, Q)$   
 avec :

$$A_2(P, Q) = -(1/2) \{ \|y\|^2 \|Q\|^{-1} - (1/2) (\|y\|^2 - \langle x, y \rangle) \times [2 \|P - \bar{Q}\|^{-1} - \|P - Q\|^2 \|P - \bar{Q}\|^{-3} + \|P - \bar{Q}\|^{-1}] \}$$

et :

$$B_2(P, Q) = (R - s) D_3 f(P, Q).$$

On en déduit facilement que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} A_2(P, Q^-(y, R)) = 0.$$

et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{-1} B_2(P, Q^-(y, R)) = (t/2) \|P - (y, 0)\|^{-1}.$$

Toutes les conditions d'application de la proposition (2. 1) étant réunies on obtient l'identité :

$$(2. 1. 34) \quad f(P, Q) = \int_{\mathbb{R}^2} [E(P, (v, 0)) K_1(y - v, s) + (t/2) \|P - (v, 0)\|^{-1} K_2(y - v, s)] dv, \quad P, Q \in H_0^+.$$

Fixons maintenant  $Q \in H_0^+$  puis considérons l'application  $P \rightarrow f(P, Q)$ . Cette fonction est continue sur  $\bar{H}_0^+$  et biharmonique sur  $H_0^+$ . Par ailleurs, on remarque que l'expression intégrale figurant dans l'égalité (2. 1. 34) est, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$  fixé, une fonction continue de  $t \geq 0$ . Par suite, il vient :

$$(2. 1. 35) \quad f((x, 0), Q) = \int_{\mathbb{R}^2} E((x, 0), (v, 0)) K_1(y - v, s) dv.$$

De même, en dérivant l'expression intégrale (2. 1. 34) (par rapport à  $t \geq 0$ ) on obtient :

$$(2. 1. 36) \quad D_3 f((x, 0), Q) = \int_{\mathbb{R}^2} (1/2) \|x - v\|^{-1} K_2(y - v, s) dv.$$

Notons finalement la symétrie  $f(P, Q) = f(Q, P)$ ,  $P, Q \in H_0^+$ . Une de ses conséquences est de garantir (via l'étude qui vient d'être effectuée) que la fonction  $P \rightarrow f(P, Q)$  satisfait ( $Q \in H_0^+$  étant fixé) aux conditions d'applications de la proposition (2.1). La représentation (2.1.33) découle donc de (2.1.1), (2.1.35) et (2.1.36).

La même démarche permet d'obtenir d'autres identités remarquables qui nous seront utiles. La démonstration de ces résultats ne présentant aucune difficulté nouvelle: pour l'essentiel il suffira de reprendre le raisonnement indiqué dans la preuve de la proposition (2.2) en s'appuyant sur les estimations qui s'y trouvent établis, nous nous contenterons simplement d'en donner l'énoncé.

PROPOSITION (2.3). — (a) Pour tout  $P = (x, t) \in H_0^+$  et  $Q = (y, s) \in H_0^-$  on a :

$$(2.1.37) \quad E(P, Q) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [E((u, 0), (v, 0)) K_1(x-u, t) K_1(y-v, s) - (1/2) \|u-v\|^{-1} K_2(x-u, t) K_2(y-v, s)] du dv.$$

(b) Pour tout  $P = (x, t) \in H_0^+$  et  $Q = (y, 0) \in H_0^-$  on a :

$$(2.1.38) \quad E(P, Q) = \int_{\mathcal{A}^2} E((u, 0), (y, 0)) K_1(x-u, t) du.$$

(c) Posons:  $g(P, Q) = 4\pi [G_0(P+(0, a), Q+(0, a)) - G_0(P, Q)]$ , avec  $P = (x, t)$ ,  $Q = (y, s)$ ,  $P, Q \in H_0^+$ . On a :

$$(2.1.39) \quad g(P, Q) = 4\pi \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [G_0((u, a), (v, a)) K_1(x-u, t) K_1(y-v, s) + D_3^2 G_0((u, a), (v, a)) K_2(x-u, t) K_2(y-v, s) + D_3 G_0((u, a), (v, a)) [K_1(x-u, t) K_2(y-v, s) + K_2(x-u, t) K_1(y-v, s)]] du dv$$

avec

$$D_3 G_0((u, a), (v, a)) = (1/2\pi) a^3 [\|x-y\|^2 + 4a^2]^{-3/2}$$

et

$$D_3^2 G_0((u, a), (v, a)) = (\partial^2 / \partial t \partial s) G_0((u, t), (v, s))|_{t=s=a} \\ = (1/4\pi) \{ (1/2) (\|u-v\|^{-1} - [\|u-v\|^2 + 4a^2]^{-1/2}) + 3a^2 \|u-v\|^2 [\|u-v\|^2 + 4a^2]^{-5/2} \}.$$

Terminons ce paragraphe en rappelant que la fonction de Green du bilaplacien, défini sur un demi-espace de  $\mathbb{R}^3$ , est une fonction de covariance d'un processus gaussien. Cette propriété, qui est un cas particulier d'un résultat général démontré par L. D. Pitt [28] (voir également [23]) dans le

cadre des équations de type fortement elliptique, s'énonce comme suit :

PROPOSITION (2.4). — Soit  $G_a(P, Q) = G_0(P - (0, a), Q - (0, a))$ ,  $P, Q \in H_a^+$ , la fonction de Green du bilaplacien pour le demi-espace  $H_a^+$ ,  $a > 0$ . Fixons une suite finie  $P_i \in H_a^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de points distincts. On a alors :

(a) La forme quadratique  $\sum \lambda_i \lambda_j G_a(P_i, P_j)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , est définie positive.

(b) La forme quadratique  $\sum \lambda_i \lambda_j (G_0(P_i, P_j) - G_a(P_i, P_j))$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , est définie positive.

