ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉMILE LE PAGE

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, n° 2 (1989), p. 109-142

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_2_109_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 2, 1989, p. 109-142. *Probabilités et Statistiques*

Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications

par

Émile LE PAGE

I.R.M.A.R., Institut de Recherche Mathématiques,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

RÉSUMÉ. — On établit des propriétés de régularité (Hölder, C^∞) du plus grand exposant caractéristique d'un produit de matrices aléatoires indépendantes. On en déduit des propriétés analogues pour la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1.

Mots clés : Matrices aléatoires, exposants caractéristiques, densité d'état.

ABSTRACT. — We prove regularity properties (Hölder, C^∞) for the first characteristic exponent of a product of independant random matrices. We deduce the same properties for the integrated density in the one dimensional Anderson model.

Key words : Random matrices, characteristic exponents, density of states.

On considère un espace produit $\Omega = X^{\mathbb{N}}$ muni d'une probabilité produit $\mathbb{P}$ et $(\lambda, \omega) \to g^\lambda(\omega)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \Omega$ dans le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ inversibles (resp. dans $SL(d, \mathbb{R})$ sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1) dépendant uniquement de la première coordonnée de ω.

Classification A.M.S. : 60 B 99, 60 F 99, 60 J 15, 60 K 99.

Notons de plus μ_λ la loi de la variable aléatoire g^λ et supposons que les probabilités μ_λ admettent des moments exponentiels. Soit $(g_k^\lambda(\,.\,))_{k \geqq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ et $\gamma(\lambda)$ le plus grand exposant caractéristique associé à la suite précédente, c'est-à-dire : [5]

$$\gamma(\lambda) = \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \| g_n^\lambda g_{n-1}^\lambda \ldots g_1^\lambda \|, \qquad \mathbb{P}\text{ p. s.}$$

On s'intéresse ici aux propriétés de régularité de la fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$.

On envisage tout d'abord l'étude des propriétés de Hölder de $\gamma(\lambda)$ sans hypothèse de densité pour la loi μ_λ : si I est un intervalle fermé tel que pour λ, $\mu \in \mathrm{I}$, on a

$$\mathbb{P}\text{ p. s.,} \qquad \| g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega) \| \leqq \mathrm{C}(\omega) \, | \lambda - \mu |^{\varepsilon(\mathrm{I})}$$

et

$$\int \mathrm{C}^{\varepsilon(\mathrm{I})}(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty \qquad \text{pour un} \quad \varepsilon(\mathrm{I}) > 0,$$

alors $\gamma(\;)$ est höldérienne sur I.

Ce résultat ne peut être amélioré comme le montre l'exemple suivant, dû à Halperin, et qui apparaît dans le contexte des opérateurs de Schrödinger à potentiel aléatoire [17]. On prend

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\{q_n \, n \geqq 0\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi prenant les valeurs a ou b avec probabilité 1/2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe a, b tels que $\gamma(\lambda)$ n'est pas höldérienne d'exposant ε sur $\mathrm{I} = \{a, b\} + [-2, 2]$. En particulier $\gamma(\lambda)$ n'est pas C^1.

On envisage ensuite les propriétés de dérivabilité de $\gamma(\lambda)$: en supposant que les lois μ_λ ont des densités et que l'application $\lambda \to g^\lambda$ est analytique de $\mathbb{R}$ dans tous les espaces $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ $p \geqq 1$ où $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles $d \times d$, on prouve que $\gamma(\lambda)$ est C^∞. L'exemple de Halperin montre également que $\gamma(\lambda)$ n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.

Les résultats précédents sont à comparer à ceux de Ruelle [16] qui obtient des propriétés d'analyticité dans le cadre de produits de matrices positives stationnaires.

Pour d'autres résultats concernant les exposants caractéristiques, on peut également consulter [6] et [9].

Les théorèmes précédents trouvent leur application dans l'étude de la régularité de la répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire unidimensionnel : problème posé ici par Wegner [18], F. Wegner, « Bounds on the density of States in Disorded Systems » 2, Phys B 44,9 (1581) et qui est ici traité dans le théorème 3.

Plus précisément soit $(q_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η. On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(\mathbb{Z})$ analogue discret de Schrödinger défini par

$$(\mathrm{H}(\omega)\,u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega)\,u_n. \tag{1}$$

Notons pour tout $\mathrm{L} > 0$ l'opérateur ${}^{\mathrm{L}}\mathrm{H}(\omega)$ défini sur $l^2(\mathbb{Z})$ par la restriction de la matrice de $\mathrm{H}(\omega)$ à $[-\mathrm{L}, \mathrm{L}]$, c'est-à-dire par la matrice de Jacobi $(2\mathrm{L}+1)\times(2\mathrm{L}+1)$

$$({}^{\mathrm{L}}\mathrm{H}(\omega))_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ q_n(\omega) & \text{si } i=j=n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Soit $\mathrm{N}_{\mathrm{L}}(\omega, \lambda)$ la fonction de répartition de la distribution empirique des valeurs propres $(\lambda_i^{\mathrm{L}}(\omega))_{-\mathrm{L} \leqq i \leqq \mathrm{L}}$ de la matrice ${}^{\mathrm{L}}\mathrm{H}(\omega)$.

$$\mathrm{N}_{\mathrm{L}}(\omega, \lambda) = \frac{1}{2\mathrm{L}+1} \sum_{i=-\mathrm{L}}^{\mathrm{L}} 1_{[\lambda_i^{\mathrm{L}}(\omega) \leqq \lambda]}. \tag{3}$$

$\mathbb{P}$ p. s. en ω la suite $\mathrm{N}_{\mathrm{L}}(\omega, \lambda)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ vers la répartition d'état $\mathrm{N}(\lambda)$ de H [14].

La formule de Thouless [4] établit une relation entre le plus grand exposant caractéristique $\gamma(\lambda)$ de la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^{\lambda} = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad n \geqq 0 \tag{4}$$

et la probabilité $d\mathrm{N}(\lambda)$:

$$\gamma(\lambda) = \int \operatorname{Log} |\lambda - t| \, d\mathrm{N}(t). \tag{5}$$

Cette relation permet à partir des propriétés de régularité de la fonction $\lambda \to \gamma(\lambda)$ d'en déduire pour la fonction $\lambda \to \mathrm{N}(\lambda)$ au moyen de la transformation de Hilbert.

On montre que si η a un moment d'ordre $\alpha > 0$

$$\int |q|^{\alpha} \, d\eta(q) < +\infty$$

la répartition d'état $\mathrm{N}(\lambda)$ est localement höldérienne sur $\mathbb{R}$. Une preuve de ce résultat avait été donnée par l'auteur dans un article antérieur [11] consacré à l'étude de ces opérateurs aux différences en supposant η à support compact et l'argument avait été repris par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour traiter le cas présent. Si η admet une densité dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et si de plus η a des moments de tous ordres on établit que $\mathrm{N}(\lambda)$ est C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Ce résultat étend celui de Simon et Taylor [16] obtenu sous l'hypothèse où η est à support compact et a une densité dans un espace de Sobolev, $L^1_\alpha(\mathbb{R})=\{f\in L^1(\mathbb{R});$ il existe $g\in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{g}(t)=(1+t^2)^{\alpha/2}\hat{f}(t)\}$ avec $\alpha>0\}$. Un résultat du même type a été obtenu par Campanino et Klein [2] en supposant que η a des moments de tous ordres et que sa transformée de Fourier $\hat{\eta}(t)$ est telle que $(1+t^2)^\alpha\hat{\eta}(t)$ est bornée pour un $\alpha>0$. March et Sznitman obtiennent un résultat identique [12]. Les résultats présentés ici montrent (à l'inverse des articles [16], [2], [12]) que les régularités de $\gamma(\lambda)$ et $N(\lambda)$ découlent plutôt de l'aléatoire que la régularité initiale de la loi η et plus généralement des lois μ_λ. La régularité höldérienne de $N(\lambda)$ est utilisée par Carmona-Klein-Martinelli [3] pour la preuve de la localisation de l'opérateur aux différences (1) sur $l^2(Z)$.

Notons également le fait que Craig et Simon [4] ont montré que N est localement Log-höldérienne dans le cas plus général où la suite $\{q_n\, n\in\mathbb{Z}\}$ est supposé ergodique stationnaire.

Les résultats de régularité de l'exposant caractéristique sont obtenus par l'étude des opérateurs

$$P(\lambda)\,f(\bar{x})=\int f(g\,.\,\bar{x})\,\mu_\lambda(dg)$$

où $f\in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ espace des fonctions continues sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La preuve du théorème 1 est basée sur le fait que ces opérateurs sont quasi-compacts sur des espaces de fonctions höldériennes convenables, et que l'application $\lambda\to P(\lambda)$ est localement höldérienne en considérant $P(\lambda)$ comme un opérateur linéaire entre deux tels espaces.

La preuve du théorème 2 est de même basée sur le fait que ces opérateurs sont compacts sur les espaces $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k\geqq 0$ des fonctions k fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $\lambda\to P(\lambda)$ est différentiable si on considère $P(\lambda)$ comme un opérateur de $C^{k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Le présent article est organisé comme suit :

- au paragraphe I on énonce les résultats;
- le paragraphe II est consacré à la preuve du théorème 1;
- au paragraphe III on étudie la classe d'opérateurs suivants :

$$P(f)(\bar{x})=\int f(g\,.\,\bar{x})\,d\mu(g)$$

où μ est une probabilité sur $GL(d,\mathbb{R})$ (resp. $SL(d,\mathbb{R})$) ayant des moments exponentiels et admettant une densité. On prouve que P est un opérateur compact sur $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $k\geqq 0$. Il en résulte en particulier que l'unique probabilité ν μ-invariante portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ admet une densité C^∞ par rapport à la probabilité invariante par rotation portée par $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. L'étude précédente trouve son application dans la preuve du théorème 2 donnée au paragraphe IV.

Enfin la preuve du théorème 3 est donnée au paragraphe V, ainsi que la justification des remarques concernant les propriétés du plus grand exposant caractéristique de la suite

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n - \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad n \geqq 1.$$

I. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

I.1. Avant l'énoncé des résultats commençons par préciser quelques définitions :

Posons pour $g \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$

$$l(g) = \sup(\|g\|, \|g^{-1}\|)$$

où $\|g\|$ désigne la norme de la matrice g agissant sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 1. — *Une probabilité* μ *sur* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ *admet des moments exponentiels si pour tout* $\tau > 0$

$$\int l^\tau(g)\, d\mu(g) < +\infty.$$

Pour toute probabilité μ sur $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ on désigne par T_μ le semi-groupe fermé engendré par le support de μ.

DÉFINITION 2. — T_μ *est fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^d$, *invariante par chaque élément de* T_μ.

Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^d$ sont dits équivalents s'ils sont proportionnels. L'espace des classes d'équivalence est l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, qui est une variété compacte connexe de dimension $d-1$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$, $\bar{x}$ désigne sa direction, et pour $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ on pose $\mathrm{M}.\bar{x} = \overline{\mathrm{M}x}$.

Considérons maintenant une suite $(\mathrm{M}_n)_{n \geqq 1} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ et soient $a_1(\mathrm{M}_n) \geqq a_2(\mathrm{M}_n) \ldots \geqq a_d(\mathrm{M}_n)$ les racines carrées des valeurs propres de la matrice $\mathrm{M}_n^t \mathrm{M}_n$.

