ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. STRICKER

Variation conditionnelle des processus stochastiques

Annales de l'I. H. P., section B, tome 24, nº 2 (1988), p. 295-305
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1988__24_2_295_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 24, n° 2, 1988, p. 295-305. *Probabilités et Statistiques*

Variation conditionnelle des processus stochastiques

par

C. STRICKER

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et des Techniques,
16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex

RÉSUMÉ. — Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{0 \leqq t \leqq 1})$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. $(X_t)_{0 \leqq t \leqq 1}$ est un processus càdlàg adapté et intégrable. A toute subdivision $\tau = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1)$ on associe les sommes

$$V_\tau(X) = \sum_\tau |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]|, \qquad S_\tau(X) = \sum_i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]$$

et

$$Q_\tau(X) = \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2.$$

Dans un premier temps nous montrons la convergence des sommes $S_\tau(X)$ lorsque X est un processus de Dirichlet, puis nous étudions les processus X tels que l'enveloppe convexe de $\{V_\tau(X), \tau \text{ subdivision de } [0, 1]\}$ soit bornée dans L^0.

ABSTRACT. — We are given a filtered probability space $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ satisfying the usual conditions. Let (X_t) be a right continuous process. Let

Classification A.M.S. : 60 G 07.

$\tau=(0<t_0<\ldots<t_n=1)$ be a partition of [0, 1]. Let

$$V_\tau(X)=\sum_\tau |E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]|, \qquad S_\tau(X)=\sum_i E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]$$

and

$$Q_\tau(X)=\sum_i (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2.$$

We first prove the convergence of $S_\tau(X)$ when (X_t) is a Dirichlet process. Then we study processes such that the convex hull of the set $\{V_\tau(X)\}$ is bounded in L^0.

Key words : Semimartingale, Dirichlet process, quasimartingale.

INTRODUCTION

On considère un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles. Tous les processus considérés seront nuls en 0 et indexés par [0, 1]. Soit (X_t) un processus càdlàg adapté et intégrable (c'est-à-dire $X_t \in L^1$ pour tout $t \in [0, 1]$). A toute subdivision $\tau=(t_i)$ de [0, 1] associons les sommes :

$$V_\tau(X)=\sum_i |E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]| \tag{0}$$

$$S_\tau(X)=\sum_i E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \tag{1}$$

$$Q_\tau(X)=\sum_i (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2. \tag{2}$$

Rappelons que (X_t) est une quasimartingale si et seulement si $(V_\tau(X))$ est borné dans L^1 lorsque τ parcourt l'ensemble des subdivisions de [0, 1]. Si de plus (X_t) est de la classe D, il est bien connu que lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, $S_\tau(X)$ converge faiblement dans L^1 vers A_1, où A est le processus à variation finie dans la décomposition canonique $X=M+A$. Cette convergence est même forte lorsque A est régulier [1]. Dans un premier temps nous montrerons que cette convergence subsiste si X est un processus de Dirichlet tel que la famille $\sqrt{Q_\tau(X)}$ soit uniformément intégrable. Ensuite nous étudierons l'équivalence de la bornitude dans L^0 des sommes $V_\tau(X)$ et la propriété de semimartingale.

Ce travail a été réalisé durant mon séjour à Minneapolis. Je tiens à remercier IMA pour son aide et son hospitalité.

PROCESSUS DE DIRICHLET

Pour démontrer que la décomposition canonique d'une semimartingale gaussienne est gaussienne nous avions été amenés à étudier dans [7] la convergence des sommes (1) relatives à une semimartingale X vérifiant $E[X, X]_1 < +\infty$. Meyer [4] a généralisé nos résultats au cas où les sommes $\sqrt{Q_\tau(X)}$ sont uniformément intégrables. Dans ce paragraphe nous allons étendre ces résultats aux processus de Dirichlet. La définition suivante est essentiellement due à H. Föllmer.

Définition. — Soit (X_t) un processus continu à droite et adapté. On dit que X est un *processus de Dirichlet* si $X = Z + A$ où Z est une semimartingale et A un processus continu à variation quadratique nulle, c'est-à-dire tel que $Q_\tau(A)$ converge vers 0 dans L^0 lorsque le pas de la subdivision τ tend vers 0. Un processus de Dirichlet est appelé *spécial* si Z est une semimartingale spéciale.

