ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DOMINIQUE LÉPINGLE
DAVID NUALART
MARTA SANZ

Dérivation stochastique de diffusions réfléchies

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 3 (1989), p. 283-305
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_283_0>

© Gauthier-Villars, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 3, 1989, p. 283-305. *Probabilités et Statistiques*

Dérivation stochastique de diffusions réfléchies

par

Dominique LÉPINGLE

Université d'Orléans, Faculté des Sciences,
B.P. n° 6759, 45067 Orléans

David NUALART

Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques,
Gran Via 585, 08007 Barcelona

et

Marta SANZ

Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques,
Gran Via 585, 08007 Barcelona

RÉSUMÉ. — On obtient une expression explicite de la dérivée stochastique de la solution d'une équation différentielle stochastique uni-dimensionnelle avec zéro, une ou deux barrières réfléchissantes lorsque le coefficient de diffusion est lipschitzien et le coefficient de dérive assez irrégulier.

ABSTRACT. — This paper gives an explicit expression of the stochastic derivative of a unidimensional stochastic differential equation with zero, one or two reflecting barriers, when the diffusion coefficient is Lipschitz and the drift coefficient somewhat irregular.

INTRODUCTION

Le calcul des variations stochastiques développé récemment fait jouer un rôle central à la dérivation sur l'espace de Wiener, mais il n'est pas

Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques - 0294-1449
Vol. 25/89/03/283/23/$4,30/© Gauthier-Villars

toujours facile d'obtenir une expression pour la dérivée des variables aléatoires. Dans [4], les auteurs, utilisant partiellement un résultat de Bouleau et Hirsch [1], ont donné un système d'équations vérifiées par les dérivées de la solution d'une équation différentielle stochastique multi-dimensionnelle à coefficients lipschitziens; en dimension un, cela conduit à une expression explicite.

Nous allons ici nous intéresser au calcul de la dérivée pour les équations différentielles multivoques uni-dimensionnelles présentées dans [3], qui modélisent des situations où le coefficient de dérive peut présenter des discontinuités et même tendre vers l'infini au voisinage d'une ou de deux barrières réfléchissantes.

La première partie est consacrée à quelques rappels sur la dérivation dans l'espace de Wiener. La seconde présente les équations sur lesquelles nous allons travailler, et après quelques rappels des résultats de [3], aboutit à la dérivabilité de la solution. La troisième partie contient le résultat essentiel, à savoir l'expression de la dérivée, dont on vérifie que, conformément à l'intuition, elle s'annule s'il y a passage au bord du domaine. Enfin, la quatrième partie conclut à l'existence d'une densité pour la loi de la solution, non sans avoir observé qu'une méthode directe due à Cattiaux [2] donnerait le même résultat.

1. RAPPELS SUR LA DÉRIVATION DANS L'ESPACE DE WIENER

Soit $\{W_t,\ 0 \leqq t \leqq T\}$ un processus de Wiener standard de dimension un, défini sur l'espace canonique $\Omega = \mathscr{C}([0, T]; \mathbf{R})$ muni de la mesure de Wiener P_W. On note H l'espace hilbertien $L^2([0, T]; \mathbf{R})$.

Si F est une fonction suffisamment régulière de Ω dans un espace hilbertien réel séparable E, on sait associer à F sa dérivée de Fréchet DF; c'est un processus à valeurs dans E tel que pour tout α dans H, on ait, dans $L^2(\Omega; E)$,

$$\int_0^T D_r F(\omega)\, \alpha_r\, dr = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[F\left(\omega + \varepsilon \int_0^{\cdot} \alpha_r\, dr\right) - F(\omega) \right]$$

et pour $p \geqq 2$, on note $\mathbf{D}_{p,1}(E)$ la complétion de l'ensemble des fonctions F régulières par rapport à la norme

$$[E(\| F \|_E^p)]^{1/p} + \left[E\left(\int_0^T \| D_r F \|_E^2\, dr \right)^{p/2} \right]^{1/p}.$$

Si $E = \mathbf{R}$, on note simplement $\mathbf{D}_{p,1}$ cet espace.

Cette notion peut s'étendre au cas où l'on se donne un espace auxiliaire $(\Omega_0, \mathscr{A}_0, P_0)$ et où l'on pose

$$\Omega = \Omega_0 \times \mathscr{C}([0, T]; \mathbf{R})$$

muni de la complétion habituelle $\{\mathcal{F}_t;\ 0 \leqq t \leqq T\}$ des tribus produit par rapport à la probabilité produit $P_0 \otimes P_W$. La dérivation s'effectue encore par rapport à $\mathcal{C}([0, T]; \mathbf{R})$.

En utilisant les résultats de [6], on peut montrer comme dans [4] les propositions suivantes.

PROPOSITION 1.1. — *Soit* $\{F_n,\ n \geqq 1\}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{D}_{p,1}(E)$ *qui converge dans* $L^p(\Omega; E)$ *vers une variable* F. *Supposons que la suite* $\{DF_n,\ n \geqq 1\}$ *soit bornée dans* $L^p(\Omega; H \otimes E)$, *c'est-à-dire que*

$$\sup_n E\left(\int_0^T \| D_r F_n \|_E^2 \, dr\right)^{p/2} < \infty.$$

Alors $F \in \mathbf{D}_{p,1}(E)$, *et il existe une sous-suite de* $\{DF_n,\ n \geqq 1\}$ *qui converge vers* DF *dans la topologie faible de* $L^p(\Omega; H \otimes E)$.

PROPOSITION 1.2. — *Soit* Y *un processus réel adapté appartenant à* $\mathbf{D}_{p,1}(H)$. *Si* σ *et* b *sont deux fonctions lipschitziennes de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$, *de coefficient de Lipschitz* a, *les variables* $\int_0^t \sigma(Y_s)\, dW_s$ *et* $\int_0^t b(Y_s)\, ds$ *appartiennent à* $\mathbf{D}_{p,1}$ *et il existe deux processus prévisibles* A *et* B *bornés par* a *tels que*

$$\begin{aligned} D_r \int_0^t \sigma(Y_s)\, dW_s &= \sigma(Y_r) + \int_r^t A_s D_r Y_s \, dW_s \qquad \text{si} \quad r < t \\ &= 0 \qquad \text{si} \quad r > t \end{aligned} \tag{1}$$

tandis que

$$\begin{aligned} D_r \int_0^t b(Y_s)\, ds &= \int_r^t B_s D_r Y_s \, ds \qquad \text{si} \quad r < t \\ &= 0 \qquad \text{si} \quad r > t. \end{aligned} \tag{2}$$

Si de plus, pour tout borélien C *de* $\mathbf{R}$ *dont la mesure de Lebesgue* $|C|$ *est nulle, on a p.s.* $|\{s \in [0, T] : Y_s \in C\}| = 0$, *alors on peut choisir* $A_s = \sigma'(Y_s)$ *et* $B_s = b'(Y_s)$, *où* σ' *et* b' *sont des versions quelconques des dérivées respectives de* σ *et* b.