DÉFINITION 3. — *La suite* $(\mathrm{M}_n)_{n \geqq 1}$ *a une action contractante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *si*

$$\limsup_n \frac{a_1(\mathrm{M}_n)}{a_2(\mathrm{M}_n)} = +\infty.$$

Remarquons que si la suite $\{M_n\, n \geqq 1\}$ satisfait à la propriété précédente, et si m est une probabilité sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas portée par une sous-variété projective de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ il existe une sous-suite de la suite $\{M_n . m\; n \geqq 1\}$ qui converge vaguement vers une mesure de Dirac.

DÉFINITION 4. — T_μ *a une action contractante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *si* T_μ *contient une suite ayant une action contractante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple. — Cette propriété est satisfaite si μ admet une densité [8].

Dans la suite nous envisageons la situation suivante :

soit $(\Omega = X^{\mathbb{N}}, A = \overset{\mathbb{N}}{\otimes} B, \mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ un espace probabilisé produit, U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(\lambda, \omega) \to g(\lambda, \omega)$ une application mesurable de $U \times \Omega$ dans $GL(d, \mathbb{R})$ ne dépendant que la première coordonnée de $\omega = (\omega_i)_{i \geqq 0}$ c'est-à-dire que

$$g(\lambda, \omega) = g(\lambda, \omega_0).$$

Désignons par μ_λ la loi de la variable aléatoire $\omega \to g(\lambda, \omega)$ à valeurs dans $GL(d, \mathbb{R})$. La suite de variables aléatoires $\{g_k^\lambda(\omega) = g(\lambda, \omega_k)\; k \geqq 1\}$ est alors une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ_λ.

Supposons que $\int \log l(g)\, d\mu_\lambda(g) < +\infty$, alors d'après Furstenberg [5], la suite de variables aléatoires

$$\left\{ \frac{1}{n} \log \| g_n(\lambda, \omega) g_{n-1}(\lambda, \omega) \ldots g_1(\lambda, \omega) \| \; n \geqq 1 \right\}$$

converge presque sûrement vers une constante $\gamma(\lambda)$ qui est le premier exposant caractéristique de la suite $(g_k(\lambda, \omega)\; k \geqq 1)$.

Donnons encore une définition avant d'énoncer les deux théorèmes suivants que nous nous proposons d'établir dans cet article.

DÉFINITION 5. — *Une fonction f définie dans un ouvert* U *de* $\mathbb{R}$ *est localement höldérienne si pour tout compact* $T \subset U$ *il existe un nombre* $\alpha = \alpha(T)$ *strictement positif et une constante* $c(T)$ *tels que :*

$$| f(t) - f(s) | \leqq c(T) \, | t - s |^\alpha, \qquad t, s \in T.$$

THÉORÈME 1. — *Si*

1) *Pour tout* $\lambda \in U$ $T_{\mu\lambda}$ *est fortement irreductible et a une action contractante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

2) *Si de plus pour tout intervalle compact* $T \subset U$ *les propriétés suivantes sont satisfaites :*

2.1) *Il existe un réel* $\varepsilon(T) > 0$ *tel que :*

$$\sup_{\lambda \in T} \int l^{\varepsilon(T)}(g^\lambda(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

2.2) *Il existe un réel* $\varepsilon_1(T) > 0$ *et une variable aléatoire* $C(\omega)$ à valeurs dans $[1 + \infty[$ *telles que :*

pour $\lambda, \mu \in T$

$$\| g^\lambda(\omega) - g^\mu(\omega) \| \leqq C(\omega) \, |\lambda - \mu|^{\varepsilon_1(T)}, \qquad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

et

$$\int C^{\varepsilon(T)}(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty.$$

Alors l'application $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *est localement höldérienne dans* U.

THÉORÈME 2. — *On suppose que :*

1) *Pour tout* $\lambda \in U$ μ_λ *a des moments exponentiels.*

2) *Pour tout* $\lambda \in U$ μ_λ *possède une densité* f_λ *par rapport à la mesure de Haar* dg *sur* $GL(d, \mathbb{R})$ *et que pour tout* $p \geqq 0$ *l'application* $\lambda \to f_\lambda$ *de* U *dans* $L^1(GL(d, \mathbb{R}), l^p(g)\, dg)$ *est continue.*

3) *Pour tout* $p \geqq 1$ *l'application* $\lambda \to g^\lambda$ *est analytique de* U *dans* $L^p(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$.

Alors l'application $\lambda \to \gamma(\lambda)$ *est* C^∞ *sur* U.

Remarques. — 1) Les énoncés précédents restent vrais lorsque l'on remplace le groupe $GL(d, \mathbb{R})$ par le groupe $SL(d, \mathbb{R})$.

2) Dans l'énoncé du théorème 2 il est suffisant qu'une puissance de convolution $\mu_\lambda^{n_0}$ de μ_λ satisfasse à l'hypothèse 2.

I.2. Propriétés de régularité de la répartition d'état dans le modèle d'Anderson de dimension 1

On considère l'opérateur aux différences aléatoires sur $l^2(Z)$ définit par :

$$(H(\omega)u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + q_n(\omega)\, u_n \tag{1}$$

où $(q_n)_{n \in Z}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi η.

Soit $N(\lambda)$ la répartition d'état de H (voir l'introduction pour sa définition). Grâce à la formule de Thouless (5) et à l'aide des théorèmes 1 et 2 précédents on peut obtenir le

THÉORÈME 3. — 1) *On suppose que la probabilité* η *charge au moins* 2 *points et admet un moment d'ordre* $\beta_0 > 0$, *c'est-à-dire que* $\int |q|^{\beta_0} \eta(dq) < +\infty$ *alors la répartition d'état* $N(\lambda)$ *est localement höldérienne.*

2) *Si* η *admet des moments de tous ordres et si de plus la probabilité* η *admet une densité* f *dans* $L^1(\mathbb{R})$ *la répartition d'état est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Commençons par préciser quelques notations.

On munit tout d'abord $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ de la distance δ définie par :

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = [1 - \langle x, y \rangle^2]^{1/2} = \|x \wedge y\| \qquad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \tag{6}$$

où x et y sont des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^d$ de direction $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

Introduisons de plus un espace de fonction höldérienne qui nous sera utile par la suite.

DÉFINITION 6. — *Étant donné $\alpha > 0$ on pose pour toute fonction f continue sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$*

$$|f| = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{x})|$$

et

$$m_\alpha(f) = \sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \left[\frac{|f(\bar{x}) - f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \right].$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_\alpha = |f| + m_\alpha(f) < +\infty.$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est une algèbre de Banach, muni de la norme $\|f\|_\alpha$.

Dans la suite T sera un intervalle compact fixé de U; de plus μ_λ^n est la n-ième puissance de convolution de la probabilité μ_λ dans $GL(d, \mathbb{R})$.

On a la proposition :

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *il existe un $\alpha_0 = \alpha_0(T)$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0]$ on ait :*

$$\limsup_n \sup_{\lambda \in T} \left[\sup_{\bar{x} \neq \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \int \frac{\delta^\alpha(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(T, \alpha) < 1.$$

Preuve de la proposition 1. — Soit $M = \{(\bar{x}, \bar{y}); \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)\ \bar{x} \neq \bar{y}\}$. Nous compactifions M en lui adjoignant l'espace $M_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2 de $\mathbb{R}^d$ c'est-à-dire l'espace des couples $(V_1; V_2)$ de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tel que $V_1 \subset V_2$ avec $\dim V_i = i$ $i = 1, 2$, et en munissant $\bar{M} = M \cup M_{1,2}$ de la topologie suivante : M est un ouvert de $\bar{M}$ et une suite $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ $n \geqq 1$ de M converge vers (V_1, V_2) si $\lim_n \delta(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = 0$ et si $\lim_n (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}) = (V_1, V_2)$ où $V_1^{(n)}$ est le sous espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 1 défini par $\bar{x}_n$ et $V_2^{(n)}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 2 défini par $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$.

L'application définie par

$$\sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) = \frac{\delta(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \tag{7}$$

de $GL(d, \mathbb{R}) \times M$ dans $\mathbb{R}_+$ est un cocycle multiplicatif, c'est-à-dire que

$$\sigma_1(g.h, (\bar{x}, \bar{y}) = \sigma_1(g, h.(\bar{x}, \bar{y}))\, \sigma_1(h, (\bar{x}, \bar{y})). \tag{8}$$

Il se prolonge par continuité en un cocycle multiplicatif de $GL(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ dans $\mathbb{R}_+$: pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$ $(V_1, V_2) \in M_{1,2}$ on a :

$$\sigma_1[g, (v_1, v_2)] = \frac{\|gv_2\|}{\|gv_1\|^2} \tag{9}$$

où v_1 est un vecteur quelconque de norme 1, définissant V_1 et v_2 est un bivecteur quelconque de norme 1, définissant V_2.

De plus on a :

$$r_1(g) = \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{M}} \sigma_1[g, (\bar{x}, \bar{y})] \leqq l^4(g). \tag{10}$$

Considérons la suite

$$u_n(\alpha) = \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mu_\lambda^n(dg). \tag{11}$$

Cette suite est sous multiplicative et la suite $(u_n(\alpha))^{1/n}$ $n \geqq 1$ converge donc vers sa borne inférieure. De l'inégalité

$$e^x \leqq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|} \tag{12}$$

on déduit que pour tout entier $n \geqq 1$ et $\alpha > 0$ on a :

$$u_n(\alpha) \leqq 1 + \alpha \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \operatorname{Log} \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mu_\lambda^n(dg) + \frac{\alpha^2}{2} \times \sup_{\lambda \in T} \int \operatorname{Log}^2(l^4(g))\, l^{4\alpha}(g)\, \mu_\lambda^n(dg). \tag{13}$$

Or il existe un entier n_0 tel que

$$\sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \operatorname{Log} \sigma_1^\alpha(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mu_\lambda^{n_0}(dg) < 0. \tag{14}$$

Remarquons en effet que la suite

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \operatorname{Log} \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})\, \mu_\lambda^n(dg) \tag{15}$$

a une limite supérieure de la forme

$$\int \operatorname{Log} \sigma_1(g, \xi)\, \mu_{\lambda_0}(dg)\, v_{\lambda_0}(d\xi) \tag{16}$$

où $\lambda_0 \in T$ et v_{λ_0} est une probabilité μ_{λ_0}-invariante sur $\bar{M}$. Il résulte de [8] que (16) est strictement négative. La proposition 1 se déduit alors immédiatement de l'inégalité (13).