Remarque. — Un processus de Dirichlet est spécial si et seulement si $X = M + A^d + A^c$ où M est une martingale locale, A^d un processus càdlàg à variation finie prévisible purement discontinu et A^c un processus continu à variation quadratique nulle. Cette décomposition qui est manifestement *unique*, est appelée *décomposition canonique* du processus de Dirichlet spécial X.

En adaptant la démonstration de Meyer à notre situation nous obtenons le

Théorème 1. — *Soit* X *un processus de Dirichlet tel que les sommes* $\sqrt{Q_\tau(X)}$, τ *parcourant l'ensemble des subdivisions dyadiques de* [0, 1], *soient uniformément intégrables. Alors* X *est spécial, de décomposition canonique* $X = M + A^d + A^c$. *Le processus* M *est une martingale appartenant à* $\mathscr{H}^1$, X_t *est intégrable pour tout* t *et les sommes* $S_\tau(X)$ *relatives aux subdivisions dyadiques convergent vers* $A_1^d + A_1^c$ *au sens faible dans* L^1. *Cette convergence est même forte si le processus* A^d *est nul.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $[X, X]^{1/2}$ est intégrable. Donc X est un processus de Dirichlet spécial. D'après [1] VII n° 95 $[A^d, A^d]_1^{1/2}$ et $[M, M]_1^{1/2}$ sont aussi intégrables, si bien que M est dans $\mathscr{H}^1$. Il est clair que X_t est intégrable pour tout t dyadique. Grâce à la continuité à droite de X et à l'intégrabilité uniforme des sommes $\sqrt{Q_\tau(X)}$, X_t est intégrable pour tout $t \in [0, 1]$. Donc $A_t = X_t - M_t$ l'est aussi. Soit H_1 une v. a. $\mathscr{F}_1$ mesurable, bornée par 1 en valeur absolue. Introduisons la martingale $H_t = E[H_1 \mid \mathscr{F}_t]$. Remarquons que $S_\tau(X) = S_\tau(A)$; nous avons

$$E[H_1 A_1] = E[H_1 \sum_i (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] = E[\sum_i H_{t_{i+1}} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})].$$

De même

$$E[H_1 S_\tau(A)] = E[\sum_i H_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})].$$

Ainsi tout revient à montrer que le long de la suite des subdivisions dyadiques $E[\sum_i (H_{t_{i+1}} - H_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]$ converge vers 0. Ces sommes convergent en probabilité vers $[H, A^d_1]$; or H est une martingale, A^d un processus à variation finie prévisible, donc d'après le lemme de Yoeurp ([1], VII 36) le processus $[H, A^d]$ est une martingale locale nulle en 0. D'autre part d'après une inégalité du type de Fefferman ([1], VII, 93)

$$E\left[\int_0^1 |d[H, A^d]_s|\right] \leqq C \|H\|_{BMO} E[[A^d, A^d]_1^{1/2}].$$

Donc la martingale locale $[H, A^d]$ est en fait à variation intégrable et on a $E[[H, A^d]_1] = 0$. Il nous reste à montrer l'intégrabilité uniforme des sommes

$$\sum_i (H_{t_{i+1}} - H_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$

Nous sommes partis de l'hypothèse de l'intégrabilité uniforme des sommes $\sqrt{Q_\tau(X)}$; les sommes $\sqrt{Q_\tau(M)}$ sont uniformément intégrables, parce que M appartient à $\mathscr{H}^1$: en effet, on a $M^* \in L^1$, donc il existe une fonction de Young modérée G (*cf.* P. A. Meyer, *Sém. Prob. XII*, LN 649, p. 770) telle que $E[G(M^*)] < \infty$, et il existe une constante universelle c_G telle que

$$E[G([M, M]_1^{1/2})] \leqq c_G E[G(M^*)].$$

Mais en appliquant cela aux martingales discrétisées de M sur les subdivisions dyadiques, on a aussi

$$E[G(Q_\tau(M)^{1/2})] \leqq c_G E[G(M^*)]$$

et il suffit d'appliquer le lemme de La Vallée Poussin. Comme $\sqrt{Q_\tau(A)} \leqq \sqrt{Q_\tau(X)} + \sqrt{Q_\tau(M)}$, les v. a. à gauche sont aussi uniformément intégrables.