PROPOSITION 1.3. — *Soient* η *dans* $L^p(\Omega, \mathcal{F}_0)$ *avec* $p \geqq 2$, σ *et* b *des fonctions lipschitziennes de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$. *Alors la solution* X *de*

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma(X_t)\, dW_t + b(X_t)\, dt \\ X_0 &= \eta \end{aligned} \tag{3}$$

appartient à $\mathbf{D}_{p,1}(\mathrm{H})$*; pour tout* t *dans* $[0, \mathrm{T}]$, X_t *appartient à* $\mathbf{D}_{p,1}$, *et presque partout en* (r, ω), *on a*

$$\mathrm{D}_r \mathrm{X}_t = \sigma(\mathrm{X}_r) \exp\left\{ \int_r^t [\sigma'(\mathrm{X}_s)\, d\mathrm{W}_s - \frac{1}{2}\sigma'(\mathrm{X}_s)^2\, ds + b'(\mathrm{X}_s)\, ds] \right\} . \mathbf{1}_{[r,\mathrm{T}]}. \quad (4)$$

Preuve. — La première partie de ce résultat est démontrée dans [1]. La proposition précédente montre l'existence de processus prévisibles A et B bornés tels que

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_r \mathrm{X}_t &= \sigma(\mathrm{X}_r) + \int_r^t \mathrm{A}_s \mathrm{D}_r \mathrm{X}_s\, d\mathrm{W}_s + \int_r^t \mathrm{B}_s \mathrm{D}_r \mathrm{X}_s\, ds \qquad si \quad r<t \quad (5) \\ &= 0 \qquad si \quad r>t. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\mathrm{D}_r \mathrm{X}_t = \sigma(\mathrm{X}_r) \exp\left\{ \int_r^t \left[\mathrm{A}_s\, d\mathrm{W}_s - \frac{1}{2}\mathrm{A}_s^2\, ds + \mathrm{B}_s\, ds \right] \right\} . \mathbf{1}_{[r,\mathrm{T}]}(t). \quad (6)$$

Sur l'ensemble, $\mathrm{G} = \{ (r, \omega) : \sigma(\mathrm{X}_r(\omega)) = 0 \}$, $\mathrm{D}_r \mathrm{X}_t = 0$. D'autre part, pour presque tout $(r, \omega) \in \mathrm{G}^c$, on a l'égalité (4). En effet, en considérant pour r fixé la section G_r^c et en supposant $\mathrm{P}(\mathrm{G}_r^c) > 0$, on a d'après le théorème 19 de [1] que pour tout $s > r$, la variable aléatoire X_s possède sur G_r^c une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Par suite, les intégrales $\int_r^t \sigma'(\mathrm{X}_s)\, d\mathrm{W}_s$, $\int_r^t \sigma'(\mathrm{X}_s)^2\, ds$ et $\int_r^t b'(\mathrm{X}_s)\, ds$ sont bien définies p.s. sur G_r^c et sont égales respectivement à $\int_r^t \mathrm{A}_s\, d\mathrm{W}_s$, $\int_r^t \mathrm{A}_s^2\, ds$ et $\int_r^t \mathrm{B}_s\, ds$, étant donné que A_s et B_s sont des limites faibles dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ des suites $\sigma_n'(\mathrm{X}_s)$ et $b_n'(\mathrm{X}_s)$, où σ_n et b_n sont des régularisations de σ et b (*voir* [4]). □

2. DÉRIVABILITÉ DE DIFFUSIONS RÉFLÉCHIES

Notre cadre de travail sera celui des équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles étudiées en [3], qui permettent de traiter des situations très variées comme le cas d'une réflexion simple ou double, ou encore la présence de discontinuités dans le coefficient de dérive. Rappelons donc les notations et le résultat principal de [3].

On dit qu'une fonction h convexe, semi-continue inférieurement, définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, est *propre* si

$$\mathrm{Dom}\, h = \{ x \in \mathbf{R} : h(x) < +\infty \}$$

a un intérieur I non vide. On lui associe l'opérateur multivoque ∂h par la définition suivante : un point (x, y) dans $\mathbf{R}^2$ est dans le graphe de ∂h, noté

$\mathrm{Gr}(\partial h)$, si pour tout z réel,

$$h(z) \geqq h(x) + y(z-x).$$

Le résultat suivant est démontré dans [3].

PROPOSITION 2.1. — *On se donne :*

- *un réel* $T > 0$;
- *une fonction h convexe, propre, semi-continue inférieurement;*
- *deux applications lipschitziennes* σ *et* g *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$, *de coefficient de Lipschitz a;*
- *un mouvement brownien réel* W *défini sur un espace*

$$\Omega = \Omega_0 \times \mathscr{C}([0, T]; \mathbf{R});$$

- *une variable aléatoire* η $\mathscr{F}_0$*-mesurable, à valeurs dans* $\bar{I}$, *où* I *désigne l'intérieur de* Dom h.

Il existe alors un unique couple (Y, K) *de processus réels sur* [0, T], *continus, adaptés, tels que, pour* $0 \leqq t \leqq T$,

- Y_t *ait ses valeurs dans* $\bar{I}$, *avec* $Y_0 = \eta$;
- *la variation de* K *soit p. s. finie sur* [0, T], *avec* $K_0 = 0$;
- $dY_t = \sigma(Y_t)\,dW_t + g(Y_t)\,dt - dK_t$;
- *pour tout couple* (α, β) *de processus optionnels tels que* (α_t, β_t) *appartienne à* $\mathrm{Gr}(\partial h)$, *la mesure* $(Y_t - \alpha_t)(dK_t - \beta_t\,dt)$ *soit p. s. positive.*

On dit alors que ce couple (Y, K) est solution sur [0, T] du problème (h, σ, g, η). Ce modèle général permet par exemple par exemple de traiter les cas suivants (où l'on a pris $\sigma = 1$ et $g = 0$) :

– (brownien réfléchi en 0) $h(x) = +\infty$ pour $x < 0$,
$= 0$ pour $x \geqq 0$

– (brownien réfléchi en a et b) $h(x) = +\infty$ pour $x < a$ et $x > b$,
$= 0$ pour $a \leqq x \leqq b$

– (processus « bang-bang ») $h(x) = |x|$

– (Bessel d'ordre $\alpha > 1$) $h(x) = +\infty$ pour $x \leqq 0$
$= \dfrac{1-\alpha}{2} \log x$ pour $x > 0$.

Voici un résultat essentiel de la démonstration de [3].

PROPOSITION 2.2. — *Si h est décroissante, il existe une suite* $\{k_n, n \geqq 1\}$ *de fonctions numériques sur* $\mathbf{R}$, *négatives, croissantes, lipschitziennes de rapport n, telles que si l'on note* $h'_+(x)$ *la dérivée à droite de* $h(x)$ *définie sur* Dom h, *on ait*

– *pour* $x \in \mathrm{Dom}\,\partial h$, $\lim\limits_{n \to \infty} k_n(x) = h'_+(x)$;

– *pour* $x \notin \mathrm{Dom}\,\partial h$, $\lim\limits_{n \to \infty} k_n(x) = -\infty$.

La solution Y *du problème* (h, σ, g, η) *est alors obtenue comme limite croissante des solutions* Y^n *des équations différentielles stochastiques*

$$\left.\begin{aligned} dY_t^n &= \sigma(Y_t^n)\, dW_t + g(Y_t^n)\, dt - k_n(Y_t^n)\, dt \\ Y_0^n &= \eta. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Rappelons également quatre autres résultats obtenus dans [3] :

• p. s., dans tout intervalle en t tel que Y reste dans I, le processus K admet en t une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dont la valeur est comprise entre $h'_-(Y_t)$ et $h'_+(Y_t)$, où h'_- et h'_+ sont respectivement les dérivées à gauche et à droite de h;

• pour tout x dans $\bar{I}$ tel que $\sigma(x) \neq 0$, on a

$$|\{s \in [0, T] : Y_s = x\}| = 0;$$

• si d est frontière à gauche, si L^x désigne le temps local continu à droite de Y en x et si $\sigma(d) \neq 0$, on a

$$\int_0^t 1_{\{Y_s = d\}}\, dK_s = -\frac{1}{2} L_t^d;$$

• pour tout x dans $\operatorname{Dom} h$ tel que $\sigma(x) = 0$ et $h'_-(x) \leqq g(x) \leqq h'_+(x)$, alors Y reste en x dès qu'il atteint ce point.

Les propositions suivantes donnent des informations supplémentaires qui seront nécessaires à notre étude.

PROPOSITION 2.3. — *Supposons* η *dans* $L^p(\Omega, \mathcal{F}_0)$ *pour un* $p \geqq 2$. *Il existe alors, pour tout* b *dans* I, *un réel* $\alpha > 0$ *tel que pour* $0 \leqq t \leqq T$, *on ait*

$$E[1 + |Y_t - b|^p] \leqq e^{\alpha t} E[1 + |\eta - b|^p]. \tag{8}$$

De plus, si h *est décroissante,*

$$E[\sup_{0 \leqq t \leqq T} |Y_t|^p] < +\infty$$

et

$$\lim_{n \to \infty} E[\sup_{0 \leqq t \leqq T} |Y_t - Y_t^n|^p] = 0,$$

où les Y^n *vérifient la relation* (7).