Il nous reste à justifier la remarque précédente : pour tout $n \geqq 1$ la fonction $(\xi, \lambda) \to \int \operatorname{Log} \sigma_1 [g, \xi] \mu_\lambda^n (dg)$ est continue sur le compact $\bar{M} \times T$, il existe donc un élément $(\xi_n, \lambda_n) \in \bar{M} \times T$ tel que

$$\frac{1}{n} \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \operatorname{Log} \sigma_1 (g, (\bar{x}, \bar{y})) \mu_\lambda^n (dg) = \frac{1}{n} \int \operatorname{Log} \sigma (g, \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg). \quad (17)$$

De plus

$$\frac{1}{n} \int \operatorname{Log} \sigma_1 (g, \xi_n) \mu_{\lambda_0}^n (dg) = \int \operatorname{Log} \sigma_1 (g, \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) \nu_n (d\xi) \quad (18)$$

où ν_n est la probabilité sur $\bar{M}$ définie par

$$\nu_n (f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f (g \,.\, \xi_n) \mu_{\lambda_n}^k (dg). \quad (19)$$

La suite de probabilités $\mu_{\lambda_n} \otimes \nu_n$ $n \geqq 1$ sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \bar{M}$ est équitendue. Toute valeur d'adhérence de cette suite pour la topologie étroite est de la forme $\mu_t \otimes \nu_t$. $t \in T$ où ν_t est une probabilité sur $\bar{M}$ invariante par μ_t. En particulier on a :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \int \operatorname{Log} \sigma_1 (g \,.\, \xi_n) \mu_{\lambda_n}^n (dg)$$

$$= \int_{G \times M} \operatorname{Log} \sigma_1 (g \,.\, \xi) \mu_{\lambda_0} (dg) v_{\lambda_0} (d\xi). \quad (20)$$

Reprenant les notations de la proposition 1, nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1 :

1) *Pour tout* $\lambda \in T$ *il existe une unique probabilité* ν_λ μ_λ-*invariante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

2) *Pour tout* $0 < \alpha \leqq \alpha_0 (T)$ *les opérateurs définis sur* $\mathscr{L}_\alpha$ *par*

$$\pi(\lambda) f(\bar{x}) = \int f(\bar{x}) \nu_\lambda (d\bar{x})$$

$$P(\lambda) f(\bar{x}) = \int f(g \,.\, \bar{x}) \mu_\lambda (dg)$$

sont bornés sur $\mathscr{L}_\alpha$ *et l'on a pour tout* $n \geqq 1$

$$P^n (\lambda) = \pi (\lambda) + Q^n (\lambda)$$

où $Q(\lambda)$ *est un opérateur borné sur* $\mathscr{L}_\alpha$ *pour lequel il existe une constante* $C(T, \alpha)$ *telle que pour tout* $n \geqq 1$

$$\sup_{\lambda \in T} \| Q^n(\lambda) \|_\alpha \leqq C(T, \alpha)\, \rho^n(T, \alpha).$$

Preuve de la proposition 2. — Le fait que $P(\lambda)$ est un opérateur borné sur $\mathscr{L}_\alpha$ résulte des inégalités :

$$|P(\lambda) f| \leqq |f| \tag{21}$$

$$\frac{|P(\lambda) f(\bar{x}) - P(\lambda) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \leqq m_\alpha(f) \int \frac{\delta^\alpha(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda(dg)$$
$$\leqq m_\alpha(f) \int l^{4\alpha}(g)\, \mu_\lambda(dg). \tag{22}$$

Par ailleurs on a $\forall m, n \geqq 1, f \in \mathscr{L}_\alpha$, puisque $\delta \leqq 1$

$$|P^{n+m}(\lambda) f(\bar{x}) - P^n(\lambda) f(\bar{y})| \leqq m_\alpha(f) \sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \int \frac{\delta^\alpha(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \tag{23}$$

Il en résulte que pour toute fonction $f \in \mathscr{L}_\alpha$ la suite $P^n(\lambda) f$ $n \geqq 1$ converge uniformément vers une limite $\nu_\lambda(f)$. En raison de la densité de $\mathscr{L}_\alpha$ dans l'espace de Banach $C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions continues sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme on en déduit qu'il en est de même pour la suite $P^n(\lambda) f$ $n \geqq 1$ $f \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. On en déduit immédiatement le 1) de la proposition 2 et également que pour $f \in \mathscr{L}_\alpha$ $n \geqq 1$, $\lambda \in T$

$$|P^n(\lambda) f - \pi(\lambda)(f)| \leqq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \tag{24}$$

De plus on a

$$\sup_{(\bar{x}, \bar{y}) \in M} \frac{|(P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{x}) - (P^n(\lambda) - \pi(\lambda)) f(\bar{y})|}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})}$$
$$\leqq m_\alpha(f) \sup_{\substack{(\bar{x}, \bar{y}) \in M \\ \lambda \in T}} \int \frac{\delta^\alpha(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})} \mu_\lambda^n(dg). \tag{25}$$

Notant que $P^n(\lambda) - \pi(\lambda) = (P(\lambda) - \pi(\lambda))^n$ puisque

$$P(\lambda)\pi(\lambda) = \pi(\lambda) P(\lambda) = \pi(\lambda) \qquad \text{et que} \quad \pi^2(\lambda) = \pi(\lambda)$$

le 2) de la proposition 2 résulte alors de la proposition 1 et des inégalités précédentes.

De la proposition 2 on déduit le corollaire.

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *soit* $\alpha \in]0, \alpha_0(T)]$ *et* $\rho_1[T, \alpha] = 1/2 \{1 + \sup\{\rho(T, \alpha), \rho(T, \alpha/2)\} < 1$.

1) *Le spectre de l'opérateur* $P(\lambda)$ $\lambda\in T$ *opérant sur* $\mathscr{L}_\alpha$ (resp. $\mathscr{L}_{\alpha/2}$) *est contenu dans le compact*

$$E_{\alpha,T}=\{1\}\cup\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqq\rho_1(T,\alpha)\}.$$

2) *Pour tout compact* K *de* $\mathbb{C}-E_{\alpha,T}$ *on a*

$$\sup_{\substack{\lambda\in T\\ z\in K}}\|(zI-P(\lambda))^{-1}\|_\alpha<+\infty$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda\in T\\ z\in K}}\|(zI-P(\lambda))^{-1}\|_{\alpha/2}<+\infty.$$

Preuve du corollaire 1. — Le 1) est immédiat.

D'autre part on a pour $z\in\mathbb{C}-E_{\alpha,T}$

$$(zI-P(\lambda))^{-1}=\frac{\pi(\lambda)}{z-1}+\sum_{n\geqq 0}\frac{Q^n(\lambda)}{z^{n+1}} \tag{26}$$

et

$$\sup_{\substack{\lambda\in T\\ z\in K}}\|(zI-P(\lambda))^{-1}\|_\alpha\leqq\sup_{z\in K}\frac{1}{|z-1|}+c(T,\alpha)\sum_{k\geqq 0}\frac{\rho^n(T,\alpha)}{\rho^{n+1}(K)}<+\infty \tag{27}$$

où

$$\rho(K)=\sup_{z\in K}\frac{1}{|z|}\leqq\frac{1}{\rho_1(T,\alpha)}<\frac{1}{\rho(T,\alpha)}. \tag{28}$$

De même on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{\lambda\in T\\ z\in K}}\|[zI-P(\lambda)]^{-1}\|_{\alpha/2}<+\infty. \tag{29}$$

LEMME 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *pour* $\alpha\in]0,\alpha_0(T)]$ *il existe des constantes* $c_1(T,\alpha)$ *et* $\varepsilon_3(T)>0$ *telles que pour* $\lambda,\mu\in T$ $f\in\mathscr{L}_\alpha$ *on ait*

$$\|P(\lambda)f-P(\mu)f\|_{\alpha/2}\leqq c_1(\alpha,T)\|f\|_\alpha|\mu-\lambda|^{\varepsilon_3(T)}.$$

Preuve du lemme 1. — Pour $f\in\mathscr{L}_\alpha$ $\lambda,\mu\in T$ on a

$$|P(\lambda)f-P(\mu)f|\leqq\|f\|_\alpha\sup_{\bar{x}\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)}\int\delta^\alpha(g^\lambda(\omega).\bar{x},g^\mu(\omega).\bar{x})\,d\mathbb{P}(\omega). \tag{30}$$

De plus pour $g,h\in GL(d,\mathbb{R})$, $\bar{x}\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$d(g.\bar{x},h.\bar{x})\leqq\|g-h\|\,\mathrm{Inf}(\|g\|,\|h\|)\|g^{-1}\|\ \|h^{-1}\|. \tag{31}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}|P(\lambda)f-P(\mu)f| &\leqq \|f\|_\alpha \int \|g^\lambda(\omega)-g^\mu(\omega)\|^\alpha l^{3\alpha/2}(g^\lambda(\omega))\, l^{3\alpha/2}(g^\mu(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega)\\ &\leqq \|f\|_\alpha |\mu-\lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)} \int C^\alpha(\omega)\, l^{3\alpha/2}(g^\lambda(\omega))\, l^{3\alpha/2}(g^\mu(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega). \quad (32)\end{aligned}$$

D'où l'on déduit par l'inégalité de Hölder que

$$|P(\lambda)f-P(\mu)f| \leqq \|f\|_\alpha |\mu-\lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)} \times c_1 \quad (33)$$

où

$$c_1=\left(\int c^{3\alpha}(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/3}\left[\sup_{\lambda\in T}\int l^{9\alpha/2}(g^\lambda(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega)\right]^{2/3}. \quad (34)$$

Par ailleurs de l'inégalité

$$\frac{\delta(g.\bar{x}, g.\bar{y})}{\delta(\bar{x}, \bar{y})} \leqq l^4(g), \qquad g\in GL(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x}, \bar{y}\in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \quad (35)$$

il résulte que pour $\lambda\in T$ on a

$$|P(\lambda)f(\bar{x})-P(\lambda)f(\bar{y})| \leqq m_\alpha(f)\,\delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})\, c_2$$

où (36)

$$c_2=\int l^{4\alpha}(g^\lambda(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega).$$

On obtient à l'aide de (33) et de (36) que

$$\begin{aligned}|(P(\lambda)-P(\mu))f(\bar{x})-(P(\lambda)-P(\mu)f(\bar{y})| &\leqq \|f\|_\alpha\\ &\times \max(c_1, c_2)\times \operatorname{Inf}\{|\mu-\lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)}, \delta^\alpha(\bar{x}, \bar{y})\} \quad (37)\end{aligned}$$

d'où

$$m_{\alpha/2}[(P(\lambda)-P(\mu))f] \leqq \|f\|_\alpha \max(c_1, c_2)\, |\mu-\lambda|^{\alpha\varepsilon_2(T)/2}. \quad (38)$$

On peut supposer le choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit pour assurer que les constantes c_1 et c_2 sont finies.

LEMME 2. — *Pour* $\alpha\in]0, \alpha_0(T)]$ *il existe une constante* $c_2(\alpha, T)$ *telle que pour* $f\in\mathscr{L}_\alpha$, λ, $\mu\in T$ *on ait*

$$|\nu_\lambda[f]-\nu_\mu[f]| \leqq c_2[\alpha, T]\, |\lambda-\mu|^{\varepsilon_3(T)/2}\, \|f\|_\alpha.$$

Preuve du lemme 2. — Pour $z\in\mathbb{C}-E_{\alpha, T}$ soit

$$R_\lambda(z)=(zI-P(\lambda))^{-1} \quad (39)$$

la résolvante de $P(\lambda)$. On a la relation

$$R_\lambda(z)-R_\mu(z)=R_\mu[P(\lambda)-P(\mu)]\,R_\lambda(z). \quad (40)$$

D'autre part il existe un cercle, Γ de centre 1, contenu dans $\mathbb{C}-E_{\alpha, T}$ et l'on a

$$\pi(\lambda)=\frac{1}{2 i \pi} \int_{\Gamma} R_{\lambda}(z) dz. \tag{41}$$

On en déduit donc d'après le lemme 1 et le corollaire 1 que

$$\begin{aligned} |\nu_{\lambda}(f)-\nu_{\mu}(f)| \leq \rho(\Gamma) c_1(\alpha, T) \\ \times \sup_{\substack{\mu \in T \\ z \in \Gamma}} \| R_{\mu}(z) \|_{\varepsilon_3 (T)/2} |\lambda-\mu|^{\varepsilon_3 (T)/2} \sup_{\substack{\lambda \in T \\ z \in \Gamma}} \| R_{\lambda}(z) \|_{\alpha} \| f \|_{\alpha} \end{aligned} \tag{42}$$

où $\rho(\Gamma)$ désigne le rayon du cercle Γ ce qui établit le lemme 2.