Appliquant le lemme de La Vallée Poussin dans le sens non évident, nous choisissons une fonction de Young modérée (encore notée G par économie) telle que $E[G(Q_\tau(A)^{1/2})]$ soit borné. Puis nous appliquons la remarque de Yor (combinaison de Fefferman et Garsia-Neveu) suivant laquelle l'inégalité de Fefferman, ou sa conséquence l'inégalité [1] VII. (93.3), a lieu avec une fonction modérée sous la forme

$$E[G(\sum_i |H_{t_{i+1}} - H_{t_i}|\,|A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|)] \leqq c_G \|H\|_{BMO} E[G(Q_\tau(A)^{1/2})].$$

On conclut alors à nouveau par le lemme de La Vallée Poussin. Lorsque $A^d = 0$, $\sqrt{Q_\tau(A)}$ converge vers 0 en probabilité et même dans L^1 en vertu de l'intégrabilité uniforme des sommes $\sqrt{Q_\tau(A)}$. En prenant $G(x) = x$ dans l'inégalité de Fefferman ci-dessus, on voit que $E[\sum_i |H_{t_{i+1}} - H_{t_i}|\,|A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|]$ converge vers 0 uniformément en H_1. Donc la convergence des sommes $S_\tau(X)$ a lieu dans L^1.

Comme dans le cas des semimartingales gaussiennes ([9], théorème 1) nous obtenons

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathscr{H}$ *un espace gaussien et* X *un processus de Dirichlet tel que* $\forall (s, t) \in [0, 1]^2$, $E[X_t \mid \mathscr{F}_s]$ *appartienne à* $\mathscr{H}$. *Alors* X *est spécial; de plus* M_t, A_t^d *et* A_t^c *sont aussi dans* $\mathscr{H}$ *pour tout* $t \in [0, 1]$. *Enfin il existe un ensemble dénombrable* $D \subset [0, 1]$ *tel que* (M_t) *et* (A_t^d) *soient continus sur* D^c.

Démonstration. — Comme X est un processus de Dirichlet, les sommes $Q_\tau(X)$ sont bornées dans L^0. Tout ensemble de v. a. gaussiennes borné dans L^0 étant borné dans L^p on peut en déduire (*voir* [6] 4.1.) que les sommes $Q_\tau(X)$ sont bornées dans L^1. Quitte à remplacer L^1 par L^2 et l'inégalité de Fefferman par l'inégalité de Kunita Watanabe la démonstration du théorème 1 montre que les sommes $S_\tau(X)$ convergent faiblement dans L^2. Or $S_\tau(X)$ est dans $\mathscr{H}$. Donc la limite faible A_1 est aussi dans $\mathscr{H}$ et par changement d'échelle de temps il en est de même pour A_t. Par différence M_t appartient à $\mathscr{H}$. Soit D l'ensemble dénombrable des t tels que $P[X_t \neq X_{t-}] > 0$. Alors X est continu en dehors de D. Grâce à la continuité de A^c on peut définir « l'intégrale stochastique »

$$X'_t = (1_D . X)_t = \sum_{s \leqq t} \Delta X_s 1_{\{s \in D\}} = (1_D . (M + A^d))_t.$$

Notons que X' et $X'' = X - X'$ sont des processus càdlàg gaussiens. X' est continu hors de $D \times \Omega$ (à un ensemble évanescent près) tandis que X'' est un processus gaussien càdlàg sans discontinuités fixes. D'après un théorème d'Ito et Nisio, il est continu. En fait, la démonstration étant très simple dans ce cas, nous allons la donner rapidement. Tout revient à montrer que pour tout $a > 0$ $P[\sup_i |X''_{t_{i+1}} - X''_{t_i}| > a]$ converge vers 0 pour une suite de subdivisions $\tau_n = (t_i)$ dont le pas tend vers 0. Soit $\sigma_i^2 = E[(X''_{t_{i+1}} - X''_{t_i})^2]$. Nous majorons grossièrement la probabilité ci-dessus par $\sum_i P[|X''_{t_{i+1}} - X''_{t_i}| > a]$. L'absence de discontinuités fixes entraîne que $\sup_i \sigma_i$ converge vers 0 tandis que $\sum_i \sigma_i^2$ reste borné car les sommes $Q_\tau(X)$ sont bornées dans L^1. Il ne reste plus qu'à noter que pour σ_i petit

$$P[|X''_{t_{i+1}} - X''_{t_i}| > a] \leqq C e^{-a^2/\sigma_i^2} \leqq C' \sigma_i^3$$

pour obtenir le résultat désiré. Enfin $A_t^d = \sum_{s \leqq t} \Delta(X - M)_s 1_{\{s \in D\}}$ appartient aussi à $\mathscr{H}$, ce qui achève la démonstration du corollaire.