Preuve. — (*a*) La formule de changement de variables donne

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}[1 + |Y_t - b|^p] &= 1 + |\eta - b|^p - \alpha \int_0^t e^{-\alpha s}(1 + |Y_s - b|^p)\, ds \\ &\quad + p \int_0^t e^{-\alpha s} \operatorname{sgn}(Y_s - b)\, |Y_s - b|^{p-1} [\sigma(Y_s)\, dW_s + g(Y_s)\, ds - dK_s] \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2} \int_0^t e^{-\alpha s} |Y_s - b|^{p-2} \sigma(Y_s)^2\, ds. \end{aligned}$$

On utilise ensuite les majorations

$$\begin{aligned} |g(\mathrm{Y}_s)| &\leqq |g(b)| + a\,|\mathrm{Y}_s - b| \\ \sigma(\mathrm{Y}_s)^2 &\leqq 2\,\sigma^2(b) + 2\,a^2(\mathrm{Y}_s - b)^2 \\ -(\mathrm{Y}_s - b)\,d\mathrm{K}_s &\leqq -(\mathrm{Y}_s - b)\,h'_+(b)\,ds \\ |x|^{p-1} &\leqq 1 + |x|^p \\ |x|^{p-2} &\leqq 1 + |x|^p \end{aligned}$$

et il suffit enfin de choisir

$$\alpha \geqq p\,|g(b)| + pa - ph'_+(b) + p(p-1)\,\sigma^2(b) + p(p-1)\,a^2$$

pour obtenir l'inégalité voulue.

(*b*) On déduit de (*a*) que

$$\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} \mathrm{E}[|\mathrm{Y}_t|^p] < +\infty,$$

et cela entraîne aisément que K_T est dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$. Mais alors

$$\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |\mathrm{Y}_t|^p \leqq 4^{p-1}\Big(|\eta|^p + \sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} \left| \int_0^t \sigma(\mathrm{Y}_s)\,d\mathrm{W}_s \right|^p + \left(\int_0^\mathrm{T} |g(\mathrm{Y}_s)|\,ds \right)^p + |\mathrm{K}_\mathrm{T}|^p\Big),$$

donc le membre de gauche est intégrable et ce raisonnement vaut aussi pour chacun des Y^n. Par convergence monotone d'une suite de fonctions continues vers une limite continue on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |\mathrm{Y}_t - \mathrm{Y}_t^n|^p = 0 \text{ p. s.}$$

et on conclut par convergence dominée. □

Un second résultat va se révéler fort utile. Il porte cette fois sur la comparaison de deux équations.

Proposition 2.4. — *Soient h et l deux fonctions convexes, propres, semi-continues inférieurement, telles que pour tout couple* $x < y$ *avec* $x \in \mathrm{Dom}\,h$ *et* $y \in \mathrm{Dom}\,l$, *on ait*

$$h(y) - h(x) \leqq l(y) - l(x).$$

Soient η *une variable aléatoire* $\mathscr{F}_0$*-mesurable à valeurs dans* $\overline{\mathrm{Dom}\,h}$, *et* θ *une variable aléatoire* $\mathscr{F}_0$*-mesurable à valeurs dans* $\overline{\mathrm{Dom}\,l}$, *telles que* $\theta \leqq \eta$ *p.s. Si* (Y, K) *est la solution de* (h, σ, g, η) *et* (Z, L) *la solution de* (l, σ, g, θ), *alors* $\mathrm{Z}_t \leqq \mathrm{Y}_t$ *p.s. pour tout t dans* [0, T].

Preuve. — Il n'y a quelque chose à démontrer que s'il existe un point *b* dans l'intérieur de $\mathrm{Dom}\,h \cap \mathrm{Dom}\,l$. On pose

$$\alpha_t = \frac{\mathrm{Y}_t + \mathrm{Z}_t}{2}\,\mathbf{1}_{\{\mathrm{Z}_t > \mathrm{Y}_t\}} + b\,\mathbf{1}_{\{\mathrm{Z}_t \leqq \mathrm{Y}_t\}}$$

et si h'_+ et l'_+ sont les dérivées à droite respectives de h et l, les inégalités

$$(Y_t-\alpha_t)(dK_t-h'_+(\alpha_t)\,dt)\geqq 0$$
$$(Z_t-\alpha_t)(dL_t-l'_+(\alpha_t)\,dt)\geqq 0$$

montrent par addition que

$$\mathbf{1}_{\{Z_t>Y_t\}}(Z_t-Y_t)(dL_t-dK_t)\geqq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}[(Z_t-Y_t)^+]^2 &= 2\int_0^t (Z_s-Z_s)^+\,(\sigma(Z_s)-\sigma(Y_s))\,dW_s\\ &\quad +2\int_0^t (Z_s-Y_s)^+\,[(g(Z_s)-g(Y_s))\,ds-(dL_s-dK_s)]\\ &\quad +\int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s>Y_t\}}(\sigma(Z_s)-\sigma(Y_s))^2\,ds\\ &\leqq 2\int_0^t (Z_s-Y_s)^+\,(\sigma(Z_s)-\sigma(Y_s))\,dW_s\\ &\quad +(2a+a^2)\int_0^t [(Z_s-Y_s)^+]^2\,ds\end{aligned}$$

et par conséquent

$$E[((Z_t-Y_t)^+)^2]\leqq(2a+a^2)\int_0^t E[((Z_s-Y_s)^+)^2]\,ds,$$

ce qui prouve que $Z_t\leqq Y_t$ p. s. □

COROLLAIRE 2.5. — *Pour tout point frontière d de* Dom h *tel que* $\sigma(d)\neq 0$ *et tout* $0<t\leqq T$, *on a* $P(Y_t=d)=0$.

Preuve. — Supposons par exemple d frontière à gauche et considérons les solutions Y de (h, σ, g, η) et Z de (h, σ, g, d). Pour $t>0$, comme $|\{s\in[0, t]: Z_s=d\}|=0$, on a

$$\int_0^t P(Z_s=d)\,ds=0,$$

et il existe donc un $s\in]0, t[$ tel que $P(Z_s=d)=0$. Si l'on compare sur l'intervalle de temps $[t-s, t]$ la solution Y de (h, σ, g, Y_{t-s}) et la solution U de (h, σ, g, d), on vérifie que $Y\geqq U$ d'après la proposition précédente, et par conséquent

$$P(Y_t=d)\leqq P(U_t=d)=P(Z_s=d)=0. \quad \square$$

Notre prochaine étape est la mise en évidence d'une suite d'approximations convenables du processus Y dans le cas général, en étendant ainsi le résultat de la proposition 2.2 démontré lorsque h était décroissante.

PROPOSITION 2.6. — *Soit* (Y, K) *la solution du problème* (h, σ, g, η), *où* η *est dans un espace* $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathscr{F}_0)$ *avec* $p \geqq 2$. *Il existe alors une suite* $(b_n, n \geqq 1)$ *de fonctions lipschitziennes vérifiant* $b'_n \leqq a$ *p.p.* telle que la solution X^n *de l'équation.*

$$\left.\begin{aligned} d\mathrm{X}_t^n &= \sigma(\mathrm{X}_t^n)\, d\mathrm{W}_t + b_n(\mathrm{X}_t^n)\, dt \\ \mathrm{X}_0^n &= \eta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

vérifie

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}[\sup_{0 \leqq t \leqq \mathrm{T}} |\mathrm{Y}_t - \mathrm{X}_t^n|^p] = 0 \tag{10}$$

Preuve. — (*a*) Si h est décroissante, on pose $\mathrm{X}^n = \mathrm{Y}^n$, $b_n = g - k_n$, et la proposition 2.3 donne le résultat. En effet,

$$g' - k'_n \leqq g' \leqq a \text{ p. p}$$

Par symétrie sur $\mathbf{R}$, le résultat est encore valable lorsque h est croissante. Remarquons maintenant que le couple (Y, K) est solution de (h, σ, g, η) si et seulement si le couple $(\mathrm{Y}, \mathrm{K}^1)$, avec $\mathrm{K}_t^1 = \mathrm{K}_t - ct$, est solution de (h^1, σ, g^1, η), où, b et c étant des réels arbitraires, on a posé

$$h^1(x) = h(x) - c(x - b)$$
$$g^1(x) = g(x) - c.$$

Ainsi, la conclusion est encore valable lorsque le graphe de ∂h est simplement majoré (ou minoré).