Preuve. — Donnons une démonstration succincte : pour plus de détails on se reportera à [28], chap. 3, 4, 5. Désignons par  $\mathcal{H}_a^2$  « l'espace de Sobolev » obtenu en complétant l'espace  $C_0^\infty(H_a^+)$ , des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact inclus dans  $H_a^+$  muni du produit scalaire :

$$(2.1.40) \quad \langle \varphi, \psi \rangle_a = \int_{H_a^+} \Delta \varphi \cdot \Delta \psi \, dP, \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty(H_a^+).$$

Soit  $\|\cdot\|_a$  la norme associée. L'espace de Hilbert  $(\mathcal{H}_a^2, \|\cdot\|_a)$  ainsi obtenu admet un noyau reproduisant qui coïncide précisément avec la fonction de Green  $G_a(P, Q)$ . En particulier, pour tout point  $Q \in H_a^+$ , fixé, la fonction  $P \rightarrow G_a(P, Q) = G_a(Q, P)$  appartient à  $\mathcal{H}_a^2$ . La propriété de reproduction implique trivialement l'identité

$$(2.1.41) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\sum \lambda_i G_a(P_i, \cdot)\|_a^2 &= \sum \lambda_i \lambda_j G_a(P_i, P_j), & P_i \in H_a^+, \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, & \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \right.$$

d'où il résulte que la forme quadratique envisagée est positive. Pour voir qu'elle est définie positive on fait appel à des fonctions  $\varphi_i \in C_0^\infty(H_a^+)$  vérifiant :  $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker)  $i, j = 1, \dots, n$ ; les points  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  étant distincts de telles fonctions existent. Par suite, on a :

$$(2.1.42) \quad \langle \sum \lambda_i G_a(P_i, \cdot), \varphi_j \rangle = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

ce qui, conjointement avec (2.1.41), prouve notre assertion.

Pour démontrer le point (b), on considère le sous-espace vectoriel normé  $\mathcal{H}_{0,a}^2 \subset \mathcal{H}_0^2$ , obtenu en prenant l'adhérence dans  $\mathcal{H}_0^2$  de l'espace des fonctions  $\varphi \in \mathcal{H}_0^2$  qui sont biharmoniques sur  $H_a^+$  (c'est-à-dire vérifiant  $\Delta^2 \varphi = 0$  sur  $H_a^+$ ). On montre alors facilement que  $G_0(P, Q) - G_a(P, Q)$  est le noyau reproduisant de l'espace de Hilbert  $(\mathcal{H}_{0,a}^2, \|\cdot\|_0)$  [on prolonge  $G_a(P, Q)$  à  $H_0^+$  en posant  $G_a(P, Q) = 0$  si  $\{P, Q\} \not\subset H_a^+$ ]. On en déduit, comme précédemment, que la forme quadratique

$$(2.1.43) \quad \|\sum \lambda_i (G_0(P_i, \cdot) - G_a(P_i, \cdot))\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j (G_0(P_i, P_j) - G_a(P_i, P_j))$$

$P_i \in H_a^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est positive, puis qu'elle est définie positive à partir des identités :

$$(2.1.44) \quad \langle \sum \lambda_i (G_0(P_i, \cdot) - G_a(P_i, \cdot)), \psi_j \rangle_a = \lambda_j$$

les fonctions  $\psi_j \in \mathcal{H}_{0,a}^2$  satisfaisant les relations  $\psi_j(P_i) = \delta_{ij}$ ,  $i, j, \dots, n$ .

**2.2. Propriétés des trajectoires de quelques processus auxiliaires**

(A) Désignons par  $B_2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , le mouvement brownien de P. Levy indexé sur le plan. A une version du processus près, nous pouvons supposer que les trajectoires  $x \rightarrow B_2(x; \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , sont continues. La loi du logarithme itéré de P. Levy ([13], p. 456) assure que l'on a :

$$(2.2.1) \quad P \left\{ \limsup_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|B_2(x)|}{2\sqrt{\|x\| \ln \|x\|}} = 1 \right\} = 1.$$

Par suite les fonctions  $x \rightarrow B_2(x; \omega) K_1(x, t)$ ,  $t > 0$ , sont pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , intégrables sur  $\mathbb{R}^2$  et le processus

$$(2.2.2) \quad Y(P) = Y(P, \omega) = \int_{\mathbb{R}^2} B_2(u; \omega) K_1(x - u, t) du, \quad P = (x, t) \in H_0^+$$

est bien défini (trajectoire par trajectoire), en outre on établit trivialement les propriétés suivantes :

PROPOSITION (2.5). - (a) *Le processus  $Y(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , est gaussien centré avec, pour fonction de covariance :*

$$(2.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Y(P) Y(Q)) \\ = (1/2) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [\|u\| + \|v\| - \|u-v\|] K_1(x-u, t) K_1(y-v, s) du dv \\ P = (x, t), \quad Q = (y, s), \quad P, Q \in H_0^+. \end{array} \right.$$

(b) *Les trajectoires  $P \rightarrow Y(P, \omega)$  sont, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , biharmoniques sur  $H_0^+$  et vérifiant :*

$$(2.2.4) \quad \lim_{t \downarrow 0} Y(x, t) = B_2(x) \text{ p. s., le point } x \in \mathbb{R}^2 \text{ étant fixé.}$$

(B) Le noyau

$$(2.2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(P, Q) = (1/2) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \|u-v\|^{-1} K_2(x-u, t) K_2(y-v, s) du dv, \\ P = (x, t), \quad Q = (y, s), \quad P, Q \in H_0^+, \end{array} \right.$$

intervenant dans la formule (2.1.33), s'écrit plus simplement :

$$(2.2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(P, Q) = (st/2) [\|x-y\|^2 + (s+t)^2]^{-1/2}, \\ P = (x, t), \quad S = (y, s), \quad P, Q \in H_0^+. \end{array} \right.$$

Pour le voir, on peut faire appel aux transformées de Fourier classiques (voir par exemple [30], p. 6) :

$$(2.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad K_2(u, t) = (t/2\pi) \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \langle u, z \rangle - t \|z\|} dz \\ \text{et} \\ (b) \quad [\|u\|^2 + t^2]^{-1/2} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \langle u, z \rangle - t \|z\|} \frac{dz}{\|z\|} \end{array} \right.$$