Remarques. — (i) Si X est un processus de Dirichlet et si Q est une loi absolument continue par rapport à P, alors X est aussi un processus de Dirichlet sous Q : c'est une application immédiate du théorème de Girsanov.

(ii) En revanche nous ignorons si un processus de Dirichlet reste un processus de Dirichlet dans sa filtration naturelle.

PREQUASIMARTINGALES

Dans [6] Song a introduit et étudié la notion de préquasimartingale qui s'est révélée très fructueuse pour l'étude des semimartingales à valeurs dans de bons espaces, par exemple gaussiens. Notre définition de préquasimartingale sera légèrement plus restrictive que celle de Song mais tous les exemples de préquasimartingales considérés dans [6] vérifient aussi notre définition.

DÉFINITION 2. — Soit (X_t) un processus càdlàg, adapté et intégrable. On dit que (X_t) est une préquasimartingale si l'enveloppe convexe de $\Sigma_X = \{V_\tau(X), \tau$ subdivision de $[0, 1]\}$ est bornée dans L^0.

Remarques. — (i) Il est facile de construire un exemple de semimartingale sur $[0, 1]$ telle que $(X_t) \in L^1$ pour tout t mais qui n'est pas une préquasimartingale (*voir* [6]). Bien entendu toute quasimartingale est une préquasimartingale.

(ii) De même, contrairement à la conjecture de [6], il existe des préquasimartingales qui ne sont pas des semimartingales. Voici un exemple. Soit (X_n) une suite de v. a. indépendantes telles que

$$P\left[X_n = \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad P\left[X_n = (-1)^{n+1}\left(n - \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^2}.$$

Ces v. a. sont centrées et d'après le lemme de Borel Cantelli, $X_n = (-1)^n/n$ pour n assez grand, si bien que la série $\sum_n X_n$ converge p. s. Posons $Y_t = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $t \in [1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)[$ et $Y_1 = 1$. Alors (Y_t) est càdlàg sur $[0, 1]$ et $Y_0 = 0$. Si $(\mathscr{F}_t)$ désigne la filtration naturelle de Y_t et si $\tau = (t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1)$ est une subdivision de $[0, 1]$, on a $V_\tau(Y) = |1 - Y_{t_{n-1}}|$. Comme (Y_t) est càdlàg sur $[0, 1]$, il en résulte que (Y_t) est une préquasimartingale. Mais (Y_t) n'est pas une semimartingale car le processus prévisible borné $H = \sum_n (-1)^n 1_{]1-1/n,\, 1-1/(n+1)]}$ n'est pas intégrable par rapport à (Y_t).

(iii) Dans sa définition des préquasimartingales Song exigeait seulement que Σ_X soit borné dans L^0 mais cette propriété n'est pas très maniable dans l'étude de l'équivalence entre les préquasimartingales et les semimartingales. Notons qu'une application immédiate du théorème de Nikichine (*voir* [10] pour une démonstration simple) fournit la

PROPOSITION 1. — *Soit* (X_t) *un processus càdlàg, adapté et intégrable. Alors* (X_t) *est une préquasimartingale si et seulement s'il existe une v. a.* N *strictement positive et bornée telle que* $\sup_\tau E[NV_\tau(X)] < +\infty$.

Nous allons montrer que dans la classe suivante de processus (X_t), les notions de semimartingale et de préquasimartingale sont équivalentes.

$$\left.\begin{array}{l}(X_t) \text{ est intégrable et si } T_n = \inf\{t, |X_t| \geqq n\}, \text{ on a :} \\ \sup\limits_{\tau} \sum\limits_{\tau} E[|X_{t_{i+1}}| 1_{\{t_{i+1} \geqq T_n > t_i\}}] < +\infty \text{ pour tout } n.\end{array}\right\} \quad (3)$$