(*b*) Supposons donc que le graphe de ∂h ne soit ni majoré ni minoré. Il existe alors e dans $\mathrm{Dom}\, \partial h$ tel que $(e, 0) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$. En utilisant la remarque faite en (*a*) et une constante c bien choisie, on peut supposer que e est dans I et que $h'_-(e) = h'_+(e) = 0$. Notons d et d' les frontières à gauche et à droite, finies ou infinies, et soit $(x_m, m \geqq 1)$ une suite de points de I, supérieure à e, qui converge en croissant vers d'. On pose pour $m \geqq 1$

$$\begin{aligned} h_m(x) &= h(x) \quad \text{si} \quad x \leqq x_m, \\ &= h(x_m) + (x - x_m)\, h'_+(x_m) \quad \text{si} \quad x_m \leqq x \leqq d', \\ &= h(x_m) + (d' - x_m)\, h'_+(x_m) + (x - d') \max(m, h'_+(x_m)) \quad \text{si} \quad d' \leqq x. \end{aligned}$$

et on note $(\mathrm{Y}^m, \mathrm{K}^m)$ la solution de (h_m, σ, g, η). En choisissant $\alpha_t = e$, $\beta_t = 0$, on observe que

$$(\mathrm{Y}_t^m - e)\, d\mathrm{K}_t^m \geqq 0, \tag{11}$$

donc le processus

$$\mathrm{F}_t^m = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\mathrm{Y}_s^m < e\}}\, d\mathrm{K}_s^m$$

est continu décroissant. Puis, en choisissant

$$\alpha_t = \frac{Y_t^m + Y_t^{m+1}}{2} \mathbf{1}_{\{d < Y_t^m < e\}} + e \, \mathbf{1}_{\{Y_t^m \notin]d, e[\}}$$
$$\beta_t = h'_+ (\alpha_t),$$

après avoir remarqué que d'après la proposition 2.4 $Y_t^m \geqq Y_t^{m+1} \geqq Y_t$, il vient facilement

$$\mathbf{1}_{\{d < Y_t^m < e\}} (Y_t^m - Y_t^{m+1}) (dK_t^m - dK_t^{m+1}) \geqq 0$$

et même

$$\mathbf{1}_{\{Y_t^m < e\}} (Y_t^m - Y_t^{m+1}) (dK_t^m - dK_t^{m+1}) \geqq 0,$$

car si $Y_t^m = d$, on a aussi $Y_t^{m+1} = d$. De même,

$$\mathbf{1}_{\{Y_t^m < e\}} (Y_t^m - Y_t) (dK_t^m - dK_t) \geqq 0.$$

En posant pour tout rationnel s de $[0, T]$

$$T_m(s) = \inf \{ t \in [s, T] : Y_t^m = Y_t^{m+1} < e \text{ ou } t = T \}$$
$$S_m(s) = \inf \{ t \in [T_m(s), T] : Y_t^m = e \text{ ou } t = T \},$$

la formule de changement de variables et l'inégalité de Gronwall montrent que

$$E [(Y^m_{(T_m(s)+t) \wedge S_m(s)} - Y^{m+1}_{(T_m(s)+t) \wedge S_m(s)})^2 \mathbf{1}_{\{T_m(s) < T\}}] = 0,$$

donc $Y^m = Y^{m+1}$ sur l'intervalle $[T_m(s), S_m(s)]$, et par conséquent $dK^m = dK_{m+1}$ sur ce même intervalle. Comme l'ensemble

$$D = \{ t \in [0, T] : Y_t^m < e \text{ et } Y_t^m = Y_t^{m+1} \}$$

est réunion d'intervalles et que son intérieur est inclus dans la réunion dénombrable des intervalles $[T_m(s), S_m(s)]$ lorsque s varie, on peut constater que $dK^m = dK^{m+1}$ sur D. On a un résultat analogue pour (Y^m, K^m) et (Y, K). Il en résulte que les processus F^m forment une suite décroissante de processus décroissants continus, qui vérifient

$$dF_s^m \geqq dF_s^{m+1} \geqq \mathbf{1}_{\{Y_s < e\}} dK_s,$$

et cela prouve que

$$F = \lim_{m \to \infty} F^m$$

est un processus décroissant continu. Posons maintenant

$$Z = \lim_{m \to \infty} Y^m \geqq Y.$$

C'est un processus prévisible, localement borné, semi-continu supérieurement. Le processus

$$L_t = -Z_t + \eta + \int_0^t \sigma(Z_s)\, dW_s + \int_0^t g(Z_s)\, ds$$

est donc semi-continu inférieurement. En probabilité, on a

$$L_t = \lim_{m \to \infty} K_t^m.$$

Le processus

$$G_t^m = K_t^m - F_t^m = \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s^m \geqq e\}}\, dK_s^m$$

est aussi égal à

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s^m > e\}}\, dK_s^m$$

d'après l'hypothèse $h'_+(e) = h'_-(e) = 0$ et il est croissant d'après l'inégalité (11). Ainsi les G^m sont des processus croissants qui tendent en probabilité vers $G = L - F$, processus croissant semi-continu inférieurement. Donc F et G sont continus à gauche, pourvus de limites à droite, et il en va de même pour L et Z. On a même vu que F est continu, et comme le passage à la limite en m donne

$$F_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s < e\}}\, dL_s,$$

il en résulte que L est continu en tout point t tel que $Z_t < e$. En utilisant la remarque du (*a*) et en choisissant e arbitrairement proche de d', on peut montrer qu'en fait L est continu en tout point t tel que $Z_t < d'$. On montre ensuite exactement comme en [3] que Z ne sort pas de $[d, d']$, que Z est continu à droite en d' et que (Z, L) est solution du problème (h, σ, g, η), c'est-à-dire $Z = Y$ et $L = K$.

(*c*) Toujours d'après la remarque du (*a*), le remplacement de g par $g - \max(m, h'_+(x_m))$ permet d'appliquer la proposition 2.3 à Y^m, d'où pour tout m

$$E[\sup_{0 \leqq t \leqq T} |Y_t^m|^p] < +\infty.$$

Par symétrie sur **R**, il existe une suite (U_t^m) croissant vers Y_t et telle que pour tout m,

$$E[\sup_{0 \leqq t \leqq T} |U_t^m|^p] < +\infty,$$

et il en résulte par convergence dominée que

$$\lim_{m\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t - Y_t^m|^p] = 0.$$

Mais, toujours d'après la proposition 2.3, il existe pour tout m une approximation X^m de Y^m qui vérifie

$$E[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^m - Y_t^m|^p] \leq \frac{1}{m}$$

et qui possède les propriétés de l'énoncé. □

Il est maintenant possible d'obtenir la dérivabilité de Y sur l'espace de Wiener.