L'identité (2.2.7) (b) montre également que le noyau

$$H(P, Q) = (1/2) \|P - \bar{Q}\|^{-1} = (1/2) \|\bar{P} - Q\|^{-1}$$

[on note  $\bar{Q} = (x, -s)$  lorsque  $Q = (x, s)$ ],  $P, Q \in H_0^+$ , est une fonction de covariance, la forme quadratique  $\sum \lambda_i \lambda_j H(P_i P_j)$  associée à un choix  $P_i \in H_0^+, i = 1, \dots, n$  de points distincts étant définie positive. Soit  $Z(P, \omega) = Z(P), P \in H_0^+$ , le processus gaussien centré de covariance  $E(Z(P)Z(Q)) = H(P, Q)$ . Posons  $U(P) = tZ(P), P = (x, t) \in \bar{H}_0^+, U(P) \equiv 0$  pour  $P \in H_0$ . La covariance du processus  $U(P), P \in \bar{H}_0^+$ , coïncide évidemment avec le noyau  $C(P, Q)$  et on vérifie facilement [cela découle trivialement de (2.1.33) et (2.2.3)] les inégalités :

$$(2.2.8) \quad E(|U(P) - U(Q)|^2) \leq \|P - Q\|, \quad P, Q \in \bar{H}_0^+.$$

En vertu de (2.2.8) on peut supposer que les trajectoires  $P \rightarrow U(P, \omega)$  sont continues sur  $\bar{H}_0^+$  (on pourra consulter [7] ou [25] pour des critères usuels assurant la continuité des trajectoires). Il en résulte en particulier que les trajectoires du processus  $Z(P), P \in H_0^+$  sont continues également. Cette propriété peut se renforcer considérablement. En effet, on a :

PROPOSITION (2.6). — *Les trajectoires du processus  $Z(P), P \in H_0^+$ , sont (presque sûrement) des fonctions harmoniques sur  $H_0^+$ .*

Preuve. — Démontrons, dans un premier temps, le lemme suivant :

LEMME (2.3). — *Pour tout  $a > 0$  il existe  $\Omega_a \in \Sigma, P(\Omega_a) = 1$ , de sorte que l'on ait :*

$$(2.2.9) \quad Z(P, \omega) = (t-a)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} Z((u, a), \omega) K_2(x-u, t-a) du$$

pour tout  $P = (x, t) \in H_a^+$  et tout  $\omega \in \Omega_a$ . En particulier, pour tout  $\omega \in \Omega_a$ , la trajectoire  $P \rightarrow Z(P, \omega)$  est harmonique sur  $H_a^+$ .

Preuve du lemme (2.3). — Commençons par établir que l'intégrale intervenant dans la formule (2.2.9) est, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , bien définie. En effet, les inégalités (2.2.8) impliquent l'existence (voir par exemple [25], p. 48) de deux constantes  $\alpha > 0, A > 0$ , telles que l'on ait :

$$(2.2.10) \quad P \{ M(U, 1) \geq \sqrt{A} \} \leq \exp(-\alpha A), \quad \text{pour tout } A \geq A_0,$$

en posant

$$(2.2.11) \quad M(U, t) = \sup |U(P)|, \quad P \in \bar{H}_0^+, \quad \|P\| \leq t.$$

En se reportant vers l'écriture (2.2.6) de la covariance  $C(P, Q)$  on voit immédiatement que pour tout  $b \geq 0$ , fixé, les processus  $bU(P)$  et  $U(b^2 P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$ , sont identiques en loi. Par suite, avec (2.2.10), il vient :

$$(2.2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \{ M(U, N) \geq \sqrt{AN \ln N} \} = P \{ M(U, 1) \geq \sqrt{A \ln N} \} \leq N^{-\alpha A}, \\ A \geq A_0, \quad N \geq 3. \end{array} \right.$$

Avec un choix de  $A \geq A_0$ , assurant la majoration  $\alpha A > 1$ , la série de terme général  $N^{-\alpha A}$  est convergente ce qui, avec les inégalités (2.2.12) et le lemme de Borel-Cantelli (partie triviale), implique aisément :

$$(2.2.13) \quad P \left\{ \limsup_{\substack{\|P\| \uparrow + \infty \\ P \in \bar{H}_0^+}} \frac{|U(P)|}{\sqrt{A \|P\| \ln \|P\|}} \leq 2 \right\} = 1.$$

Comme par ailleurs on a  $|Z(P)| \leq (1/a) |U(P)|$  pour tout  $P \in H_a^+$  et que les trajectoires  $P \rightarrow Z(P, \omega)$  sont continues sur  $\bar{H}_a^+$ , nous déduisons de (2.2.13) qu'il existe  $\Omega'_a \in \sum, P(\Omega'_a) = 1$ , de sorte que pour tout  $\omega \in \Omega'_a$  et pour  $P = (x, t) \in H_0^+$ , la fonction  $u \rightarrow Z((u, a), \omega) K_2(x - u, t - a)$  soit intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ , l'intégrale

$$(2.2.14) \quad Z_a(P, \omega) = (t - a)^{-1} \int_{\mathcal{R}^2} Z((u, a), \omega) K_2(x - u, t - a) du$$

étant, pour tout  $\omega \in \Omega'_a$ , une fonction harmonique sur  $H_a^+$ .