Soit σ le cocycle multiplicatif sur $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$\sigma(g, \bar{x})=\| gx \|, \qquad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \tag{43}$$

où x est un vecteur de norme 1, d'image $\bar{x}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\Phi_{\lambda}(\bar{x})=\int \operatorname{Log} \sigma[g^{\lambda}(\omega), \bar{x}] \, d\mathbb{P}(\omega). \tag{44}$$

D'après la formule de Fürstenberg on sait que :

$$\gamma(\lambda)=\int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \Phi_{\lambda}(\bar{x}) \, \nu_{\lambda}(d\bar{x})=\nu_{\lambda}(\Phi_{\lambda}). \tag{45}$$

Grâce à cette formule, au lemme 2 et au lemme 3 qui suit nous pourrons achever la démonstration du théorème 1.

LEMME 3.
1) $\sup_{\lambda \in T} \| \Phi_{\lambda} \|_{\alpha} < +\infty$

2) *Il existe des constantes* $c_3(T)$ *et* $\varepsilon_4(T) > 0$ *telles que pour* $\lambda, \mu \in T$ *on ait*

$$\sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} |\Phi_{\lambda}(\bar{x}))-\Phi_{\mu}(\bar{x})| \leq c_3(T) |\lambda-\mu|^{\varepsilon_4 (T)}$$

Preuve du lemme 3.

1° On a tout d'abord

$$\sup_{\lambda \in T} |\Phi_{\lambda}| \leq \sup_{\lambda \in T} \int \operatorname{Log} l(g^{\lambda}(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty. \tag{46}$$

D'autre part en raison de l'inégalité

$$\left|\operatorname{Log} \frac{x}{y}\right| \leq c(\alpha) \operatorname{Inf}[u(x, y), u^{\alpha/4}(x, y)]$$

où (47)

$$x, y > 0, \qquad u(x, y)=\frac{|x-y|}{\operatorname{Inf}(x, y)}$$

on a

$$|\Phi_\lambda(\bar{x})-\Phi_\lambda(\bar{y})| \leqq c(\alpha)\int \operatorname{Inf}\{l^2(g^\lambda(\omega))\,\|x-y\|,\, l^{\alpha/2}(g^\lambda(\omega))\,\|x-y\|^{\alpha/4}\, d\mathbb{P}(\omega). \quad (48)$$

où x, y sont deux vecteurs de norme 1, d'image $\bar{x}$, $\bar{y}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tels que l'angle de x et y soit inférieur à $\pi/2$.

En raison des inégalités

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\|x-y\| \quad (49)$$

et

$$\operatorname{Inf}(u, v) \leqq u^\alpha v^{1-\alpha} \quad (50)$$

il vient alors

$$\sup_{\lambda\in T} m_\alpha(\Phi_\lambda) \leqq c(\alpha)(\sqrt{2})^{\alpha/4\,(5-\alpha)} \sup_{\lambda\in T}\int l^{\alpha\,(3\,\alpha+1)/2}(g^\lambda(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega). \quad (51)$$

Un choix de $\alpha_0(T)$ suffisamment petit c'est-à-dire tel que $(\alpha/2)(3\alpha+1) < \varepsilon_1(T)$ assure que le second membre de (51) est fini et la démonstration du 1) du lemme 3 est ainsi obtenue à l'aide de (46) et de (51).

2) En utilisant à nouveau l'inégalité (47) il vient, pour λ, $\mu \in T$ $\bar{x}\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$

$$|\Phi_\lambda(\bar{x})-\Phi_\mu(\bar{x})| \leqq c(\alpha)\int \operatorname{Inf}(A_{\lambda,\mu}(\omega),\, A_{\lambda,\mu}^{\alpha/4}(\omega))\,d\mathbb{P}(\omega) \quad (52)$$

où

$$A_{\lambda,\mu}(\omega) = \|g^\lambda(\omega)-g^\mu(\omega)\|\operatorname{Inf}[l(g^\lambda(\omega)),\, l(g^\mu(\omega))]. \quad (53)$$

D'après (50) on a donc

$$|\Phi_\lambda(\bar{x})-\Phi_\mu(\bar{x})| \leqq c(\alpha)\,|\lambda-\mu|^{\alpha/4\,(5-\alpha)}\times c_3(T) \quad (54)$$

où

$$c_3(T) = \sup_{\lambda,\mu\in T}\int c^{\alpha/4\,(5-\alpha)}(\omega)\{\operatorname{Inf}(l(g^\lambda(\omega)),\, l(g^\mu(\omega))\}^{\alpha/4\,(5-\alpha)}\,d\mathbb{P}(\omega). \quad (55)$$

La constante $c_3(T)$ est finie pour un choix suffisamment petit de $\alpha_0(T)$ en raison des hypothèses du théorème 1.

La démonstration du lemme 3 est ainsi achevée.

La preuve du théorème se termine maintenant facilement en décomposant $\gamma(\lambda)-\gamma(\mu)$ sous la forme

$$\gamma(\lambda)-\gamma(\mu) = \int[\Phi_\lambda(\bar{x})-\Phi_\mu(\bar{x})]\,\nu_\lambda(d\bar{x}) + \int \Phi_\mu(\bar{x})[\nu_\lambda(d\bar{x})-\nu_\mu(d\bar{x})] \quad (56)$$

et en utilisant les résultats des lemmes 2 et 3.

III. ÉTUDE D'UNE CLASSE D'OPÉRATEURS

Désignons par :

$K = O(d)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$;

$A =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices diagonales à coefficients positifs;

$N =$ le sous-groupe de $GL(d, \mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures ayant des coefficients diagonaux égaux à 1.

Rappelons que l'on a la décomposition d'Iwasawa : l'application qui au triplet $(k, a, n) \in K \times A \times N$ associe le produit kan est un isomorphisme de variétés analytiques de $K \times A \times N$ sur $GL(d, \mathbb{R})$.

Pour $g \in GL(d, \mathbb{R})$ nous écrivons $g = k(g)\, a(g)\, n(g)$, $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$.

La décomposition précédente induit une action du groupe $GL(d, \mathbb{R})$ sur K en posant :

$$g.k_1 = k[gk_1], \qquad g \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k_1 \in K. \tag{57}$$

On a d'autre part le

LEMME 4. — *Tout cocycle multiplicatif* ρ *continu de* $G \times K$ *dans* $\mathbb{C} - \{0\}$ *K-invariant à gauche [i. e. tel que* $\forall k, k' \in K$, $g \in GL(d, \mathbb{R})$ *on ait* $\rho(k'g, k) = \rho(g, k)$*] s'écrit*

$$\rho[g, k] = \chi[a(gk)] \tag{58}$$

où χ *est un caractère continu de* A *dans* $\mathbb{C} - \{0\}$.

Preuve du lemme 4. — En raison de la relation

$$a(gg'k) = a(gg'.k)\, a(g'k), \qquad g, g' \in GL(d, \mathbb{R}), \quad k \in K \tag{59}$$

il est clair que (58) définit un cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K-invariant à gauche.

Réciproquement si ρ est un cocycle multiplicatif sur $G \times K$ et K-invariant à gauche on a

$$\rho(g, k) = \rho(gk, I) \tag{60}$$

et donc ce cocycle est défini par la fonction $\rho(s, I)$, $s \in S = AN$ qui est un caractère du groupe S car pour tout $s \in S$ on a $s.I = I$. Un tel caractère envoie N sur 1 et donc est défini par un caractère de A, ce qui justifie la relation (58).

Remarque. — Il résulte du lemme qui précède que tout cocycle multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ continu K-invariant à gauche est analytique sur $G \times K$, car tout caractère continu de A dans $\mathbb{C} - \{0\}$ est analytique sur A.

Dans la suite μ désignera une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ ayant des moments exponentiels, et ρ un cocycle continu multiplicatif de $G \times K$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$, K-invariant à gauche.

$C^p(K)$ est l'espace de Banach des fonctions p fois continûment dérivables de K dans $\mathbb{C}$.

Nous nous proposons d'étudier l'opérateur P_ρ défini sur $C^p(K)$ $p \geqq 0$ par

$$P_\rho f(k) = \int \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1}.k) \mu(dg), \qquad f \in C^p(K) \tag{61}$$

on a le

THÉORÈME 4. — *Soit μ une probabilité sur* $GL(d, \mathbb{R})$, *ayant des moments exponentiels, et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de* $GL(d, \mathbb{R})$, *alors l'opérateur* P_ρ *est un opérateur compact sur* $C^p(K)$, $p \geqq 0$.

Preuve du théorème 4. — L'algèbre de Lie $\mathcal{K}$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur K s'identifie à l'ensemble des matrices réelles antisymétriques $\mathbb{O}(d)$: si f est une fonction continûment dérivable au voisinage d'un point $k \in K$, et $X \in \mathbb{O}(d)$. On a

$$Xf(k) = \frac{d}{dt}\{f(k \exp tX)\}/_{t=0} \tag{62}$$

où $\exp tX$ désigne l'exponentielle de la matrice tX. Soit $E_{i,j}$ la matrice $d \times d$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui se trouvant à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. Les matrices $(X_{i,j})_{j>i} = E_{i,j} - E_{j,i}$ forment une base de dimension $d(d-1)/2$ de $\mathbb{O}(d)$. Soient $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_l$ des indices multiples où $\alpha_m \in \{(i,j)/d \geqq j > i \geqq 1\}$. On pose $X_\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_l}$ et $|\alpha| = l$.

On munit $C^p(K)$ d'une structure d'espace de Banach à l'aide de la norme

$$\|f\|_p = \sum_{|\alpha| \leqq p} \sup_{k \in K} |X_\alpha f(k)|. \tag{63}$$

La formule

$$\rho(g) f(k) = \sigma(g^{-1}, k) f(g^{-1}.k), \quad g \in GL(d, \mathbb{R}),\ f \in C^p(K),\ k \in K \tag{64}$$

définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)$ telle que l'application $(g, f) \to \rho(g) f$ est continue de $G \times C^p(K)$ dans $C^p(K)$. La fonction

$$\|\rho(g)\|_p = \sup_{\|f\|_p = 1} \|\rho(g) f\|_p \tag{65}$$

est sous additive et localement bornée; on a donc [7] : $\int \|\rho(g)\|_p \, d\mu(g) < +\infty$, et puisque

$$\|P_\rho f\|_p \leqq \int \|\rho(g)\|_p \, d\mu(g) \times \|f\|_p \tag{66}$$

P_ρ opère sur $C^p(K)$.