PROPOSITION 2.7. — *Soit* (Y, K) *la solution du problème* (h, σ, g, η), *où* η *est dans* $L^p(\Omega, \mathscr{F}_0)$ *avec* $p\geq 2$. *Alors* $Y\in \mathbf{D}_{p,1}(H)$; *pour tout* t *dans* [0, T], $Y_t\in \mathbf{D}_{p,1}$, $K_t\in \mathbf{D}_{p,1}$, *et on a la formule*

$$D_r Y_t = \mathbf{1}_{[r,T]}(t)\Big\{\sigma(Y_r) + \int_r^t \sigma'(Y_s) D_r Y_s \, dW_s + \int_r^t g'(Y_s) D_r Y_s \, ds - D_r K_t\Big\}. \quad (12)$$

Preuve. — Considérons les approximations X^n de la proposition 2.6. D'après la proposition 1.3, p. p. sur $[0, t]\times\Omega$, on a

$$D_r X_t^n = \sigma(X_r^n) \exp\left\{\int_r^t \left[\sigma'(X_s^n)\, dW_s - \frac{1}{2}\sigma'(X_s^n)^2\, ds + b_n'(X_s^n)\, ds\right]\right\}.$$

Les inégalités maximales pour les martingales entraînent que

$$E[\sup_{t\in[r,T]} |D_r X_t^n|^p] \leq C_p E\left[|\sigma(X_r^n)|^p \exp\left\{p\int_r^T \sigma'(X_s^n)\, dW_s - \frac{p}{2}\int_r^T \sigma'(X_s^n)^2\, ds\right\}\right] e^{apT} \leq C_p E[|\sigma(X_r^n)|^p]\, e^{a(p^2-p)/2\,T + apT}.$$

Le caractère lipschitzien de σ joint à la convergence de X^n vers Y uniforme dans $L^p(\Omega)$ entraîne que

$$\sup_n \sup_{r\in[0,T]} E[\sup_{t\in[r,T]} |D_r X_t^n|^p] < +\infty.$$

Les hypothèses de la proposition 1.1 sont donc vérifiées, cela entraîne que $Y\in\mathbf{D}_{p,1}(H)$ et $Y_t\in\mathbf{D}_{p,1}$ pour tout t, et par suite $K_t\in\mathbf{D}_{p,1}$ également. En utilisant la proposition 1.2 et les arguments de la preuve de la proposition 1.3 on obtient la formule de l'énoncé. □

3. EXPRESSION DE LA DÉRIVÉE STOCHASTIQUE

La proposition 1.3 nous a donné la valeur de la dérivée stochastique pour une diffusion à coefficients lipschitziens. Nous allons maintenant obtenir cette valeur pour les équations rencontrées dans la partie précédente. Pour cela, nous aurons besoin de la mesure positive σ-finie μ associée à h de la manière suivante :

$$\mu(]b, c]) = h'_+(c) - h'_+(b) \qquad \text{pour} \quad b < c,\ b \text{ et } c \text{ dans I}$$
$$\mu(\mathrm{I}^c) = 0.$$

Notons d et d' les frontières à gauche et à droite de I, à distance finie ou infinie. Traitons d'abord un cas particulier, sans frontière.

LEMME 3.1. — *Soit* (Y, K) *la solution du problème* (h, σ, g, η), *où* η *est dans* $\mathrm{L}^4(\Omega, \mathscr{F}_0)$. *On suppose qu'il existe un intervalle compact* $[b, c]$ *tel que* h *soit une fonction affine sur* $]-\infty, b]$ *et* $[c, +\infty[$, *et qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\sigma(x) \geqq \alpha$ *pour tout* x *réel. Alors on a*

$$\mathrm{D}_r \mathrm{Y}_t = \sigma(\mathrm{Y}_r) \exp\left\{ \int_r^t \left[\sigma'(\mathrm{Y}_s)\, d\mathrm{W}_s - \frac{1}{2} \sigma'(\mathrm{Y}_s)^2\, ds + g'(\mathrm{Y}_s)\, ds \right] - \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{L}_t^x - \mathrm{L}_r^x}{\sigma^2(x)} \mu(dx) \right\} . \mathbf{1}_{[r,\, \mathrm{T}]}(t). \tag{13}$$

Preuve. — Comme il n'y a pas de bord ici et que

$$|\{ s \in [0, \mathrm{T}] : h'_+(\mathrm{Y}_s) > h'_-(\mathrm{Y}_s) \}| = 0$$

parce que σ ne s'annule pas, on a simplement

$$\mathrm{K}_t = \int_0^t h'_+(\mathrm{Y}_s)\, ds.$$

D'après la proposition 2.7, on sait que $\mathrm{K}_t \in \mathbf{D}_{4,\,1}$ et on va montrer que pour $r \leqq t$

$$\mathrm{D}_r \mathrm{K}_t = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_r^t \mathrm{D}_r \mathrm{Y}_s\, \mathrm{L}^x(ds) \right) \frac{\mu(dx)}{\sigma^2(x)}. \tag{14}$$

Mais le second membre de (14) est égal à

$$\int_r^t \mathrm{D}_r \mathrm{Y}_s \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{L}^x(ds)}{\sigma^2(x)} \mu(dx) \right),$$

où

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{L}^x(ds)}{\sigma^2(x)} \mu(dx)$$

est une mesure dont la fonction de répartition est égale à

$$f(s)=\int_{\mathbf{R}} \frac{L_s^x}{\sigma^2(x)} \mu(dx).$$

Par conséquent, d'après la proposition 2.7, l'égalité (14) entraîne qu'à r fixé, $(D_r Y_t, r \leqq t)$ vérifie une équation différentielle stochastique linéaire dont la solution est donnée par (13). Il suffit donc de montrer l'égalité (14).

Le remplacement de g par $g-h'_+(c)$ permet de rendre h décroissante et d'utiliser les approximations k_n et Y^n fournies par la proposition 2.2. Considérons alors les intégrales $\int_0^t k_n(Y_s)\,ds$ qui convergent en décroissant, et aussi dans $L^4(\Omega)$ uniformément en t, vers K_t. D'après la proposition 1.2,

$$D_r \int_0^t k_n(Y_s)\,ds=\int_r^t k'_n(Y_s)\,D_r Y_s\,ds,$$

et

$$E\left[\int_0^T \left(\int_r^t k'_n(Y_s)\,D_r Y_s\,ds\right)^2 dr\right]$$
$$\leqq T . \sup_{r\in[0,\,T]} (E[\sup_{s\in[r,\,T]} |D_r Y_s|^4])^{1/2} \left(E\left[\left(\int_0^T k'_n(Y_s)\,ds\right)^4\right]\right)^{1/2}.$$

D'après la formule (4), les approximations Y^n de (7) vérifient $D_r Y_t^n \geqq 0$. En comparant terme à terme, on vérifie que dans $L^4(\Omega)$,

$$K_t=\lim_{n\to\infty} \int_0^t k_n(Y_s^n)\,ds,$$

puis que

$$\sup_n E \int_0^T \left(\int_r^t k'_n(Y_s^n)\,D_r Y_s^n\,ds\right)^2 dr<+\infty,$$

et il s'ensuit que $D_r K_t$ est la limite faible d'une sous-suite de

$$\int_r^t k'_n(Y_s^n)\,D_r Y_s^n\,ds,$$

qui pour r fixé est un processus croissant. Ainsi, $D_r K_t$ est également croissant, et $D_r Y_t$ donné par (12) est somme d'un processus continu et d'un processus décroissant. Si, pour $t \geqq r$, on pose

$$U_t=\sigma(Y_r)\exp\int_r^t \left[\sigma'(Y_s)\,dW_s-\frac{1}{2}\sigma'(Y_s)^2\,ds+g'(Y_s)\,ds\right],$$

le calcul stochastique montre que

$$0 \leqq D_r Y_t \leqq U_t,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\sup_{r \in [0, T]} E(\sup_{s \in [r, T]} |D_r Y_s|^4) < +\infty.$$

D'autre part,

$$\int_0^T k'_n(Y_s)\, ds \leqq \alpha^{-2} \int_0^T k'_n(Y_s)\, \sigma^2(Y_s)\, ds.$$

Alors,

$$\frac{1}{2}\int_0^T k'_n(Y_s)\,\sigma^2(Y_s)\,ds = h_n(Y_T) - h_n(\eta) - \int_0^T k_n(Y_s)\,[\sigma(Y_s)\,dW_s + g(Y_s)\,ds - h'_+(Y_s)\,ds], \quad (15)$$

où h_n est une primitive de k_n. Comme h est à croissance linéaire, on a

$$|h_n(Y_T) - h_n(\eta)| \leqq |h(Y_T) - h(\eta)| \in L^4(\Omega),$$

et d'autre part, comme $|k_n| \leqq |h'_-(b)|$, les intégrales du membre de droite de (15) sont bornées dans $L^4(\Omega)$. Il en résulte qu'une sous-suite de la suite $\left\{\int_r^t k'_n(Y_s)\, D_r Y_s\, ds,\ n \geqq 1\right\}$ converge faiblement vers D_r, K_t.
Remarquons maintenant que

$$\int_r^t k'_n(Y_s)\, D_r Y_s\, ds = \int_{\mathbf{R}} \frac{k'_n(x)}{\sigma^2(x)} \left(\int_r^t D_r Y_s\, L^x(ds)\right) dx.$$

Comme $D_r Y_t$ est somme d'un processus continu et d'un processus décroissant, la continuité étroite en x des mesures continues $L^x(ds)$ assure la continuité de l'application

$$x \to \int_r^t D_r Y_s\, L^x(ds).$$

Il en résulte que presque partout sur $[0, t] \times \Omega$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{k'_n(x)}{\sigma^2(x)} \left(\int_r^t D_r Y_s\, L^x(ds)\right) dx = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu(dx)}{\sigma^2(x)} \left(\int_r^t D_r Y_s\, L^x(ds)\right).$$

Cette suite étant bornée dans $L^2([0, T] \times \Omega; \mathbf{R})$ converge dans $L^q([0, T] \times \Omega; \mathbf{R})$ pour tout $q < 2$, et cela prouve l'égalité (14). □

Voici maintenant le résultat essentiel de cette étude.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* (Y, K) *la solution du problème* (h, σ, g, η), *où* η *est dans* $L^4(\Omega, \mathcal{F}_0)$ *et* $\sigma(x) > 0$ *pour tout* x *dans l'intérieur* I *de* Dom h.