Pour terminer la preuve du lemme (2.3) il reste à établir l'égalité presque sûre  $Z(P) = Z_a(P)$ ,  $P \in H_a^+$ . Les trajectoires de ces deux processus étant continues (presque sûrement) il suffit donc de voir que pour tout  $P \in H_a^+$ , fixé, on a  $Z(P) = Z_a(P)$  p.s., soit, ce qui revient au même, que  $E(|Z(P) - Z_a(P)|^2) = 0$ . Un calcul explicite, reposant sur l'identité [pouvant se déduire de (2.2.7) (a) et (b)]

$$(2.2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} [ \|x\|^2 + (t+s)^2 ]^{-1/2} = (1/s) \int_{\mathcal{R}^2} [ \|u\|^2 + t^2 ]^{-1/2} K_2(x - u, s) du \\ s > 0, \quad t > 0, \end{array} \right.$$

donne :

$$(2.2.16) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad E(Z_a(P)Z(P)) = (t-a)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} H((u,a),P) K_2(x-u,t-a) du \\ \qquad \qquad \qquad = 1/4 t, \quad P \in H_a^+; \\ (b) \quad E(Z_a^2(P)) = (t-a)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} H((u,a),(v,a)) \\ \qquad \qquad \qquad \times K_2(x-u,t-a) K_2(x-v,t-a) du dv \\ \qquad \qquad \qquad = 1/4 t, \quad P \in H_a^+, \end{array} \right.$$

ce qui, avec (2.2.6), permet de conclure aisément.

Le lemme (2.3) implique la conclusion de la proposition (2.6). En effet, pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $\Omega_n \subset \Omega$ ,  $P(\Omega_n) = 1$  de sorte que les trajectoires  $P \rightarrow Z(P, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega_n$ , soient harmoniques sur  $H_{1/n}^+$ . Les trajectoires  $P \rightarrow Z(P, \omega)$ ,  $\omega \in \cap \Omega_n$ , sont donc harmoniques sur  $H_0^+$  tout entier.

(C) Désignons par  $V(P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$ , le processus gaussien centré admettant pour fonction de covariance :

$$(2.2.17) \quad E(V(P), V(Q)) = 4\pi G_0(P, Q), \quad P, Q \in H_0^+.$$

La proposition (2.4) (a) assure qu'un tel processus existe effectivement. Pour  $P \in H_0$  nous poserons  $V(P) = 0$ . D'après (2.1.33) il résulte [en notant l'identité (2.2.3) et en tenant compte du fait que le noyau  $C(P, Q)$  défini par (2.2.5) est positif] que l'on a :

$$(2.2.18) \quad E(|V(P), V(Q)|^2) \leq \|P - Q\|, \quad P, Q \in \bar{H}_0^+.$$

Par suite nous pouvons supposer, à une version du processus près, que les trajectoires  $P \rightarrow V(P, \omega)$  sont continues sur  $\bar{H}_0^+$ . On voit également, à partir de l'écriture explicite de la covariance  $G_0(P, Q)$ , que pour tout  $b > 0$  fixé, les processus  $bV(P)$  et  $V(b^2P)$ ,  $P \in H_0^+$ , sont identiques en loi. On peut donc reprendre, sans changement aucun, le raisonnement développé au cours de la preuve du lemme (2.3), duquel il ressort que l'on a :

$$(2.2.19) \quad P \left\{ \limsup_{\|P\| \uparrow +\infty} \frac{|V(P)|}{\sqrt{A} \|P\| \ln \|P\|} \leq 2 \right\} = 1.$$

Fixons maintenant  $a > 0$ , puis posons :

$$(2.2.20) \quad R_a(P, \omega) = \int_{\mathbb{R}^2} V((u,a), \omega) K_1(x-u, t) du, \quad P = (x, t) \in H_0^+.$$



D'après ce qui vient d'être dit, ces intégrales sont bien définies et les propriétés suivantes peuvent être facilement vérifiées :

PROPOSITION (2.7). — (a) Le processus  $R_a(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , est gaussien centré, avec pour fonction de covariance :

$$(2.2.21) \quad E(R_a(P)R_a(Q)) \\ = 4\pi \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} G_0((u, a), (v, a)) K_1(x-u, t) K_1(y-v, s) du dv,$$

avec

$$P = (x, t), \quad Q = (y, s), \quad P, Q \in H_0^+.$$

(b) Les trajectoires  $P \rightarrow R_a(P, \omega)$  sont, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , biharmoniques sur  $H_0^+$  avec :

$$\lim_{t \downarrow 0} R_s(x, t) = V(x, a) \quad \text{et} \quad R_a(P) = 0 \quad ( \|P\| \ln \|P\|^{1/2} ) \text{ p. s.} \\ t \downarrow 0 \quad \|P\| \uparrow +\infty$$

(D) Le noyau

$$(2.2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(P, Q) = (1/2) \int_{\mathbb{R}^2} e^{i \langle x-y, z \rangle - (s+t)\|z\|} [1 + e^{-2a\|z\|} (a + \|z\| - 1)] dz, \\ P = (x, t), \quad Q = (y, s), \quad P, Q \in H_0^+, \end{array} \right.$$

est, comme cela apparaît clairement d'après l'écriture de l'intégrale, une fonction de covariance, la forme quadratique  $\sum \lambda_i \lambda_j S(P_i, P_j)$  associée à un choix  $P_i \in H_0^+$ , de points distincts étant définie positive. Soit  $S_a(P)$ ,  $P \in H_0^+$ ,  $E(S_a(P)S_a(Q)) = S(P, Q)$  le processus gaussien centré correspondant. Un calcul facile [reposant sur les formules (2.2.7) (a) et (b)] permet de voir que la covariance du processus  $tS_a(P)$ ,  $P = (x, t) \in H_0^+$ , coïncide avec le noyau

$$4\pi \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} D_3^2 G_0((u, a), (v, a)) K_2(x-u, t) K_2(y-v, s) du dv$$

intervenant dans la formule (2.1.39).