Montrons maintenant que P_ρ est un opérateur compact sur $C^p(K)$. Pour cela considérons une partie bornée B de $C^p(K)$ et montrons que pour tout opérateur différentiel D invariant à gauche sur K et de degré inférieur ou égal à p l'ensemble $\{D(P_\rho f);\ f \in B\}$ est une partie équicontinue de $C(K)$. Le théorème d'Arzela-Ascoli permet alors de conclure que $P_\rho(B)$ est une partie compacte de $C^p(K)$. Désignons par R (resp. L) la représentation de K dans $C^p(K)$ définie par

$$R(k')\, f(k) = f(kk') \qquad [\text{resp. } L(k')\, f(k) = f(k'^{-1} k)]. \tag{67}$$

Pour tout opérateur différentiel Δ de degré $j \leqq p$ c'est-à-dire de la forme

$$\Delta = \sum_{|a| \leqq j} a_\alpha X_\alpha, \qquad a_\alpha \in \mathbb{R}$$

invariant à gauche sur K, $R(\Delta)$ est un opérateur borné de $C^j(K)$ dans $C(K)$ de norme $\| R(\Delta) \|_{j,0}$ et l'on a

$$\| R(\Delta)\, \rho(g) f \|_0 \leqq \| R(\Delta) \|_{j,0}\, \| \rho(g) \|_j\, \| f \|_j. \tag{68}$$

De plus l'application $(g, k) \to R(\Delta)\, \rho(g) f(k)$ est continue sur $G \times K$. On en conclut en raisonnant par récurrence sur le degré de Δ que

$$\Delta(P_\rho f)(k) = \int R(\Delta)\, [\rho(g) f](k)\, d\mu(g) \tag{69}$$

car pour tout $l \geqq 0$ $\int \| \rho(g) \|_l\, d\mu(g) < +\infty$.

De plus on a pour tout $k \in K$

$$L(k^{-1})\, R(\Delta) = R(\Delta)\, L(k^{-1}) \tag{70}$$

et

$$L(k^{-1})\, \rho(g) = \rho(k^{-1} g) \tag{71}$$

et donc en supposant que

$$d\mu(g) = \Phi(g)\, dg \tag{72}$$

où dg est la mesure de Haar sur $GL(d, \mathbb{R})$

$$\Delta(P_\rho f)(k) = \int R(\Delta)\, [\rho(k^{-1} g)]\, (f)(e)\, \Phi(g)\, dg$$

$$= \int R(\Delta)\, \rho(g)\, (f)(e)\, \Phi(kg)\, dg. \tag{73}$$

Pour tous $k, k' \in K$ on a

$$|\Delta[P_\rho f](k' k) - \Delta[P_\rho f](k)|$$

$$\leqq \int |R(\Delta)\, \rho[k^{-1} g]\ f(e)|\ |\Phi(k' g) - \Phi(g)|\, dg. \tag{74}$$

Comme

$$|R(\Delta)\,\rho\,[k^{-1}g]\,f(e)| \leqq \|R(\Delta)\|_{j,0} \sup_{k\in K} \|\rho(k^{-1})\|_j \,\|\rho(g)\|_j \,\|f\|_j \quad (75)$$

on a donc

$$\sup_{k\in K} |\Delta[P_\rho f](k'k) - \Delta[P_\rho f](k)| \leqq \|R(\Delta)\|_{i,0} \sup_{k\in K} \|\rho(k^{-1})\|_i \times \int_G \|\rho(g)\|_i \,|\Phi(k'g) - \Phi(g)|\, dg \times \|f\|_i. \quad (76)$$

L'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro quand k' tend vers l'identité : ceci est évident lorsque Φ est continue et à support compact, et s'obtient dans le cas général en approchant Φ dans $L^1(\|\rho(g)\|_j\, dg)$ par des fonctions du type précédent. La conclusion souhaitée résulte alors immédiatement de l'inégalité (76).

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ *une probabilité sur* $GL(d, \mathbb{R})$ *admettant des moments exponentiels et absolument continue par rapport à la mesure de Haar de* $GL(d, \mathbb{R})$. *Il existe alors une unique probabilité* μ*-invariante portée par* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. *Cette probabilité est absolument continue par rapport à la probabilité* m K-*invariante sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *et admet une densité* C^∞ *par rapport à* m.

Preuve du corollaire 1. — La première assertion de ce corollaire se justifie comme le 1) de la proposition 2 car T_μ a une action contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Considérons le cocycle multiplicatif de $GL(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}_+$ défini par

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{1}{\|gx\|^d} \quad (77)$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $\|x\| = 1$ et a pour image $\bar{x}$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\sigma_2(g, \bar{x}) = \frac{dg^{-1}m}{dm}(\bar{x}). \quad (78)$$

Remarquons de plus que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) = \{k.\bar{e}_1,\ k \in O(d)\}$ et que la formule

$$\tilde{\sigma}_2(g, k) = \sigma_2(g, k.\bar{e}_1) \quad (79)$$

définit un cocycle multiplicatif continu, K-invariant à gauche de $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ dans $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème précédent l'opérateur $P_{\tilde{\sigma}_2}$ est compact sur $C^p(K)$ $p \geqq 0$; il en est donc de même de l'opérateur $P(\sigma_2)$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ où

$$P(\sigma_2)\, f(\bar{x}) = \int \sigma_2(g^{-1}, \bar{x})\, f(g^{-1}.\bar{x})\, d\mu(g), \qquad f \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)),\quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \quad (80)$$

Fixons-nous un entier $p_0 \geqq 1$. Le rayon spectral de $P(\sigma_2)$ sur l'espace $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est égal à 1. En effet tout d'abord l'application de $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $\mathbb{C} f \to m(f)$ est une forme linéaire continue sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ et de plus

$$m(P(\sigma_2)\, f)=m(f), \qquad f \in C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)). \tag{81}$$

Par ailleurs $P(\sigma_2)$ n'admet pas de valeur propre sur $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ de module strictement supérieur à 1. En effet s'il existait une telle valeur propre λ et une fonction propre φ non nulle on aurait :

$$m(|\varphi|) \geqq m(P(\sigma_2)\,|\varphi|) \geqq |\lambda|\, m(|\varphi|) \tag{82}$$

ce qui est impossible.

Les deux remarques précédentes permettent de conclure, en raison de la compacité de l'opérateur $P(\sigma_2)$.

La suite $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(\sigma_2)(1)\; n \geqq 1$ converge alors dans $C^{p_0}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ vers une fonction φ, et l'on a de plus $m(\varphi)=1$. Le raisonnement précédent étant valide pour tout $p_0 \geqq 1$ on en conclut que φ est infiniment dérivable sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

La fonction φ satisfait de plus à l'égalité :

$$P(\sigma_2)\,\varphi=\varphi. \tag{83}$$

Pour toutes fonctions f, $h \in C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on a

$$\int Pf(\bar{x})\, h(\bar{x})\, dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y})\, P(\sigma_2)\, h(\bar{y})\, dm(\bar{y}) \tag{84}$$

d'où en particulier

$$\int Pf(\bar{x})\, \varphi(\bar{x})\, dm(\bar{x}) = \int f(\bar{y})\, \varphi(\bar{y})\, dm(\bar{y}) \tag{85}$$

ce qui établit que $\varphi . m$ est une probabilité μ-invariante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Cette probabilité est unique et elle admet donc une densité C^∞ par rapport à m.

IV. PREUVE DU THÉORÈME

L'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie à l'espace homogène K/K_1 de K, K_1 désignant le sous-groupe fermé de K formé des matrices réelles $d \times d$ orthogonales et telles que la première colonne a tous ses coefficients nuls sauf le premier qui est égal à ± 1. L'espace $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ des fonctions p fois continûment différentiables sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ s'identifie alors au sous-espace de Banach de $C^p(K)$ formé des fonctions p fois continûment différentiables sur K et K_1-invariante à droite. Compte tenu du théorème 4 $P(\lambda)$ est un opérateur compact sur $C^p(\mathbb{R}^d))$ pour tout $p \geqq 0$. De la proposition 2 il résulte que le spectre de l'opérateur $P(\lambda)$ $\lambda \in T$ sur $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ est contenu dans

$$E_{\alpha(T), T} = \{1\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqq \rho_1(T, \alpha_0(T)) < 1\}.$$

Pour $\lambda \in T$, $z \in \mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$ et $f \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ on note

$$R_\lambda(z) f = (z I - P(\lambda))^{-1}(f) \in C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \qquad p \geqq 0.$$

Soit Γ un cercle de centre 1 contenu dans $\mathbb{C} - E_{\alpha(T), T}$. On a alors comme dans la preuve du théorème 1.

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2 i \pi} \int_\Gamma R_\lambda(z) [\Phi_\lambda](\bar{x})\, dz \tag{86}$$

pour $\bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, $\lambda \in T$.

Commençons par établir la

PROPOSITION 3. — *Soit* ρ *un cocycle multiplicatif continu de* $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ *dans* $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ *et* K*-invariant à gauche.*

Alors ρ *est analytique dans* $GL(d, \mathbb{R}) \times K$, *de plus sous les hypothèses du théorème* 2 *la fonction*

$$\varphi_\lambda(k) = \int \operatorname{Log} \rho [g^\lambda(\omega), k]\, d\mathbb{P}(\omega) \tag{87}$$

est C^∞ *sur* $U \times K$.

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2

$$(\lambda, \bar{x}) \to \Phi_\lambda(\bar{x}) = \int \operatorname{Log} \sigma [g^\lambda(\omega), \bar{x}]\, d\mathbb{P}(\omega) \tag{88}$$

est C^∞ *sur* $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration de la proposition 3. — L'analyticité de ρ résulte du lemme 4 et de la remarque qui suit.

D'autre part désignons par $\mathbb{G}$ l'algèbre de Lie de $GL(d, \mathbb{R})$ c'est-à-dire l'algèbre des champs de vecteurs invariants à gauche sur $GL(d, \mathbb{R})$. $\mathbb{G}$ s'identifie à $\mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ de la façon suivante : pour $X \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$ et f dérivable sur G on définit

$$X f(g) = \lim_{t \to 0} \frac{f(g \exp t X) - f(g)}{t} \tag{89}$$

exp désignant ici l'exponentielle de la matrice tX.

Le lemme suivant sera utile à la preuve de la proposition 3.

LEMME 5. — *Pour toute fonction* $\Phi \in C^{p+k}(K)$, $k \geqq 0$, $p \geqq 0$ *il existe une fonction*

$$\varphi_{p,k}(\ ) \in \bigcap_{k \geqq 1} L^k(\Omega, \mathbb{P})$$

telle que

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [\rho(g^\lambda(\omega), .)\Phi(g^\lambda(\omega).)] \right\|_p \leqq \varphi_{p,k}(\omega) \|\Phi\|_{k+p}, \qquad \mathbb{P} \text{ p. s.}$$

Preuve du lemme 5. — $GL(d, \mathbb{R})$ peut être considéré comme un ouvert de $\mathbb{R}^{d^2}$; soit $(g_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq d}$ un système de coordonnées sur $GL(d, \mathbb{R})$ et $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq d}$ les champs de vecteurs associés, c'est-à-dire que si f est différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a :

$$\frac{\partial}{\partial g_{i,j}} f(g) = \frac{d}{dt} f(g + t E_{i,j}) \Big|_{t=0} \tag{90}$$

où $E_{i,j}$ désigne la matrice $d \times d$ ayant tous ses termes nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne et qui est égal à 1.