Pour $t>0$, *on définit*

$$B=\{(r, \omega)\in[0, t]\times\Omega : d<\inf_{s\in[r, t]} Y_s(\omega)\leqq \sup_{s\in[r, t]} Y_s(\omega)<d'\}$$

et pour $r<t$

$$B_r=\{\omega\in\Omega : (r, \omega)\in B\}.$$

Alors, presque partout dans $[0, t]\times\Omega$,

$$D_r Y_t=\sigma(Y_r)\exp\left\{\int_r^t\left[\sigma'(Y_s)\,dW_s-\frac{1}{2}\sigma'(Y_s)^2\,ds+g'(Y_s)\,ds\right]\right.$$
$$\left.-\int_{\mathbf{R}}\frac{L_t^x-L_r^x}{\sigma^2(x)}\mu(dx)\right\}.\mathbf{1}_{B_r}. \quad (16)$$

Preuve. — (A) Pour commencer, démontrons (16) sur l'ensemble B. On peut remarquer que pour $\omega\in B_r$,

$$\int_{\mathbf{R}}\frac{L_t^x-L_r^x}{\sigma^2(x)}\mu(dx)<+\infty.$$

Notons $\xi(r, t)$ le second membre de (16) et fixons $r\in[0, T]$. Soient b et c des réels tels que $d<b<c<d'$. L'ensemble

$$G_{b, c}=\{\omega : b<\inf_{s\in[r, t]} Y_s(\omega)\leqq\sup_{s\in[r, t]} Y_s(\omega)<c\},$$

est évidemment contenu dans B_r. Soient

$$\hat{h}(x)=\begin{array}{lll} h(b)+h'_+(b)(x-b) & \text{si} & x<b \\ h(x) & \text{si} & b\leqq x\leqq c \\ h(c)+h'_-(c)(x-c) & \text{si} & c<x \end{array}$$
$$\hat{\sigma}(x)=\begin{array}{lll} \sigma(b) & \text{si} & x<b \\ \sigma(x) & \text{si} & b\leqq x\leqq c \\ \sigma(c) & \text{si} & c<x. \end{array}$$

Considérons la solution $((\hat{Y}_s, \hat{Z}_s), s\in[r, t])$ du problème $(\hat{h}, \hat{\sigma}, g, Y_r)$ dans l'intervalle $[r, t]$. On peut alors écrire pour $s\in[r, t]$

$$Y_s=Y_r+\int_r^s\sigma(Y_u)\,dW_u+\int_r^s g(Y_u)\,du-(K_s-K_r)$$
$$\hat{Y}_s=Y_r+\int_r^s\hat{\sigma}(\hat{Y}_u)\,dW_u+\int_r^s g(\hat{Y}_u)\,du-\hat{K}_s,$$

et les processus $\{\hat{Y}_s, s\in[r, t]\}$ et $\{Y_s, s\in[r, t]\}$ coïncident p. s. sur $G_{b, c}$. D'après le lemme 3.1, nous avons pour $s\in[r, t]$

$$D_s\hat{Y}_t=\hat{\sigma}(\hat{Y}_s)\exp\left\{\int_s^t\left[\hat{\sigma}'(\hat{Y}_u)\,dW_u-\frac{1}{2}\sigma'(\hat{Y}_u)^2\,du+g'(\hat{Y}_u)\,du\right]\right.$$
$$\left.-\int_{\mathbf{R}}\frac{\hat{L}_t^x-\hat{L}_s^x}{\hat{\sigma}^2(x)}\hat{\mu}(dx)\right\},$$

où $\hat{L}^x$ est le temps local en x du processus $\hat{Y}$, égal à L^x p. p. sur $[r, t] \times G_{b,c}$, et $\hat{\mu}$ est la mesure associée à la fonction convexe $\hat{h}$, c'est-à-dire la restriction de μ à $]b, c[$. Dans cette expression, $D_s \hat{Y}_t$ est une dérivée par rapport au mouvement brownien $\{W_s - W_r, s \in [r, T]\}$, mais elle coïncide avec la dérivée par rapport à $\{W_s, s \in [r, T]\}$ parce que les accroissements des deux browniens sont égaux dans l'intervalle $[r, T]$.

Par conséquent, p. p. sur $[r, t] \times G_{b,c}$, nous avons

$$D_s Y_t = \xi(s, t).$$

D'après la propriété de localité de l'opérateur D démontrée dans [5], l'égalité $Y_t = \hat{Y}_t$ p. s. sur $G_{b,c}$ entraîne que p. p. sur $[r, t] \times G_{b,c}$,

$$D_s Y_t = D_s \hat{Y}_t = \xi(s, t). \tag{17}$$

En faisant décroître b vers d et croître c vers d', on obtient (17) p. p. sur $[r, t] \times B_r$. Comme B est la réunion dénombrable des ensembles $[r, t] \times B_r$, où r est un rationnel de $[0, t]$, la formule (16) est prouvée sur B.

(B) Nous allons maintenant démontrer en différentes étapes la formule (16) sur B^c. Pour fixer les idées, nous supposerons $d > -\infty$.

(i) Supposons que h soit décroissante avec $d \in \operatorname{Dom} \partial h$ et $\sigma(d) > 0$. Soit $(h_n, n \geqq 1)$ la suite de fonctions convexes définie par

$$h_n(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \geqq d \\ h(d) + \min(-n, h'_+(d))(x-d) & \text{si} \quad x < d. \end{cases}$$

On prolonge σ par $\sigma(d)$ sur $]-\infty, d[$ et on note (Y^n, K^n) la solution du problème (h_n, σ, g, η). En suivant les arguments de la démonstration de la proposition 2.6, on montrerait que

$$\lim_{n \to \infty} E[\sup_{s \in [0, t]} |Y_s - Y_s^n|^4] = 0$$

et $Y_s^n \leqq Y_s$ pour tout $s \leqq t$ p. s. D'après la partie (A) appliquée à Y^n,

$$D_r Y_t^n = \sigma(Y_r^n) \exp\left\{ \int_r^t \left[\sigma'(Y_s^n)\, dW_s - \frac{1}{2} \sigma'(Y_s^n)^2\, ds + g'(Y_s^n)\, ds \right] \right.$$
$$\left. - \int_{\mathbf{R}} \frac{L_t^{x,n} - L_r^{x,n}}{\sigma^2(x)} \mu_n(dx) \right\}$$

pour $r \leqq t$, et $D_r Y_t^n = 0$ pour $r > t$. Ici, le processus $L^{x,n}$ est le temps local de Y^n et μ_n est la mesure associée à h_n, c'est-à-dire

$$\mu_n = \mu|_{]d, +\infty[} + (n + h'_+(d))\, \delta_d.$$

On remarque que pour n assez grand, $n + h'_+(d) > 0$. Il est facile de vérifier que

$$\sup_n \sup_{r \in [0, t]} E[|D_r Y_t^n|^4] < +\infty.$$

Par conséquent, d'après la proposition 1.1, il existe une sous-suite de $D_r Y_t^n$ qui converge dans la topologie faible de $L^2([0, t] \times \Omega)$ vers $D_r Y_t$. Par la formule de Tanaka on a

$$\frac{1}{2}(L_t^{d, n} - L_r^{d, n}) = (Y_t^n - d)^+ - (Y_r^n - d)^+ \\ - \int_r^t \mathbf{1}_{\{Y_s^n > d\}} [\sigma(Y_s^n) \, dW_s + g(Y_s^n) \, ds - h'_-(Y_s^n) \, ds]. \tag{18}$$