Une version explicite du processus  $tS_a(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , est obtenue (on le vérifie par un calcul de covariance) en posant (trajectoire par trajectoire)  $tS_a(P, \omega) = V(P + (0, a), \omega) - V(P, \omega) - R_a(P, \omega)$ . On en déduit que  $S_a(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , admet une version à trajectoires continues et que pour tout  $b > 0$  et presque tout  $\omega \in \Omega$ , les intégrales

$$(t-b)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} S_a((u, b), \omega) K_2(x-u, t-b) du, \quad P = (x, t) \in H_b^+,$$

sont bien définies. Finalement, en reprenant l'argument de la preuve de la proposition (2. 6), on obtient :

PROPOSITION (2. 8). — Pour tout  $b > 0$ , il existe  $\Omega_b \in \Sigma$ ,  $P(\Omega_b) = 1$  de sorte que l'on ait

$$(2.2.23) \quad S_a(P, \omega) = (t - b)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} S_a((u, b), \omega) K_2(x - u, t - b) du$$

pour tout  $P = (x, t) \in H_b^+$  et tout  $\omega \in \Omega_b$ . En particulier les trajectoires du processus  $S_a(P)$  sont presque sûrement des fonctions harmoniques sur  $H_0^+$ .

### 3. LE PRINCIPE DE RÉFLEXION POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN DE P. LEVY INDEXÉ SUR $\mathbb{R}^3$

Considérons les quatre processus gaussiens, centrés, indépendants, suivants :

( $\alpha$ )  $B_2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $E(B_2(x) B_2(y)) = (1/2) [\|x\| + \|y\| - \|x - y\|]$ , est un mouvement brownien à deux paramètres;

( $\beta$ )  $V(P)$ ,  $V'(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , sont deux processus identiquement distribués de covariance :

$$E(V(P) V(Q)) = E(V'(P) V'(Q)) = 4 \pi G_0(P, Q).$$

( $\gamma$ )  $Z(P)$ ,  $P \in H_0^+$ ,  $E(Z(P) Z(Q)) = C(P, Q)$  est le processus à trajectoires harmoniques introduit au point 2. 2. B.

Soit encore  $Y(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , le processus associé à  $B_2(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ , selon la formule (2. 2. 2). Nous pouvons alors énoncer :

THÉORÈME (3. 1). — Le processus  $B(P)$ ,  $P \in \mathbb{R}^3$ , défini par :

$$(3.1) \quad \begin{cases} B(P) = V(P) + Y(P) + t Z(P), & P = (x, t) \in H_0^+ \\ B(P) = B_2(x), & P = (x, 0) \in H_0 \\ B(P) = V(\bar{P}) + Y(\bar{P}) + t Z(\bar{P}), & P = (x, t) \in H_0^- \end{cases}$$

est un mouvement brownien de P. Levy à trois paramètres.

Preuve. — Il suffit de vérifier que la covariance du processus  $B(P)$ ,  $P \in \mathbb{R}^3$ , coïncide avec celle du mouvement brownien. En distinguant les différents cas, cela revient à voir que l'on a [avec la notation (2. 1. 31)] :

$$(3.2) \quad \begin{cases} E(P, Q) = 4 \pi G_0(P, Q) + E(Y(P) Y(Q)) + C(P, Q) \\ \quad \quad \quad (P, Q) \in H_0^+ \times H_0^+ \\ E(P, Q) = E(Y(P) B_2(x)), \quad P \in H_0^+, \quad Q = (x, 0) \in H_0 \\ E(P, Q) = E(Y(P) Y(\bar{Q})) - C(P, \bar{Q}), \quad P \in H_0^+, \quad Q \in H_0^- \end{cases}$$

Ces trois identités découlent, respectivement [tenant compte de la discussion du paragraphe (2. 2)] des formules (2. 1. 33), (2. 1. 38) et (2. 1. 37).

Indiquons quelques conséquences de ce résultat qui vont nous permettre de percevoir plus nettement sa signification. On désignera par  $L(H^+)$ ,  $L(H^-)$  les sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\Omega)$  engendrés respectivement par les familles de variables aléatoires  $\{B(P), P \in H_0^+\}$  et  $\{B(P), P \in H_0^-\}$ .

THÉORÈME (3.2). (a) *Le point  $P=(x, t) \in H_0^+$  étant fixé, la variable aléatoire  $Y(P) + tZ(P)$  appartient à  $L(H^+) \cap L(H^-)$  et coïncide avec la projection de  $B(P)$  sur le sous-espace  $L(H^-)$ . Symétriquement,  $Y(P) - tZ(P) \in L(H^+) \cap L(H^-)$  est la projection de  $B(\bar{P})$  sur  $L(H^+)$ .*

(b) *Conditionnellement à  $L(H^+) \cap L(H^-)$  les processus  $B(P)$ ,  $P \in H_0^\pm$ , sont indépendants.*

(c) *Pour tout choix de points  $P_i \in H_0^+$  et de scalaires  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ , la distance du vecteur  $X = \sum \lambda_i B(P_i)$  au sous-espace  $L(H^-)$  vaut exactement :*

$$(3.3) \quad d(X, L(H^-)) = 4\pi \sum \lambda_i \lambda_j G_0(P_i, P_j),$$

en particulier, avec le choix  $X = B(P)$ ,  $P = (x, t) \in H_0^+$ , on obtient :  $d(X, L(H^-)) = t/2$ .

*Preuve du théorème (3.2).* — Toutes les propriétés décrites par l'énoncé du théorème (3.2) découlent de la décomposition (3.1) une fois vu que les variables aléatoires  $Y(P) + tZ(P)$ ,  $P = (x, t) \in H_0^+$ , appartiennent à l'espace  $L(H^+) \cap L(H^-)$ . L'expression (2.2.2) montre clairement que  $Y(P)$  appartient à  $L(H^+) \cap L(H^-)$ , la difficulté se situe donc au niveau de la variable aléatoire  $Z(P)$ . Examinons ce problème. Le point  $P = (x, t) \in H_0^+$  étant fixé, rappelons l'identité (2.2.9) :

$$(3.4) \quad Z(P) = (t - \varepsilon)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} Z(u, \varepsilon) K_2(x - u, t - \varepsilon) du \quad \text{p. s.}, \quad 0 < \varepsilon < t.$$