Pour tout $X \in \mathbb{G}$ on a la relation

$$X g_{i,j}(g) = \langle g X e_i, e_j \rangle, \qquad 1 \leqq i, j \leqq d \tag{91}$$

où $(e_i)_{1 \leqq i \leqq d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ pour un produit scalaire $\langle\ \rangle$, tels que $g_{i,j} = \langle g e_i, e_j \rangle$ $1 \leqq i, j \leqq d$.

Il en résulte que l'on a :

$$E_{k,l} = \sum_{j=1}^{d} g_{k,j} \frac{\partial}{\partial g_{l,j}}, \qquad 1 \leqq k, l \leqq d. \tag{92}$$

Soit $M(g)$ la matrice $d^2 \times d^2$ de passage de la base $(E_{k,l})_{1 \leqq k,l \leqq d}$ à la base $(\partial/\partial g_{i,j})_{1 \leqq i \leqq j \leqq d}$ de l'espace tangent au point g de $GL(d, \mathbb{R})$. De (92) il résulte que $\|M(g)\| \leqq \|g\|$ et également que $|\det[M(g)]| = |\det g|^d$ et par conséquent que

$$\|M^{-1}(g)\| \leqq \|g\|^{d-1} \|g^{-1}\|^{d^2}. \tag{93}$$

Supposons que $T = [a-r, a+r]$. Il résulte des hypothèses d'analyticité du théorème 2 que l'on a pour $\lambda \in T$

$$g^\lambda(\omega) = \sum_{k \geqq 0} (\lambda - a)^k A_k(\omega), \qquad \mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad (A_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \tag{94}$$

et de même

$$[g^\lambda(\omega)]^{-1} = \sum_{k \geqq 0} (\lambda - a)^k B_k(\omega), \qquad \mathbb{P} \text{ p. s.}, \quad (B_k(\omega))_k \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \tag{95}$$

où pour tout $p \geqq 1$ la série $\sum_{k \geqq 0} r^k \{N_p(A_k)+N_p(B_k)\}$ est convergente, où l'on a noté

$$N_p(A)=\left\{\int \| A(\omega) \|^p d\mathbb{P}(\omega)\right\}^{1/p} \tag{96}$$

pour toute matrice aléatoire A de Ω dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction φ différentiable sur $GL(d, \mathbb{R})$ on a

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi(g^\lambda(\omega))=\sum_{1 \leqq i, j \leqq d} \frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial g_{i,j}}(g^\lambda(\omega)), \qquad \mathbb{P}\text{ p. s.} \tag{97}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}\varphi(g^\lambda(\omega))\\ &\quad=\sum_{1 \leqq i,j,k,l \leqq d}\frac{dg_{i,j}^\lambda(\omega)}{d\lambda} m'_{i,j,k,l}(g^\lambda(\omega))\, E_{k,l}(\varphi)(g^\lambda(\omega)), \qquad \mathbb{P}\text{ p. s.}\end{aligned} \tag{98}$$

où

$$(m'_{i,j,k,l}(g))=[M(g)]^{-1}. \tag{99}$$

Considérons d'autre part l'espace vectoriel V_p engendré par les fonctions de la forme

$$F(g, k)=\rho(g, k) f(g.k) \qquad \text{où } f \in C^p(K). \tag{100}$$

Soit X un élément de $\mathbb{G}$ alors $XF(g, k)=(d/dt)F(\exp tXg, k))_{t=0}$ est un élément de V_{p-1} on a en effet en utilisant la propriété de cocycle de ρ.

$$XF(g, k)=\rho(g, k)[\bar{X}(f)(g.k)+X\rho(e, g.k) f(g.k)] \tag{101}$$

où

$$\bar{X}(f)(k)=\frac{d}{dt}f(\exp tX.k)\,|_{t=0}. \tag{102}$$

Par ailleurs l'application $g \to \rho(g^{-1}, k) f(g^{-1}.k)$ définit une représentation de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^p(K)\, p \geqq 1$. Il en résulte [7] qu'il existe une constante $c(p)$ telle que $f \in C^p(K)$ on ait :

$$\| \rho(g^{-1}, .) f(g^{-1}, .)\|_p \leqq c(p) l^{c(p)}(g) \| f \|_p. \tag{103}$$

On déduit de (98), de (99) et de (103) qu'il existe une constante $K(p) > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda \in T}\left\|\frac{d}{d\lambda}\rho(g^\lambda(\omega), .)\Phi(g^\lambda(\omega), .)\right\|_p &\leqq K(p) l^{c(p)}(g^\lambda(\omega))\\ &\quad\times \sum_{k \geqq 0} kr^{k-1}\| A_k(\omega)\|\\ &\quad\times(\sum_{k \geqq 0} r^k \| A_k(\omega)\|)^{d-1}\times(\sum_{k \geqq 0} r^k \| B_k(\omega)\|)^{d^2}\\ &\quad\times \sum_{1 \leqq k, l \leqq d}(\| \bar{E}_{k,l}\Phi\|_p+\| E_{k,l}[\rho(e, .)\Phi(\ )]\|_p).\end{aligned} \tag{104}$$

En raison de la compacité de K il existe une constante a_p telle que pour toute fonction $\Phi \in C^{p+1}(K)$ on ait :

$$\sum_{1 \leqq k,\, l \leqq d} \| \bar{E}_{k,l} \Phi \|_p + \| E_{k,l} [\rho(e, \,.\,) \Phi(\;)] \|_p \leqq a_p \| \Phi \|_{p+1}. \tag{105}$$

Les inégalités (104), (105), l'inégalité de Hölder et l'hypothèse d'analyticité du théorème 2 permettent d'obtenir le résultat du lemme pour $k=1$.

Le cas où $k \geqq 2$ s'obtient de manière analogue en dérivant à nouveau $\frac{d}{d\lambda}[\rho(g^\lambda(\omega), \,.\,)\, \Phi(g^\lambda(\omega), \,.\,)]$ par rapport à la variable λ ., le seul élément nouveau étant de contrôler les quantités $\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g^\lambda_{i,j}(\omega) \right|_{1 \leqq i,\, j \leqq d}$ pour $2 \leqq p \leqq k$ et

$$\sup_{\lambda \in T} \left\| \frac{d^p}{d\lambda^p} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|, \qquad 2 \leqq p \leqq k.$$

On a

$$\sup_{\lambda \in T} \left| \frac{d^p}{d\lambda^p} g^\lambda_{i,j}(\omega) \right| \leqq \sum_{k \geqq p} k^p r^{k-p} \| A_k(\omega) \|, \qquad \mathbb{P}\text{ p. s.} \tag{106}$$

D'autre part la matrice $[M(g^\lambda(\omega))]^{-1}$ et ses dérivées par rapport à λ sont des matrices dont les coefficients sont des expressions rationnelles en les coefficients de la matrice $M(g^\lambda(\omega))$ et de ses dérivées, et dont le dénominateur est une puissance de $\det M(g^\lambda(\omega))$. Il en résulte que pour tout $k \geqq 1$

$$\left\| \frac{d^k}{d\lambda^k} [M(g^\lambda(\omega))]^{-1} \right\|$$

est majorée $\mathbb{P}$ p. s. par une combinaison finie de produits de termes de la forme

$$\sum_{k \geqq q} k^q r^{k-q} \| A_k(\omega) \|, \qquad 0 \leqq q \leqq p \tag{107}$$

$$\sum_{k \geqq 0} r^k \| B_k(\omega) \| \tag{108}$$

ce qui permet de conclure.

La proposition se justifie aisément à partir du lemme précédent et du fait que pour tout cocycle multiplicatif continu η sur $GL(d, \mathbb{R}) \times K$ la variable aléatoire $\sup_{\lambda \in T} \sup_{k \in K} \eta(g^\lambda(\omega), k)$ appartient à $\bigcap_{k \geqq 0} L^k(\Omega, \mathbb{P})$ en utilisant un théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Preuve du corollaire 2. — Le corollaire découle de la proposition 3 en considérant le cocycle $\rho(g, k) = \sigma(g, k\,.\,\bar{e}_1)$.

Définissons d'autre part les opérateurs $P^{(k)}(\lambda)$ $k \geqq 1$ par :

$$P^{(k)}(\lambda)(f)(\bar{x}) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\{P(\lambda)(f)(\bar{x})\} = \int \frac{d^k}{d\lambda^k}(f(g^\lambda(\omega).\bar{x}))\, d\mathbb{P}(\omega)$$
$$f \in C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)), \quad \bar{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d). \qquad (109)$$

La formule précédente se justifie à l'aide du lemme 5.

On désigne par T un intervalle de U et pour k et p entiers $\geqq 0$ par $\mathscr{L}(k, p)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ dans $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$. Énonçons et démontrons des lemmes utiles à la preuve du théorème 2.

LEMME 6

1) $P^{(k)}(\lambda)$ *appartient à* $\mathscr{L}(k+p, p)$ $k \geqq 0$, $p \geqq 0$.

2) *L'application* $\lambda \to P(\lambda)$ *est continue de* U *dans* $\mathscr{L}(k, k)$ $k \geqq 0$

3) *Pour tous* $k \geqq 0$, $p \geqq 0$ *il existe une constante* $c_{p,k}(T)$ *telle que pour toute fonction* f *de* $C^{p+k+2}(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ *on ait*

$$\sup_{\lambda, \lambda_0 \in T} \| P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0) P^{(k+1)}(\lambda_0)(f) \|_p$$
$$\leqq c_{p,k}(T)(\lambda - \lambda_0)^2 \| f \|_{p+k+2}. \qquad (110)$$

Démonstration du lemme 6. — L'assertion 1) est une conséquence immédiate du lemme 5.

Considérons par ailleurs la représentation r continue de $GL(d, \mathbb{R})$ dans $C^k(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ définie par la formule :

$$r(g) f(\bar{x}) = f(g^{-1}.\bar{x}). \qquad (111)$$

Il résulte de [7] qu'il existe une constante $c_k > 0$ telle que

$$\| r(g) f \|_k \leqq c_k l^{c_k}(g) \| f \|_k. \qquad (112)$$

Or on a :

$$P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f) = \int r(g^{-1})(f)[f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g)]\, dg \qquad (113)$$

et par conséquent

$$\| P(\lambda)(f) - P(\lambda_0)(f) \|_k \leqq c_k \int l^{c_k}(g) \mid f_\lambda(g) - f_{\lambda_0}(g) \mid dg. \qquad (114)$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 permet alors d'obtenir le 2) du lemme.

Établissons maintenant le 3) de ce lemme. Par application de la formule de Taylor il vient :

$$P^{(k)}(\lambda)(f) - P^{(k)}(\lambda_0)(f) - (\lambda - \lambda_0) P^{(k+1)}(\lambda_0)(f)$$
$$= (\lambda - \lambda_0)^2 \int d\mathbb{P}(\omega) \int_0^1 (1-t) \frac{d^{k+2}}{d\lambda^{k+2}} [f(g^{\lambda_0 + t(\lambda - \lambda_0)}(\omega)\ .)]\, dt. \qquad (115)$$

L'énoncé du lemme 5 permet d'obtenir facilement le résultat souhaité.