Notons que cette condition est vérifiée si (X_t) est *borné dans* L^1, c'est-à-dire $K = \sup\limits_{T} E[|X_T|] < +\infty$, T parcourant l'ensemble des temps d'arrêt bornés par 1. En effet si S est le temps d'arrêt défini par $S = t_{i+1}$ sur $\{t_{i+1} \geqq T_n > t_i\}$ et $S = 1$ sur $T_n = 1$ ou $T_n = 0$, on a $\sum\limits_{\tau} |X_{t_{i+1}}| 1_{\{t_{i+1} \geqq T_n > t_i\}} \leqq |X_S|$ si bien que

$$\sup_{\tau} \sum_{\tau} E[|X_{t_{i+1}}| 1_{\{t_{i+1} \geqq T_n > t_i\}}] \leqq \sup_{T} E[|X_T|] = K.$$

De même si $K' = \sup\limits_{\tau} E[\sqrt{\sum\limits_{\tau} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2}] < +\infty$, alors (X_t) vérifie (3). En effet sur $\{t_{i+1} \geqq T_n > t_i\}$ on a $|X_{t_{i+1}}| \leqq \sqrt{\sum\limits_{\tau} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2} + n$. En intégrant cette inégalité on obtient immédiatement (3).

Ainsi notre condition (3) est bien une généralisation de celles données par Song. Faisons une dernière remarque avant d'établir le résultat principal de ce paragraphe. Soit T un temps d'arrêt. Alors la condition (3) entraîne que

$$\sup_{\tau} \sum_{\tau} E[|X_{t_{i+1}}| 1_{\{t_{i+1} \geqq T \wedge T_n > t_i\}}] < +\infty$$

pour tout n car si $T_n > t_{i+1} \geqq T > t_i$, on a $|X_{t_{i+1}}| \leqq n$.

Théorème 2. — *Soit* (X_t) *un processus càdlàg adapté vérifiant* (3). *Alors* (X_t) *est une semimartingale si et seulement si* (X_t) *est une préquasimartingale. Dans ce cas* (X_t) *est même une semimartingale spéciale.*

Démonstration. — Soit X une semimartingale vérifiant la condition (3). Grâce au lemme de Fatou, on a $E[|X_{T_n}|] < +\infty$, si bien que X est une semimartingale spéciale; donc il existe une suite croissante de temps d'arrêt (R_n) tendant stationnairement vers 1, telle que X^{R_n} soit une quasimartingale et que $|X| 1_{[0, R_n[} \leqq n$. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons n tel que $P[R_n < 1] < \varepsilon/2$. Soit (τ_i) une suite de subdivision de [0, 1] et $c_0, c_1, \ldots, c_n$ des nombres réels positifs tels que $\sum_{j=0}^{n} c_j = 1$. Alors

$$P\left[\sum_{j=0}^{n} c_j V_{\tau_j}(X) > \lambda\right] \leqq P[R_n < 1] + P\left[\sum_{i=0}^{n} c_j V_{\tau_j}(X) > \lambda,\ R_n = 1\right]$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + P\left[\sum_{j=0}^{n} c_j \sum_{\tau_j} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}]\right| 1_{\{R_n > t_i\}} > \lambda\right].$$

Or

$$\sum_{\tau} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \right| 1_{\{R_n > t_i\}}$$

$$\leqq V_\tau(X^{R_n}) + \sum_{\tau} E[\left| X_{t_{i+1}} - X_{R_n} \right| 1_{\{t_{i+1} \geqq R_n > t_i\}} \mid \mathscr{F}_{t_i}].$$

Comme X_{R_n} est intégrable et que X^{R_n} est une quasimartingale, la condition (3) entraîne que $K = \sup_{\tau} E[\sum_{\tau} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \right| 1_{\{R_n > t_i\}}] < +\infty$. Il suffit alors de choisir $\lambda = 2K/\varepsilon$ pour obtenir la majoration $P[\sum_j c_j V_{\tau_j}(X) > \lambda] \leqq \varepsilon$. Ainsi l'enveloppe convexe de la famille de v. a. $V_\tau(X)$ est bornée dans L^0, si bien que (X_t) est une préquasimartingale. Réciproquement, supposons que (X_t) est une préquasimartingale vérifiant (3). Il existe une v. a. bornée $N > 0$ telle que $M = \sup_{\tau} E[NV_\tau(X)] < +\infty$. Posons $N_t = E[N \mid \mathscr{F}_t]$ et $R_n = \inf\{t,\ N_t \leqq 1/n \text{ ou } |X_t| \geqq n\}$. Montrons que X^{R_n} est une quasimartingale. En effet :

$$V_\tau(X^{R_n}) \leqq \sum_{\tau} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \right| 1_{\{t_i < R_n\}}$$

$$+ E[\left| X_{t_{i+1}} - X_{R_n} \right| 1_{\{t_{i+1} \geqq R_n > t_i\}} \mid \mathscr{F}_{t_i}].$$