En utilisant le fait que h'_- est continue à gauche et que Y_s^n converge en croissant vers Y_s, on obtient la convergence en probabilité du membre de droite de (18) vers le membre de droite de

$$\frac{1}{2}(L_t^d - L_r^d) = (Y_t - d)^+ - (Y_r - d)^+ \\ - \int_r^t \mathbf{1}_{\{Y_s > d\}} [\sigma(Y_s) \, dW_s + g(Y_s) \, ds - h'_-(Y_s) \, ds].$$

Remarquons que pour tout $r \in [0, t]$, on a p. s. l'inclusion

$$B_r^c \subset \{ L_t^d > L_r^d \}. \tag{19}$$

En effet, on peut supposer $Y_t > d$ puisque d'après le corollaire 2.5, $P(Y_t = d) = 0$. Soit alors pour $s \in [r, t]$

$$\begin{aligned} V_s &= Y_s - d - \frac{1}{2}(L_s^d - L_r^d) \\ &= Y_r - d + \int_r^s [\sigma(Y_u) \, dW_u + g(Y_u) \, du - h'_+(Y_u) \, du]; \end{aligned}$$

pour tout entier M plus grand que d, on pose

$$T_M = \inf \{ s \in [r, t] : Y_s \geq M \text{ ou } s = t \}.$$

Comme h'_+ est borné et que $g(Y_{s \wedge T_M})$ est borné dans l'intervalle $[r, t]$ sur l'ensemble $\{ T_M > r \}$, le changement de probabilité de densité

$$\exp \left\{ \int_r^{T_M} (h'_+(Y_s) - g(Y_s)) \, dW_s - \frac{1}{2} \int_r^{T_M} (h'_+(Y_s) - g(Y_s))^2 \, ds \right\}$$

fait de $V_{s \wedge T_M}$ une martingale locale qui, sur $B_r^c \cap \{ T_M = t \} \cap \{ L_t^d = L_r^d \}$, resterait positive tout en s'annulant sur l'intervalle $[r, t[$: on aurait alors $Y_t = d$, ce qu'on a précisément exclu. Comme $P(T_M = t)$ tend vers 1 quand M tend vers l'infini, on obtient l'inclusion (19). Pour finir, posons

$$Z^n(r, t) = \exp \left\{ \int_r^t [\sigma'(Y_s^n) \, dW_s - \frac{1}{2} \sigma'(Y_s^n)^2 \, ds + g'(Y_s^n) \, ds] \right\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} D_r Y_t^n \mathbf{1}_{B_r^c} &= \sigma(Y_r^n) Z^n(r, t) \exp\left\{ -\int_{\mathbf{R}} \frac{L_t^{x,n} - L_r^{x,n}}{\sigma^2(x)} \mu_n(dx) \right\} \mathbf{1}_{B_r^c} \\ &\leqq \sigma(Y_r^n) Z^n(r, t) \exp\left\{ -(n + h'_+(d)) \frac{L_t^{d,n} - L_r^{d,n}}{\sigma^2(d)} \right\} \mathbf{1}_{B_r^c}. \end{aligned}$$

Cette expression converge en probabilité vers zéro quand n tend vers l'infini : en effet, la suite $\sigma(Y_r^n) Z^n(r, t)$ est uniformément intégrable, $L_t^{d,n} - L_r^{d,n}$ converge en probabilité vers $L_t^d - L_r^d$, et $L_t^d - L_r^d > 0$ sur B_r^c. En conclusion,

$$D_r Y_t \mathbf{1}_{B_r^c} = 0.$$

(ii) Supposons encore h décroissante, mais $d \notin \mathrm{Dom}\, \partial h$. Soit $(x_n, n \geqq 1)$ une suite strictement décroissante qui converge vers d. On considère deux types d'approximations pour la fonction h :

$$h_n^1(x) = \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } x < d \\ h(x_n) + (x - x_n) h'_+(x_n) & \text{si } d \leqq x \leqq x_n \\ h(x) & \text{si } x_n < x \end{array}$$

$$h_n^2(x) = \begin{cases} h_n^1(d) + (x - d) \min(-n, h'_+(x_n)) & \text{si } x < d \\ h_n^1(x) & \text{si } x \geqq d. \end{cases}$$

On désigne par $(Y^{n,1}, K^{n,1})$ et $(Y^{n,2}, K^{n,2})$ les solutions respectives des problèmes (h_n^1, σ, g, η) et (h_n^2, σ, g, η). La proposition 2.4 nous dit que $Y^{n,2} \leqq Y^{n,1} \leqq Y$. D'après la preuve de la proposition 2.6, nous avons

$$\lim_{n \to \infty} E[\sup_{s \in [0, t]} |Y_s - Y_s^{n,2}|^4] = 0,$$

d'où aussi

$$\lim_{n \to \infty} E[\sup_{s \in [0, t]} |Y_s - Y_s^{n,1}|^4] = 0.$$

En utilisant les résultats obtenus en (A) et en (B) (i), on obtient que

$$\begin{aligned} D_r Y_r^{n,1} = \sigma(Y_r^{n,1}) \exp\left\{ \int_r^t [\sigma'(Y_s^{n,1}) dW_s - \frac{1}{2} \sigma'(Y_s^{n,1})^2 ds \right. \\ \left. + g'(Y_s^{n,1}) ds] - \int_{\mathbf{R}} \frac{L_t^{x,n} - L_r^{x,n}}{\sigma^2(x)} \mu_n(dx) \right\} \mathbf{1}_{B_r^n}, \end{aligned}$$

où

- $L^{x,n}$ est le temps local en x de $Y^{n,1}$;
- μ_n est la mesure associée à h_n^1, c'est-à-dire $\mu|_{]x_n, +\infty[}$;
- $B_r^n = \{\omega : d < \inf_{s \in [r, t]} Y_s^{n,1}\}$.

Comme dans la démonstration de la proposition 2.7, on a

$$\sup_n \sup_{r \in [0, t]} E[|D_r Y_t^{n,1}|^4] < +\infty,$$

donc il existe une sous-suite de $D_r Y_t^{n,1}$ qui converge dans la topologie faible de $L^2([0, t] \times \Omega)$ vers $D_r Y_t$. D'autre part, puisque $B_r^n \subset B_r$, de $D_r Y_t^{n,1} = 0$ sur $(B_r^n)^c$ on déduit que $D_r Y_t^{n,1} = 0$ sur B_r^c, et par conséquent $D_r Y_t = 0$ sur B_r^c.

(iii) On suppose encore h décroissante, mais $\sigma(d) = 0$. En considérant les approximations k_n et Y^n de la proposition 2.2, on peut montrer que si $h(d) = +\infty$ ou $-\infty \leqq h'_+(d) < g(d)$, pour n assez grand la probabilité que Y^n rencontre d en un temps $t \in]0, T]$ est nulle; il en va donc de même pour Y puisque $Y^n \leqq Y$. Il reste à traiter le cas $g(d) \leqq h'_+(d) \leqq 0$. On sait qu'alors, si

$$S = \inf\{t \in [0, T] : Y_t = d\},$$

on a $Y_t = d$ pour $t \geqq S$. D'après la propriété de localité de [5], on a $D_r Y_t = 0$ p. p. sur

$$[0, t] \times \{t \geqq S\} = B^c.$$

(iv) On suppose maintenant que h n'est pas décroissante. Comme on l'a vu dans la partie (a) de la preuve de la proposition 2.6, le cas où le graphe de ∂h est majoré se ramène facilement au cas où h est décroissante.