LEMME 7. — *Soient* $(E_i, |\ |_i)$ $i=1, 2$ *deux espaces de Banach et* $T(\lambda)$ $\lambda \in 0$ *où* 0 *est un ouvert de* $\mathbb{R}$ *une famille d'opérateurs bornés de* E_i *dans* E_i $i=1, 2$.

On suppose que :

1) $E_1 \subset E_2$ *et que l'injection de* E_1 *dans* E_2 *est continue.*

2) *L'application* $\lambda \to T(\lambda)$ *est continue de* 0 *dans* $\mathcal{L}(E_i, E_i)$ $i=1, 2$ *espace de Banach des applications linéaires continues de* E_i *dans* E_i.

3) *L'application* $\lambda \to T(\lambda)$ *de* 0 *dans* $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ *espace de Banach des applications linéaires continues de* E_1 *dans* E_2 *est dérivable en* $\lambda_0 \in 0$, *de dérivée* $T'(\lambda_0)$.

Soit d'autre part z_0 *un élément de l'ensemble résolvant de* $T(\lambda_0)$ *considéré comme opérateur sur* E_1 *et* E_2. *On note* $R(T(\lambda), z_0) = \{z_0 I - T(\lambda)\}^{-1}$ *la résolvante de* $T(\lambda)$ *sur* E_1 *et* E_2 *qui d'après* 2) *existe sur un voisinage* V_{λ_0}. *L'application* $\lambda \to R(T(\lambda), z_0)$ *de* V_{λ_0} *dans* $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ *est alors dérivable en* λ_0 *et de dérivée égale à* $R(T(\lambda_0), z_0)\, T'(\lambda_0)\, R(T(\lambda_0), z_0)$.

Démonstration du lemme 7. — Il résulte de l'hypothèse 3) que pour $f \in E_1$ on a

$$|T(\lambda) f - T(\lambda_0) f - (\lambda - \lambda_0) T'(\lambda_0) f|_2 = |\lambda - \lambda_0|\, \varepsilon_1(\lambda - \lambda_0)\, |f|_1 \quad (116)$$

où

$$\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon_1(\lambda) = 0.$$

Soit $f \in E_1$, notons

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \frac{R(T(\lambda), z_0) f - R(T(\lambda_0), z_0) f}{\lambda - \lambda_0} - R(T(\lambda_0), z_0)\, T'(\lambda_0)\, R(T(\lambda_0), z_0) f. \quad (117)$$

D'après l'équation résolvante

$$R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0) = R(T(\lambda), z_0)\, [T(\lambda) - T(\lambda_0)]\, R(T(\lambda_0), z_0) \quad (118)$$

on a

$$\Delta(\lambda, \lambda_0, f) = \Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) + \Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) \quad (119)$$

où

$$\Delta_1(\lambda, \lambda_0, f) = \{R(T(\lambda), z_0) - R(T(\lambda_0), z_0)\} \circ \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right] R(T(\lambda_0), z_0) f \quad (120)$$

où

$$\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f) = \left\{R(T(\lambda_0), z_0) \left[\frac{T(\lambda) - T(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - T'(\lambda_0)\right] R(T(\lambda_0), z_0)\right\} f. \quad (121)$$

De (116) il résulte que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leqq \varepsilon_1(\lambda-\lambda_0)\,|R(T(\lambda_0), z_0)|_2\,|R(T(\lambda_0), z_0)|_1\,|f|_1 \quad (122)$$

et également que

$$|\Delta_2(\lambda, \lambda_0, f)|_2 \leqq |R(T(\lambda), z_0)-R(T(\lambda_0), z_0)|_2 \times (|T'(\lambda_0)|_{1,2}+\varepsilon_1(\lambda-\lambda_0))\,|f|_1 \quad (123)$$

où l'on a adopté les notations

$$|A|_i = \sup_{|f|_i} |A f|_i \quad (124)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_i dans E_i $1 \leqq i \leqq 2$

$$|A|_{1,2} = \sup_{|f_1|=1} |A f|_2 \quad (125)$$

pour tout opérateur A linéaire de E_1 dans E_2.

De l'hypothèse 2) du lemme il résulte que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} |R(T(\lambda), z_0)-R(T(\lambda_0), z_0)|_2 = 0 \quad (126)$$

et la conclusion résulte alors de (119), (122) et (123).

LEMME 8. — *Soient* $(i_l)_{1 \leqq l \leqq k}$ *une suite de k entiers* $\geqq 0$ *et* $j \geqq 0$ *et*

$$H(\lambda, z, .) = R(\lambda, z)P^{(i_1)}(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_2)}(\lambda)\ldots \ldots R(\lambda, z)P^{(i_k)}(\lambda)R(\lambda, z)\left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j}\right].$$

Pour tout $p \geqq 0$ *et* $z \in \Gamma$ *l'application* $\lambda \to H(\lambda, z, .)$ *de* T *dans* $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ *est dérivable et* $(\lambda, z) \to (\partial/\partial\lambda) H(\lambda, z, .)$ *est continue de* $T \times \Gamma$ *dans* $C^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration du lemme 8. — Il résulte facilement du fait que $(\lambda, \bar{x}) \to \Phi_\lambda(\bar{x})$ est C^∞ sur $U \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ des lemmes 6 et 7 que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda} H(\lambda, z, .) &= R(\lambda, z)P^{(i_1)}(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_2)}(\lambda)\ldots\\ &\ldots R(\lambda, z)P^{(i_k)}(\lambda)R(\lambda, z)\left[\frac{\partial^{j+1}\Phi_\lambda}{\partial\lambda^{i+1}}\right]\\ &+\sum_{l=1}^{k} R(\lambda, z)P^{(i_1)}(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_2)}(\lambda)\ldots\\ &\ldots P^{(i_l-1)}(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_l+1)}(\lambda)R(\lambda, z)\ldots P^{(i_k)}(\lambda)R(\lambda, z)\left[\frac{\partial^j\Phi_\lambda}{\partial\lambda^j}\right]\\ &+\sum_{l=1}^{k} R(\lambda, z)P^{(i_1)}(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_2)}(\lambda)\ldots\\ &\ldots R(\lambda, z)P'(\lambda)R(\lambda, z)P^{(i_l)}(\lambda)R(\lambda, z)\ldots\end{aligned}$$

$$\ldots \mathrm{P}^{(i_k)}(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j}\right] + \mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_1)}(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_2)}(\lambda)\ldots$$
$$\ldots \mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_k)}(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}'(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial \lambda^j}\right]. \quad (127)$$

La continuitié de $(\lambda, z) \to (\partial/\partial\lambda)\,\mathrm{H}(\lambda, z, .)$ de $\mathrm{T}\times\Gamma$ dans $\mathrm{C}^p(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ $p \geqq 0$ est une conséquence de la formule précédente, de la continuité de $(\lambda, z) \to \mathrm{R}(\lambda, z)$ de $\mathrm{T}\times\Gamma$ dans $\mathscr{L}(k, k)$ pour tout $k \geqq 0$ et du 3) du lemme 6.

Terminons maintenant la preuve du théorème 2. Le lemme 8 permet de justifier la dérivation par rapport à λ sous le signe intégrale dans la formule

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mathrm{R}(\lambda, z)[\Phi_\lambda](\bar{x})\,dz, \qquad \bar{x}\in\mathbb{P}(\mathbb{R}^d), \quad \lambda\in\mathrm{T} \quad (128)$$

d'où

$$\gamma'(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \mathrm{R}(\lambda, z)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\Phi_\lambda)\right](\bar{x}) + \mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}'(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)[\Phi_\lambda](\bar{x})\,dz. \quad (129)$$

Les dérivations successives se justifiant par le même lemme on voit et que $\lambda \to \gamma(\lambda)$ est infiniment dérivable sur T et

$$\gamma^{(p)}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \times \int_\Gamma \sum_{k=0}^{p} \sum_{\{(j, i_1, i_2, \ldots, i_k)\in\mathbb{N}^{k+1};\ j+i_1+i_2+\ldots+i_k=p\}} \frac{1}{i_1!\,i_2!\ldots i_k!\,j!}$$
$$\times \mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_1)}(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_2)}(\lambda)\ldots$$
$$\ldots \mathrm{R}(\lambda, z)\,\mathrm{P}^{(i_k)}(\lambda)\,\mathrm{R}(\lambda, z)\left[\frac{\partial^j \Phi_\lambda}{\partial\lambda^j}\right](\bar{x})\,dz. \quad (130)$$

V.1. PREUVE DU THÉORÈME 3

Soit $\mathrm{A} > 0$ et

$$\Psi_\mathrm{A}(\lambda) = \mathrm{N}(\lambda)\,1[-\mathrm{A}, \mathrm{A}](\lambda) \quad (131)$$

Ψ_A est une fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Soit $\tilde{\Psi}_\mathrm{A}$ sa transformée de Hilbert.

$$\tilde{\Psi}_\mathrm{A}(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{\Psi_\mathrm{A}(t)}{x-t}\,dt. \quad (132)$$

Par intégration par parties à partir de la formule de Thouless (5) on obtient :

$$\tilde{\Psi}_A(x) = -\frac{1}{\pi}\Psi_A(A)\operatorname{Log}|A-x| + \frac{1}{\pi}\Psi_A(-A)\operatorname{Log}|A+x| + \frac{1}{\pi}\gamma(x) - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>A}\operatorname{Log}|x-t|\,dN(t). \quad (133)$$

Supposons tout d'abord les hypothèses du 1) du théorème 3 vérifiées. La suite de matrices indépendantes $\begin{pmatrix} q_n-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $n \geqq 0$ satisfait alors aux hypothèses du théorème 1. La vérification de 2.1 et de 2.2 est en effet immédiate. De plus comme η charge au moins 2 points le sous-groupe fermé engendré par μ_λ est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action irréductible sur $\mathbb{R}^2$ [14]. On en déduit [1] que μ_λ satisfait l'hypothèse 1) du théorème 1.

Il résulte alors de (133) que $\tilde{\Psi}_A$ est höldérienne dans $[-(A/2), A/2]$, d'où l'on déduit que sa transformée de Hilbert θ_A est höldérienne sur $[-(A/4), A/4]$.

En raison de la continuité [15] de la fonction $N(\lambda)$ sur $\mathbb{R}$ et de la théorie de l'inversion de la transformée de Hilbert dans $L^2(\mathbb{R})$ [13] on a

$$-\theta_A(\lambda) = N(\lambda) \qquad \text{pour} \quad \lambda \in [-(A/4), A/4] \quad (134)$$

ce qui assure que N est höldérienne sur l'intervalle $[-(A/4), A/4]$. ceci justifie la première assertion du théorème 3 en raison de l'arbitraire de A.

Supposons maintenant les hypothèses du 2) du théorème 3 satisfaites et vérifions que la suite de matrices aléatoires indépendantes

$$g_n^\lambda = \begin{pmatrix} q_n-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad n \geqq 0$$

satisfait alors aux hypothèses du théorème 2. (Compte tenu de la remarque qui suit.)