D'après la formule (3.1), nous pouvons écrire  $Z(u, \varepsilon)$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ , sous deux formes possibles :

$$(3.5) \quad \begin{cases} (a) & Z(u, \varepsilon) = (1/\varepsilon) [B(u, \varepsilon) - Y(u, \varepsilon)] - (1/\varepsilon) V(u, \varepsilon) \\ (b) & Z(u, \varepsilon) = -(1/\varepsilon) [B(u, \varepsilon) - Y(u, \varepsilon)] + (1/\varepsilon) V'(u, \varepsilon) \end{cases}$$

En insérant ces expressions dans la formule intégrale rappelée ci-dessus on obtient

$$(3.6) \quad Z(P) = A_\varepsilon^+(P) + C_\varepsilon^+(P) = A_\varepsilon^-(P) + C_\varepsilon^-(P)$$

avec :

$$(3.7) \left\{ \begin{array}{l} A_{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{P}) = \pm [1/\varepsilon(t-\varepsilon)] \int_{\mathbb{R}^2} [B(u, \pm \varepsilon) - Y(u, \varepsilon)] K_2(x-u, t-\varepsilon) du \\ \text{et} \\ C_{\varepsilon}^+(\mathbf{P}) = -[1/\varepsilon(t-\varepsilon)] \int_{\mathbb{R}^2} V(u, \varepsilon) K_2(x-u, t-\varepsilon) du \\ C_{\varepsilon}^-(\mathbf{P}) = -[1/\varepsilon(t-\varepsilon)] \int_{\mathbb{R}^2} V'(u, \varepsilon) K_2(x-u, t-\varepsilon) du \end{array} \right.$$

Les estimations données au paragraphe (2.2) montrent que toutes ces intégrales sont bien définies, les variables aléatoires  $A_{\varepsilon}^+(\mathbf{P})$  et  $A_{\varepsilon}^-(\mathbf{P})$  appartenant respectivement aux espaces  $L(H^+)$  et  $L(H^-)$ . Pour conclure à l'appartenance  $Z(\mathbf{P}) \in L(H^+) \cap L(H^-)$  il suffit de vérifier que les variables aléatoires  $C_{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{P})$  convergent vers zéro (lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ ) dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Cela ne présente pas de difficulté, car

$$(3.8) \quad E[(C_{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{P}))^2] = 4\pi\varepsilon^{-2}(t-\varepsilon)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} G_0((u, \varepsilon), (v, \varepsilon)) \\ \times K_2(x-u, t-\varepsilon) K_2(x-v, t-\varepsilon) du dv \leq 4\varepsilon(t-\varepsilon)^{-2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [ \|w\|^2 + 4 ]^{-3/2} \\ \times K_2(x-u, t-\varepsilon) K_2(x-u-\varepsilon w, t-\varepsilon) du dw$$

et le dernier terme de cette inégalité converge (lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ ) vers zéro.

On pourra noter que la formule (3.2) (c) permet de calculer le coefficient de corrélation

$$(3.9) \quad c(\mathbf{P}) = \| \mathbf{P} \|^{-1/2} \sup_{\substack{X \in L(H^-) \\ \|X\|=1}} \langle B(\mathbf{P}), X \rangle \\ = \| \mathbf{P} \|^{-1/2} [ \| \mathbf{P} \| - d^2(B(\mathbf{P}), L(H^-))]^{1/2}$$

mesurant le degré de dépendance entre  $B(\mathbf{P})$ ,  $\mathbf{P} \in H_0^+$  et  $L(H^-)$ , soit explicitement :

$$(3.10) \quad c(\mathbf{P}) = \left[ 1 - \frac{t}{2\| \mathbf{P} \|^2} \right]^{1/2}, \quad \mathbf{P} = (x, t) \in H_0^+.$$

On constate que le coefficient de corrélation est toujours supérieur à  $\sqrt{2}/2$ , il est constant sur les surfaces coniques d'équation  $t = \alpha \| \mathbf{P} \|^2$ ,  $0 < \alpha < 1$ , finalement il atteint son minimum sur la droite  $x = \mathbf{0}$  où il vaut exactement  $\sqrt{2}/2$ .

#### 4. PROPRIÉTÉS MARKOVIENNES DU PROCESSUS $V(P)$ , $P \in \bar{H}_0^+$

Fixons  $a > 0$ , le noyau  $g(P, Q) = 4\pi G_0(P + (0, a), Q(0, a)) - G_0(P, Q)$  est, d'après la proposition (2.4), une fonction de covariance. En termes de processus ce fait se traduit par :

PROPOSITION (4.1). — Soit  $V(P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$  le processus gaussien centré de covariance  $E(V(P)V(Q)) = 4\pi G_0(P, Q)$ . Il existe alors :

( $\alpha$ ) Un processus gaussien centré  $W_a(P)$ ,  $P \in \bar{H}_0^+$ , de covariance

$$E(W_a(P)W_a(Q)) = g(P, Q);$$

( $\beta$ ) Un processus  $V_1(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , identique en loi à  $V$  et indépendant du couple  $(V(x, t), x \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq a; W_a(P), P \in H_0^+)$ ;

tels que l'identité suivante soit satisfaite (égalité en loi entre processus).

$$(4.1) \quad V(P + (0, a)) \stackrel{(\text{loi})}{=} V_1(P) + W_a(P), \quad P \in \bar{H}_0^+.$$

On voit ainsi se profiler une propriété de type markovien. Notre objectif consiste à identifier convenablement le processus  $W_a$ . La formule (2.1.39) permet de montrer que  $W_a$  est entièrement déterminé par le comportement local de  $V(P)$ ,  $P = (x, t)$   $0 \leq t \leq a$ , au voisinage du plan  $H_a$ . Plus précisément, reprenons le processus  $R_a(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , défini par (2.2.19) puis considérons les intégrales

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_a^\varepsilon(P, \omega) = (1/\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^2} [V((u, a); \omega) - V((u, a - \varepsilon); \omega)] K_2(x - u, t) du \\ P = (x, t) \in H_0^+, \quad \omega \in \Omega, \quad 0 < \varepsilon \leq a, \end{array} \right.$$

en vertu de (2.2.19) et de la continuité des trajectoires du processus  $V$ , ces intégrales sont bien définies. On obtient alors :

LEMME (4.1). — ( $\alpha$ ) Le point  $P \in H_0^+$ , étant fixé, la suite  $(S_a^\varepsilon(P))$ ,  $0 < \varepsilon \leq a$ , converge, dans l'espace  $L^2(\Omega)$ , lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ , vers une variable aléatoire  $S_a^0(P)$ .