Or :

$$M = \sup_{\tau} E[NV_\tau(X)] \geqq E[\sum_{\tau} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \right| N_{t_i} 1_{\{t_i < R_n\}}].$$

Mais $N_{t_i} \geqq 1/n$ sur $\{t_i < R_n\}$ si bien que

$$E[\sum_{\tau} \left| E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathscr{F}_{t_i}] \right| 1_{\{t_i < R_n\}}] \leqq nM.$$

Comme X_{R_n} est intégrable et que X vérifie (3), il en résulte que $\sup_{\tau} E[V_\tau(X^{R_n})] < +\infty$ et que X^{R_n} est une quasimartingale pour tout *n*. Donc X est une semimartingale sur [0, 1].

Remarque. Comme nous l'avions signalé plus haut, il existe des semimartingales qui ne sont pas des préquasimartingales. Mais l'exemple donné dans [6] nous dit un peu plus car le processus (X_t) est une préquasimartingale par rapport à la filtration constante $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, s \leqq 1)$ mais ne l'est plus par rapport à sa filtration naturelle! Toutefois ce phénomène ne se produit pas si la préquasimartingale vérifie la condition (3). En effet il y a équivalence dans ce cas entre la notion de semimartingale et de préquasimartingale. Or il est bien connu qu'une semimartingale reste une semimartingale par rapport à toute sous-filtration à laquelle elle est adaptée.

Récemment divers auteurs ([2], [3], [5] et [8]) se sont intéressés à la classe des processus (X_t) càdlàg, adaptés, intégrables et vérifiant la condition :

il existe une v. a. p. s. finie K telle que pour tout t et tout h,

$$|E[X_{t+h} - X_t | \mathscr{F}_t]| \leqq K h. \tag{4}$$

Il est évident qu'un tel processus est une préquasimartingale. Lorsque K est intégrable (resp. X est de classe D), nous avions montré dans [8] que $X_t = M_t + \int_0^t Z_s\, ds$ où (M_t) est une martingale (resp. locale) et (Z_s) un processus prévisible vérifiant

$$\int_0^t E[|Z_s|]\, ds < +\infty \left(\text{resp. } \int_0^1 |Z_s|\, ds < +\infty\right).$$

Compte tenu du théorème 2, si X vérifie (3) et (4), alors X est une semimartingale spéciale de décomposition canonique $X = M + A$. Toutefois nous ignorons si le processus à variation finie prévisible est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

RÉFÉRENCES

[1] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *Probabilités et potentiel. Théorie des martingales*, Hermann, 1980.

[2] S. ETHIER et T. KURTZ, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, Wiley, 1986.

[3] A. Lindquist et G. Picci, Forward and Backward Semimartingale Models for Gaussian Processes with Stationary Increments. *Stochastics*, vol. 15, 1985, p. 1-50.

[4] P. A. Meyer, Un résultat d'approximation, *Séminaire de Probabilités XVIII; Lecture Notes in Math.*, n° 1059, Springer, 1984, p. 268-270.

[5] P. Protter, *Reversing Gaussian Semimartingales Without Gauss* (à paraître).

[6] S. Song, Quelques conditions suffisantes pour qu'une semimartingale soit une quasi-martingale, *Stochastics*, vol. 16, 1986, p. 97-109.

[7] C. Stricker, Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. Filtering and Control of Random Processes, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 61, Springer, 1984, p. 260-276.

[8] C. Stricker, Absolute Continuity of a Semimartingale with Respect to a Continuous Increasing and Adapted Process, in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 96, Springer, 1987, p. 373-380.

[9] C. Stricker, Semimartingales gaussiennes – application au problème de l'innovation, *Z.W.*, vol. 64, Springer, 1983, p. 303-312.

[10] J. A. Yan, Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1, *Séminaire de Probabilités XIV; Lecture Notes in Math.*, n° 784, Springer, 1980, p. 220-222.

(*Manuscrit reçu le* 15 *décembre* 1986)
(*corrigé le* 30 *janvier* 1987.)