Il est immédiat que les hypothèses 1) et 2) de ce théorème 2 sont satisfaites par la suite précédente. Par ailleurs (en adoptant les notations du théorème 2) μ_λ^3 admet une densité f_λ par rapport à la mesure de Haar de $SL(2, \mathbb{R})$. En désignant par $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $SL(2, \mathbb{R})$ l'expression de cette densité est [17]

$$f_\lambda(g) = \frac{1}{|d|} f\left(\frac{b-1}{d} - \lambda\right) f(-d-\lambda) f\left(\frac{1-b-ad}{bd} - \lambda\right) \quad (135)$$

la mesure de Haar étant

$$dg=\frac{1}{|b|}\,da\,db\,dd. \tag{136}$$

Soit k un entier, considérons

$$\delta_k(\lambda,\lambda_0)=\int l^k(g)\,|\,f_\lambda(g)-f_{\lambda_0}(g)\,|\,dg. \tag{137}$$

L'égalité

$$\begin{pmatrix} x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} xyz-x-z & -xy+1\\ yz-1 & -y\end{pmatrix}=g(x,y,z)$$

les relations (135) et (137) permettent d'obtenir par le changement de variable

$$x=\frac{b-1}{d},\qquad y=d,\qquad z=\frac{1-b-ad}{bd}$$

l'égalité

$$\begin{aligned}\delta_k(\lambda,\lambda_0)=\int l^k[g(x,y,z)]\,|\,&f(x-\lambda)\,f(y-\lambda)\,f(z-\lambda)\\ &-f(x-\lambda_0)\,f(y-\lambda_0)\,f(z-\lambda_0)\,|\,dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{138}$$

Comme d'autre part

$$l(g(x,y,z))\leqq(1+|x|)(1+|y|)(1+|z|)\leqq(1+\|(x,y,z)\|)^3$$

en notant $d\mathrm{L}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{H}(x,y,z)=f(x)\,f(y)\,f(z)\qquad \text{et}\qquad \Lambda=(\lambda,\lambda,\lambda) \tag{139}$$

on a

$$\delta_k(\lambda,\lambda_0)\leqq 2^{3k-1}\int(1+\|x\|^{3k})\,|\,\mathrm{H}(x-\Lambda)-\mathrm{H}(x-\Lambda_0)\,|\,d\mathrm{L}(x). \tag{140}$$

Notons que le second membre de l'inégalité précédente est bien défini car H est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^3$ qui comme f a des moments de tous ordres.

Soit B une boule ouverte bornée de $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{M}=\sup\limits_{\Lambda\in\mathrm{B}}\|\Lambda\|$.

Pour tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction φ_ε continue à support compact dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\int[1+2^{3k-1}(\|y\|^{3k}+\mathrm{M}^{3k})]\,|\,\varphi_\varepsilon(y)-\mathrm{H}(y)\,|\,dy<\varepsilon. \tag{141}$$

Il en résulte que

$$\sup_{\Lambda \in B} \int (1+(\|y\|^{3k}) \,|\, \varphi_\varepsilon(y-\Lambda) - H(y-\Lambda) \,|\, dy < \varepsilon \tag{142}$$

et donc que si $\Lambda=(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\Lambda_0=(\lambda_0, \lambda_0, \lambda_0)$ sont dans B

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) \leqq 2^{3k}\varepsilon + 2^{3k-1} \int_{\mathbb{R}^3} (1+\|x\|^{3k}) \,|\, \varphi_\varepsilon(x-\Lambda) - \varphi_\varepsilon(x-\Lambda_0) \,|\, dx. \tag{143}$$

De (143) on déduit que $\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup \delta_k(\lambda, \lambda_0) \leqq \varepsilon$ ce qui en raison de l'arbitraire de ε prouve que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \delta_k(\lambda, \lambda_0) = 0. \tag{144}$$

L'hypothèse 2) du théorème 2 est donc satisfaite par la famille de probabilités μ_λ^3 $\lambda \in \mathbb{R}$, et donc $\gamma(\lambda)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\tilde{\psi}_A$ est C^∞ sur $[-A/2, A/2]$, d'où θ_A est C^∞ sur $]-A/4, A/4[$ et donc également $N(\lambda)$ en raison de (134). La preuve du théorème 3 est ainsi achevée.

V.2.

Dans [17] Simon et Taylor établissent en utilisant un argument de Halperin, que si $\eta=(1/2)(\delta_a+\delta_b)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un choix de a et b tels que N ne peut être höldérienne d'ordre supérieur à ε sur le support $\{a, b\}+[-2, 2]$ de la probabilité dN [15] (il suffit que $|a-b| \to +\infty$). Le raisonnement utilisé plus haut montre alors facilement qu'il en est de même pour $\gamma(\lambda)$.

Notons enfin que si le support de η est compact et si η admet une densité dans $L^1(\mathbb{R})$ la fonction N ne peut être analytique sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle prend la valeur 1 (resp. 0) sur un intervalle ouvert I_1 (resp. I_0) du complémentaire de $[-2, 2]+\operatorname{supp}\eta$ [15]. de même d'après la proposition A (appendice) γ n'est pas analytique sur $\mathbb{R}$.

APPENDICE

On a la proposition

PROPOSITION A. — *Soit f une fonction de* $L^2(\mathbb{R})$ *telle que f soit analytique dans l'intervalle* $]a, b[$ *sa transformée de Hilbert*

$$H(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)\,dt}{x-t}$$

est alors analytique dans $]a, b[$.

Preuve de la proposition A. — Soit x_0 un point de $]a, b[$, en raison de l'analyticité de f il existe un intervalle $I_{x_0}=[x_0-\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_0] \subset]a, b[$ $\varepsilon_0>0$ tel que

$$\frac{1}{R_{x_0}}=\lim_{k\to+\infty} \sup\left(\sup_{x\in I_{x_0}} \frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}\right)^{1/k}<+\infty. \quad (1')$$

Pour $x\in\left[x_0-\frac{\varepsilon_0}{4}, x_0+\frac{\varepsilon_0}{4}\right]=J_{x_0}$ on a :

$$\pi H(f)(x)=\int_0^{\varepsilon_0/4}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}du + \int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{x-t}+\int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4}\frac{f(t)}{x-t}dt. \quad (2')$$

On en déduit que pour $x\in J_{x_0}$ $k\geqq 1$ on a

$$\pi[H(f)]^{(k)}(x)=\int_0^{\varepsilon_0/4}\frac{f^{(k)}(x+u)-f^{(k)}(x-u)}{u}du + \sum_{j=0}^{k}(j-1)!\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-j}\left\{f^{(k-j)}\left(x+\frac{\varepsilon_0}{4}\right)+f^{(k-j)}\left(x-\frac{\varepsilon_0}{4}\right)\right\} + (-1)^k k!\int_{x+\varepsilon_0/4}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{k+1}}+(-1)^k k!\int_{-\infty}^{x-\varepsilon_0/4}\frac{f(t)}{(x-t)^{k+1}}dt. \quad (3')$$

Il en résulte et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\pi \sup_{x\in J_{x_0}}\frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!}\leqq\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\sup_{z\in I_{x_0}}\frac{|f^{(k+1)}(z)|}{k!} + 2\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{C_k^j}\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-j}\sup_{z\in I_{x_0}}\frac{|f^{(k-j)}(z)|}{k-j!} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\times\frac{2}{\sqrt{2k+1}}\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-k-1/2}. \quad (4')$$

Nous en déduisons que

$$\lim_{k\to+\infty}\sup\left[\sup_{x\in J_{x_0}}\frac{[H(f)]^{(k)}(x)}{k!}\right]^{1/k} \leqq \frac{1}{R_{x_0}}+\frac{1}{R_{x_0}}\times\sup\left(1, \left[\frac{\varepsilon_0}{4R_{x_0}}\right]^{-1}\right) + \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{\rho_{x_0}}<+\infty. \quad (5')$$

Soit u tel que $|u| < \frac{\varepsilon_0}{4}$ d'après la formule de Taylor pour tout $n \geqq 1$ on a

$$\left| \mathrm{H}(f)(x_0+u) - \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k!} [\mathrm{H}(f)]^{(k)}(x_0) \right| \leqq \frac{|u|^n}{n!} \sup_{z \in \mathrm{J}_{x_0}} \left| [\mathrm{H}(f)]^{(n+1)}(z) \right|. \quad (6')$$

L'inégalité précédente et l'inégalité (5′) montrent que pour

$$0 \leqq |u| < \operatorname{Inf}(\varepsilon_0/4, \rho_{x_0})$$

on a

$$\mathrm{H}(f)(x_0+u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} [\mathrm{H}(f)]^{(k)}(x_0) \quad (7')$$

ce qui achève la preuve de la proposition A.

RÉFÉRENCES

[1] P. Bougerol et J. Lacroix, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger operators, Birkhaüser Progress in *Probability and Statistics*, vol. **8**, 1985.

[2] M. Campanino et A. Klein, A Supersymetric Matrix and Differentiability of the Density of States in the one Dimensional Anderson Model, *Commun. Math. Physics*, n° **104**, 1986, p. 227-241.

[3] R. Carmona, A. Klein et F. Martinelli, Anderson Localisation for Bernouilli and Other Singular Potentials, *Comm. Math. Physics*, n° **108**, 1987, p. 66.

[4] W. Craig et B. Simon, Log Hölder Continuity of the Integrated Density of States for Stochastic Jacobi Matrices, *Comm. Math. Physics*, n° **90**, 1983, p. 207-218.

[5] H. Furstenberg, Non Commuting Random Products, *T.A.M.S.*, n° **108**, 1963, p. 377-428.

[6] H. Furstenberg et Y. Kiefer, Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces, *Israël Journal of Math.*, vol. **46**, n° 1, 2, 1983, p. 12-32.

[7] L. Garding, Vecteurs analytiques dans les représentations des groupes de Lie, *Bulletin S.M.F.*, tome **88**, 1960, p. 73-93.

[8] Y. Guivarc'h et A. Raugi, Frontière de Fürstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence, *Z. Wahr.*, n° **69**, 1985, p. 187-242.

[9] H. Hennion, Loi des grands nombres et perturbations pour les produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes, *Z. Wahr.*, n° **67**, 1984, p. 265-278.

[10] E. Le Page, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **928**, 1982, p. 258-303.

[11] E. Le Page, Répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire. Distribution empirique des valeurs propres d'une matrice de Jacobi, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **1064**, 1983.

[12] P. March et A. S. Sznitman, Some Connections between Excursion Theory and the Discrete Schrödinger Equation with Random Potentials. *Probability theory and related fields*, vol. **75**, n° 1, 1987.

[13] U. NERI, Singular Integrals, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, n° **200**, 1971.
[14] O. CONNOR, Disordered Harmonic Chain, *Comm. Math. Physics*, n° **45**, 1975, p. 63-77.
[15] L. PASTUR, Spectral Properties of Disordered Systems in the One Body Approximation, *Comm. Math. Physics*, n° **75**, 1980, p. 179-196.
[16] D. RUELLE, Analyticity Properties of the Characteristic Exponents of Random Matrix Products, *Advances in Math.*, n° **32**, 1980, p. 68-80.
[17] B. SIMON et M. TAYLOR, Harmonic Analysis on SL(2, $\mathbb{R}$) and Smoothness of the Density of States in the One Dimensional Anderson Model, *Comm. Math. Physics*, n° **101**, 1985, p. 1-19.

(*Manuscrit reçu le* 11 *avril* 1988.)