( $\beta$ ) Le processus gaussien centré  $S_a^0(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , ainsi construit, admet pour fonction de covariance le noyau  $S(P, Q)$  défini par (2.2.22).

( $\gamma$ ) En posant  $W_a^0(P) = R_a(P) + t S_a^0(P)$ ,  $P = (x, t) \in H_0^+$ , on obtient une copie du processus  $W_a$ .

La démonstration de ce lemme repose sur des « manipulations élémentaires » assez fastidieuses à écrire mais ne présentant pas, en fait, de difficulté. Ainsi par exemple, pour établir le point ( $\alpha$ ), on introduit la fonctionnelle

$$M(u; \varepsilon, \varepsilon') = (\varepsilon \varepsilon')^{-1} \{ \varepsilon' [V(u, a) - V(u, a - \varepsilon)] - \varepsilon [V(u, a) - V(u, a - \varepsilon')] \}$$

puis on explicite l'écriture de l'intégrale

$$t^{-2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} E(M(u; \varepsilon, \varepsilon') M(v; \varepsilon, \varepsilon')) K_2(x-u, t) K_2(x-v, t) du dv$$

ce qui permet de voir que cette dernière converge vers zéro (lorsque  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$ ). Il en résulte que la suite  $(S_a^\varepsilon(P))$ ,  $\varepsilon > 0$ , est pour tout  $P=(x, t) \in H_0^+$ , de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  et converge donc vers une variable aléatoire  $S_a^0(P)$ . Les points  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  se déduisent, de même, du calcul explicite des espérances  $E(S_a^\varepsilon(P) S_a^\varepsilon(Q))$ ,  $E(S_a^\varepsilon(P) R_a(Q))$ ,  $P, Q \in H_0^+$ , suivi d'un passage à la limite.

Les processus  $R_a$  et  $S_a$  sont adaptés à la famille de variables aléatoires  $\mathcal{F}_a = \{ V(x, t), x \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t \leq a \}$ , plus précisément, pour tout  $P \in H_0^+$ , les variables aléatoires  $R_a(P)$  et  $S_a(P)$  appartiennent au sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\Omega)$  engendré par  $\mathcal{F}_a$ : cette propriété découle directement du procédé de construction.

Au niveau des trajectoires, nous savons d'après la proposition (2.7) que celles du processus  $R_a$  sont des fonctions biharmoniques sur  $H_0^+$ . Nous avons vu également, au paragraphe (2.2), que le processus  $S_a^0$  admet une version à trajectoires continues. Une telle version  $S_a$  peut être obtenue directement à partir de  $S_a^0$  (consulter par exemple [25]) ce qui présente l'avantage qu'elle sera encore adaptée à la famille  $\mathcal{F}_a$ . Finalement, la proposition (2.8) nous enseigne que les trajectoires de  $S_a$  sont, presque sûrement, des fonctions harmoniques sur  $H_0^+$ .

Résumons l'essentiel de cette discussion.

THÉORÈME (4.1). — *Pour tout  $a > 0$ , il existe une copie  $V_1$  de  $V$ , indépendante de la famille  $\mathcal{F}_a$ , et un processus  $W_a(P) = R_a(P) + t S_a(P)$ ,  $P=(x, t) \in H_0^+$ , adapté à  $\mathcal{F}_a$ , tels que l'on ait l'identité en loi des processus :*

$$(4.3) \quad V(P+(0, a)) = V_1(P) + W_a(P), \quad P \in H_0^+.$$

*Le processus  $R_a$  est entièrement déterminé par la restriction de  $V$  au plan  $H_a$  (le présent). Le processus  $S_a$  ne dépend que du « passé immédiat ». Les trajectoires de  $W_a$  sont des fonctions biharmoniques sur  $H_0^+$  vérifiant  $V(P) = W_a(x, 0)$  p. s. pour  $P=(x, a) \in H_a$ .*

Terminons ce travail par un énoncé mettant en relief le rôle particulier joué par la moyenne biharmonique des trajectoires.

THÉORÈME (4.2). — *Fixons  $\varepsilon, a$  tels que l'on ait  $0 < 2\varepsilon < a$ , alors les deux processus suivants sont indépendants et identiquement distribués :*

$$(4.4) \quad \begin{cases} (\alpha) & B(P) - M_\varepsilon(B, P), & P=(x, t) \in \bar{H}_\varepsilon^+ \setminus H_{a-\varepsilon}^+, \\ (\beta) & B(P+(0, a)) - M_\varepsilon(B, P+(0, a)), & P=(x, t) \in \bar{H}_\varepsilon^+ \setminus H_{a-\varepsilon}^+. \end{cases}$$

*Preuve.* — Pour les notations relatives à la moyenne biharmonique, nous renvoyons à l'introduction. En vertu du théorème (3.1) et des

propositions (2.5) et (2.6), les trajectoires du mouvement brownien  $B(P)$ ,  $P \in H_0^+$ , diffèrent de celles du processus  $V$  que à des fonctions biharmoniques près; par suite on a l'identité presque sûre  $V(P) - M_\varepsilon(V, P) = B(P) - M_\varepsilon(B, P)$ ,  $P \in \bar{H}_\varepsilon^+$ . Il suffit donc d'établir le théorème (4.2) en prenant  $V$  à la place du mouvement brownien  $B$ . En changeant au besoin de version du processus  $V$ , on peut supposer que l'identité en loi (4.3) est en fait une identité presque sûre. L'application  $P \rightarrow V(P + (0, a)) - V_1(P) = W_a(P)$  est alors biharmonique sur  $H_0^+$  ce qui, avec le choix  $\varepsilon \leq t$  [garantissant l'inclusion de la boule  $B(P, \varepsilon)$ ,  $P = (x, t)$  dans  $H_0^+$ ] implique l'égalité