Soient c un rationnel strictement plus petit que d' (que d' soit fini ou infini), b un rationnel strictement plus grand que d (qui est fini), s_1, s_2 et s_3 des rationnels qui vérifient $0 < s_1 < s_2 < s_3 < t$, où t est fixé > 0. On pose

$$A^1_{c, s_1, s_2, s_3} = \{\omega : d = \inf_{u \in [s_2, s_3]} Y_u \text{ et } \sup_{u \in [s_1, s_3]} Y_u < c\}$$
$$A^2_{b, s_1, s_2, s_3} = \{\omega : b < \inf_{u \in [s_1, s_3]} Y_u \text{ et } \sup_{u \in [s_2, s_3]} Y_u = d'\}.$$

Il est aisé de vérifier que p. p. sur $[0, T] \times \Omega$,

$$B^c = \bigcup_{b, c, s_1, s_2, s_3} \{[s_1, s_2] \times (A^1_{c, s_1, s_2, s_3} \cup A^2_{b, s_1, s_2, s_3})\}.$$

Il suffit alors de voir que $D_r Y_t = 0$ p. p. dans $[s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3}$. Montrons d'abord que sur cet ensemble, $D_r Y_{s_3} = 0$.

Sur $[s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3}$, Y coïncide avec le processus $\hat{Y}$ solution de $(\hat{h}, \sigma, g, Y_{s_1})$, où

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \leqq c \\ h(x) + (x - c) h'_-(c) & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Comme le graphe de $\partial \hat{h}$ est majoré, les résultats obtenus en (i), (ii) et (iii) montrent que

$$D_r \hat{Y}_{s_3} = 0 \quad \text{p. p. sur } [s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3}.$$

D'après le même argument de localité [5] qu'en (A),

$$D_r Y_{s_3} = 0 \quad \text{p. p. sur } [s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3}.$$

Dans l'intervalle $[s_3, t]$, le couple $(Y, K-K_{s_3})$ est encore solution du problème (h, σ, g, Y_{s_3}). Soit alors $(X^n, n \geqq 1)$ la suite des approximations à coefficients lipschitziens σ et b_n qui, d'après la proposition 2.6, converge vers Y dans $L^4(\Omega)$ uniformément sur $[s_3, t]$, avec pour condition initiale Y_{s_3}. De

$$X_s^n = Y_{s_3} + \int_{s_3}^{s} [\sigma(X_v^n)\,dW_v + b_n(X_v^n)\,dv] \qquad \text{pour} \quad s_3 \leqq s \leqq t$$

on déduit comme dans la proposition 1.3 que pour $0 \leqq u \leqq s_3$

$$D_u X_t^n = D_u Y_{s_3} \exp\left\{\int_{s_3}^{t}\left[\sigma'(X_s^n)\,dW_s - \frac{1}{2}\sigma'(X_s^n)^2\,ds + b_n'(X_s^n)\,ds\right]\right\}$$

et pour $s_3 \leqq u \leqq t$

$$D_u X_t^n = \sigma(X_u^n) \exp\left\{\int_{u}^{t}[\sigma'(X_s^n)\,dW_s - \frac{1}{2}\sigma'(X_s^n)^2\,ds + b_n'(X_s^n)\,ds]\right\}.$$

Ainsi,

$$\sup_n \sup_{u \in [0, t]} E\,|D_u X_t^n|^4 < +\infty$$

et comme

$$D_r X_t^n = 0 \quad \text{p. p. sur } [s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3},$$

on a bien par passage à la limite faible

$$D_r Y_t = 0 \quad \text{p. p. sur } [s_1, s_2] \times A^1_{c, s_1, s_2, s_3}. \quad \square$$

Remarque. — En fait, la formule (16) est valable dès que $\sigma > 0$ sur un intervalle $]b, c[$ et que Y ne peut pas sortir de l'intervalle $[b, c]$; c'est le cas par exemple si $\sigma(b) = \sigma(c) = 0$, $h'_-(b) \leqq g(b)$ et $g(c) \leqq h'_+(c)$.

4. EXISTENCE D'UNE DENSITÉ

Nous allons pour conclure montrer qu'on peut déduire de la formule (16) que Y_t admet une densité, grâce à un résultat de Bouleau et Hirsch.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* (Y, K) *la solution du problème* (h, σ, g, η), *où* $\sigma > 0$ *sur* Dom h. *Pour tout* $t > 0$, *la loi de* Y_t *admet une densité.*

Preuve. — Supposons d'abord η dans $L^4(\Omega, \mathcal{F}_0)$. Comme $Y_t \in \mathbf{D}_{2,1}$, il suffit d'après [1] de prouver que p. s.

$$\int_0^t (D_r Y_t)^2\,dr > 0.$$

Le corollaire 2.5 nous assure que p. s. $d < Y_t < d'$. De ce fait, d'après la formule (16), p. s. le processus $\{ D_r Y_t, r \in [0, t] \}$ est strictement positif et continu pour r suffisamment proche de t, ce qui donne la condition cherchée. Si maintenant η n'est plus dans L^4, on vérifie que pour tout entier $k \geqq 1$, la solution Y_t coïncide sur $\{ |\eta| < k \}$ avec la solution Y_t^k obtenue avec pour donnée initiale $\max(\min(\eta, k), -k)$, et ainsi, si $|N| = 0$, on a

$$\begin{aligned} P(Y_t \in N) &= P(\bigcup_k (\{ Y_t \in N \} \cap \{ |\eta| < k \})) \\ &= \lim_{k \to \infty} P(\{ Y_t^k \in N \} \cap \{ |\eta| < k \}) \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Remarques. — (1) Si σ s'annule en d ou d', on a encore

$$P(\{ Y_t \in N \} \cap \{ \sigma(Y_t) > 0 \}) = 0$$

pour tout borélien N vérifiant $|N| = 0$.

(2) L'existence d'une densité peut aussi être obtenue directement par le procédé indiqué par Cattiaux (théorème 1.15 de [2]). Voici une rapide esquisse de cette méthode. On se place sous les conditions de la proposition 4.1 et d'après le corollaire 2.5, il suffit de montrer l'existence d'une densité dans I. On fixe des réels b, c et ε tels que

$$d < b - 2\varepsilon < b < c < c + 2\varepsilon < d'$$

et on définit par récurrence les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} E_0 &= \inf \{ s \geqq 0 : Y_s \in [b - \varepsilon, c + \varepsilon] \} \\ S_k &= \inf \{ s \geqq E_k : Y_s \notin]b - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon[\} \\ E_{k+1} &= \inf \{ s \geqq S_k : Y_s \in [b - \varepsilon, c + \varepsilon] \}. \end{aligned}$$

Grâce à la propriété de Markov, il suffit de faire l'étude dans chaque intervalle $[E_k, S_k]$, ce qui permet de supposer que h vérifie les conditions du lemme 3.1. Ensuite, une simple transformation de Girsanov élimine h en nous ramenant au cas des équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens, pour lesquelles Bouleau et Hirsch [1] ont donné le résultat.

RÉFÉRENCES

[1] N. Bouleau et F. Hirsch, Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et application aux équations différentielles stochastiques, *Sém. Prob. XX*, p. 131-161, *Lect. Notes in Math.*, n° 1204, 1986.

[2] P. Cattiaux, Hypo-ellipticité et hypo-ellipticité partielle pour les diffusions avec une condition frontière, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. **22**, 1986, p. 67-112.

[3] D. LÉPINGLE et C. MAROIS, Équations différentielles stochastiques multivoques unidimensionnelles, *Sém. Prob. XXI*, p. 520-533, *Lect. Notes in Math.*, n° 1247-1987.
[4] A. MILLET, D. NUALART et M. SANZ, Integration by parts and time reversal for diffusion processes, *Ann. Probability*, vol. **17**, 1989, p. 208-238.
[5] D. NUALART et E. PARDOUX, Stochastic calculus with anticipating integrands, *Prob. Theory and Related Fields*, vol. **78**, 1988, p. 535-581.
[6] H. SUGITA, On the characterization of the Sobolev spaces over an abstract Wiener space, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. **25**, 1985, p. 717-725.

(*Manuscrit reçu le* 21 *juin* 1988;
corrigé le 11 *janvier* 1989.)