$$V(P + (0, a)) - V_1(P) = M_\varepsilon(V, P + (0, a)) - M_\varepsilon(V_1, P)$$

soit encore :

$$V(P + (0, a)) - M_\varepsilon(V, P + (0, a)) = V_1(P) - M_\varepsilon(V_1, P) \text{ p. s.,}$$

d'où l'identité annoncée. La propriété d'indépendance repose sur la condition  $t \leq a - \varepsilon$  qui assure que la moyenne  $M_\varepsilon(V, P)$ ,  $P = (x, t)$ , ne fait intervenir que la restriction du processus  $V$  à la bande  $\mathbb{R}^2 \times [0, a]$ ; par suite les variables aléatoires  $V(P) - M_\varepsilon(V, P)$ ,  $P = (x, t) \in \bar{H}_\varepsilon^+ \setminus H_{a-\varepsilon}^+$ , sont adaptées à la famille  $\mathcal{F}_a$ : elles sont donc indépendantes du processus  $V_1$ .

## RÉFÉRENCES

### *Travaux sur le mouvement brownien à plusieurs paramètres*

- [1] T. HIDA, *Levy's Functional Analysis and Stochastic Analysis*, 1986, Spring Semester, Nagoya University.
- [2] R. GAGNOLLI, Positive Definite Kernels on Homogeneous Spaces and Certain Stochastic Process Related to Levy's Brownian Motion of Several Parameters, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. B, vol. 3, 1967, p. 121-225.
- [3] A. GOLDMAN, Points multiples des trajectoires des processus gaussiens, *Z. Warsch. verw. Geb.*, vol. 57, 1981, p. 481-494.
- [4] A. GOLDMAN, La mesure de Hausdorff des trajectoires du mouvement brownien à plusieurs paramètres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 300, série I, 1985, p. 643-645.
- [5] A. GOLDMAN, Un principe de réflexion pour le mouvement brownien de P. Levy à trois paramètres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 305, série I, 1987, p. 693-696.
- [6] A. GOLDMAN, *Prédiction, distribution du maximum sur un cylindre et exacte mesure de Hausdorff des trajectoires pour le mouvement brownien de P. Levy dépendant de plusieurs paramètres*, proposé.
- [7] J. P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, nouvelle éd., Cambridge, Univers. Press, 1985.
- [8] H. P. MCKEAN, Brownian Motion with Several-Dimensional Time, *Theor. Prob. Appl.*, vol. VIII, n° 4, 1963, p. 335-354.
- [9] W. S. KENDALL, Contours of Brownian Process with Several-Dimensional Time, *Z. Warsch. verw. Geb.*, vol. 52, 1980, p. 267-276.
- [10] P. LEVY, Sur le mouvement brownien dépendant de plusieurs paramètres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 220, 1945, p. 420-422.

- [11] P. LEVY, Rectification à un théorème sur le mouvement brownien à  $p$  paramètres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **238**, 1954, p. 2140-2141.
- [12] P. LEVY, Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres, *Rendiconti di Mat.* vol. **22**, 1962, p. 24-101.
- [13] P. LEVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, 1965.
- [14] P. LEVY, *Fonctions browniennes dans l'espace euclidien et dans l'espace de Hilbert*, Festschrift for J. Neyman, London, Wiley and Sons, 1966, p. 189-223.
- [15] A. NODA, Levy's Brownian motion; Total Positivity Structure of  $M(t)$ -Process and Deterministic Character, *Nagoya Math. J.*, vol. **94**, 1984, p. 136-164.
- [16] F. TESTARD, Processus gaussiens : polarité, points multiples, géométrie, *Publ. Lab. Stat. Prob.*, Univ. P. Sabatier, Toulouse, 1986, p. 1-45.
- [17] L. T. TRAN, The Range of Levy's N-Parameter Brownian Motion in  $d$ -Space, *Annals Prob.*, vol. **7-3**, 1979, p. 532-536.
- [18] S. WEINRYB et M. YOR, Le mouvement brownien de Levy indexé sur  $\mathbb{R}^2$  comme limite centrale de temps locaux d'intersection, *Séminaire Prob. Strasbourg, XXII, Lect. Notes Math.*, 1988.
- [19] L. YODER, The Hausdorff Dimension of the Graph and the Range of N-Parameter Brownian Motion in  $d$ -Space, *Annals Prob.*, vol. **3-1**, 1975, p. 159-171.

*Autres travaux cités*

- [20] S. AGMON, Multiple Layer Potentials and the Dirichlet Problems for Higher Order Elliptic Equations in the Plane, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **10**, 1957, p. 179-239.
- [21] S. AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG, Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **12**, 1959, p. 623-727.
- [22] N. ARONSZAJN, J. CREESE et J. L. LIPKIN, *Polyharmonic Functions*, Clarendon Press, 1983.
- [23] A. BENASSI, Théorèmes des traces stochastiques et fonctionnelles multiplicatives pour des champs gaussiens markoviens d'ordre  $p$ , *Zeit. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, vol. **59-3**, 1982, p. 333-355.
- [24] R. J. DUFFIN, Continuation of a Biharmonic Function by Reflection, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. **50**, 1953.
- [25] X. FERNIQUE, Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, *Lect. Notes Math.*, n° **480**, 1975, p. 1-95.
- [26] A. HUBER, On the Reflection Principle for Polyharmonic Functions, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **IX**, 1956, p. 471-478.
- [27] M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann, 1936.
- [28] L. D. PITT, A Markov Property for Gaussian Processes with a Multidimensional Parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. **43**, 1971, p. 367-391.
- [29] YU A. ROZANOV, Markov Random Fields and Boundary Problems for Stochastic Partial Differential Equations, *Theor. Prob. Appl.*, vol. **32-1**, 1988, p. 1-29.
- [30] E. M. STEIN et G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

(Manuscrit reçu le 8 octobre, 1987)  
(révisé le 8 février 1989.)